

METODA OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH

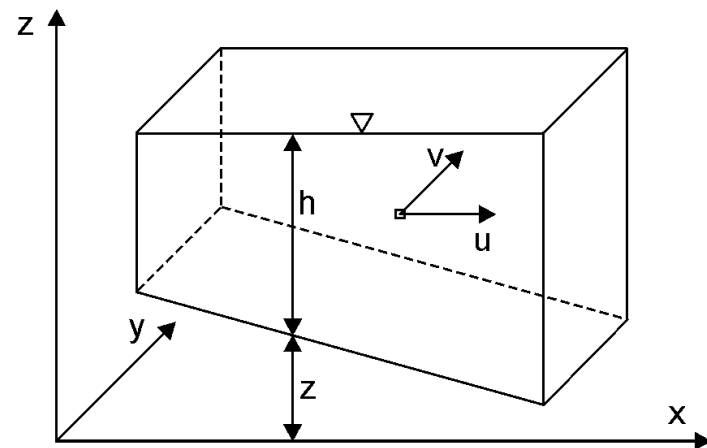
- Bazowanie na całkowitej postaci równań zachowania – dobre właściwości zachowawcze takich wielkości jak masa czy pęd
- Można stosować na siatce nieregularnej (czworokątnej, trójkątnej, itp.)
- Dedykowane dla rozwiązań zagadnień, gdzie występują nieciągłości lub duże przyrosty (w czasie i przestrzeni) parametrów przepływu: głębokości, ciśnienia, prędkości
 - gwałtownie propagująca fala wezbraniowa (katastrofa zapory) lub fala uderzeniowa
 - odskok hydrauliczny wytworzony w pobliżu przelewu budowli hydrotechnicznej
 - przepływ wywołany gwałtownymi zmianami w geometrii
 - fale tsunami

MODEL NIEUSTALONEGO PRZEPŁYWU WODY PŁYTKIEJ

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + 0.5gh^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$



u, v - średnie prędkości przepływu odpowiednio w kierunku x i y

h - głębokość wody

S_{0x}, S_{0y} - spadek dna wzdłuż kierunku x i y

S_{fx}, S_{fy} - spadek linii energii w kierunku x oraz y obliczony według formuły Manninga:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u}{h^{4/3}} \sqrt{u^2 + v^2} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v}{h^{4/3}} \sqrt{u^2 + v^2}$$

n – współczynnik szorstkości wg Manninga

OKREŚLENIE TYPU UKŁADU RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

- **Model jednowymiarowy** - forma jednorodna (bez członu źródłowego):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ - jakobian wektora strumienia $\mathbf{F}$
 c – prędkość rozchodzenia się
małego zaburzenia

$$c = \sqrt{gh}$$

- Typ układu określony jest poprzez pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

λ - określa poszukiwane pierwiastki równania, czyli wartości własne macierzy $\mathbf{A}$

$\mathbf{I}$ - macierz jednostkowa

- W wyniku rozwiązania równania otrzymujemy **dwa różne** i rzeczywiste pierwiastki:

$$\begin{array}{l} \lambda^1 = u - c \\ \lambda^2 = u + c \end{array}$$



układ typu hiperbolicznego

OKREŚLENIE TYPU UKŁADU RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

- Model dwuwymiarowy

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0 \quad \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{B} - \text{jakobiany wektorów strumieni } \mathbf{F} \text{ i } \mathbf{G}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -vu & v & u \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

- W wyniku rozwiązywania równania otrzymujemy **trzy** różne i rzeczywiste pierwiastki:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= un_x + vn_y - c \\ \lambda^2 &= un_x + vn_y \\ \lambda^3 &= un_x + vn_y + c \end{aligned}$$



układ typu hiperbolicznego

n_x i n_y składowe wektora jednostkowego $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$

ZAGADNIENIE POCZĄTKOWO-BRZEGOWE DLA RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

W przypadku równań typu hiperbolicznego poprawną liczbę oraz rodzaj warunków granicznych określa się przy wykorzystaniu informacji o charakterystykach

Charakterystyki dla jednowymiarowego układu równań płytkiej wody:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^1 = u - \sqrt{gh}$$

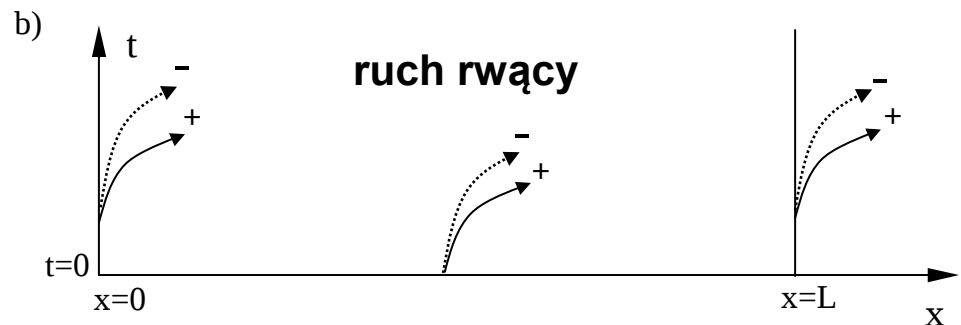
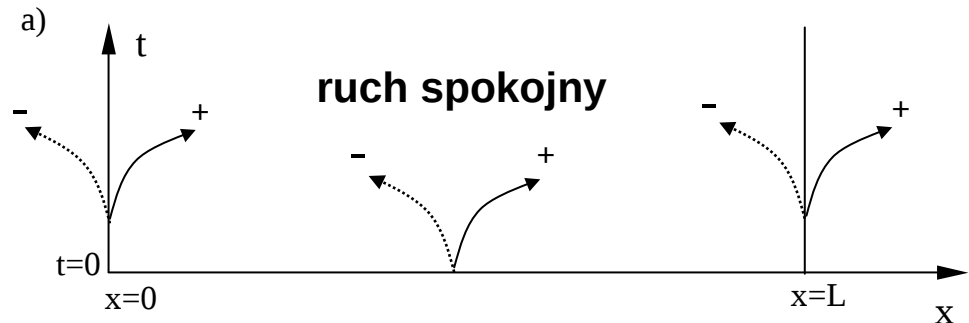
$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 = u + \sqrt{gh}$$

Warunki brzegowe
należy znać charakter przepływu

liczba Froude'a

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$$

- ruch spokojny: $Fr < 1$
- ruch rwący: $Fr > 1$

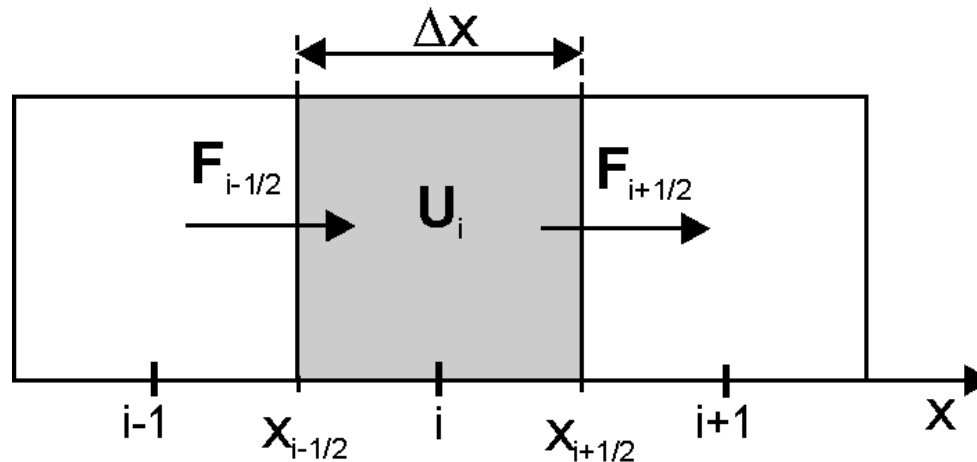


NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY METODĄ OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH

- Równania płytkiej wody jednowymiarowe w formie całkowej

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right] dV = 0$$

- Objętość skończona stanowi odcinek Δx ograniczony punktami $x_{i-1/2}$ i $x_{i+1/2}$ przez które przechodzą brzegi komórki



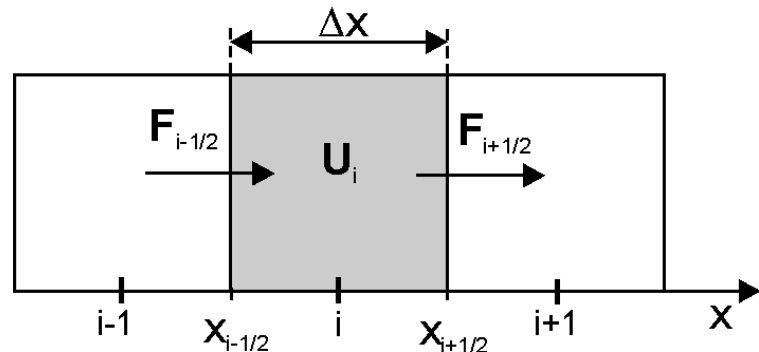
- Całkowanie równania

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x,t) dx = F(x_{i-1/2}) - F(x_{i+1/2})$$

$F(x_{i-1/2})$, $F(x_{i+1/2})$ - strumień przez brzegi komórki $x_{i-1/2}$ i $x_{i+1/2}$

U_i - wartość uśredniona

$$U_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x,t) dx$$



- Ogólny schemat metody objętości skończonych

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x} [F_{i-1/2} - F_{i+1/2}]$$

Własności schematu numerycznego w MOS zależą przede wszystkim od tego w jaki sposób określimy strumień numeryczny na brzegu komórki

OKREŚLENIE STRUMIENIA NUMERYCZNEGO

- Schematy wykorzystywane do określenia strumienia numerycznego powinny uwzględniać informacje, które rozchodzą się po charakterystykach w obu kierunkach
- Wykorzystuje się metody dekompozycji strumieni numerycznych oraz różnic strumieni numerycznych - metoda bazująca na tzw. zagadnieniu Riemanna
- Uśrednianie parametrów przepływu według metoda Godunova (1959)

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2})$$

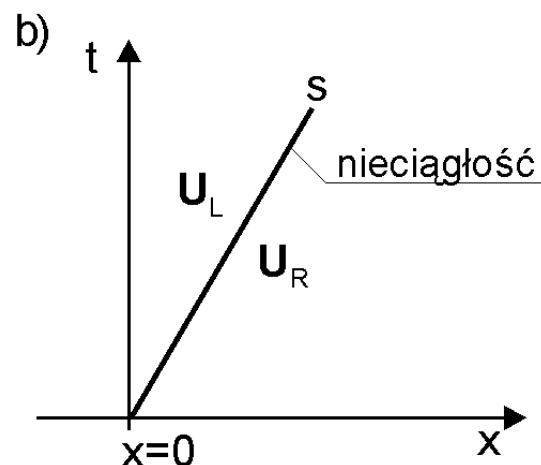
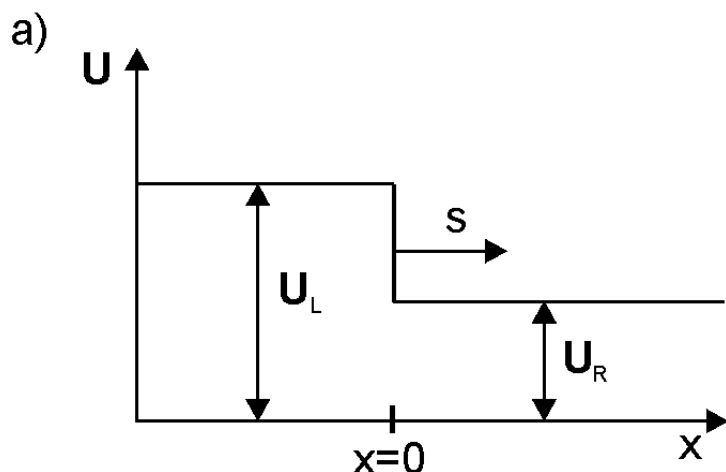
$\mathbf{U}_{i+1/2}$ - wartość zmiennej określona na ścianie komórki, która rozdziela stany ustalone w sąsiednich komórkach $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_L$ oraz $\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_R$

ZAGADNIENIE RIEMANNA DLA RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

Na zagadnienie Riemanna składa się rozwiązanie równania typu hiperbolicznego:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

z warunkiem początkowym: $\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{dla } x < 0 \\ \mathbf{U}_R & \text{dla } x > 0 \end{cases}$



$$\frac{dx}{dt} = s$$

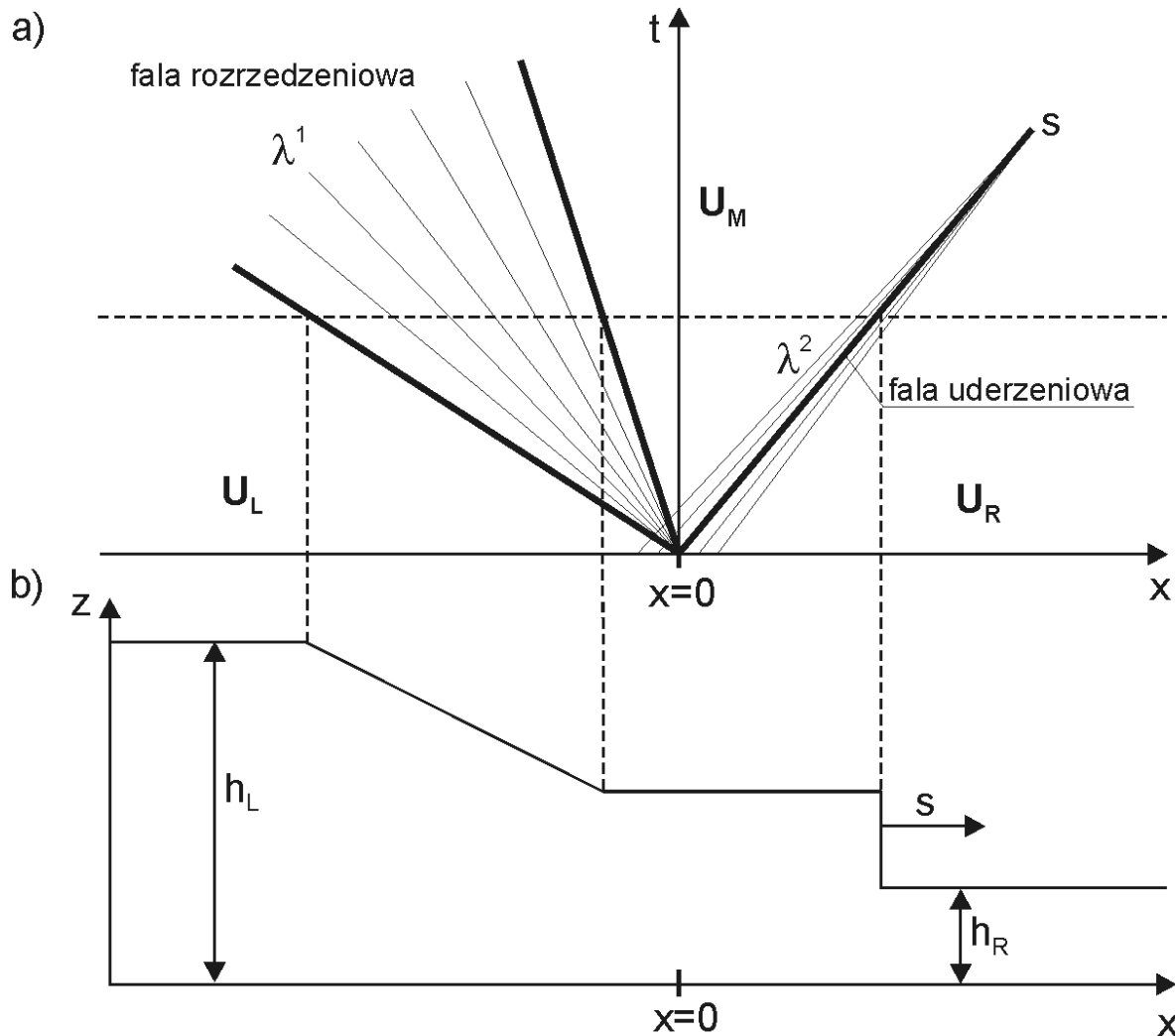
Nieciągłość występująca w danych początkowych propaguje wzdłuż charakterystyk i przyczynia się do powstawania nieciągłości również w rozwiązaniu

Dla 1D występują dwie rodziny charakterystyk



dwie fale wychodzące z $x=0$:

- fala uderzeniowa
- fala rozrzedzeniowa

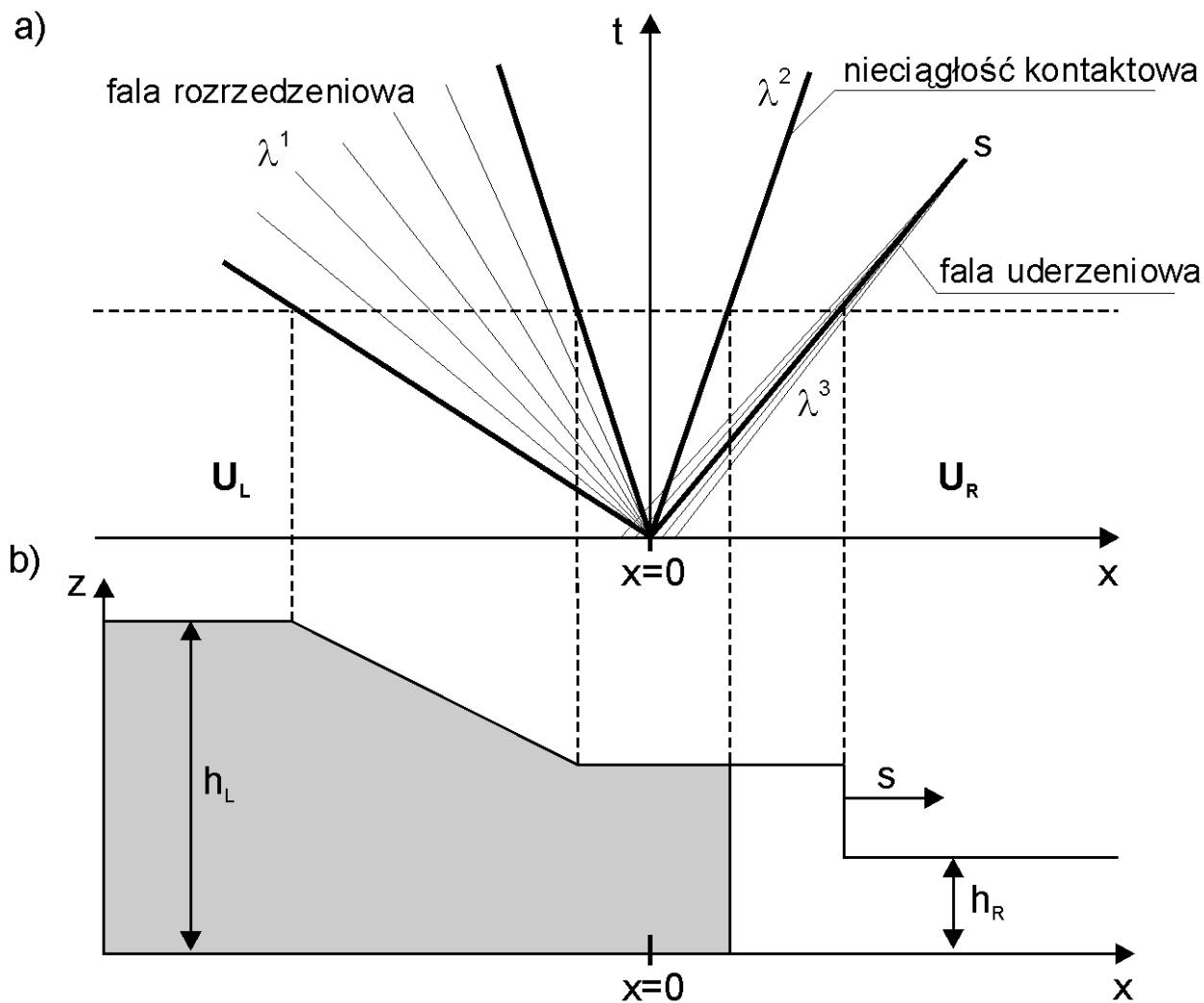


Rozwiązanie Stokera
zagadnienia Riemanna
dla RPW

Dla 2D występują trzy
rodziny charakterystyk



- fala uderzeniowa
- fal kontaktowa
- fala rozrzedzeniowa



LINIOWE ZAGADNIENIE RIEMANNA

- Konieczność iteracyjnego rozwiązania **dokładnego zagadnienia Riemanna** wymaga znacznego czasu obliczeń
- Podczas konstruowania schematów numerycznych MOS wykorzystuje się tzw. **przybliżone (liniowe) rozwiązanie zagadnienia Riemanna**
- Wówczas rozwiązanie zagadnienia Riemanna pomiędzy stanami $\mathbf{U}_L$ i $\mathbf{U}_R$ można osiągnąć poprzez dekompozycję przyrostu $\Delta\mathbf{U}$ na liniową kombinację prawych wektorów własnych $\mathbf{r}^k$ macierzy $\mathbf{A}$

$$\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \Delta\mathbf{U} = \sum_{k=1}^m \alpha^k \mathbf{r}^k \quad \text{lub} \quad \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1} = \Delta\mathbf{U}_{i-1/2} = \sum_{k=1}^m \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}^k$$

α^k - parametr pełniący rolę pewnych współczynników wektorów własnych które mogą być wyrażone poprzez rozwiązanie układu:

$$\alpha^k = \mathbf{R}^{-1} \Delta\mathbf{U}$$

Rozwiązanie na ściance komórki:

$$\mathbf{U}_{i-1/2} = \mathbf{U}_i - \sum_{\lambda > 0} \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}^k \quad \text{lub} \quad \mathbf{U}_{i-1/2} = \mathbf{U}_{i-1} + \sum_{\lambda < 0} \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}^k$$

Wówczas strumienie numeryczne można wyrazić w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{A}\mathbf{U}_i - \sum_{k=1}^m \alpha_{i-1/2}^k \left(\lambda^k \right)^+ \mathbf{r}^k \quad \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{A}\mathbf{U}_i + \sum_{k=1}^m \alpha_{i+1/2}^k \left(\lambda^k \right)^- \mathbf{r}^k$$

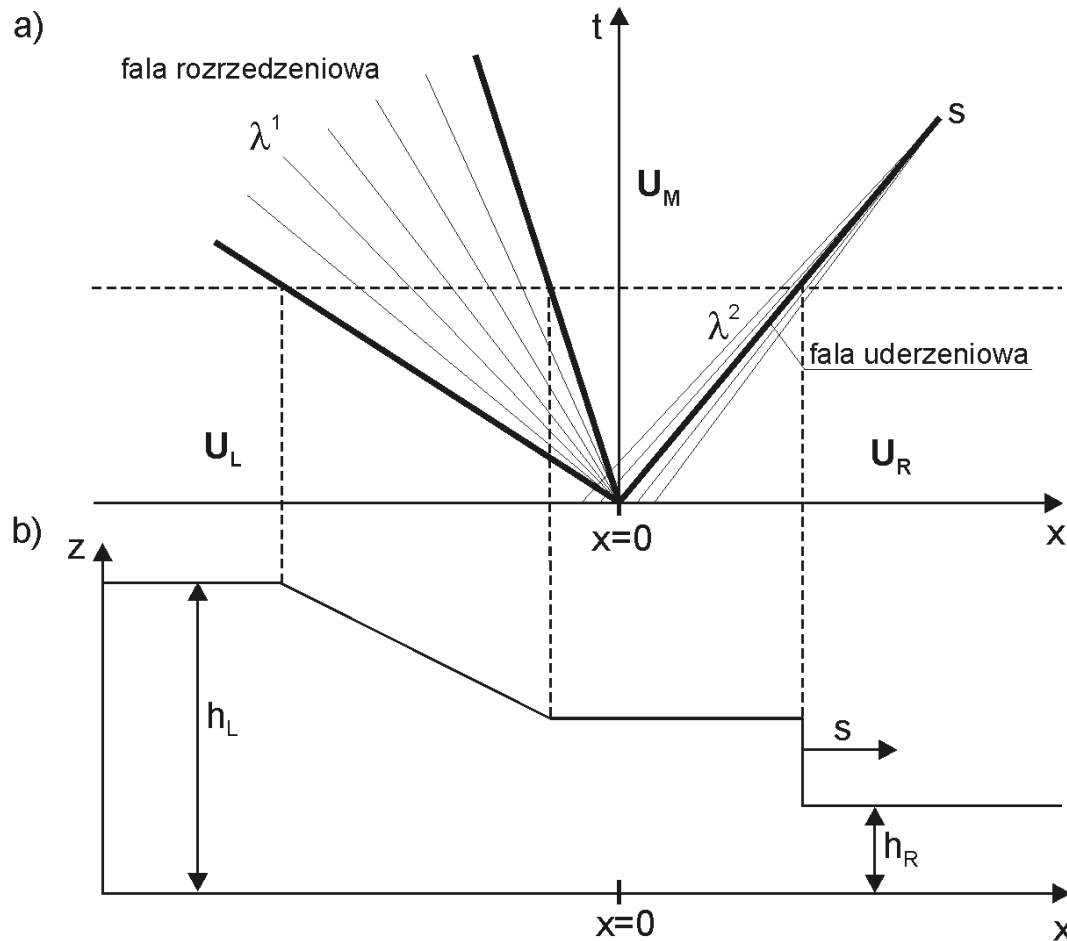
Całkując ogólne równanie schematu metody objętości skończonych:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}]$$

oraz wykorzystując relacje na strumienie numeryczne otrzymujemy
algorytm fali propagującej (ang. *wave-propagation algorithm*)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k=1}^m \left(\lambda_{i+1/2}^k \right)^- \alpha_{i+1/2}^k \mathbf{r}_{i+1/2}^k + \sum_{k=1}^m \left(\lambda_{i-1/2}^k \right)^+ \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}_{i-1/2}^k \right]$$

- Rozwiązanie składa się z m fal, z których każda może propagować z prędkością λ^k przyjmując znak dodatni $(\lambda^k)^+$ lub ujemny $(\lambda^k)^-$
- Na średnią wartość stanu $\mathbf{U}_i$ w komórce mają wpływ fale wychodzące z $x_{i-1/2}$ i poruszające się z prędkością λ^k zgodnie z kierunkiem osi x oraz fale wychodzące z $x_{i+1/2}$ w kierunku przeciwnym.



SCHEMAT NUMERYCZNY WYŻSZEGO RZĘDU

- W celu uzyskania większej dokładności, strumienie numeryczne poddaje się korekcie (która prowadzi do schematu II rzędu względem przestrzeni)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k=1}^m \left(\lambda_{i+1/2}^k \right)^- \alpha_{i+1/2}^k \mathbf{r}_{i+1/2}^k + \sum_{k=1}^m \left(\lambda_{i-1/2}^k \right)^+ \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}_{i-1/2}^k \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2} \right]$$

**człon korekcyjny
strumienia**

$$\bar{\mathbf{F}}_{i-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left| \lambda_{i-1/2}^k \right| \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \lambda_{i-1/2}^k \right| \right) \alpha_{i-1/2}^k \mathbf{r}_{i-1/2}^k \phi_{i-1/2}$$

ϕ - funkcja limitująca

$\phi=1$ - najwyższa dokładność II rzędu w obszarach rozwiązania gładkiego (np. schemat Laxa-Wendroffa)

$\phi=0$ - dokładność I rzędu wprowadzenie maksymalnej dyfuzji numerycznej w obszarach występowania nieciągłości (np. schemat „up-wind”)

Funkcja limitująca jest określana na podstawie struktury charakterystyk poprzez porównanie poszczególnych fal w sąsiednich komórkach obliczeniowych (np. funkcja Van Leera, minmod)

- Dokładność rozwiązania można także zwiększyć poprzez zastosowanie odpowiedniego schematu całkowania w czasie

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}]$$

Dwukrokowa metoda Rungego-Kutty (metoda II rzędu):

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n]$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*]$$

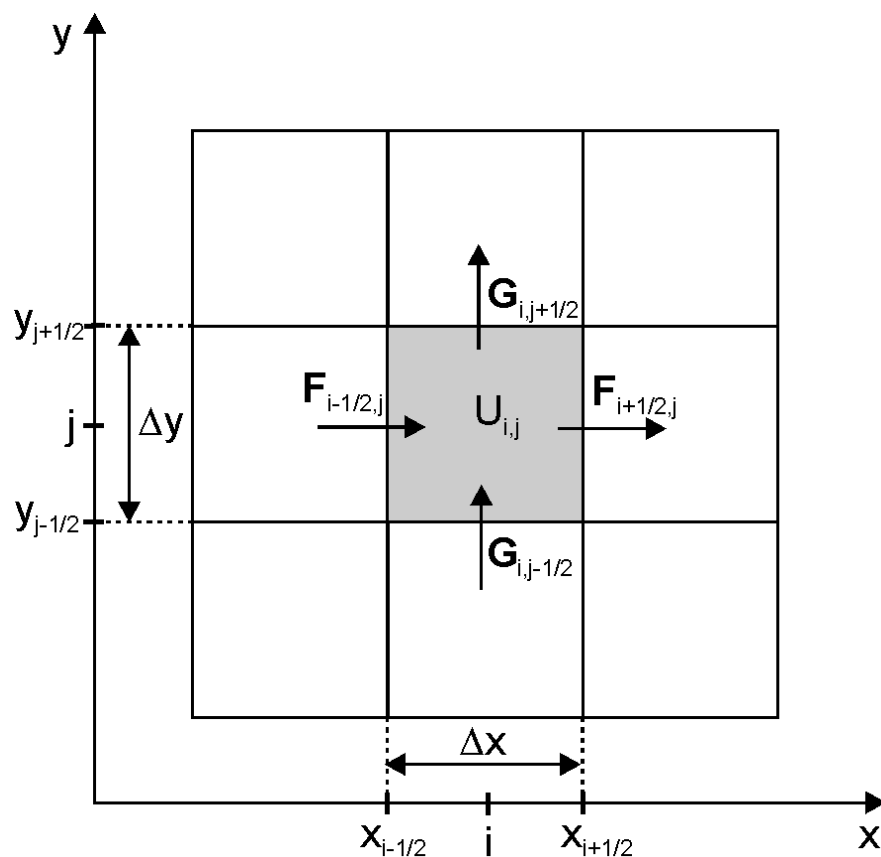
Metoda jawna wymaga ograniczenia na długość kroku całkowania Δt ze względu na warunek stabilności schematu. Liczba Couranta musi spełniać następujący warunek:

$$Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\lambda_i^k) \leq 1$$

DYSKRETYZACJA DWUWYMIAROWYCH RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n]$$



W przypadku dwuwymiarowym
objętość skończona stanowi
pole powierzchni

DYSKRETYZACJA DWUWYMIAROWYCH RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0}$$

w przypadku dwuwymiarowym objętość skończona stanowi pole powierzchni

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n]$$

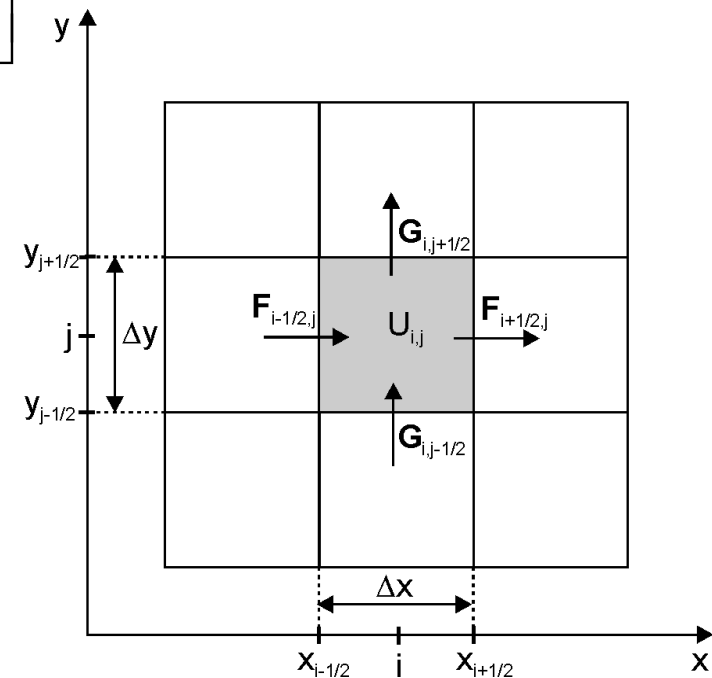
Dekompozycja przestrzenna dwuwymiarowych równań

Układ 2D rozdziela się na dwa jednowymiarowe układy względem kierunku x oraz y :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^{(1)}}{\partial t} = \mathbf{Y}_x$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^{(2)}}{\partial t} = \mathbf{Y}_y$$

gdzie: $\mathbf{Y}_x = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ $\mathbf{Y}_y = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}$



INNE ZAGADNIENIA ZWIĄZANE Z ROZWIĄZANIEM RÓWNAŃ PŁYTKIEJ WODY ZA POMOCĄ MOS

- Dyskretyzacja członu wynikającego ze zmiennego spadku dna
- Dyskretyzacja członu związanego z oporami ruchu
- Właściwe uwzględnienie fali rozrzedzeniowej
- Uwzględnienie warunków tzw. „suchego dna”
- Odpowiednie uwzględnienie warunków brzegowych na brzegu otwartym
- **Wpływ całkowania w czasie równania różniczkowego na dokładność rozwiązania**

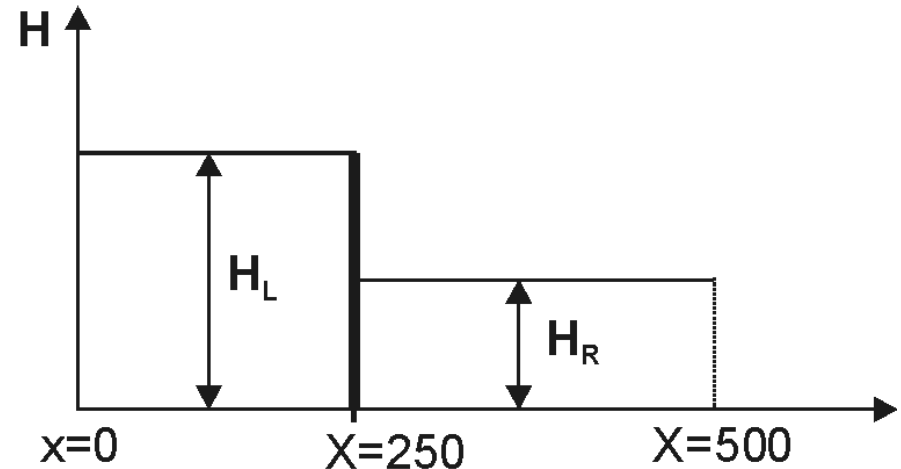
PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Model jednowymiarowy – problem „katastrofy zapory”

Warunek początkowy

$$h(x,0) = \begin{cases} h_L = 10\text{m} & \text{dla } x \leq 250 \text{ m} \\ h_R = 2\text{m} & \text{dla } x \geq 250 \text{ m} \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0 \text{ m/s}$$



Zakłada się, że w nieskończenie krótkim czasie zostaje zniszczony fragment zapory

Warunki brzegowe

$$u(0, t) = 0 \text{ m/s}$$

$$h(500, t) = 2 \text{ m}$$

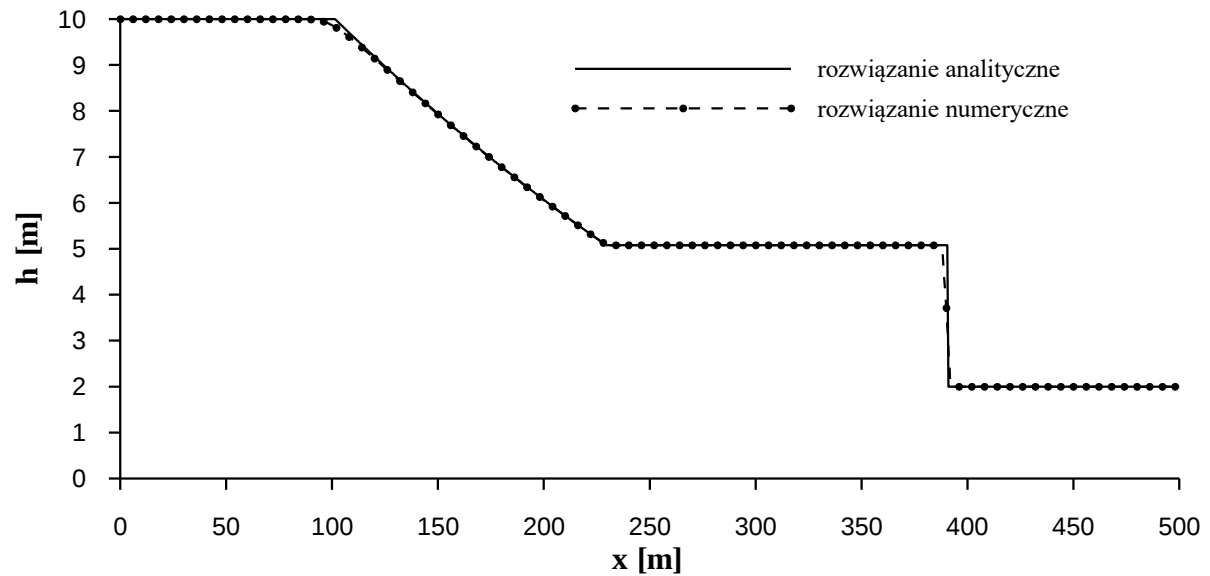
Parametry numeryczne

$$\Delta x = 0.5 \text{ m}$$

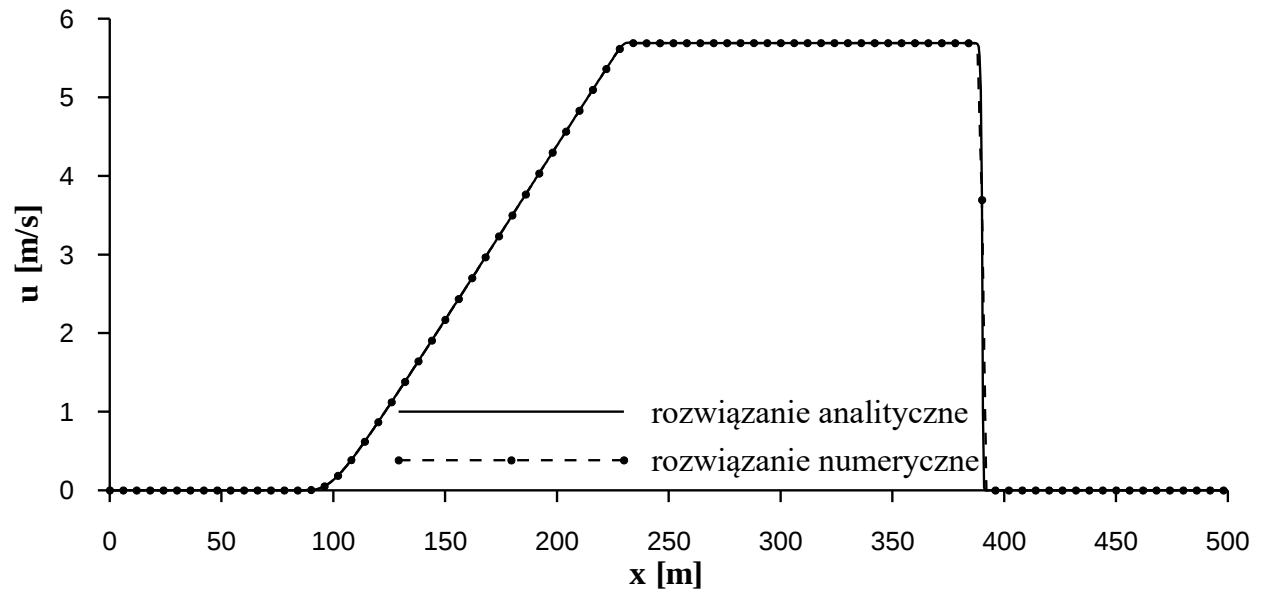
$$\Delta t = 0.015 \text{ s}$$

Porównanie wyników obliczeń numerycznych z rozwiązaniem analitycznym Stokera

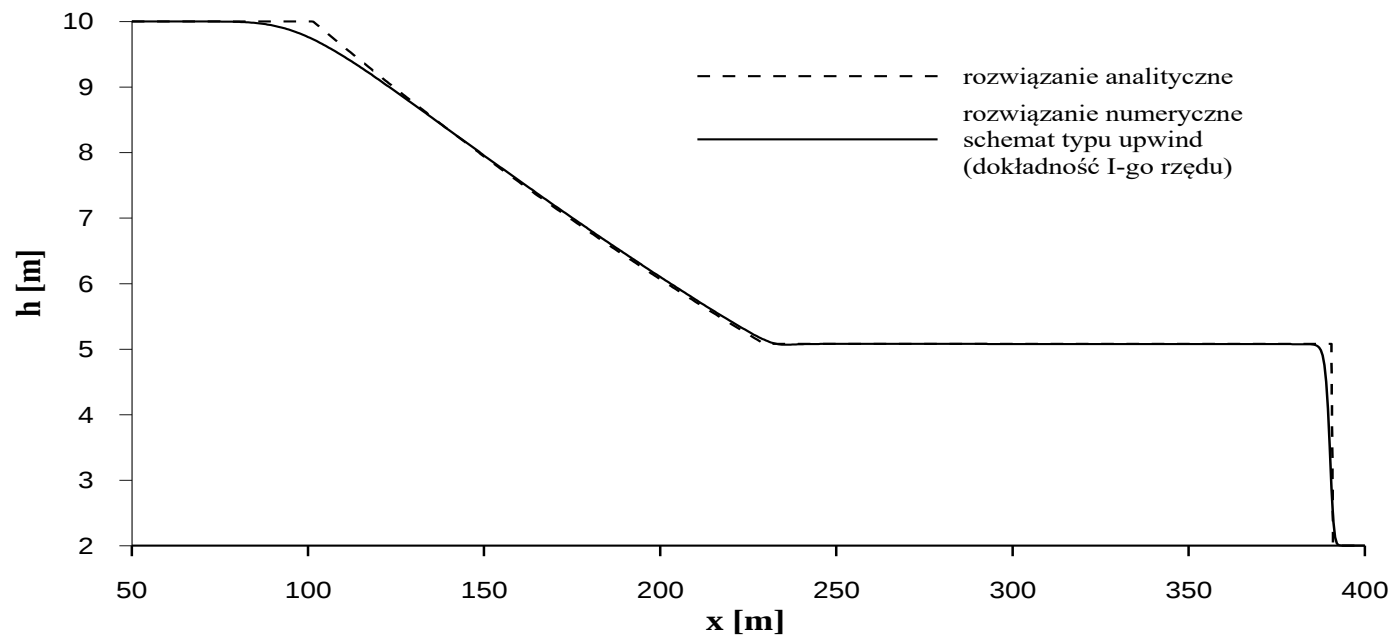
Głębokości dla
czasu $t = 15$ s ($n=0$)



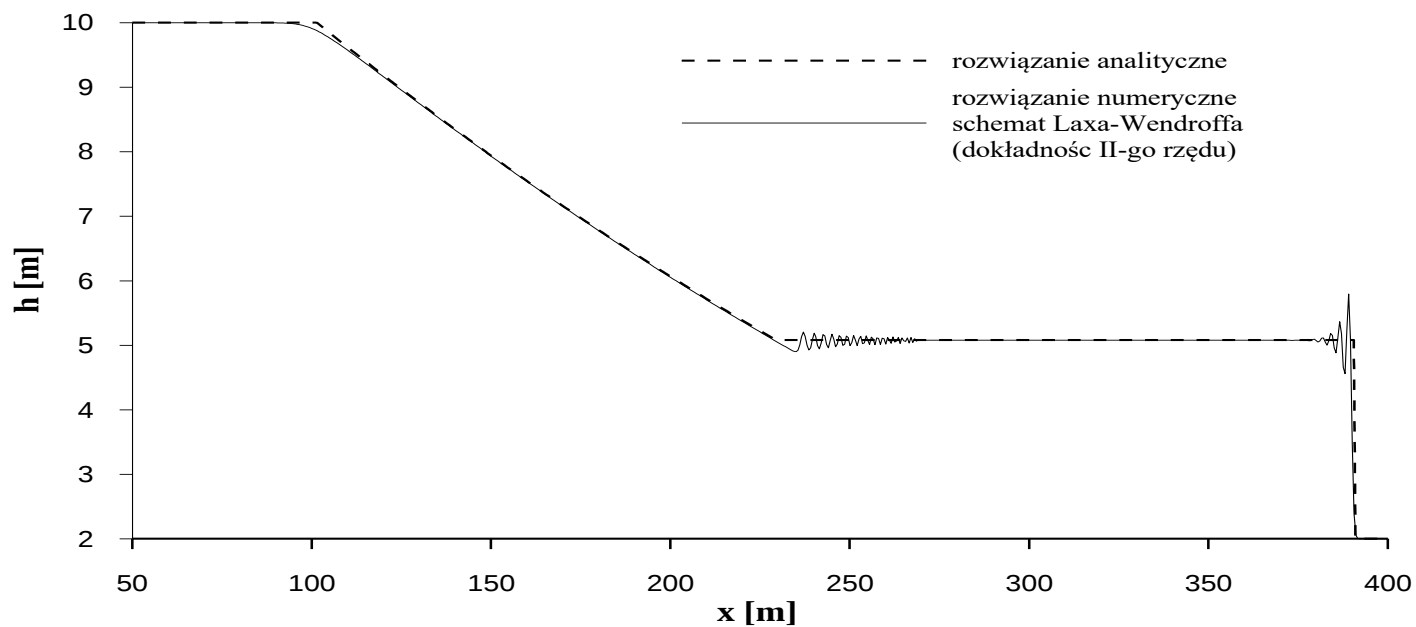
Prędkości dla
czasu $t = 15$ s ($n=0$)



schemat I rzędu

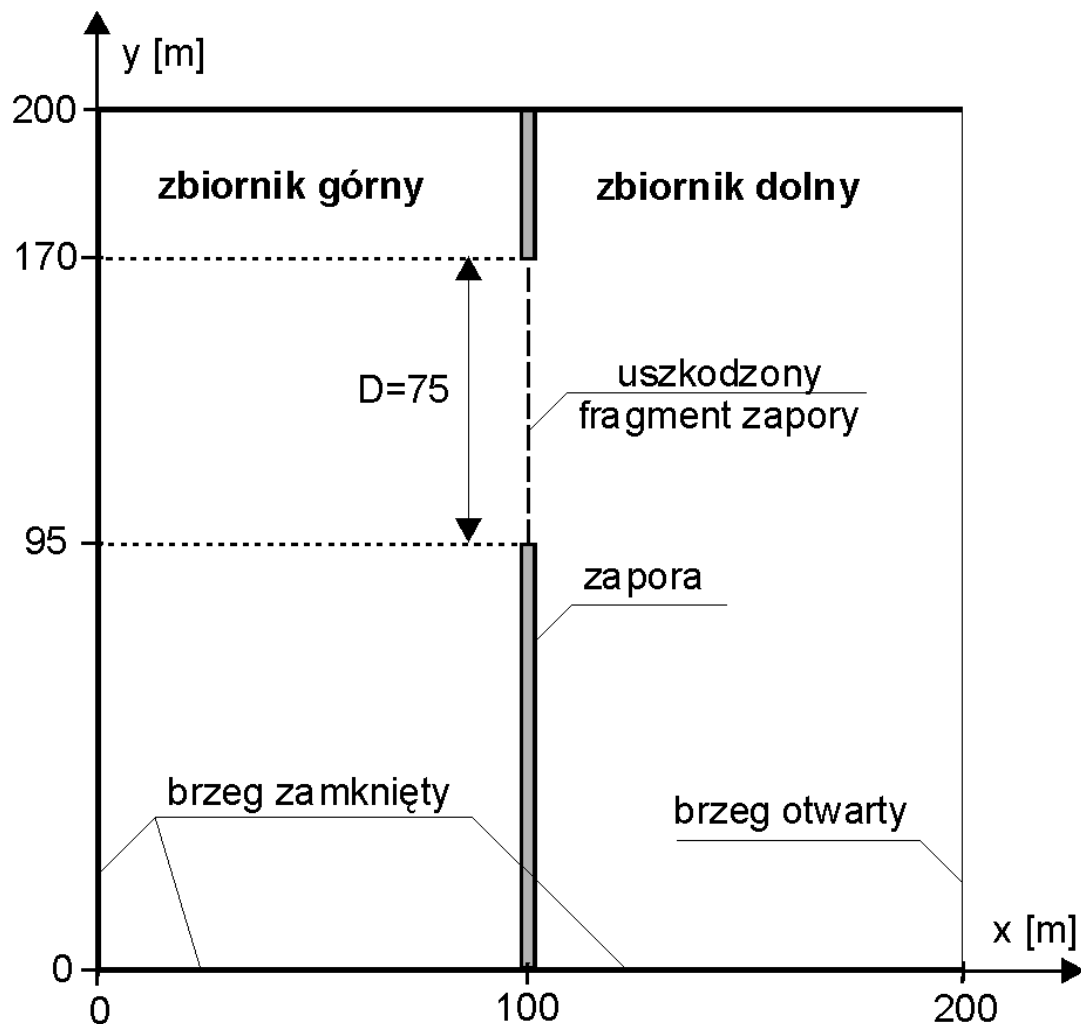


schemat II rzędu



Model dwuwymiarowy – problem „katastrofy zapory”

Obszar rozwiązania 200x200 m



Warunek początkowy

$$h(x = 100, y, 0) = \begin{cases} h_L = 10 & \text{m} \\ h_R = 5 & \text{m} \end{cases}$$

$$q_x(x, y, 0) = q_y(x, y, 0) = 0$$

Warunki brzegowe

$$h(x = 200, y, t \geq 0) = h_R = 5 \text{ m}$$

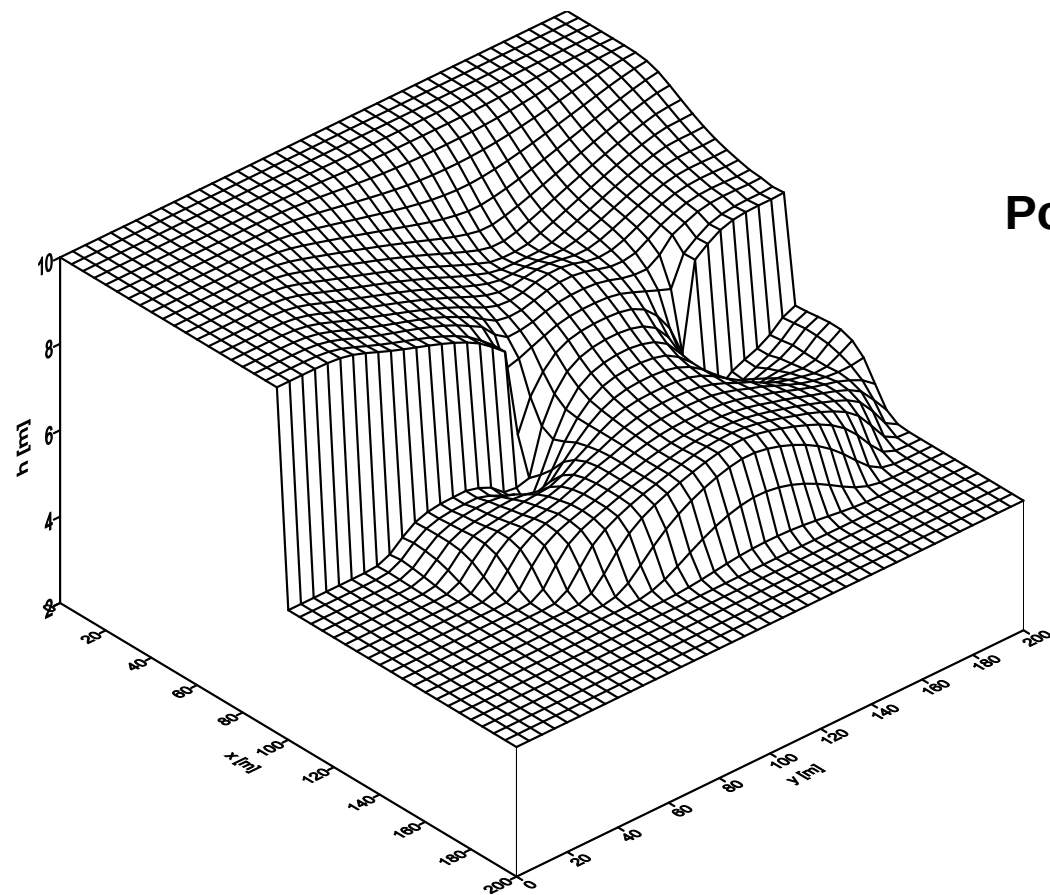
$$\text{brzeg zamknięty } q_n = 0$$

Parametry numeryczne

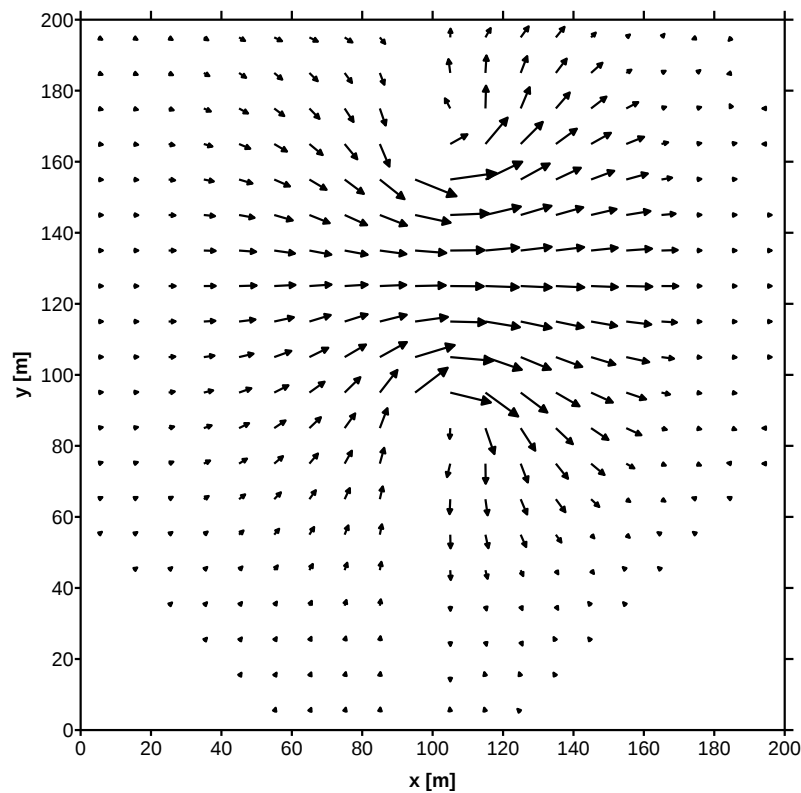
$$\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0.1 \text{ s}$$

Układ zwierciadła wody dla czasu $t = 7.2$ s ($n=0$)

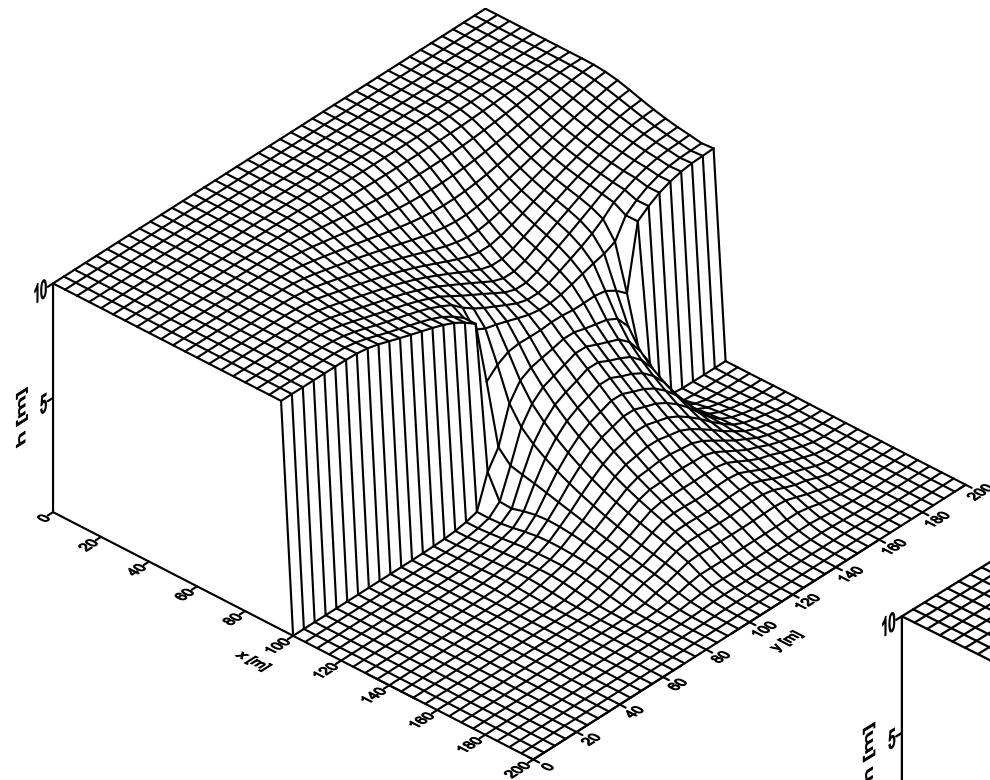


Pole prędkości dla czasu $t = 7.2$ s ($n=0$)

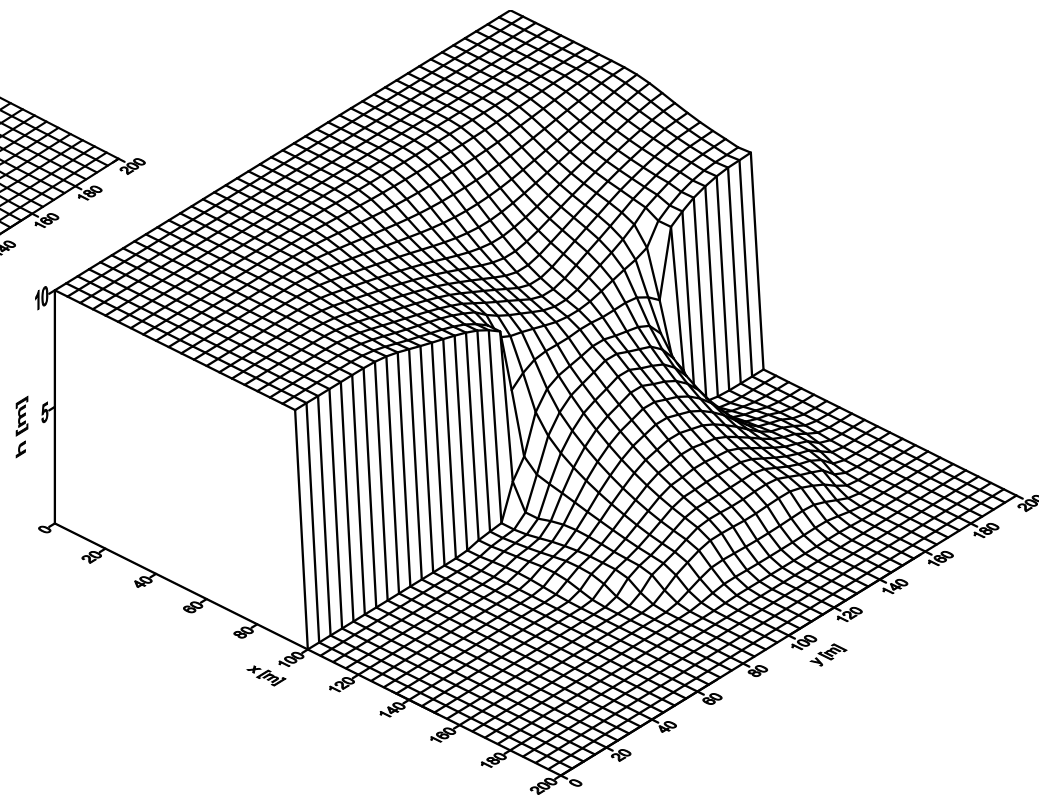


Układ zwierciadła wody dla warunków „suchego dna” po czasie $t=6$ s

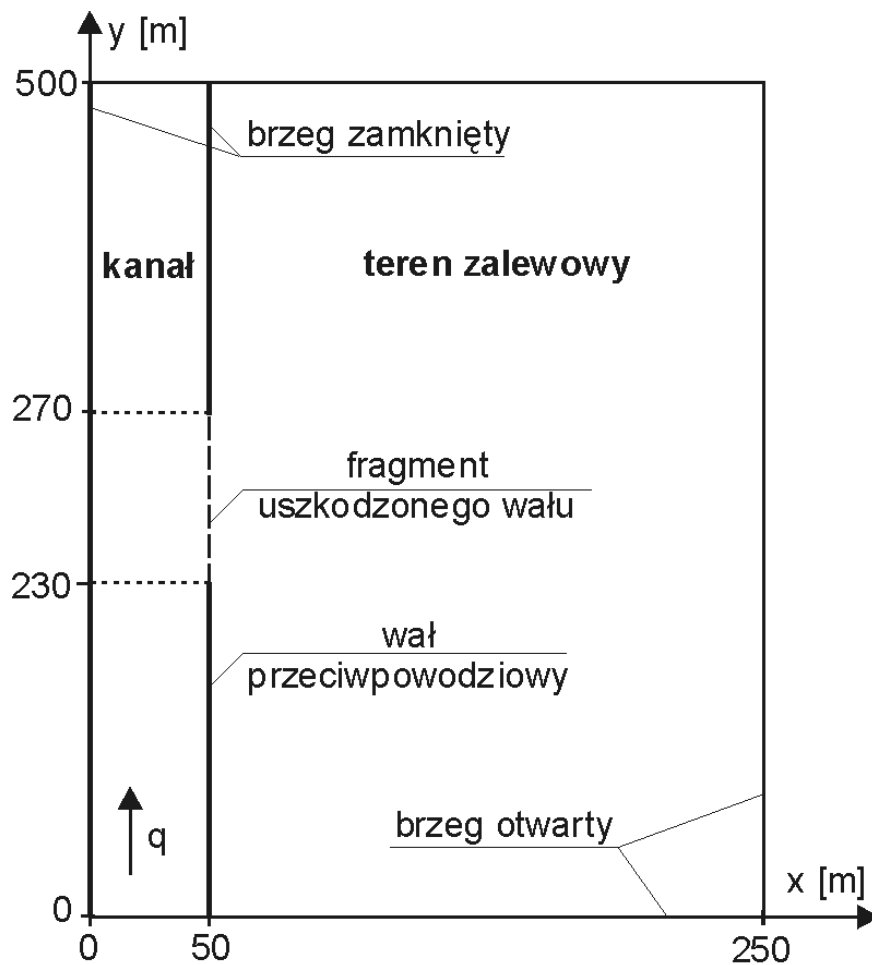
Brak tarcia ($n=0$)



Z uwzględnieniem tarcia ($n=0.025$)



Model dwuwymiarowy – problem „przerwania wału przeciwpowodziowego”



spadek dna kanału: $s=0.0005$
teren zalewowy: $s=0.0$

warunek początkowy

kanał: przepływ ustalony

$$h_p = 5.0 \text{ m}$$

$$q_p = q_x = 13 \text{ m}^2/\text{s}$$

teren zalewowy: „suche dno”

$$h_p = 0.00001 \text{ m}$$

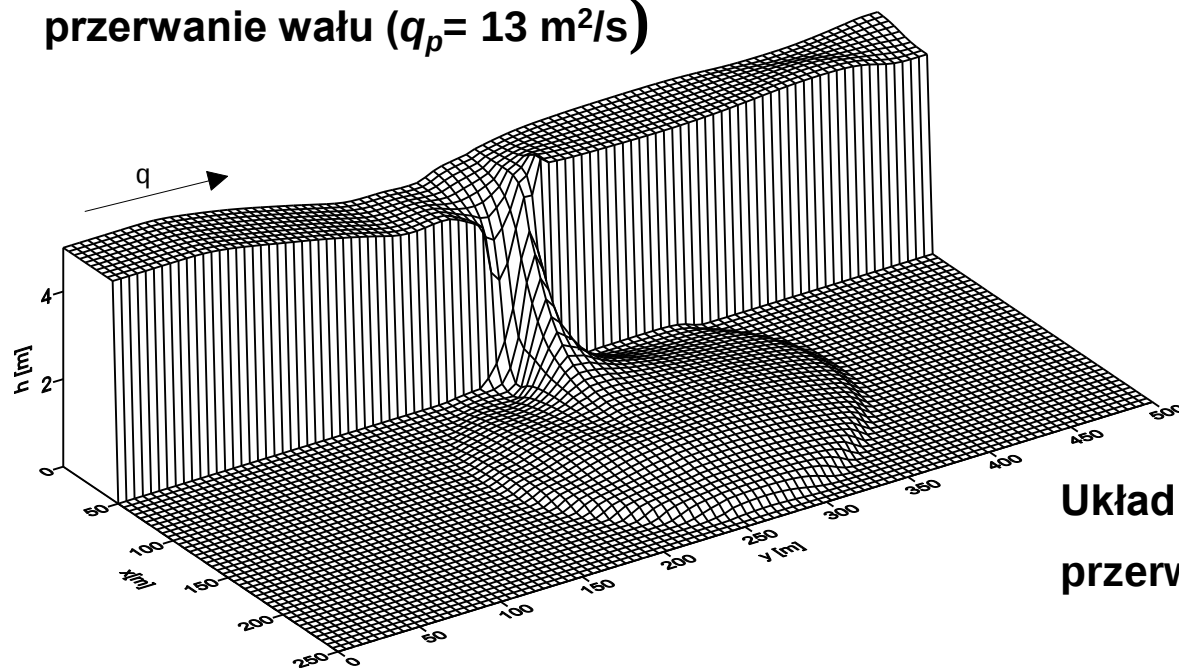
$$q_x = q_y = 0 \text{ m/s}$$

parametry numeryczne

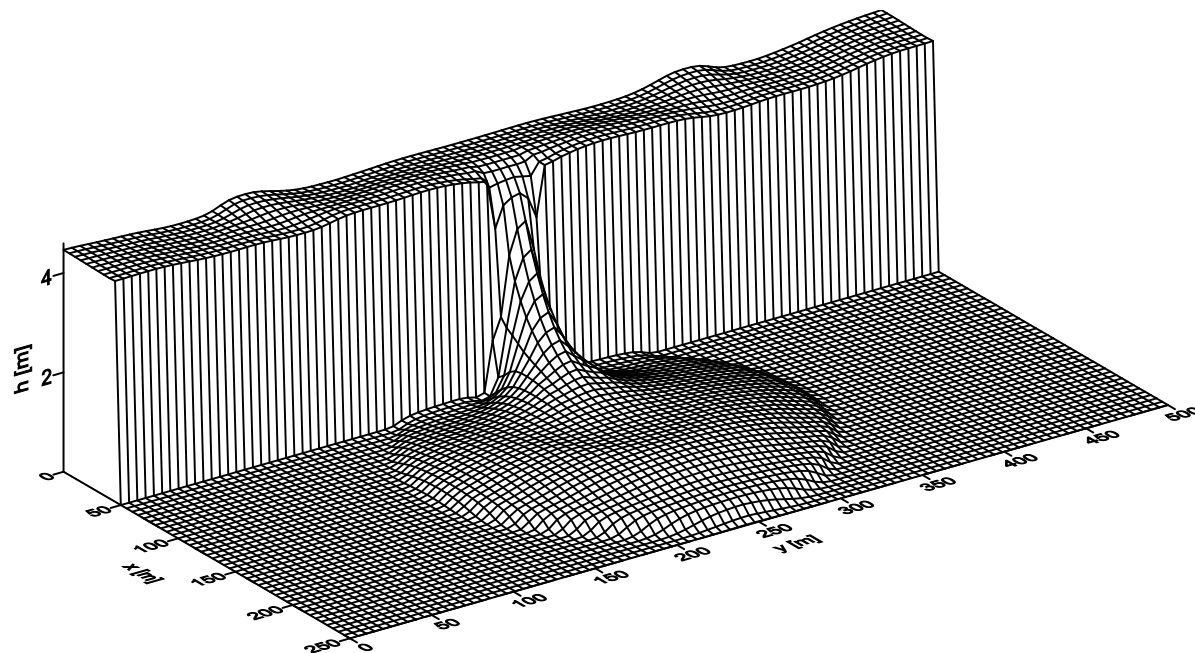
$$\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0.1 \text{ s}$$

Układ zwierciadła wody dla $t = 40$ s
przerwanie wału ($q_p = 13 \text{ m}^2/\text{s}$)



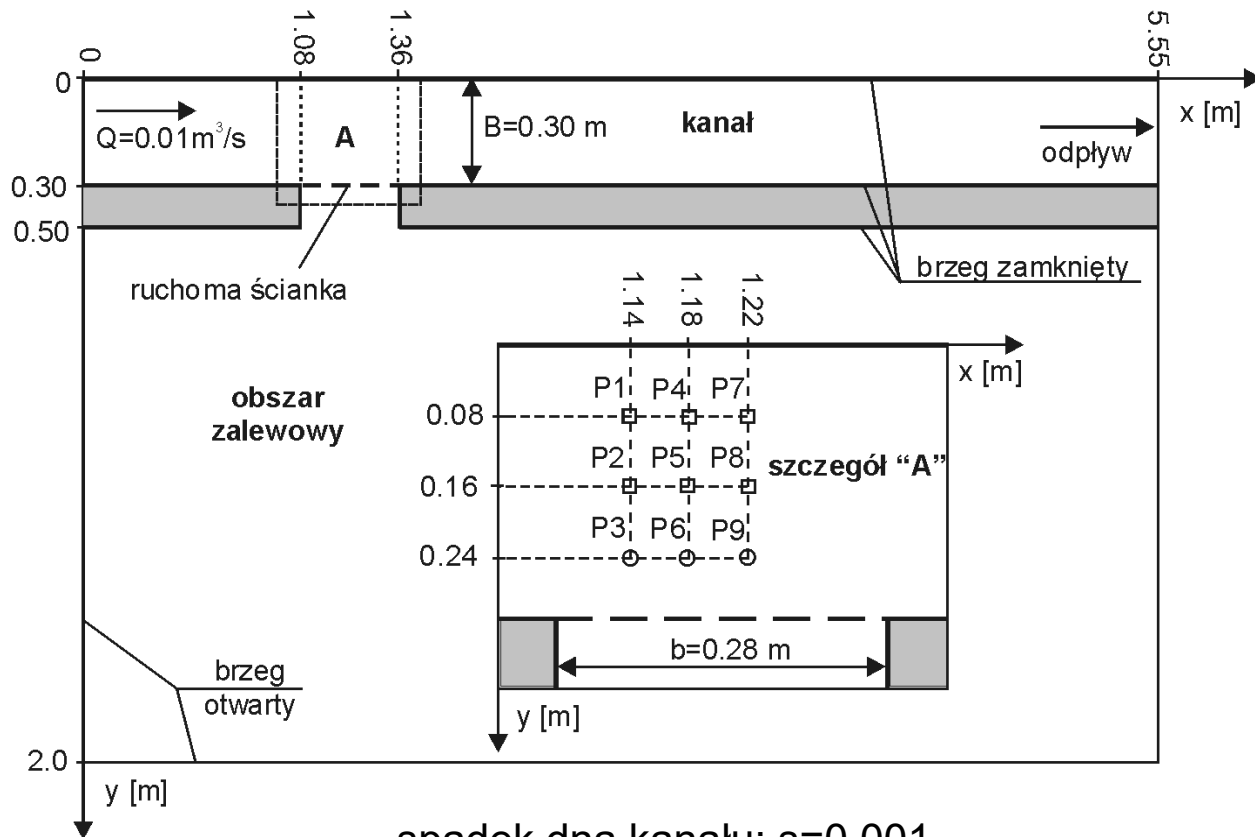
Układ zwierciadła wody dla $t = 40$ s
przerwanie zapory ($q_p = 0$)



Model dwuwymiarowy – problem „przerwania wału przeciwpowodziowego”

Porównanie wyników obliczeń z danymi eksperymentalnymi

wykorzystano opublikowane dane uzyskane podczas eksperymentu przeprowadzonego w laboratorium hydraulicznym Parma University we Włoszech (Aureli i Mignosa, 2002)



spadek dna kanału: $s=0.001$
szorstkość: $n=0.01$

warunek początkowy

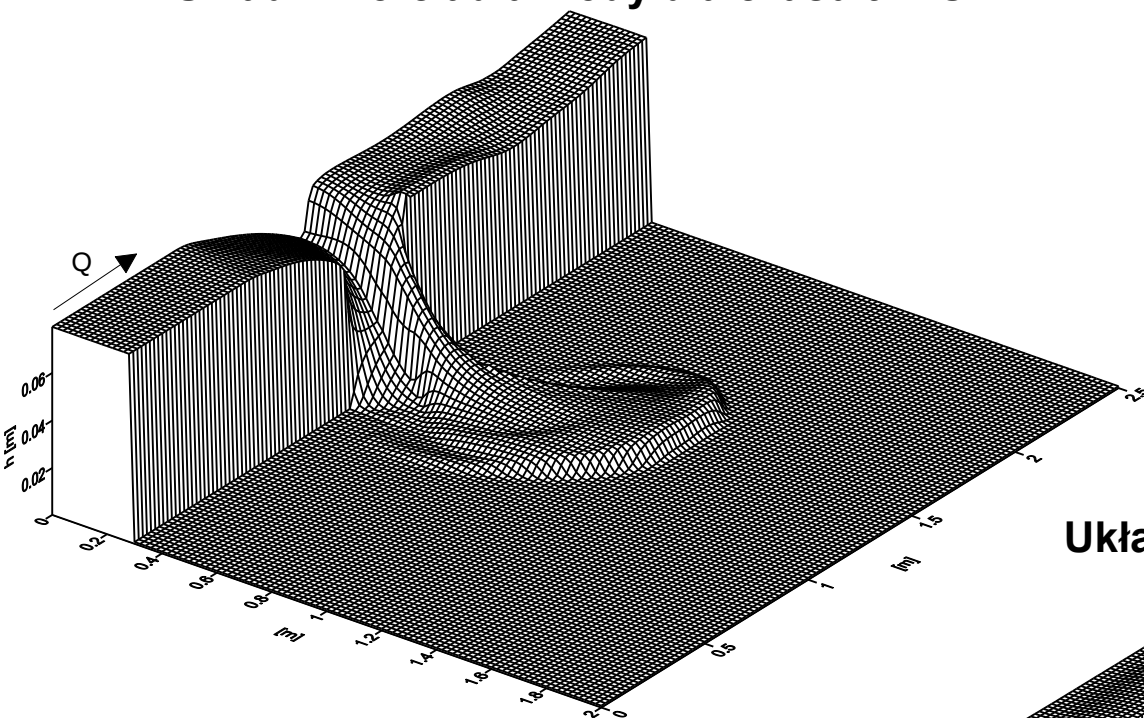
kanal: przepływ ustalony
 $h_p = 0,0794 \text{ m}$
 $Q_p = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$

teren zalewowy: „suche dno”
 $h_p = 0,00001 \text{ m}$
 $u_p = 0 \text{ m/s}$

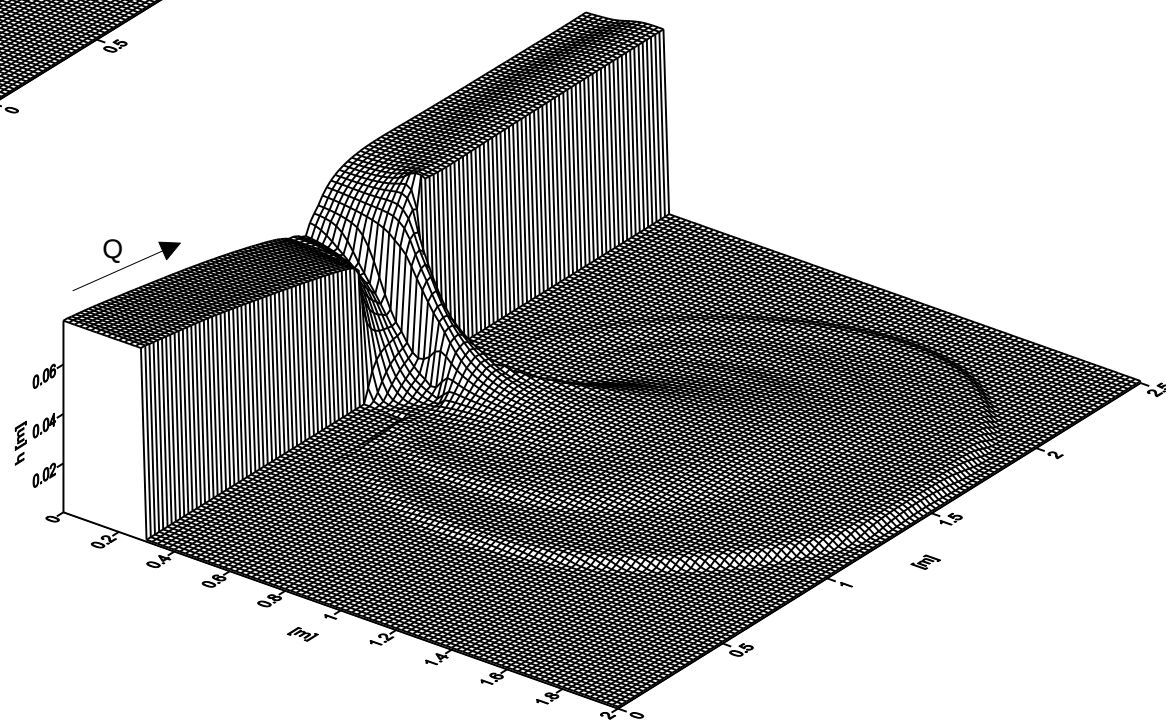
parametry numeryczne

$\Delta x = \Delta y = 0.02 \text{ m}$
 $\Delta t = 0.002 \text{ s}$

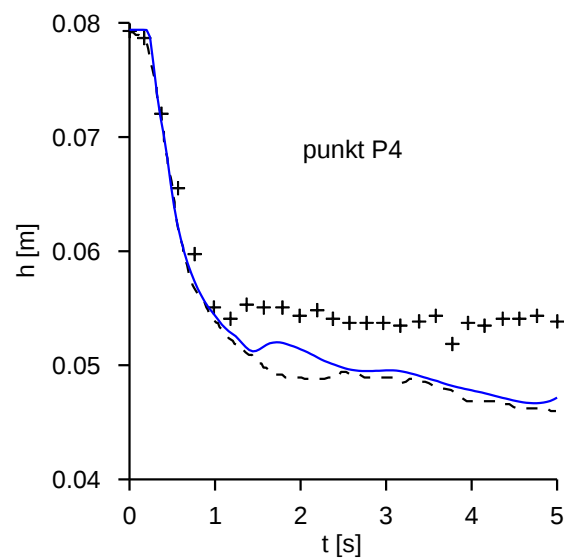
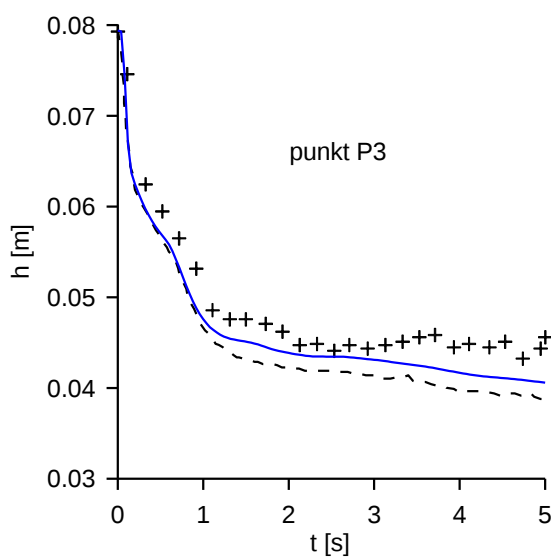
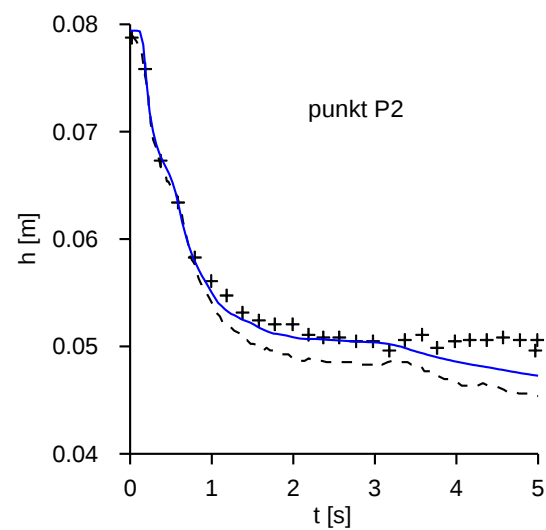
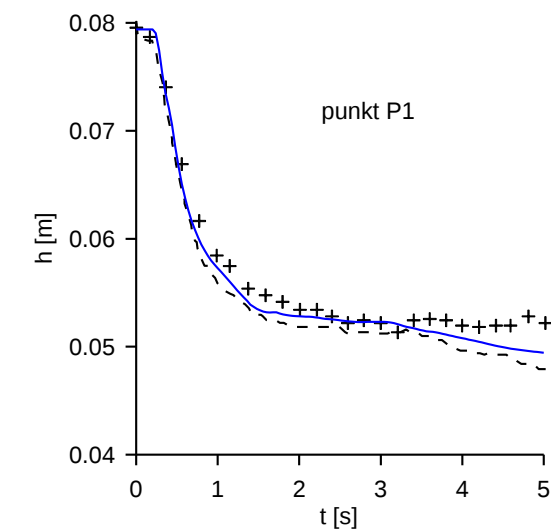
Układ zwierciadła wody dla czasu $t=1$ s



Układ zwierciadła wody dla czasu $t=2$ s



Porównanie pomierzonych i obliczonych głębokości w wybranych punktach



+ + + pomiar
- - - model Aureli i Mignosa
— model własny

Porównanie pomierzonych i obliczonych głębokości w wybranych punktach

