

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Analiza wielu zagadnień naukowych i technicznych, bazująca na zasadach zachowania, prowadzi do równań w których funkcja jednej zmiennej niezależnej występuje pod znakiem pochodnej zwyczajnej.

Równanie takie nazywane jest **równaniem różniczkowym zwyczajnym**.

Problem:

- Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne, a celem postępowania jest znalezienie funkcji która je spełnia. Wyznaczenie poszukiwanej funkcji polega na scałkowaniu równania różniczkowego.
- Niestety bardzo często niemożliwe jest znalezienie rozwiązania dokładnego. W takiej sytuacji musimy zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym (numerycznym).
- W inżynierii wodnej występują liczne przypadki przepływu wody opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

Przykłady równań różniczkowych zwyczajnych

1) Nieustalony wypływ ze zbiornika

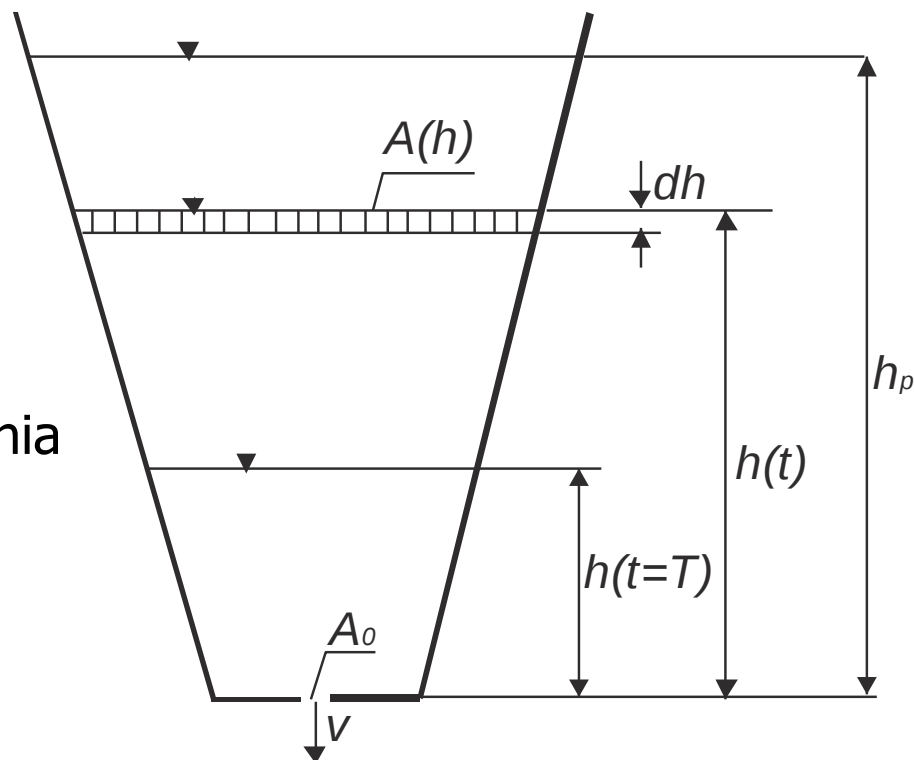
Zadanie:

Początkowe napełnienie zbiornika wynosi h_p . Określić położenie zwierciadła wody po czasie T .

- Równanie opisujące zmianę położenia zwierciadła wody w zbiorniku:

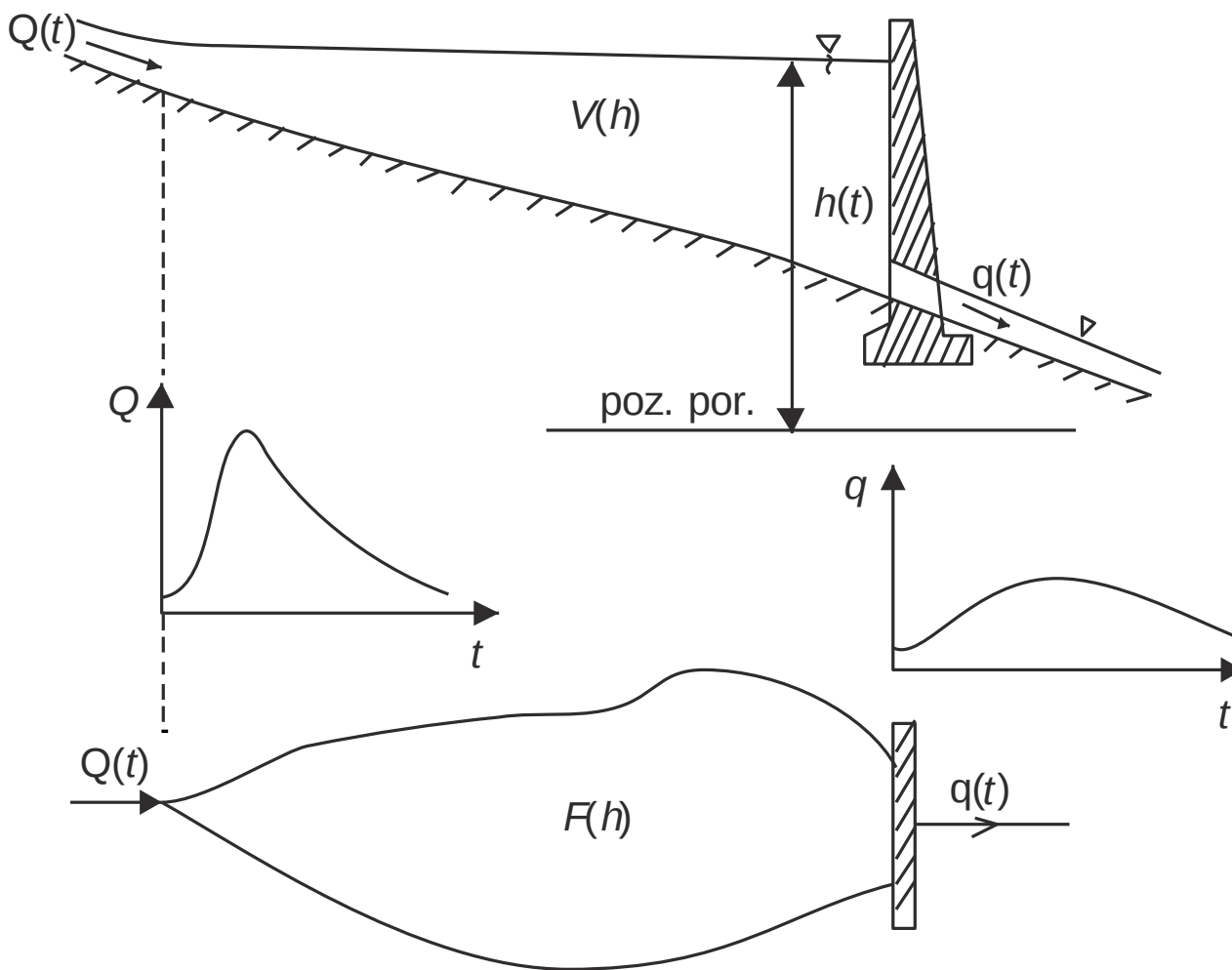
$$\frac{dh}{dt} = -\mu\sqrt{2g} \cdot A_0 \frac{h^{1/2}}{A(h)}$$

$A(h)$ - powierzchnia zbiornika zmienia się z jego napełnieniem



Rys. Schemat zbiornika

2) Przejście fali przez zbiornik retencyjny



Rys. Schemat zbiornika retencyjnego

Równanie retencji:

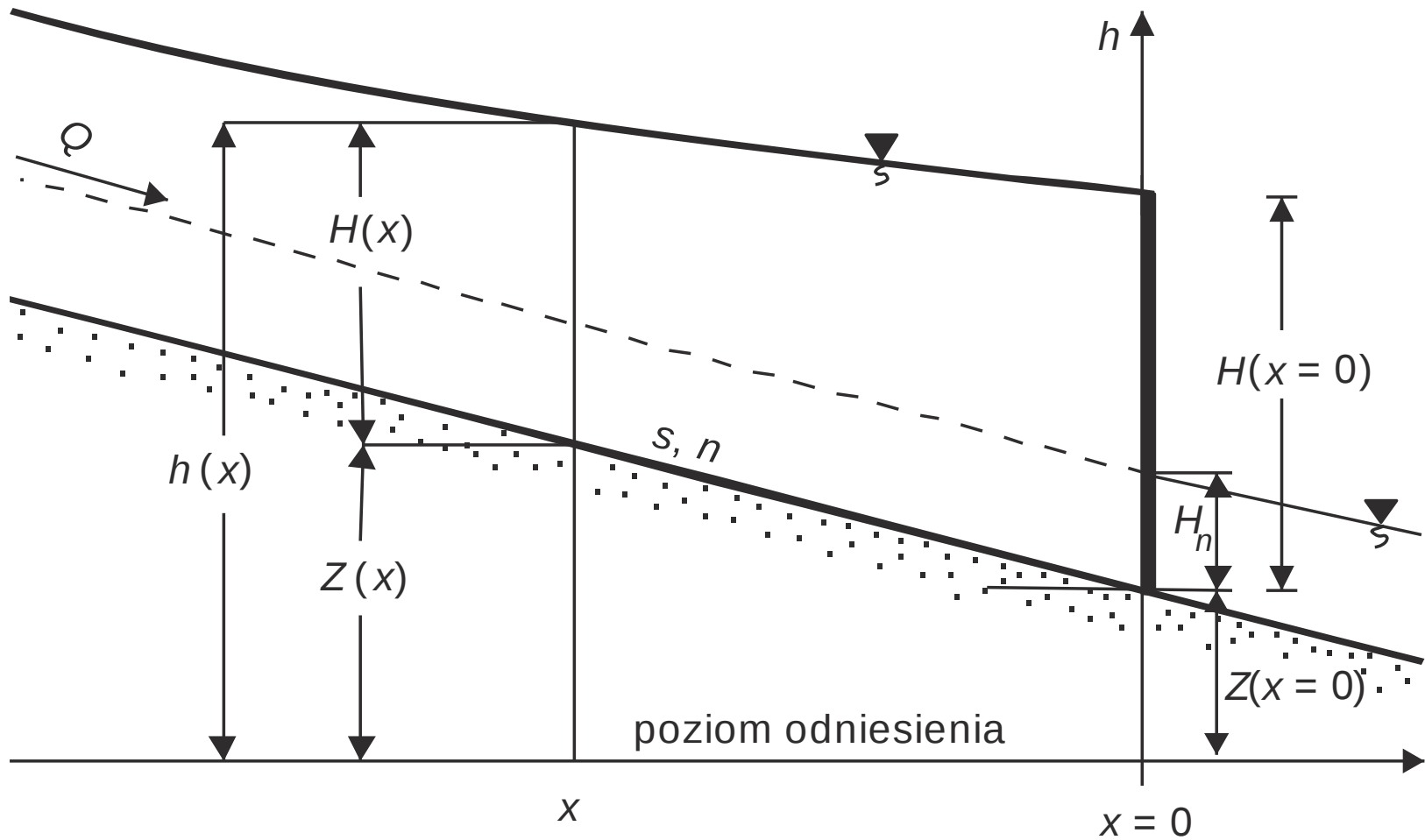
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{F(h)} (Q(t) - q(t))$$

gdzie: h – rzędna zwierciadła wody w zbiorniku,
 F – pole powierzchni zbiornika na poziomie zw. wody,
 $Q(t)$ – dopływ do zbiornika,
 $q(t)$ – odpływ ze zbiornika.

Rozwiązanie równania:

Funkcja $h(t)$ spełniająca warunek $h(t=0) = h_0$

3) Równanie przepływu ustalonego niejednostajnego



Rys. Krzywa spiętrzenia wywołana budowlą piętrzącą

Równanie opisuje przepływ ustalony niejednostajny:

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = -S$$

lub

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = -\frac{n^2 \cdot Q^2}{R^{4/3} \cdot A^2}$$

gdzie: $h(x)$ – rzędna zwierciadła wody powyżej poziomu porównawczego,

$Z(x)$ – wzniesienie dna powyżej poziomu porównawczego,

$H(x)$ – głębokość,

s – spadek dna ($s = -dZ/dx$),

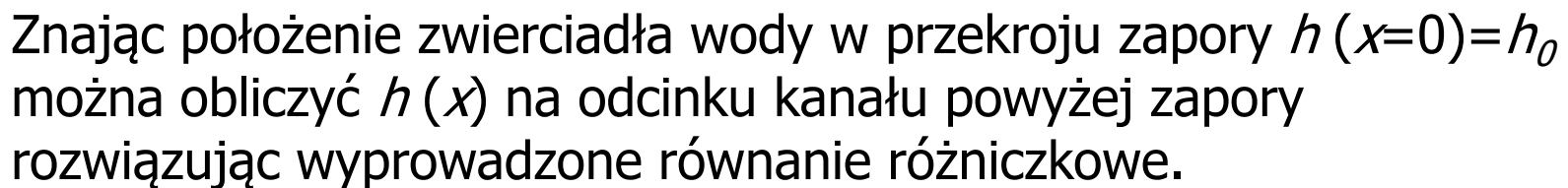
g – przyspieszenie grawitacyjne,

S – spadek linii energii wg wzoru Manninga: $S = \frac{n^2 \cdot Q^2}{R^{4/3} \cdot A^2}$

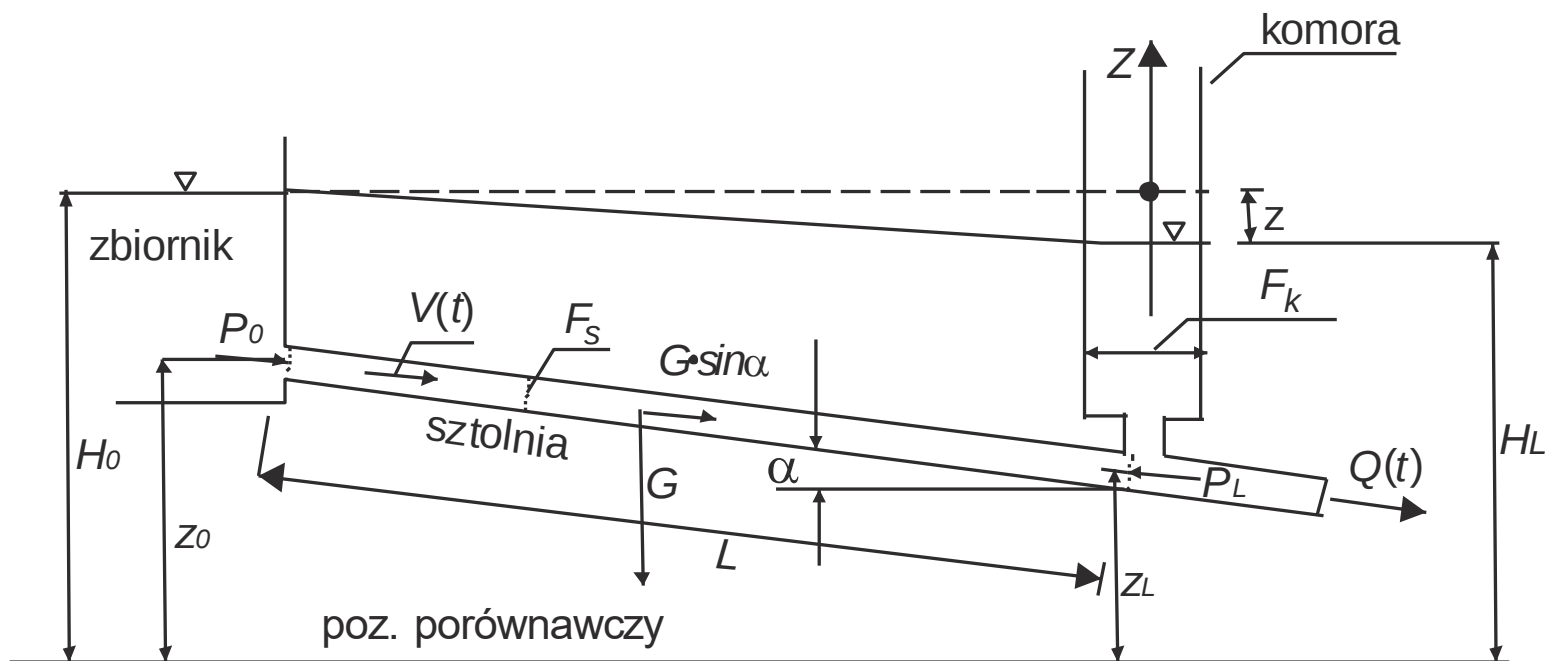
Q – natężenie przepływu,

R – promień hydrauliczny,

n – współczynnik szorstkości wg Manninga:



4) Układ równań przepływu nieustalonego w sztolni i w komorze wyrównawczej



Rys. Schemat układu zbiornik – sztolnia - komora wyrównawcza

Układ równań przepływu nieustalonego (komora–sztolnia)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left(-z - \frac{n^2 \cdot L \cdot V^2}{R^{4/3}} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{F_k} (F_s \cdot V - Q(t))$$

Znając $V(t=0)$ i $z(t=0)$ oraz przyjmując dowolną funkcję $Q(t)$ układ całkujemy dla $t > 0$.

Układy równań różniczkowych zwyczajnych występujące w trakcie rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych

1) Rozwiązanie liniowego równania dyfuzji metodą linii

Równanie dyfuzji ciepła ze stałym współczynnikiem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

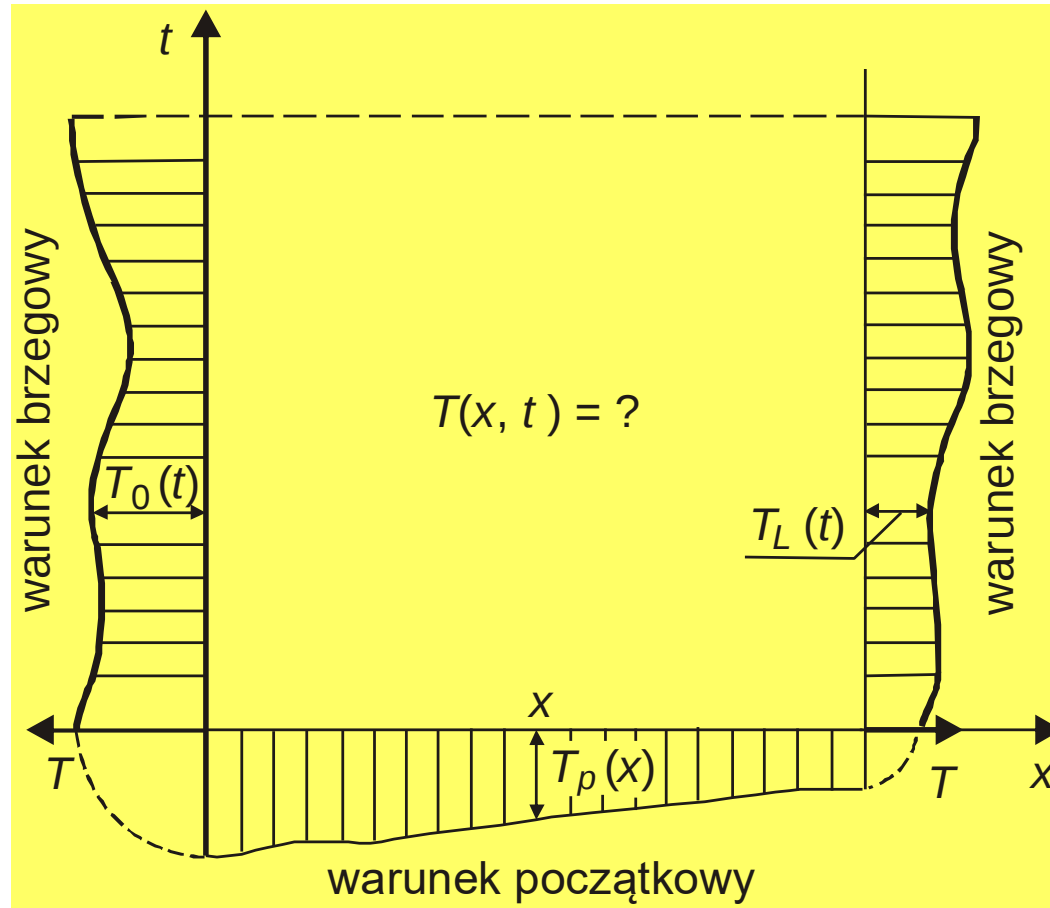
gdzie: T – funkcja spełniająca równanie

D – współczynnik dyfuzji

x – położenie

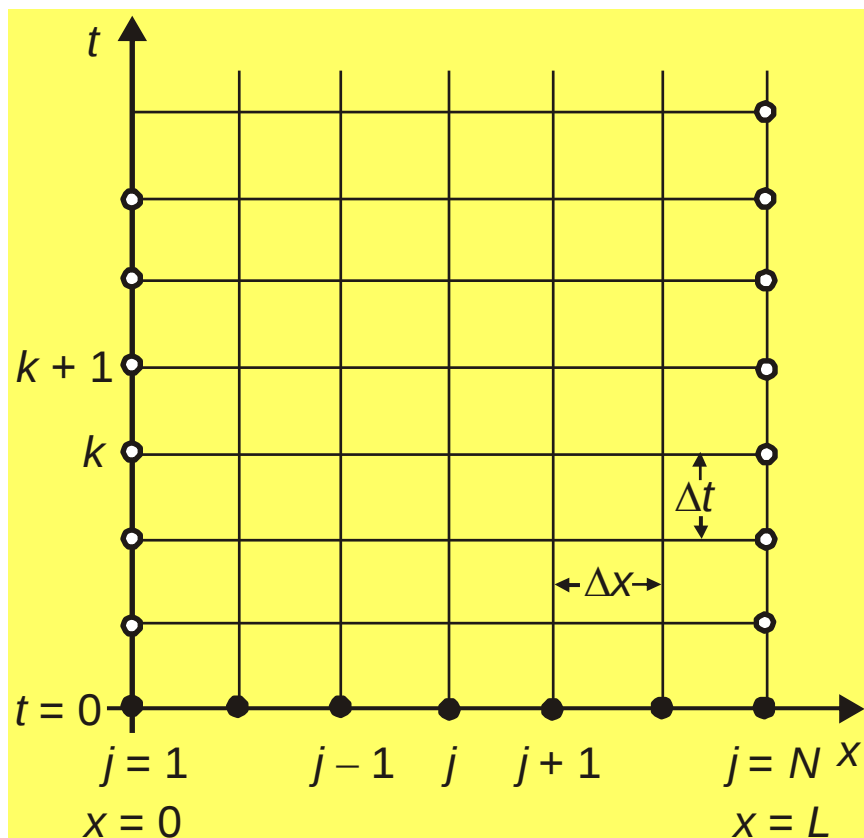
t – czas

Obszar rozwiązania: $0 \leq x \leq L, t \geq 0$



- warunek początkowy: $T(x, t=0) = T_p(x)$ dla $0 \leq x \leq L$
- warunki brzegowe: $T(x=0, t) = T_0(t)$ dla $t \geq 0$
 $T(x=L, t) = T_L(t)$ dla $t \geq 0$

Dyskretyzacja obszaru rozwiązania



—●—●— wartości znane z warunku początkowego

—○—○— wartości znane z warunku brzegowego

Ciągły obszar zastępujemy obszarem dyskretnym, złożonym z punktów przecięcia się linii poziomych, poprowadzonych równolegle do osi x z odstępem Δt oraz linii pionowych, poprowadzonych równolegle do osi t z odstępem Δx

Rozwiązania poszukujemy w węzłach powstałej siatki prostokątnej

Aproksymacja różnicowa pochodnej II rzędu względem x w przekroju j :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_j = \frac{T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}}{\Delta x^2}$$

Po podstawieniu do równania różniczkowego otrzymujemy:

$$\frac{dT_j}{dt} = D \frac{T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}}{\Delta x^2}$$

Równania takie zapisujemy dla każdego przekroju wewnętrznego tj. dla $j = 2, 3, \dots, N-1$ co prowadzi do układu o wymiarze $(N-2) \times (N-2)$ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu

Wynikowy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$$

gdzie:

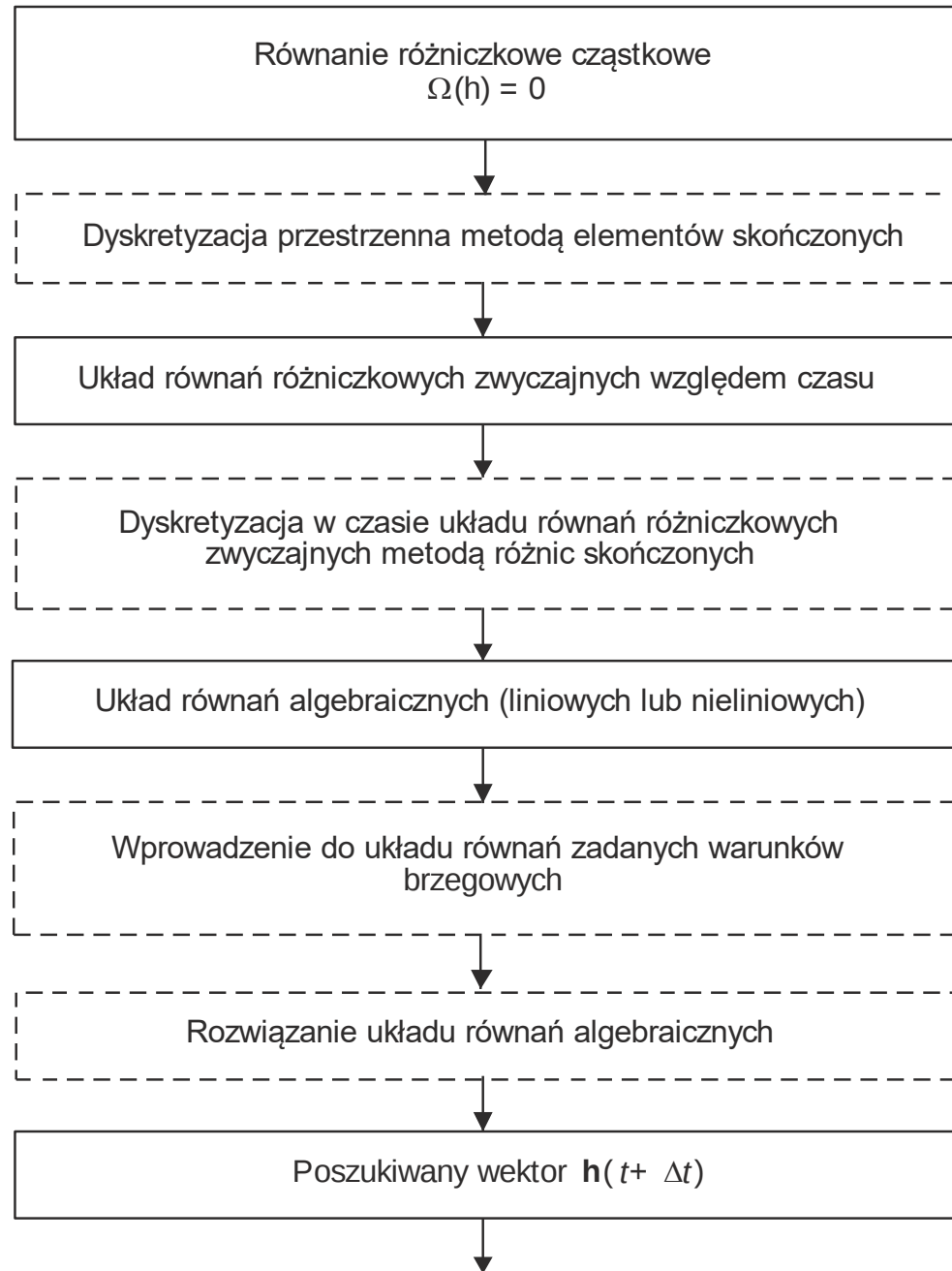
T – wektor węzłowych wartości
funkcji T zależnych od czasu

S – macierz współczynników
(trójdzielna, stała)

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|} \hline T_1 \\ \hline T_2 \\ \hline T_3 \\ \hline \\ \hline T_{j-1} \\ \hline T_j \\ \hline T_{j+1} \\ \hline \\ \hline \\ \hline T_{N-2} \\ \hline T_{N-1} \\ \hline T_N \\ \hline \end{array} \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline dT_2 / dt \\ \hline dT_3 / dt \\ \hline \\ \hline dT_{j-1} / dt \\ \hline dT_j / dt \\ \hline dT_{j+1} / dt \\ \hline \\ \hline \\ \hline dT_{N-2} / dt \\ \hline dT_{N-1} / dt \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

[illegible]

2) Rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego MES



Informacje ogólne o rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych

Przyjmijmy, że dane jest równanie

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu funkcji $y(x)$, która w przedziale $\langle a, b \rangle$ spełni je. Jednak od funkcji $y(x)$ wymaga się, aby spełniała ona pewne dodatkowe warunki.

W zagadnieniach technicznych przedmiotem poszukiwania jest zawsze jedna funkcja spełniająca równanie różniczkowe.

Tymczasem wiadomo, że ogólne rozwiązanie równania różniczkowego ma postać:

$$y(x) = \int f \cdot dx + C$$

Istnieje więc nieskończenie wiele rozwiązań różniących się stałą C .

Chcąc otrzymać jedno konkretne rozwiązanie, na funkcję y nakłada się, oprócz warunku spełnienia równania różniczkowego, dodatkowe warunki.

Istnieją dwa sposoby formułowania problemu rozwiązania różniące się dodatkowymi warunkami nakładanymi na $y(x)$.

Zagadnienie początkowe

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = f(x, y).$$

Należy znaleźć funkcję $y(x)$, która w przedziale $\langle a, b \rangle$ spełni powyższe równanie, a na początku przedziału przyjmie zadaną wartość

$$y(a) = y_a.$$

Zatem spośród nieskończonej liczby rozwiązań równania, którymi są krzywe różniące się stałą całkowania C , wybieramy tylko tę, która przechodzi przez punkt początkowy o współrzędnych (a, y_a) .

Tak sformułowane zadanie nazywa się ***zagadnieniem początkowym dla równania różniczkowego zwyczajnego***.

Zagadnienie początkowe formułuje się także dla równań różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów. Na przykład dla równania drugiego rzędu

$$y'' = f(x, y, y')$$

brzmi ono następująco:

należy znaleźć funkcję $y(x)$, która w przedziale $\langle a, b \rangle$ spełni powyższe równanie, a na początku przedziału zarówno funkcja, jak i jej pierwsza pochodna, przyjmie zadane wartości

$$y(a) = y_a \text{ oraz } y'(a) = y'_a$$

Ogólnie:

w zagadnieniu początkowym dla równania różniczkowego zwyczajnego n -tego rzędu należy zadać n warunków, tzn. na funkcję i jej pochodne do $n - 1$ rzędu włącznie.

Zagadnienie brzegowe

Drugi sposób formułowania problemu rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych dotyczy równań wyższych rzędów lub układów równań.

Na przykład dla równania II rzędu brzmi on następująco:

naależy znaleźć funkcję $y(x)$, która w przedziale $\langle a, b \rangle$ spełni wymienione równanie różniczkowe, a na jego końcach przyjmie zadane wartości:

$$y(a) = y_a \quad \text{oraz} \quad y(b) = y_b.$$

Zatem rozwiązanie $y(x)$ musi przejść przez punkty o współrzędnych (a, y_a) oraz (b, y_b) .

Tak sformułowane zagadnienie nosi nazwę ***zagadnienia brzegowego dla równania różniczkowego zwyczajnego***.

- Znalezienie funkcji spełniającej równanie oraz narzucone warunki na obu brzegach przedziału $\langle a, b \rangle$ może być niemożliwe.
- W inżynierii wodnej równania różniczkowe zwyczajne występują w opisie wielu przypadków przepływu wody, przy czym formułowane są dla nich zarówno zagadnienia początkowe, jak i brzegowe.
- Problem początkowy dla układu równań różniczkowych zwyczajnych występuje w trakcie rozwiązywania różniczkowych równań cząstkowych typu hiperbolicznego i parabolicznego metodą elementów skończonych.

Numeryczne rozwiązywanie zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych

W zagadnieniu początkowym dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

chodzi o obliczenie dla x w pewnym przedziale $x_0 \leq x \leq b$ takiego rozwiązania $y(x)$, które przyjmie w punkcie $x = x_0$ zadaną wartość początkową y_0 .

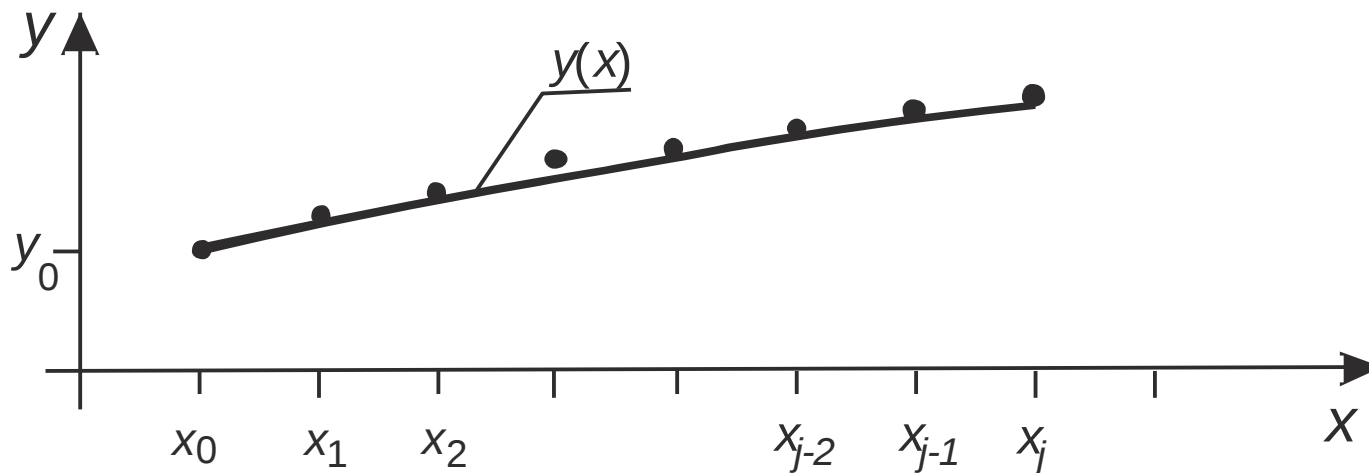
Stosowane w tym celu metody numeryczne umożliwiają obliczenie przybliżenia $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ wartości rozwiązania dokładnego $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_k)$ w wybranych punktach $x_1, x_2, \dots, x_k$ przedziału $\langle x_0, b \rangle$.

Niech będzie dane równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

W obszarze szukamy takiego rozwiązania $y(x)$ równania, które przejdzie przez dany punkt początkowy o współrzędnych $x = x_0$, $y = y_0$.

W tym wypadku będziemy poszukiwać rozwiązania przybliżonego, tzn. przybliżeń y_j wartości $y(x_j)$ rozwiązania ścisłego w punktach x_j ($j = 1, 2, \dots$)



Rys. Funkcja $y(x)$ i jej przybliżenie

Różnica

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$$

nosi nazwę **długości kroku całkowania** i oznacza się ją zwykle symbolem h .

Krok całkowania może być stały lub zmienny.

Stosowane metody rozwiązywania równań różniczkowych dzieli się na dwie zasadnicze grupy:

- 1) metody jednokrokowe,
- 2) metody wielokrokowe.

Metodą jednokrokową nazywa się taką metodę, w której przybliżoną wartość funkcji y_{j+1} oblicza się tylko na podstawie wartości y z poprzedniego kroku, czyli y_j .

Metodą wielokrokową jest metoda, w której do obliczenia y_{j+1} konieczna jest znajomość co najmniej dwóch wcześniejszych wartości, czyli $y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \dots$.

Metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych mogą być :

- **jawne** – jeśli wyrażenie na y_{j+1} jest w postaci

$$y_{j+1} = G(x, y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \dots),$$

- **niejawne** – jeśli dają zależność typu

$$G(x, y_{j+1}, y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \dots) = 0,$$

czyli w postaci równania nieliniowego względem y_{j+1} .

W tym przypadku metody niejawnej wyznaczenie wartości y_{i+1} wymaga rozwiązania nieliniowego równania algebraicznego.

Zwykle stosowana jest metoda iteracji prostej przy czym pierwsze przybliżenie oblicza się stosując metodę jawną. Takie podejście nazywane jest ***metodą „predyktor- korektor”***.

Istnieje wiele metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Ze względu na specyficzny sposób reprezentacji geometrii rzek tylko niektóre z nich są przydatne w hydraulice kanałów otwartych.

PODSTAWOWE METODY NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

1) Aproksymacja pochodnej ilorazem różnicowym

- Do konstrukcji niektórych elementarnych metod całkowania zarówno w przypadku zagadnień początkowych jak i brzegowych można wykorzystać iloraz różnicowy aproksymujący pochodną
- Odpowiednie formuły wyprowadza się wprost z szeregu Taylora zastosowanego do rozwinięcia funkcji wokół rozpatrywanego punktu x

Dla funkcji jednej zmiennej $y(x)$ szereg Taylora można zapisać następująco:

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta x^m}{m!} \frac{d^m y}{dx^m} \Big|_{x_j}$$

- Szereg ma nieskończoną liczbę wyrazów m
- Przyjęcie skończonej liczby wyrazów powoduje wprowadzenie tzw. **błędu obcięcia**
- W konsekwencji zamiast dokładnej wartości funkcji $y(x_{j+1})$ otrzymujemy jej przybliżoną wartość
- Błąd przybliżenia zależy od liczby uwzględnionych członów szeregu

- Uwzględniając tylko 3 pierwsze człony, oszacowanie wartości $y(x_{j+1})$ otrzymujemy dzięki następującej formule:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_j + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_j + O(\Delta x^3)$$

gdzie: y_j, y_{j+1} – wartości funkcji $y(x)$ w węzłach j oraz $j+1$,
 Δx – odległość pomiędzy węzłami j oraz $j+1$

- Człon $O(\Delta x^3)$ wskazuje, że błąd obcięcia jest rzędu Δx^3
- To oznacza, że błąd zmienia się proporcjonalnie do wartości kroku całkowania podniesionej do 3 potęgi

Zmniejszenie kroku o połowę spowoduje 8-krotną redukcję błędu y_{j+1}

Bezpośrednio z powyższego równania otrzymujemy oszacowanie pochodnej I-go rzędu:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_j + \dots$$

Iloraz różnicowy o postaci

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_j \approx \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}$$

aproxymuje pochodną funkcji $y(x)$ w węźle j z **dokładnością pierwszego rzędu, tj. $O(\Delta x)$.**

Formuła ta to tzw. **iloraz różnicowy przedni**.

Szereg Taylora można zastosować do aproksymacji funkcji w węźle $j-1$. Ma on postać:

$$y_{j-1} = y_j - \Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_j + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_j + O(\Delta x^3)$$

Równanie to prowadzi do formuły:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_j \approx \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta x}$$

Jest to tzw. **iloraz różnicowy wsteczny**.

Podobnie jak iloraz różnicowy przedni, aproksymuje on pochodną z **dokładnością $O(\Delta x)$** .

Odejmując od siebie równania dla y_{j+1} oraz y_{j-1} mamy:

$$y_{j+1} - y_{j-1} = 2\Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_j + \frac{\Delta x^3}{3} \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_j + \dots$$

Z równania tego otrzymujemy tzw. **iloraz różnicowy centralny**:

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_j \approx \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x}$$

W przeciwieństwie do formuł poprzednich powyższy wzór zapewnia aproksymację II-go rzędu. **Błąd obcięcia jest $O(\Delta x^2)$.**

2) Podstawowe metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych

Przedstawione powyżej formuły aproksymujące pochodną I-go rzędu można wykorzystać do wyprowadzenia niektórych podstawowych metod numerycznego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych

W tym celu dokonajmy aproksymacji rozwiązywanego równania

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

w węźle j wykorzystując wcześniej wyprowadzone formuły

- Dla ilorazu różnicowego przedniego:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} = f(x_j, y_j)$$

otrzymuje się **jawną metodę Eulera**:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$

- Dla ilorazu różnicowego wstecznego:

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta x} = f(x_j, y_j)$$

otrzymuje się **niejawną metodę Eulera**:

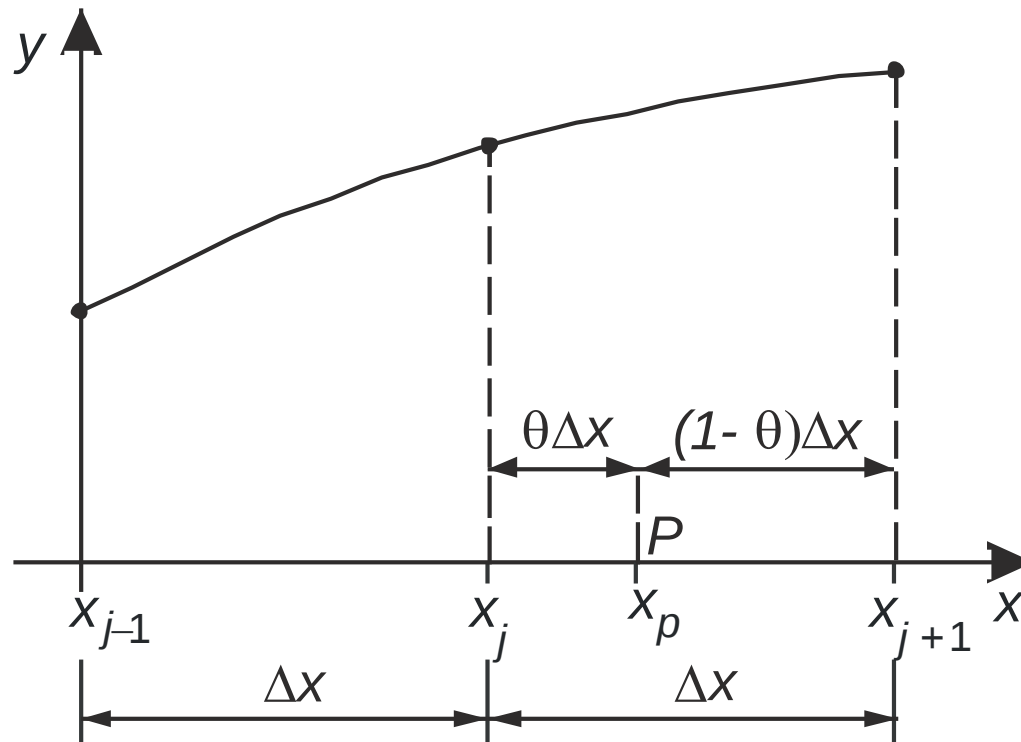
$$y_j = y_{j-1} + \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$

Uogólniona formuła

Założenie:

aprosymujemy pochodną w punkcie P położonym w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$

gdzie θ jest parametrem wagowym



Pozycję punktu P, który może przemieszczać się wewnątrz przedziału $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$, określa wagowy parametr θ definiowany następująco:

$$\theta = \frac{x_P - x_j}{\Delta x}$$

Ponieważ $x_j \leq x_P \leq x_{j+1}$ zatem $0 \leq \theta \leq 1$ zmienia się od 0 do 1

Aproksymacja równania różniczkowego:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} = f_P$$

Wartość pochodnej $f(x, y)$ w punkcie P – jest to liniowa interpolacja pomiędzy węzłami:

$$f_P = (1 - \theta) f(x_j, y_j) + \theta \cdot f(x_{j+1}, y_{j+1})$$

Po podstawieniu otrzymujemy ogólną formułę:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \left((1-\theta) \cdot f(x_j, y_j) + \theta \cdot f(x_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

Szczególne przypadki:

- **gdy $\theta = 0 \rightarrow$ jawna metoda Eulera:**

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$

- **gdy $\theta = 1/2 \rightarrow$ niejawna metoda trapezowa:**

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{2} \left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

- **gdy $\theta = 2/3 \rightarrow$ metoda Galerkina:**

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \left(\frac{1}{3} f(x_j, y_j) + \frac{2}{3} f(x_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

- **gdy $\theta = 1 \rightarrow$ niejawna metoda Eulera:**

$$y_j = y_{j-1} + \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$

3) Alternatywny sposób wyprowadzenia formuł numerycznego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych

Ogólna formuła wynikająca z całkowania równania:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$, w którym y zmienia się w granicach od y_j do y_{j+1}

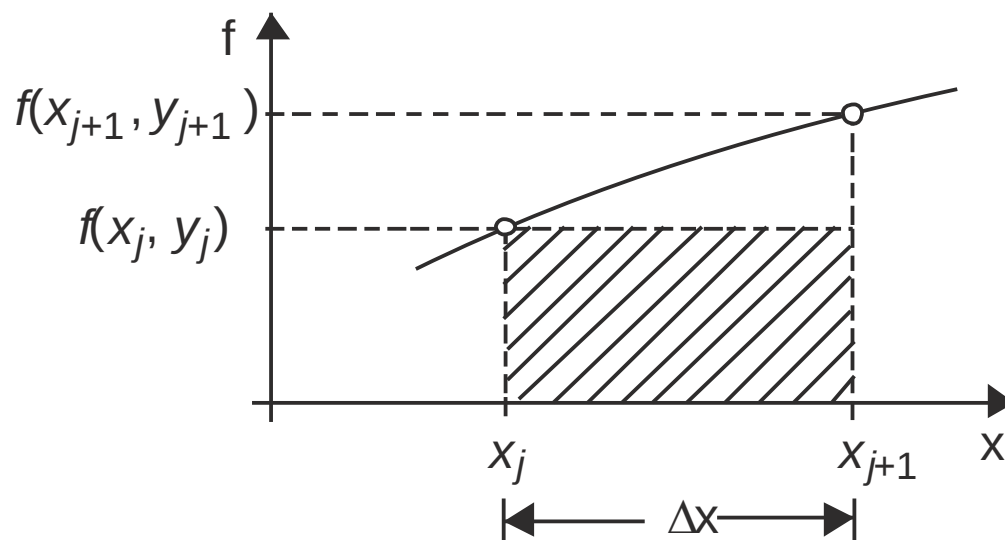
$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} dy = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

Wynikiem jest podstawowa formuła całkowania równań:

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

Przedstawione wcześniej metody różnią się sposobem obliczenia przybliżonej wartości całki oznaczonej.

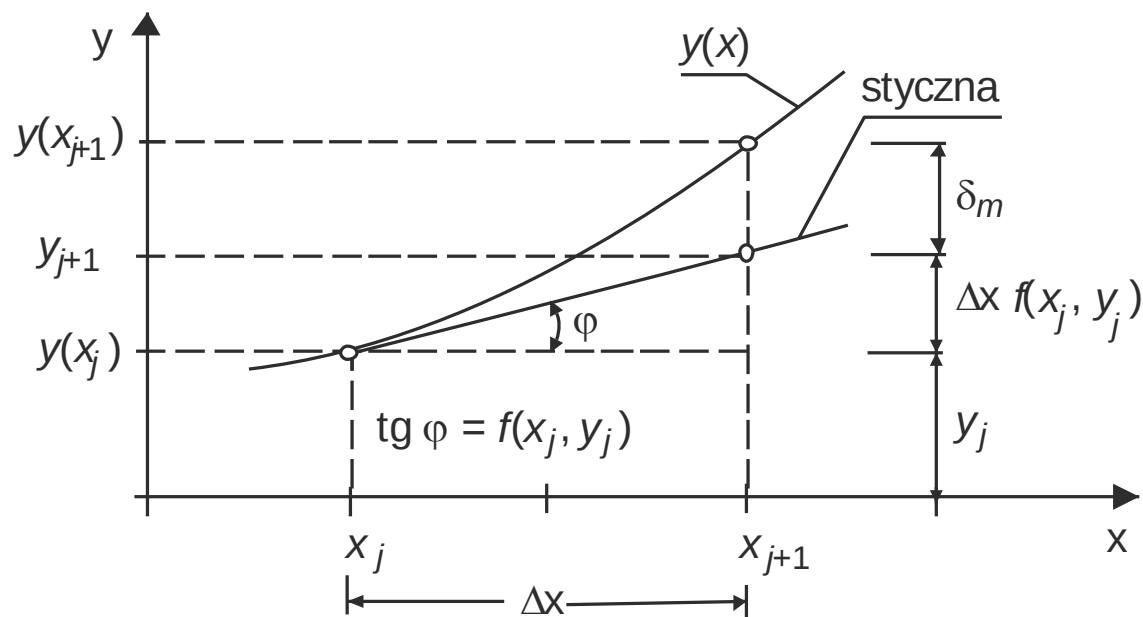
- Całkę obliczamy **metodą prostokątów**



$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \approx \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$

Po podstawieniu otrzymujemy **metodę jawną Eulera**

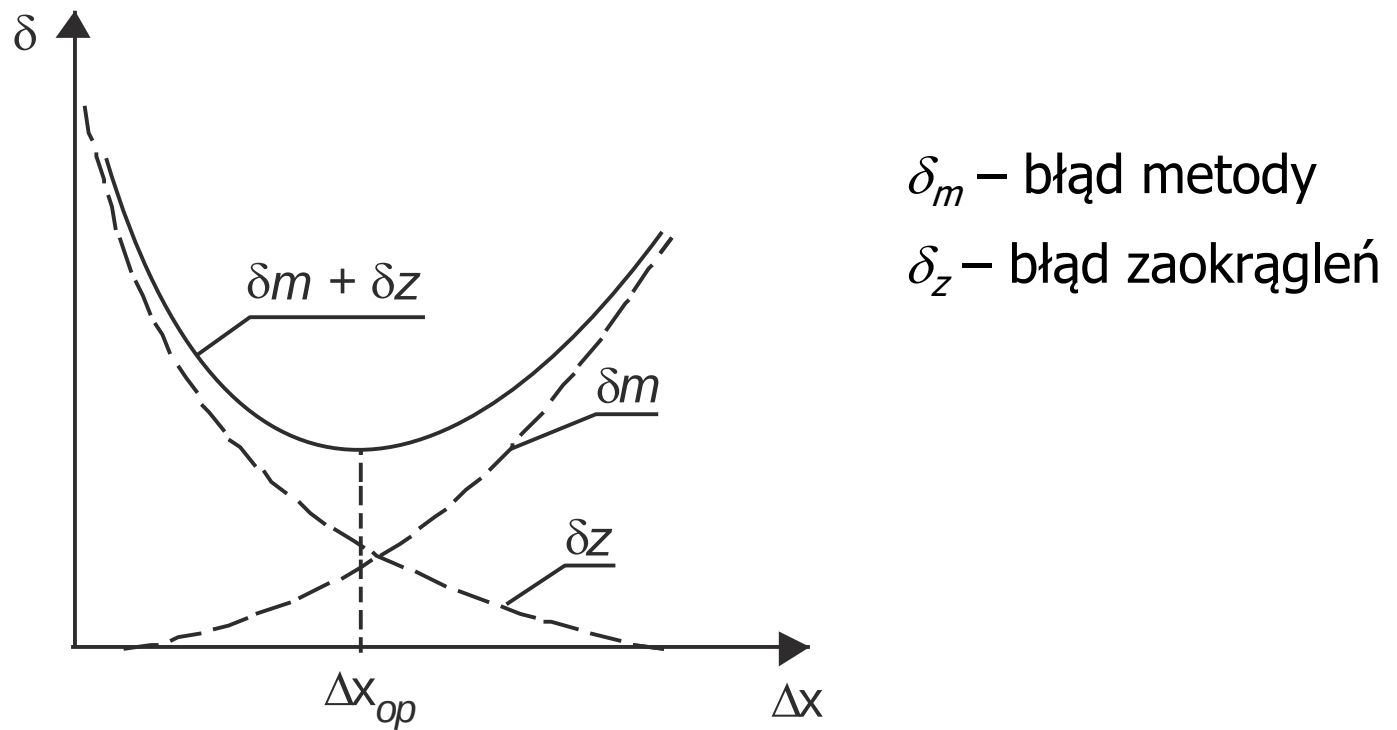
$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \cdot f(x_j, y_j)$$



Rys. Geometryczna interpretacja jawnej metody Eulera

Funkcję $y(x)$ w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ zastępuje się styczną w punkcie x_j

Efekt: różnica $|y(x_{j+1}) - y_{j+1}|$, czyli błąd δ_m rośnie ze wzrostem długości przedziału Δx



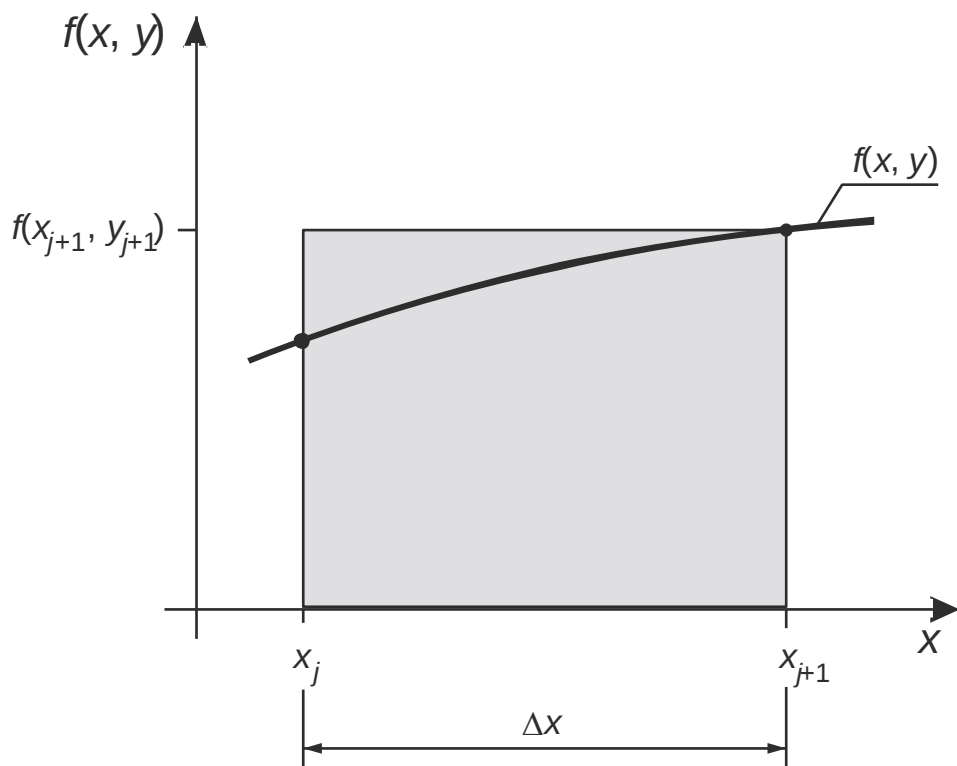
Rys. Zależność błędów od wielkości kroku całkowania

- Zmniejszenie kroku obliczeń prowadzi do mniejszego błędu metody δ_m
- Jednakże zmniejszenie kroku obliczeń powoduje wzrost liczby obliczeń a zatem i wzrost błędu zaokrągleń δ_z
- Optymalną wartość kroku całkowania określa się metodą prób

Niejawna metoda Eulera:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \cdot f(x_{j+1}, y_{j+1})$$

całkę zastępujemy polem prostokąta (z nadmiarem)



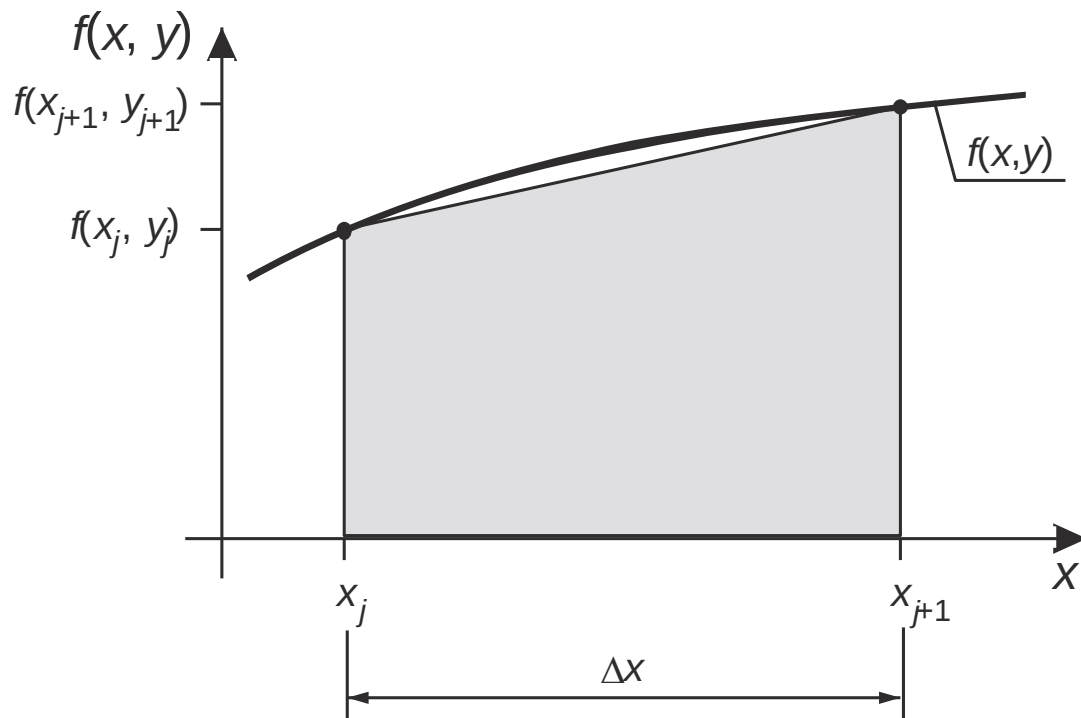
$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \approx \Delta x \cdot f(x_{j+1}, y_{j+1})$$

Niejawna metoda trapezowa:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}))$$

Całkę zastępujemy polem trapezu

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx \approx \frac{1}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})) \Delta x$$



4) Metody Runge – Kuty

Dokładność metody można podwyższyć zwiększając liczbę pośrednich punktów w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ wykorzystywanych do obliczenia całki.

Ogólna postać metody:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \sum_{i=1}^m w_i \cdot k_i \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie: $k_1 = f(x_j, y_j)$

$$k_i = f\left(x_j + c_i \cdot \Delta x, y_j + \Delta x \sum_{l=1}^{j-1} a_{il} \cdot k_l\right) \quad 2 \leq i \leq m$$

przy czym $m \geq 1$ natomiast w_i, c_i, a_i są współczynnikami numerycznymi, które należy wyznaczyć

Jeśli w węźle x_j znana jest przybliżona wartość funkcji y_j to wartość y_{j+1} w węźle $x_{j+1} = x_j + \Delta x$ można obliczyć według powyższej formuły, w której wykorzystywane są obliczone wcześniej współczynniki $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Proces ten powtarzany jest w każdym kroku całkowania:
 $j = 0, 1, 2, \dots, N$ gdzie N jest liczbą kroków w przedziale $\langle a, b \rangle$.

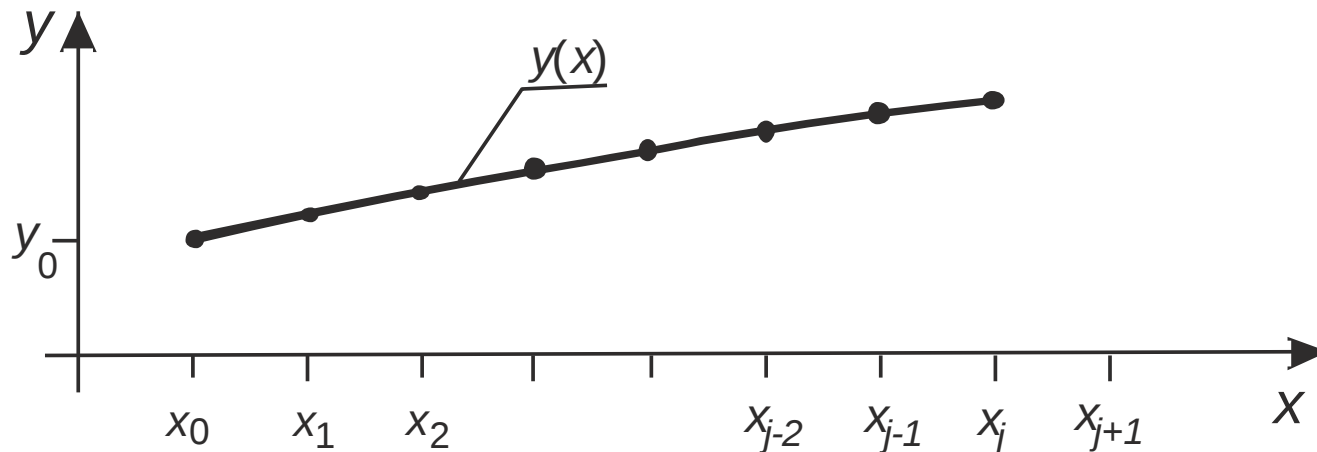
Jeśli liczba składowych w formule metody wynosi m , to metoda Runge–Kutty nazywana jest metodą m - etapową.

5) Metody wielokrokowe – jawne

- Całkując równanie różniczkowe zwyczajne w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ otrzymujemy znany wzór ogólny:

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) dx$$

- Funkcja $y(x)$ nieznana jest w przedziale $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$, ale znana jest w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_j$. Zatem znane są wartości $f(x_0, y(x_0))$, $f(x_1, y(x_1))$, $f(x_2, y(x_2))$, $\dots$, $f(x_j, y(x_j))$.



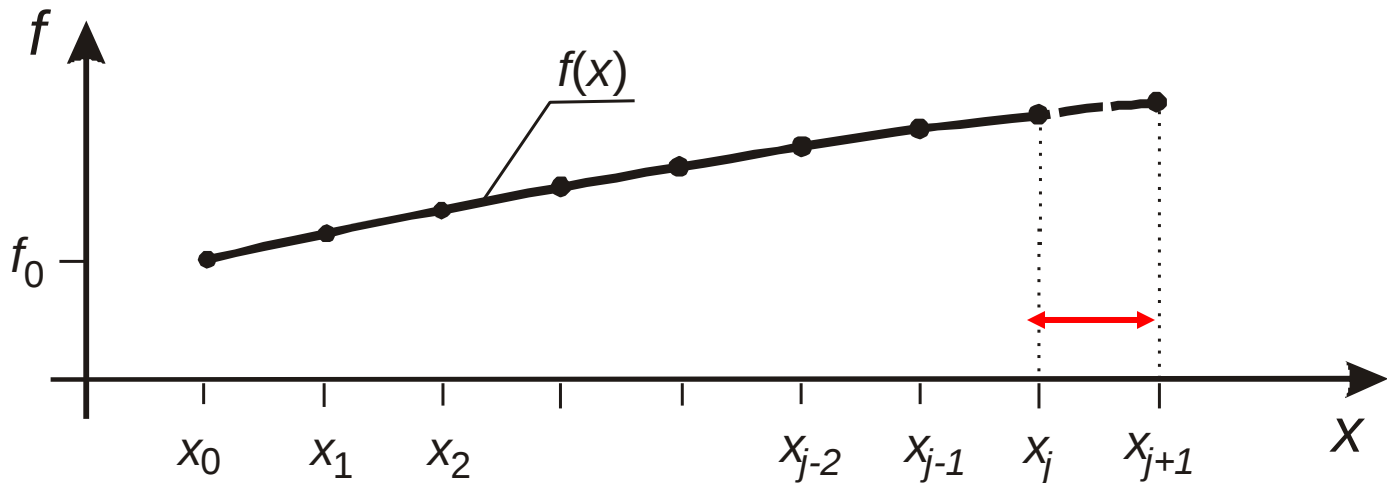
Wniosek:

można wykorzystać **wielomian interpolacyjny Lagrange'a** w celu przybliżenia funkcji $f(x, y(x))$ między węzłami x_0 i x_j a następnie dokonać ekstrapolacji funkcji f na przedział $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$.

Efekt: otrzymuje się proste wyrażenie typu

$$y_{j+1} = F(x, y_0, y_1, \dots, y_j)$$

czyli tak zwany **schemat jawny**



Ogólna postać formuły jawnej:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \sum_{i=0}^K \beta_i \cdot f_{j-i}$$

gdzie: β_i – stałe współczynniki liczbowe

K – liczba wcześniej obliczonych wartości węzłowych wykorzystywanych przez metodę (liczba kroków)

$f_j = f(x_j, y_j)$ - wartość pochodnej w węźle j

Stosując wielomiany interpolacyjne Lagrange'a różnych stopni, można otrzymać szereg wariantów metody w zależności od wartości K

Są to formuły typu **Adamsa-Bashforth**:

$$K = 1 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{2}(3f_j - f_{j-1}),$$

$$K = 2 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{12}(23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2}),$$

$$K = 3 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{24}(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}).$$

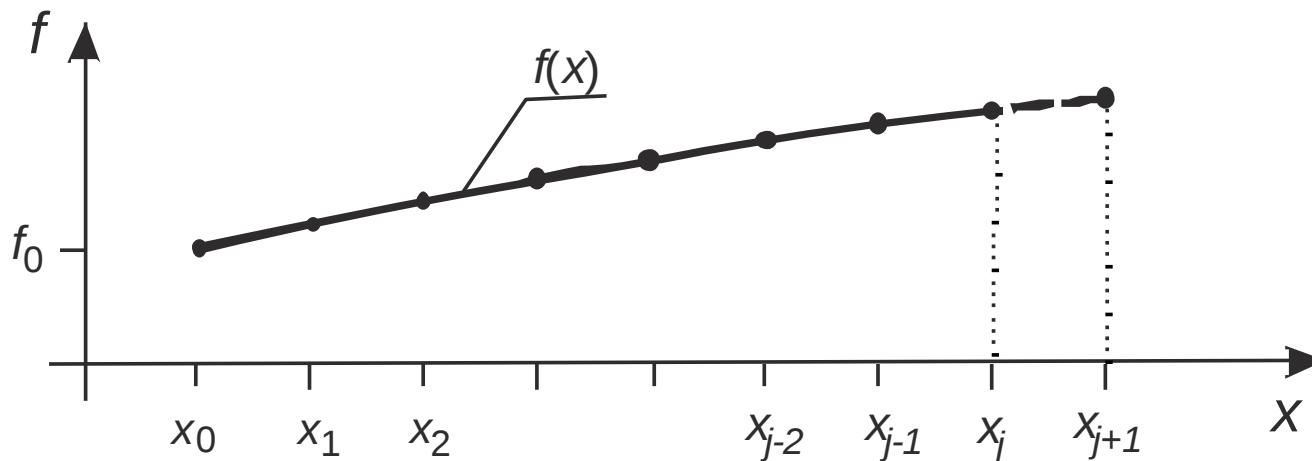
Wyprowadzenie wzorów: Legras (1974)

6) Metody wielokrokowe – niejawne

- Jeśli wielomian interpolacyjny Lagrange'a stosowany w celu przybliżenia funkcji $f(x, y(x))$ poprowadzimy również przez **nieznany** jeszcze **węzeł** $(x_{j+1}, f(x_{j+1}, y(x_{j+1})))$, to otrzymamy wyrażenie typu

$$y_{j+1} = F(x, y_0, y_1, \dots, y_j, y_{j+1})$$

czyli tak zwany **schemat niejawny** (równanie nieliniowe)



Ogólna formuła tej grupy, metod nazywanych metodami
Adamsa – Moultona:

$$y_{j+1} = y_j + \Delta x \sum_{i=-1}^{K-1} \beta_{i+1} \cdot f_{j-i}$$

Zależnie od przyjętego stopnia wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a, można otrzymać szereg wariantów metody, np.:

$$K = 1 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{2} (f_j + f_{j+1}),$$

$$K = 2 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{12} (-f_{j-1} + 8f_j + 5f_{j+1}),$$

$$K = 3 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{\Delta x}{24} (f_{j-2} - 5f_{j-1} + 19f_j + 9f_{j+1}).$$

- Jak wynika z wyprowadzonych wzorów, w wypadku schematów niejawnych otrzymuje się wyrażenie na y_{j+1} w postaci równania nieliniowego

$$y_{j+1} = F(x, y_0, y_1, \dots, y_j, y_{j+1}),$$

które wymaga rozwiązania stosowną metodą

- Do rozwiązywania tego typu równań stosuje się zwykle **metodę „predyktor - korektor”**

Idea tej metody jest następująca:

- 1) znając wartości y w punktach aż do j -tego włącznie, oblicza się pierwsze przybliżenie y w punkcie $j + 1$, stosując **schemat jawny**, czyli dokonuje się **predykcji**

$$y_{j+1}^{(k=0)} = y_j + \Delta x \sum_{i=0}^K \beta_i \cdot f_{j-i}$$

2) znając to przybliżenie, dokonuje się **korekty** wyniku metodą iteracji prostej, czyli

$$\begin{aligned} y_{j+1}^{(k+1)} &= y_j + \Delta x \sum_{i=-1}^{K-1} \beta_{i+1} \cdot f_{j-i} = \\ &= y_j + \Delta x \sum_{i=0}^{K-1} \beta_{i+1} \cdot f_{j-i} + \Delta x \cdot \beta_0 \cdot f_{j+1}^{(k)} \end{aligned}$$

gdzie k jest indeksem iteracji.

- Proces iteracyjny prowadzi się do momentu uzyskania wystarczająco dokładnego rozwiązania
- Metoda „predyktor - korektor” jest praktyczną realizacją niejawnej metody wielokrokowej

Rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych

- Wszystkie metody rozwiązywania zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego można uogólnić na przypadek n równań
- Załóżmy, że układ równań rzędu pierwszego sprowadzić można do postaci

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

gdzie n oznacza rozmiar układu

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$$

gdzie: $\mathbf{Y}$ – wektor o składowych $y_1, y_2, \dots, y_n$,

$\mathbf{F}$ – funkcja wektorowa o składowych $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Warunki początkowe określa wektor $\mathbf{Y}_0$ o składowych:

$$y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)$$

Wszystkie metody można uogólnić na przypadek wektorów i funkcji wektorowych

Na przykład, wzory Rungego-Kutty rzędu drugiego dla układu 2 równań można zapisać w postaci wektorowej następująco:

$$\mathbf{K}_1 = \Delta x \cdot \mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j),$$

$$\mathbf{K}_2 = \Delta x \cdot \mathbf{F}\left(x_j + \frac{1}{2}\Delta x, \mathbf{Y}_j + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1\right),$$

$$\mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + \mathbf{K}_2,$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{Bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{Bmatrix} k_2 \\ l_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{Bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Y}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix},$$

Analogicznie można przedstawić w zapisie wektorowym każdą inną metodę rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych