

Rozwiązanie równań Naviera-Stoksa

- Dwuwymiarowe równania Naviera-Stoksa dla płynu lepkiego nieściśliwego (bez sił masowych).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

rów. zachowania masy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

rów. dynamiczne
(kierunek x)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

rów. dynamiczne
(kierunek y)

W zapisie wektorowym

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

rów. zachowania masy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

rów. dynamiczne

- Podczas numerycznego rozwiązywania układu równań NS dla płynu nieściśliwego można wyróżnić następujące problemy:
 - Równania dynamiczne (w kierunku x oraz y) zawierają **nieliniowe człony adwekcyjne**, które są źródłem komplikacji numerycznych.
 - Trzy równania układu są sprzężone ze sobą poprzez dwie składowe prędkości (u oraz v). Jednakże **ciśnienie nie występuje w równaniu zachowania masy**. Tak więc, nie ma bezpośredniego sprzężenia pomiędzy ciśnieniem i prędkością.
 - Wobec tego jeśli nie posiadamy dokładnej informacji na temat pola ciśnienia w równaniu dynamicznym, to w rozwiązaniu będą generowane błędy, na skutek nie spełnienia równania ciągłości.
- Wspomniane problemy (związek ciśnienie-prędkość oraz nieliniowość równań) można wyeliminować stosując odpowiednią metodę numerycznego rozwiązywania jak np. **metoda korekcji prędkości (metoda Chorina)** czy **metoda sztucznej ściśliwości**.

Metoda korekcji prędkości

Aproksymacja czasowa – za pomocą jawnego schematu Eulera

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n$$

rów. dynamiczne

Δt – krok czasowy

$n, n+1$ – indeks poziomu czasowego odpowiadający czasowi $t, t + \Delta t$

- Schemat jawny wymaga użycia **ograniczonego kroku czasowego Δt** . Wielkość kroku wynika z kryterium stabilności schematu.

Warunek stabilności adwekcyjnej
(Courant-Fredrichs-Lewy (CFL))

$$\frac{\Delta t \cdot u}{\Delta x} < 1$$

$$\frac{\Delta t \cdot v}{\Delta y} < 1$$

Warunek stabilności dyfuzyjnej

$$\frac{\nu \cdot \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{4}$$

$$\Delta x = \Delta y$$

Metoda korekcji prędkości jest realizowana poprzez zastosowanie algorytmu „predyktor-korektor” w dwóch podstawowych krokach:

- W pierwszym kroku (krok predykcji) rozwiązywane jest uproszczone równanie dynamiczne bez członu ciśnieniowego:

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t \left(-\mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n \right)$$

gdzie: $\mathbf{v}^*$ - aktualna wartość prędkości

- W drugim kroku wykonywana jest korekta prędkości poprzez rozwiązanie równania uwzględniającego tylko wpływ ciśnienia:

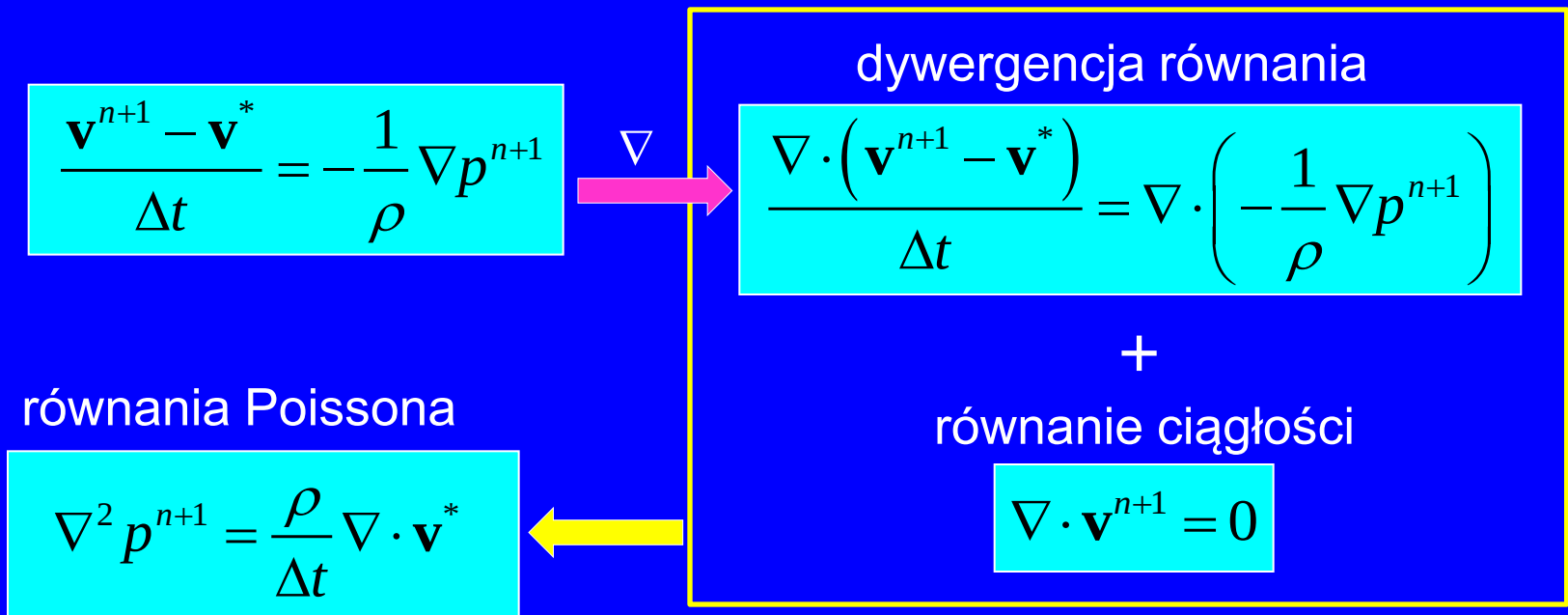
$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1}$$

gdzie: $\mathbf{v}^{n+1}$ końcowa wartość prędkości w czasie $t + \Delta t$

- Wartość ciśnienia jest wyznaczona poprzez rozwiązanie **równania Poissona**:

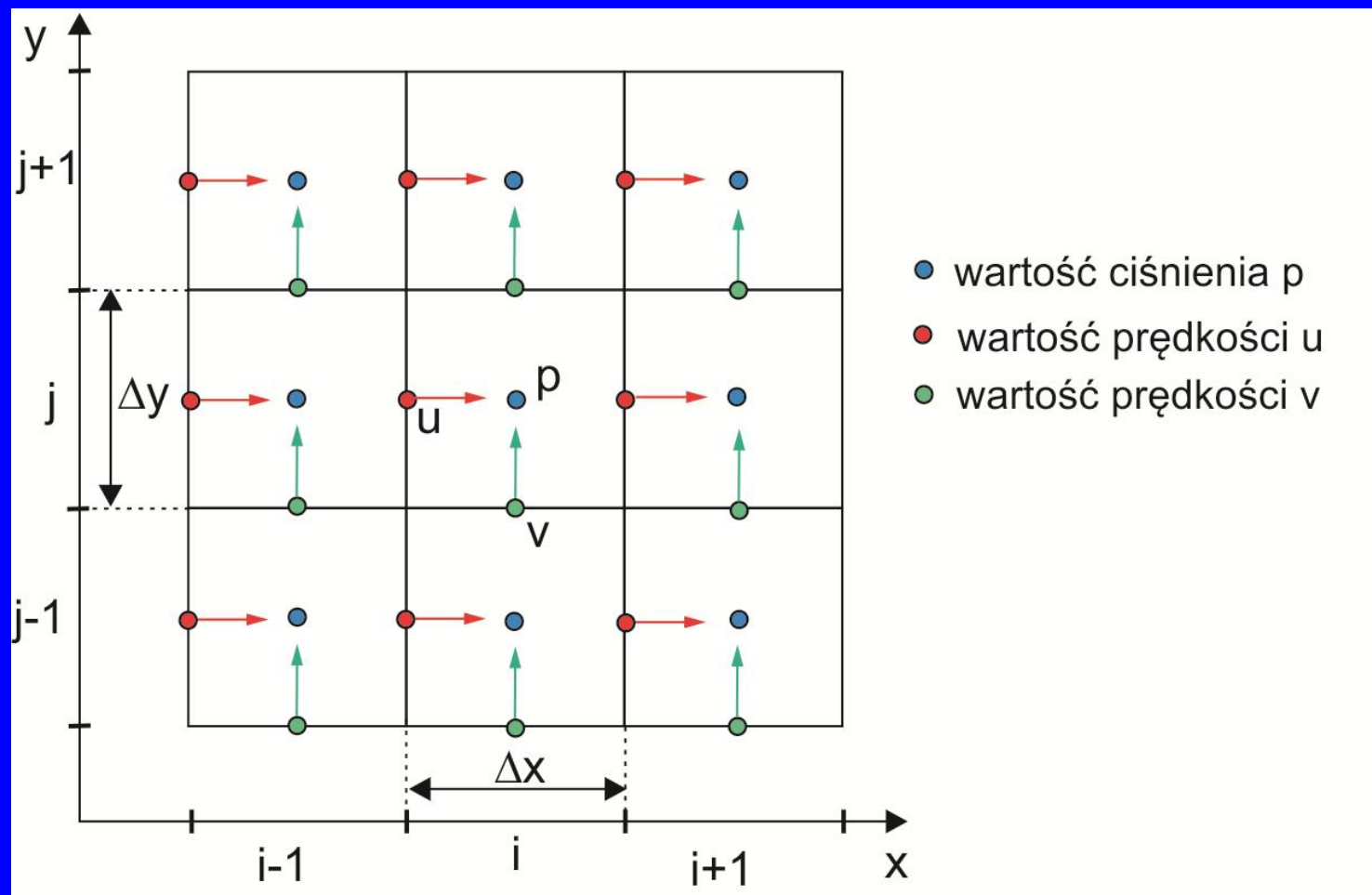
$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

- Wyprowadzenie równania Poissona



Dyskretyzacja i aproksymacja przestrzenna (przypadek 2D)

- Człony adwekcyjne oraz dyfuzyjne w równaniach dynamicznych aproksymowane są za pomocą schematu różnic skończonych na tzw. „**siatce przestawnej**” (*staggered-grid*)



Aproksymacja równania dynamicznego – składowa prędkości u

$$u^* = u^n + \Delta t \left(-u \frac{\partial u^n}{\partial x} - v \frac{\partial u^n}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \right)$$

gdzie:

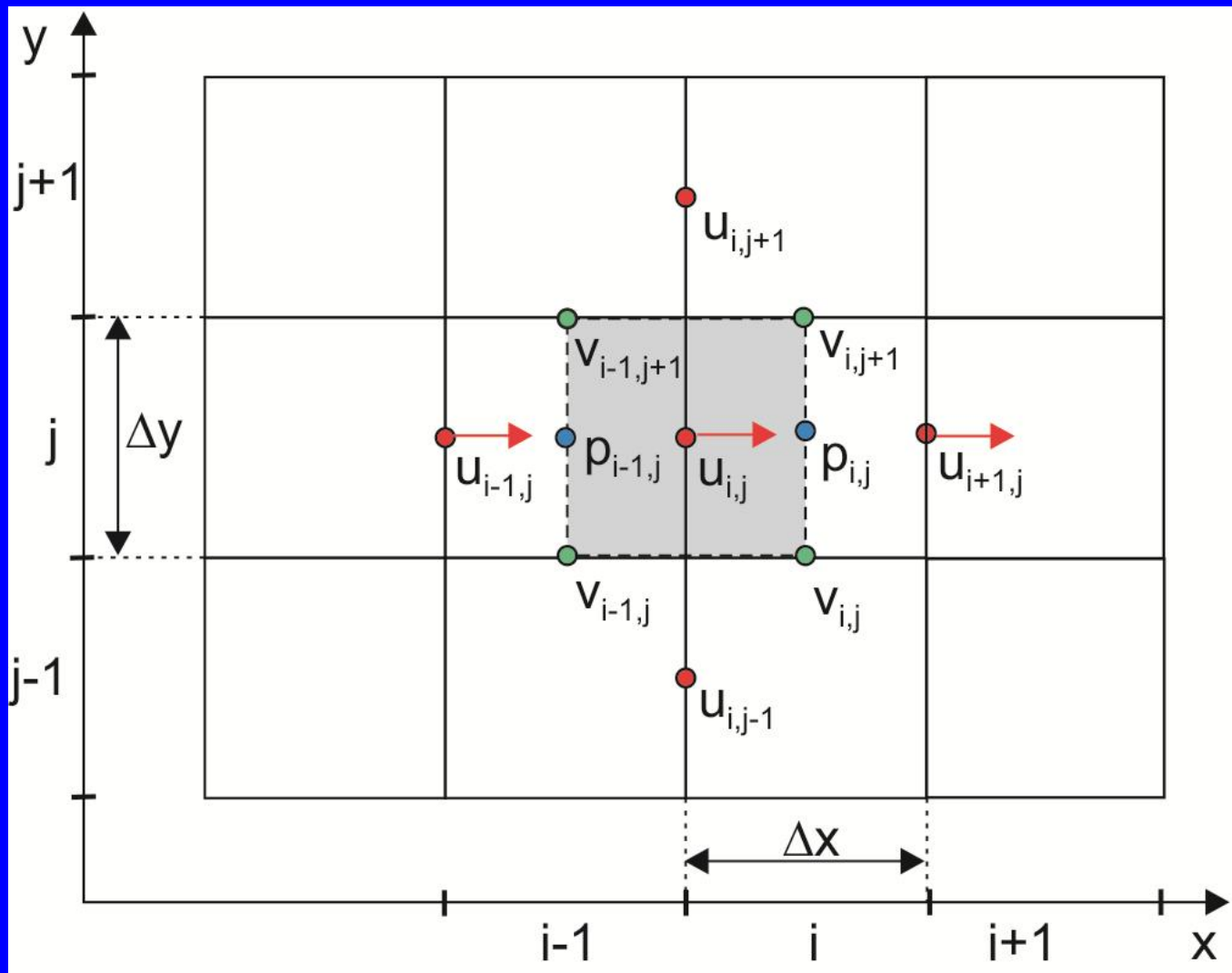
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} = v_s \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$v_s = 0.25(v_{i-1,j} + v_{i,j} + v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1})$$



Schemat „siatki przestrzennej” oraz dyskretyzacja zastosowana w równaniu dynamicznym dla składowej prędkości u (kierunek x)

Aproksymacja równania dynamicznego – składowa prędkości v

$$v^* = v^n + \Delta t \left(-u \frac{\partial v^n}{\partial x} - v \frac{\partial v^n}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \right)$$

gdzie:

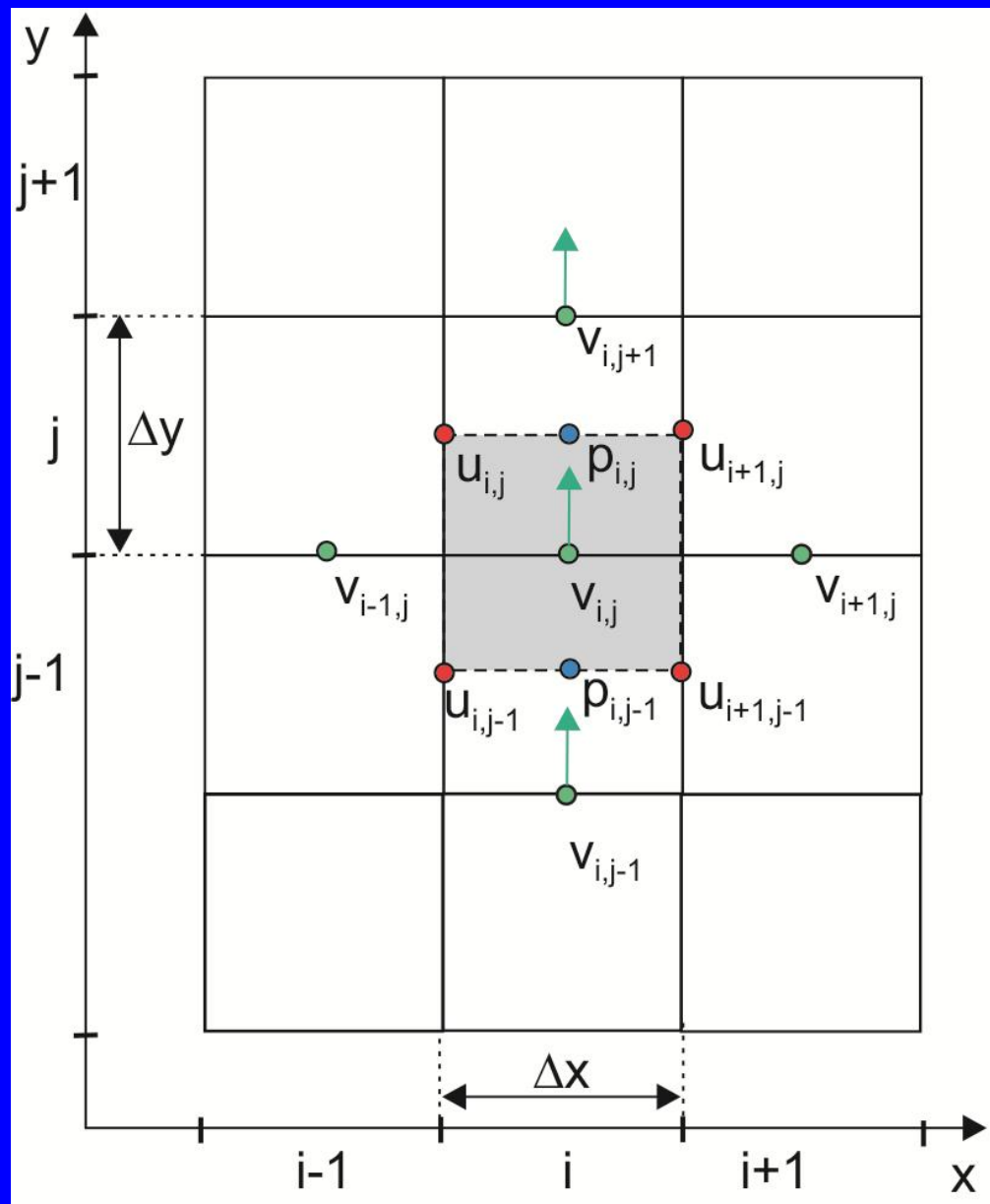
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = u_s \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$u_s = 0.25 (u_{i,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j})$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$



Schemat „siatki przestrzennej” oraz dyskretyzacja zastosowana w równaniu dynamicznym dla składowej prędkości v (kierunek y)

Rozwiązanie równania Poissona

$$\nabla^2 p^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

w obszarze prostokątnym o wymiarach $L_x \times L_y$ z warunkiem brzegowym typu Dirichleta (zadana funkcja $p(x, y)$ na brzegu obszaru).

- Aproksymacja pochodnych:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*}{\Delta y}$$

- Po podstawieniu do równania i założeniu $\Delta x = \Delta y = \Delta$ otrzymujemy:

$$\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta^2} = F_{i,j}$$

gdzie:

$$F_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*}{\Delta}$$

- Po pomnożeniu przez Δ^2 otrzymujemy:

$$p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1} - 4p_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}\Delta^2$$

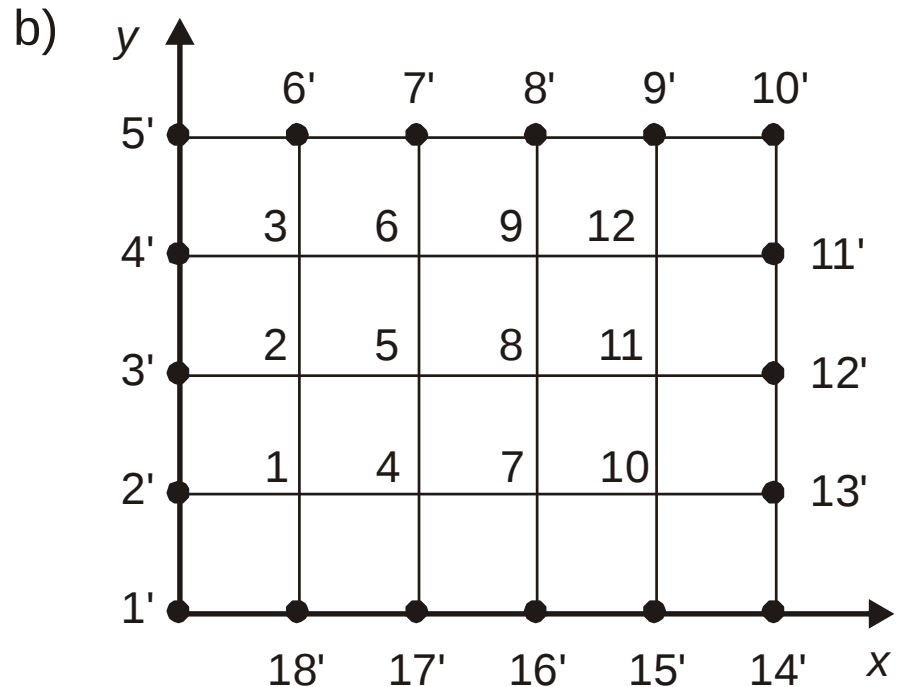
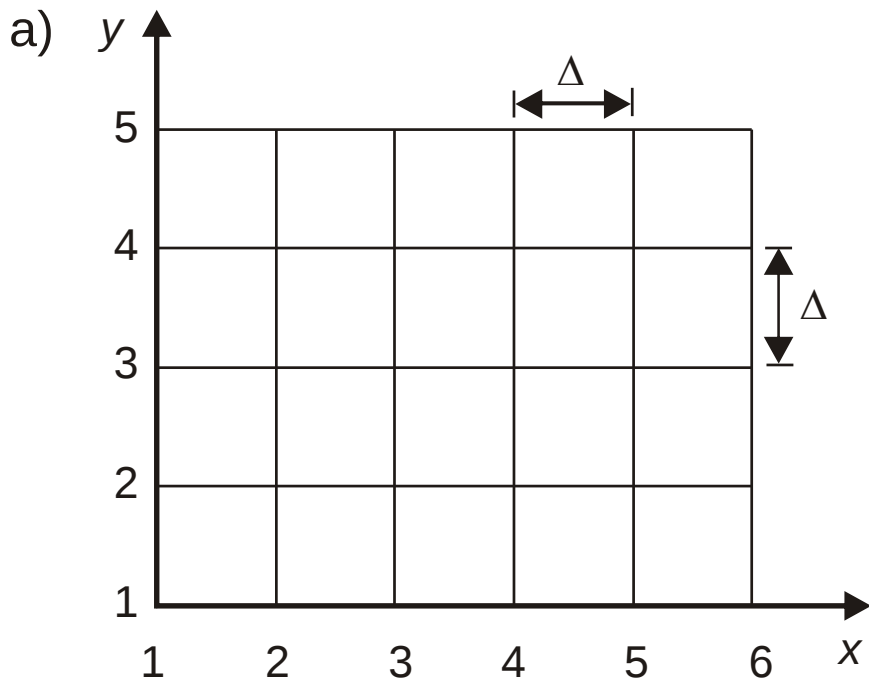
- Powyższe równanie jest równaniem aproksymującym równanie Poissona w typowym węźle mającym pełne czteropunktowe otoczenie.

Równanie takie można napisać dla każdego węzła wewnętrznego, w rezultacie powstaje układ równań o wymiarze $(N - 2) \times (M - 2)$, w którym liczba niewiadomych wartości funkcji p równa jest liczbie równań.

- **Przykład konstrukcji układu równań**

Obszar rozwiązania zawiera $N = 5$ wierszy i $M = 6$ kolumn.
Odległości między węzłami są równe $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

W węzłach leżących na brzegu i oznaczonych numerami z indeksem „prim” zadane są wartości funkcji p .



Przyjęty system numeracji węzłów

- Dla każdego węzła wewnętrznego piszemy równanie aproksymujące. W rezultacie otrzymujemy układ 12 równań zawierających 12 niewiadomych. Układ ten zapisany w notacji macierzowej ma postać:

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{W}$$

gdzie: $\mathbf{A}$ – macierz współczynników układu,
 $\mathbf{p}$ – wektor niewiadomych (węzłowe wartości funkcji p),
 $\mathbf{W}$ – wektor wyrazów wolnych.

A

-4	1		1								
1	-4	1		1							
	1	-4			1						
1			-4	1		1					
	1		1	-4	1		1				
		1		1	-4			1			
			1			-4	1		1		
				1		1	-4	1		1	
					1		1	-4			1
						1			-4	1	
							1		1	-4	1
								1		1	-4

p

p_1
p_2
p_3
p_4
p_5
p_6
p_7
p_8
p_9
p_{10}
p_{11}
p_{12}

W

$-p_{2'} - p_{18'} + \Delta^2 F_1$
$-p_{3'} + \Delta^2 F_2$
$-p_{4'} - p_{6'} + \Delta^2 F_3$
$-p_{17'} + \Delta^2 F_4$
$\Delta^2 F_5$
$-p_{7'} + \Delta^2 F_6$
$-p_{16'} + \Delta^2 F_7$
$\Delta^2 F_8$
$-p_{8'} + \Delta^2 F_9$
$-p_{13'} - p_{15'} + \Delta^2 F_{10}$
$-p_{12'} + \Delta^2 F_{11}$
$-p_{9'} - p_{11'} + \Delta^2 F_{12}$

- Cechy układu równań:
 - macierz układu jest stała,
 - macierz układu jest rzadka,
 - macierz układu jest pasmowa.
- Układ może mieć duży rozmiar więc do jego rozwiązania zwykle stosuje się metody iteracyjne.

Najprostszy proces iteracyjny, tzw. metoda Jacobiego, ma postać:

$$p_l^{(m+1)} = \frac{-\sum_{k=1}^{l-1} a_{lk} \cdot p_k^{(m)} - \sum_{k=l+1}^K a_{lk} \cdot p_k^{(m)} + w_l}{a_{ll}} \quad (l = 1, 2, \dots, K)$$

gdzie: $K = (N-2) \times (M-2)$ – wymiar układu równań,

m – indeks iteracji,

a_{lk} – element macierzy współczynników $\mathbf{A}$,

p_l – element wektora niewiadomych $\mathbf{p}$,

w_l – element wektora prawych stron $\mathbf{W}$,

- Wyznaczenie wartości prędkości u^* i v^* , a następnie wartości ciśnienia p poprzez rozwiązanie równania Poissona pozwala na korektę wartości prędkości według relacji:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}$$

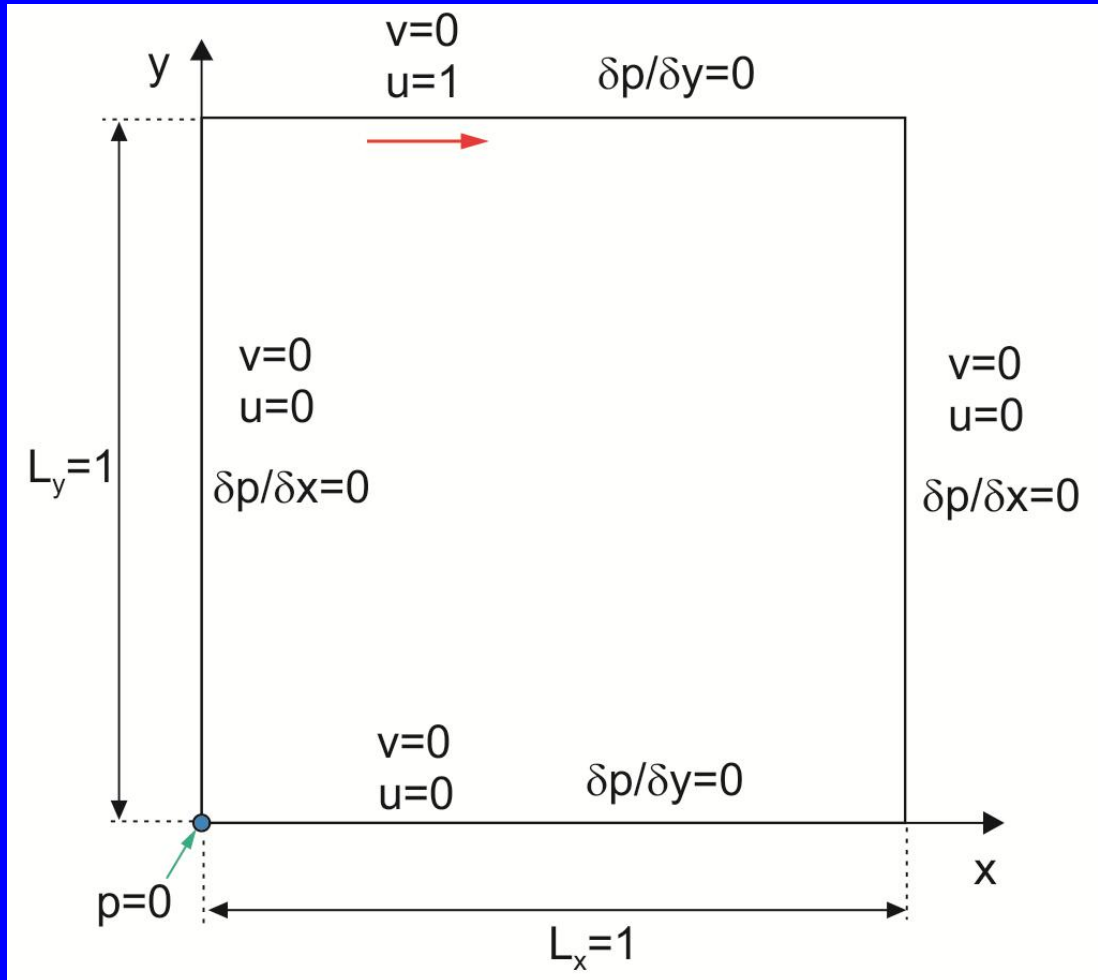
gdzie:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y}$$

- Podczas rozwiązywania równań Naviera-Stoksa metodą korekcji prędkości rozwiązanie równania Poissona stanowi największe obciążenie pracy komputera.

Przykład rozwiązania

Dwuwymiarowy laminarny przepływ płynu nieściśliwego w kawernie
(„*Lid-driven cavity flow problem*”)



Dane:

$$N=M=100$$

$$\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0.002 \text{ s}$$

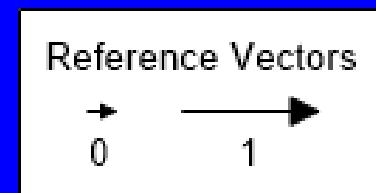
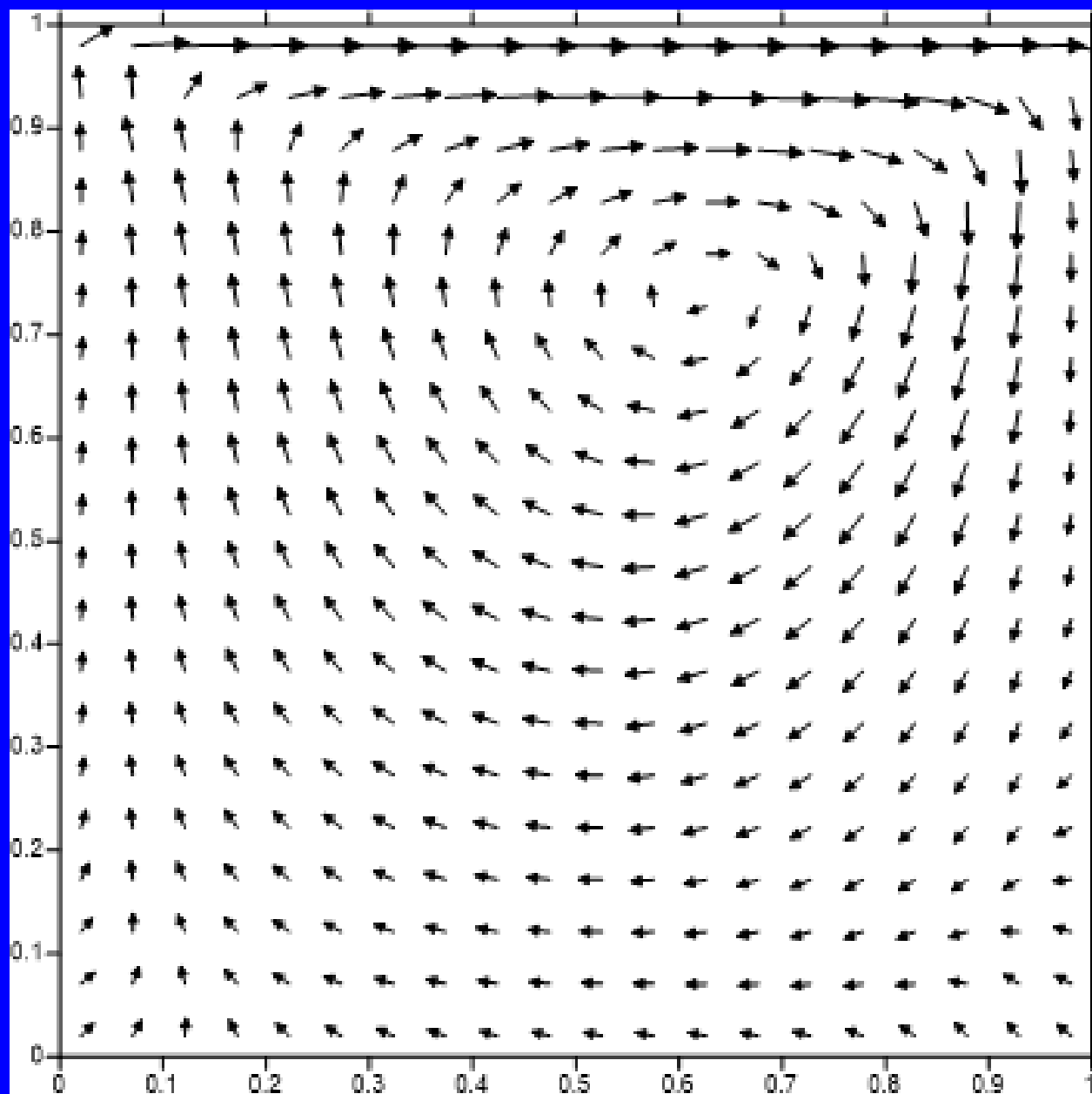
$$\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$$

Liczba Reynoldsa:

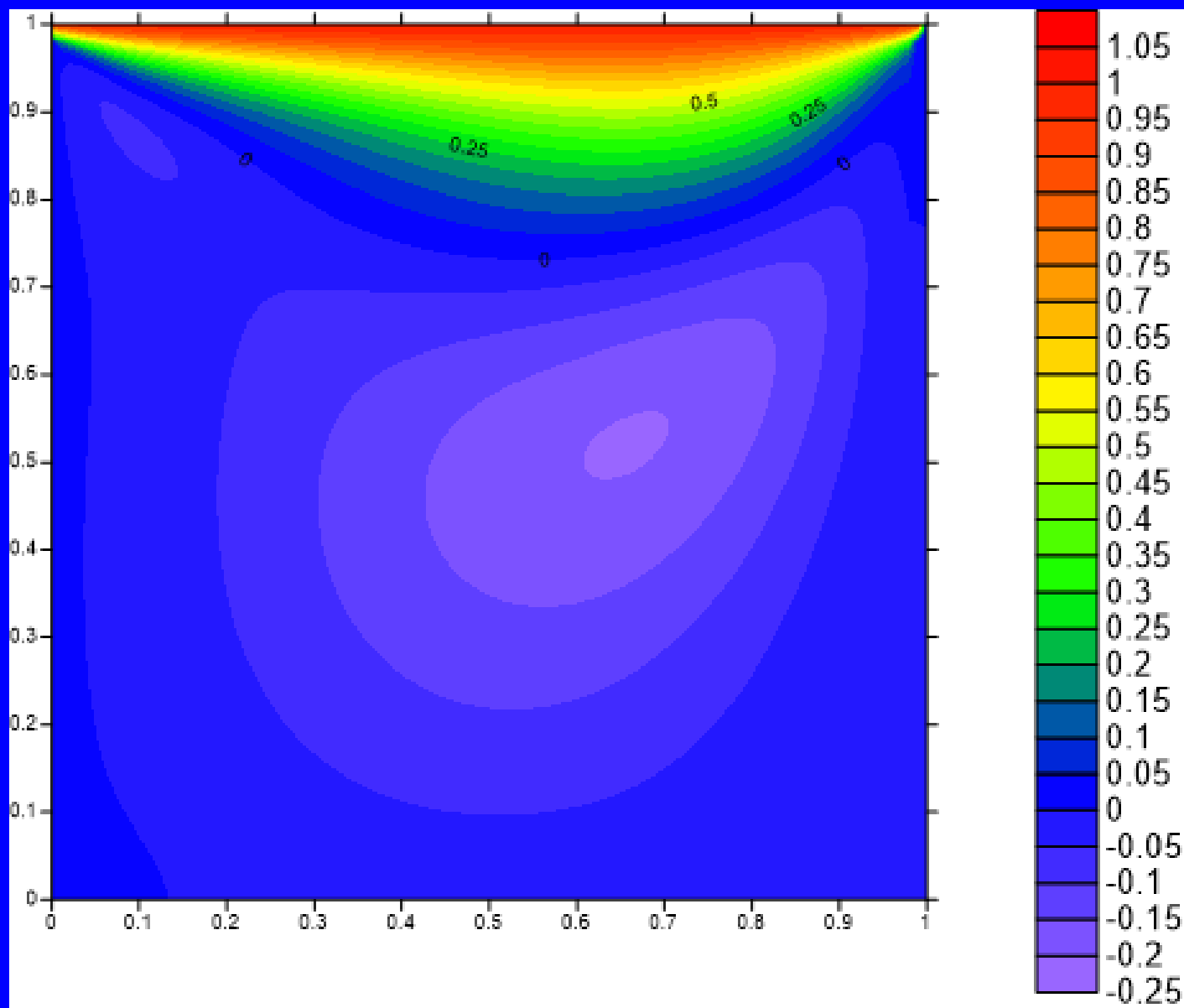
$$Re = \frac{L \cdot U}{\nu}$$

$$Re = \frac{1 \cdot 1}{0.01} = 100$$

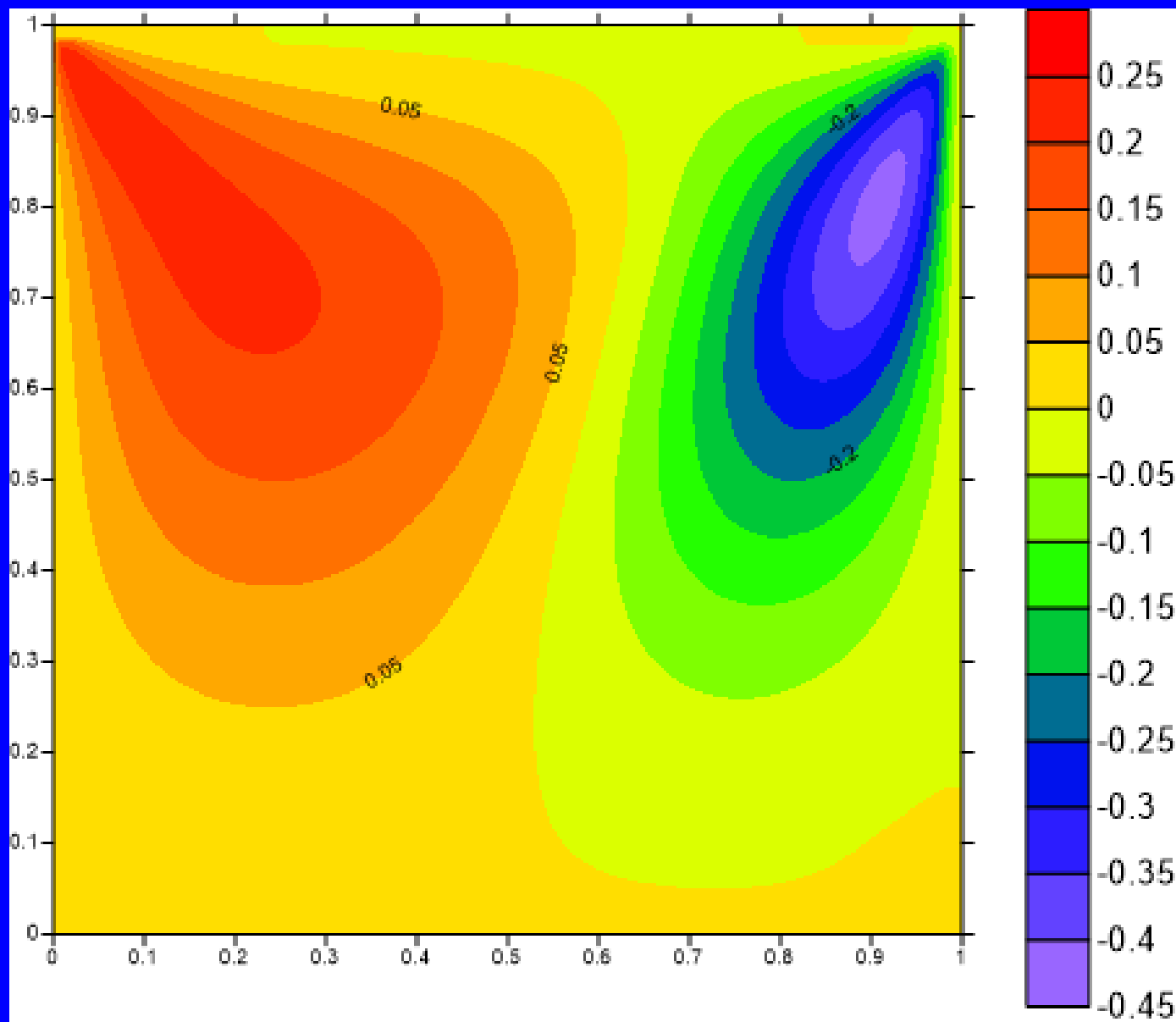
Geometria obszaru oraz zadane warunki brzegowe



Rozkład pola prędkości



Składowa prędkości U (w kierunku x)



Składowa prędkości V (w kierunku y)