

DYNAMIKA PŁYNÓW

Fizyczne własności płynów

- **Płyn** jest charakteryzowany jako substancja, która może podtrzymywać i przenosić naprężenia ścinające podczas ruchu (przepływu). Natomiast, nie może przenosić naprężeń ścinających kiedy pozostaje w spoczynku (w przeciwieństwie do np. ciał stałych).
- Płyny (ciecze oraz gazy) składają się z molekuł w stanie chaotycznego ruchu (np. 1 mm³ powietrza w temp. 15° C oraz ciśnieniu 100 kPa zawiera ok. 3×10^{16} molekuł).
- Założenie, że własności płynów takie jak prędkość, ciśnienie, itd. zmieniają się w sposób ciągły w czasie i przestrzeni (**hipoteza continuum**) pozwala wyprowadzić równania opisujące ruch płynów.

- Stan termodynamiczny płynu jest jednoznacznie definiowany przez dwie niezależne wielkości termodynamiczne (np. dla powietrza odpowiednie będą **temperatura i ciśnienie** lub **energia wewnętrzna i gęstość**).
- W przypadku powietrza w warunkach normalnego ciśnienia i temperatury związek podstawowych wielkości termodynamicznych można wyrazić za pomocą **równania stanu gazu doskonałego**

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

p – ciśnienie [kPa]

ρ – gęstość [kg/m³]

T – temperatura bezwzględna [K]

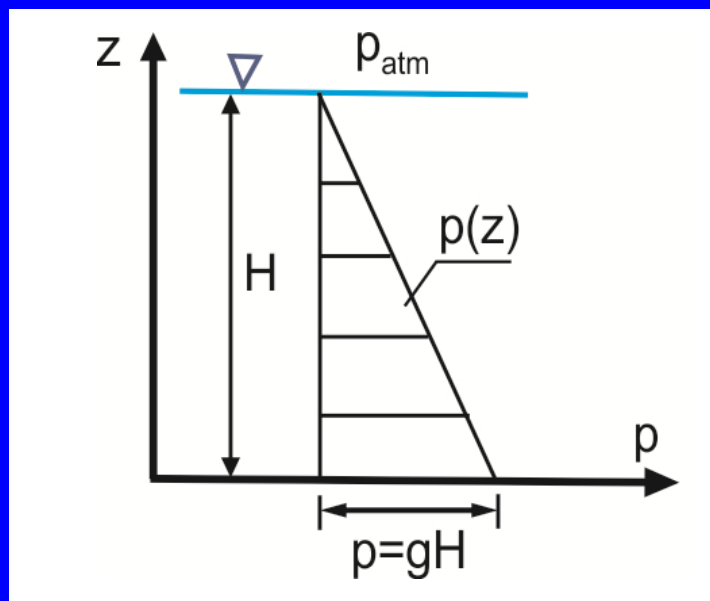
R – stała gazowa powietrza, $R= 0.287$ [kJ/(K·kg)]

- W przypadku wody pozostającej w spoczynku, siła wynikająca z gradientu ciśnienia działająca na małą objętość płynu jest równoważona przez siłę wynikającą z grawitacji, związek w postaci **równania hydrostatyki**

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g = 0$$

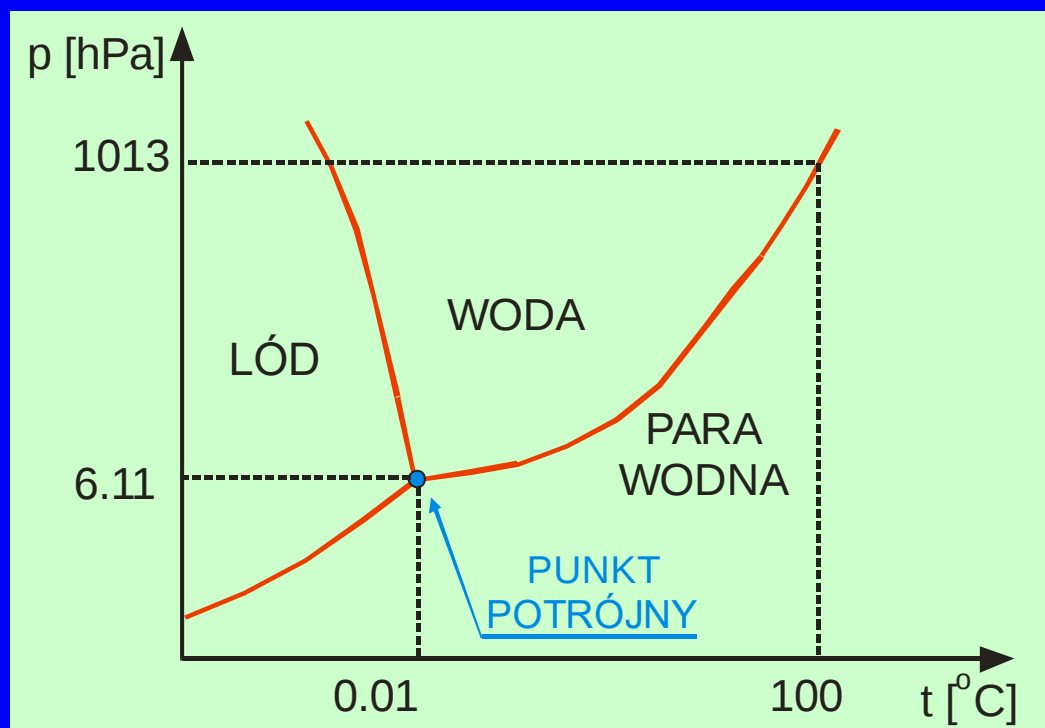
z – zmienna przestrzenna w kierunku pionowym [m]

g – przyspieszenie ziemskie [m/s²]



Rys. Hydrostatyczny rozkład ciśnienia

- **Zmiany temperatury** płynu mogą być spowodowane:
 - transportem ciepła jeśli płyn jest w kontakcie z ciałem o innej temp.
 - kompresją płynu (np. bardzo duża prędkość przepływu)
 - wydzielaniem lub pobieraniem utajonego ciepła podczas przemian fazowych (kondensacji, parowania, wrzenia, itd.)



Punkt potrójny

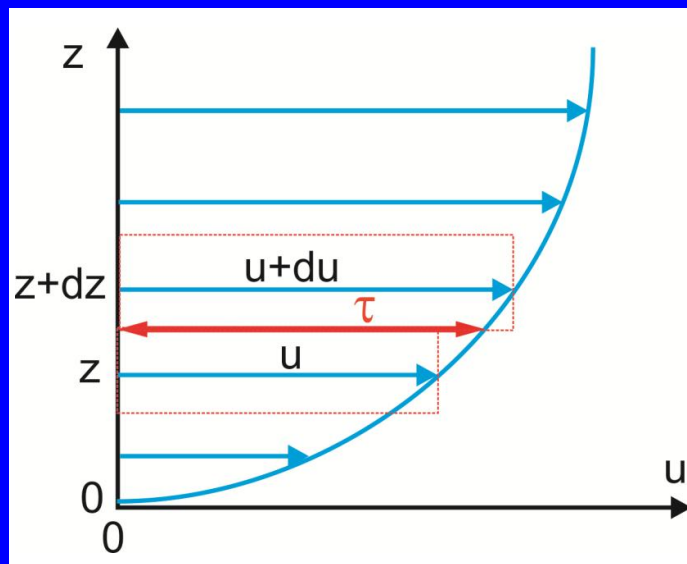
stan w którym substancja występuje jednocześnie w trzech stanach skupienia

Punkt potrójny dla wody:

- temp. 0.01°C
- ciśnienie 6.117 hPa

Rys. Wykres równowagi faz dla wody

- Podczas przepływu siły tarcia wewnętrznych powodują powstawanie oporów ruchu przeciwko przemieszczeniom pod wpływem działania sił zewnętrznych.
- Elementy płynu poruszają się z różnymi prędkościami wymieniając się wzajemnie ilością ruchu, w konsekwencji powstają naprężenia styczne (ścinające) τ .



- W przypadku płynu będącego w ruchu, jego zdolność do przenoszenia naprężeń stycznych implikuje własność **lepkość dynamiczną**.

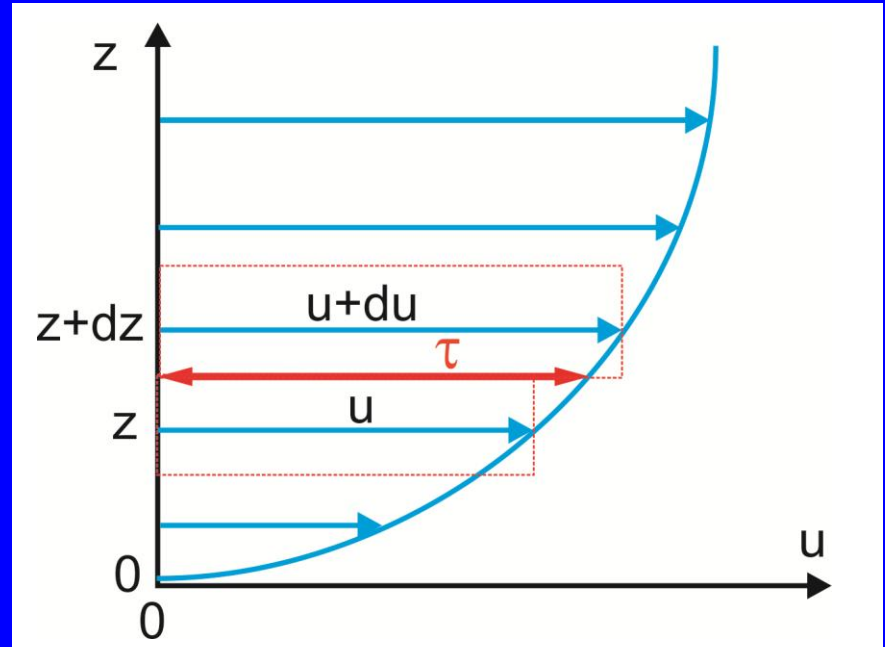
- Na podstawie badań empirycznych stwierdzono, że naprężenia styczne są wprost proporcjonalne do gradientu prędkości – **hipoteza Newtona**. Płyny, które spełniają taką relację nazywamy **płynami newtonowskimi**.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

τ – naprężenia [N/m²]

u – prędkość [m/s]

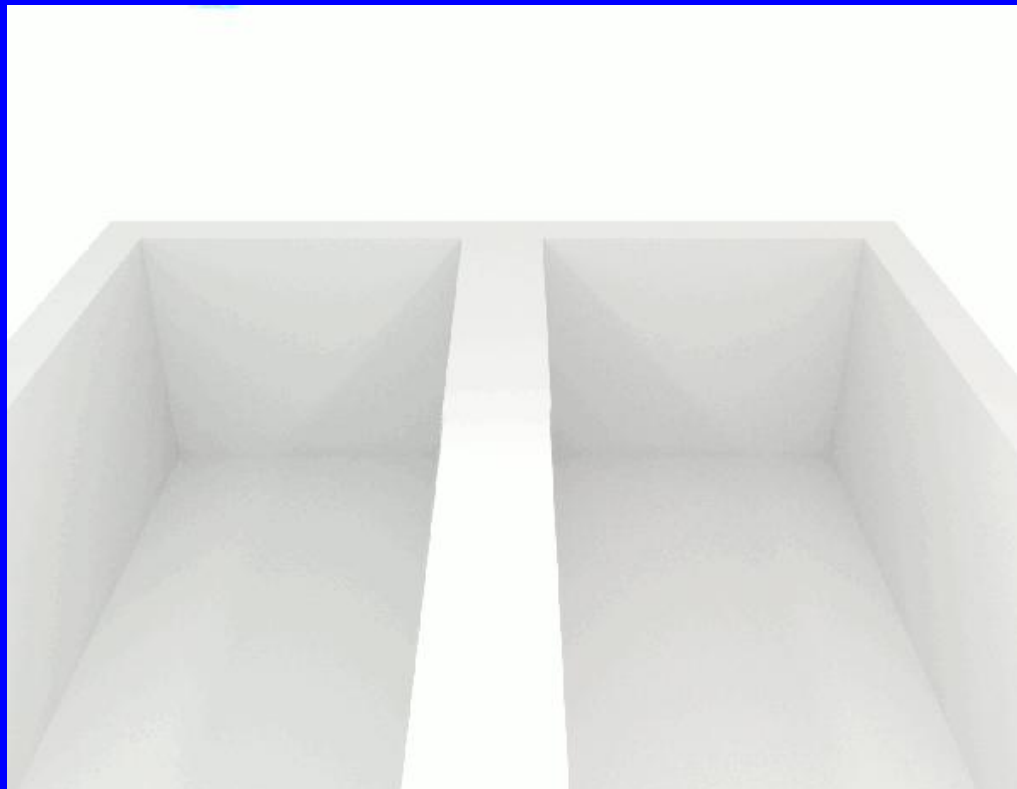
μ - dynamiczny współczynnik lepkości [kg/(ms)]



- Płyny, które nie spełniają powyższej relacji to **płyny nienewtonowskie** (przedmiot zainteresowania reologii).

Symulacja przepływu płynów z różnymi współczynnikami lepkości μ

$$\mu_1 < \mu_2$$



(źródło: Wikimedia Commons)

- Lepkość gazów, np. powietrza, jest w przybliżeniu funkcją tylko temperatury, (dla standardowych warunków T i p), dynamiczny współczynnik lepkości powietrza rośnie wraz ze wzrostem temperatury:

$$\mu = 2.791 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0.735}$$

T – temperatura absolutna [K]

Tab. Własności powietrza atmosferycznego

Temp. T [K]	Gęstość ρ [kg/m ³]	Lepkość dynam. $\mu \times 10^5$ [kg/ms]	Lepkość kinemat. $\nu \times 10^5$ [m ² /s]	Przewod. cieplna k [W/mK]
100	3.530	0.826	0.234	0.0092
300	1.177	1.852	1.574	0.0262
500	0.706	2.697	3.819	0.0404
900	0.392	4.155	10.593	0.0628
1900	0.186	7.199	38.744	0.1170

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν – kinematyczny
wsp. lepkości
[m²/s]

- Lepkość cieczy jak np. wody słabo zależy od ciśnienia natomiast silnie od temperatury:

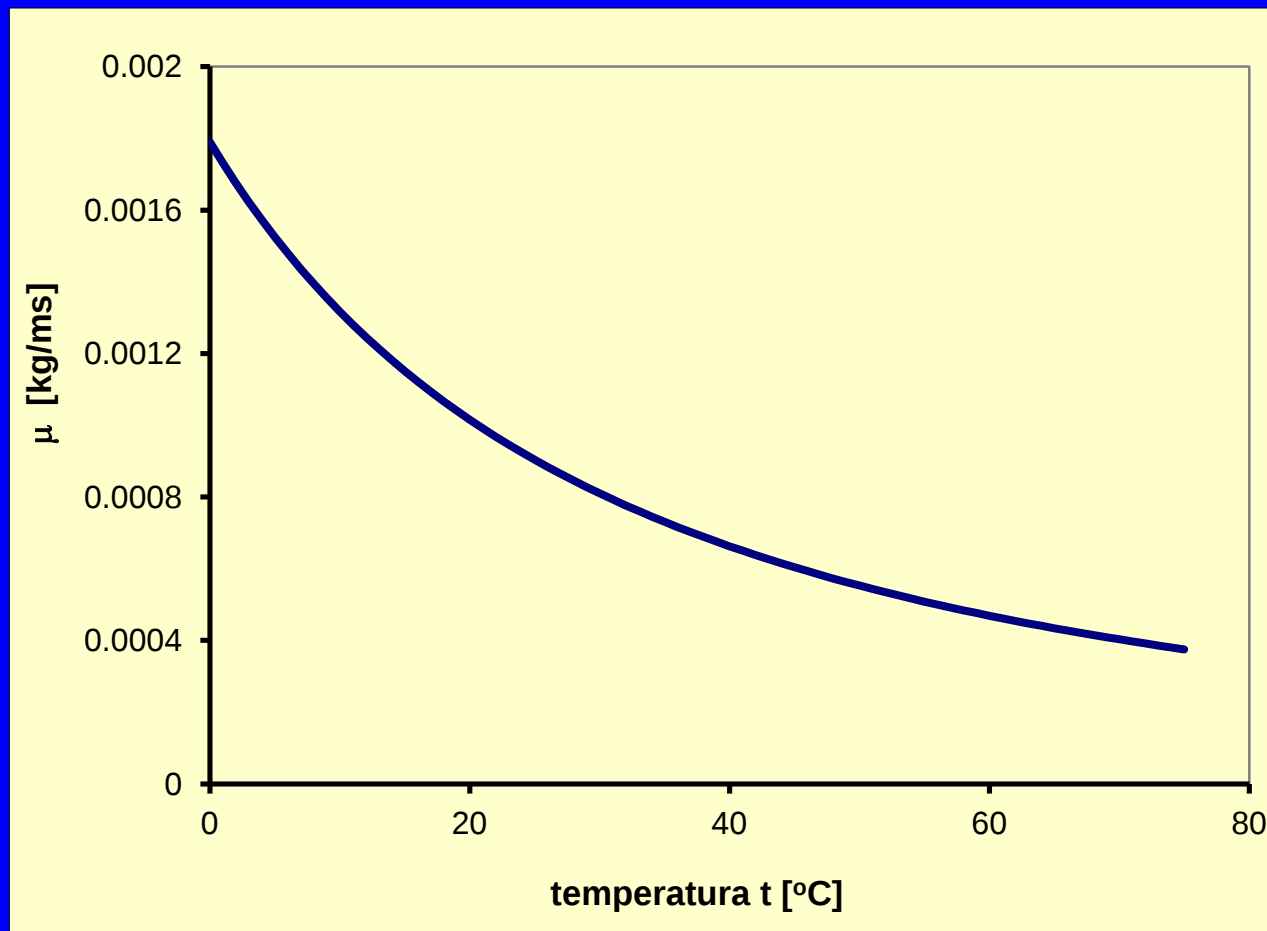
$$\mu = \frac{1.79 \cdot 10^{-3}}{1 + 0.0337(T - 273) + 0.00022(T - 273)^2}$$

T – temperatura [K]

Tab. Własności wody

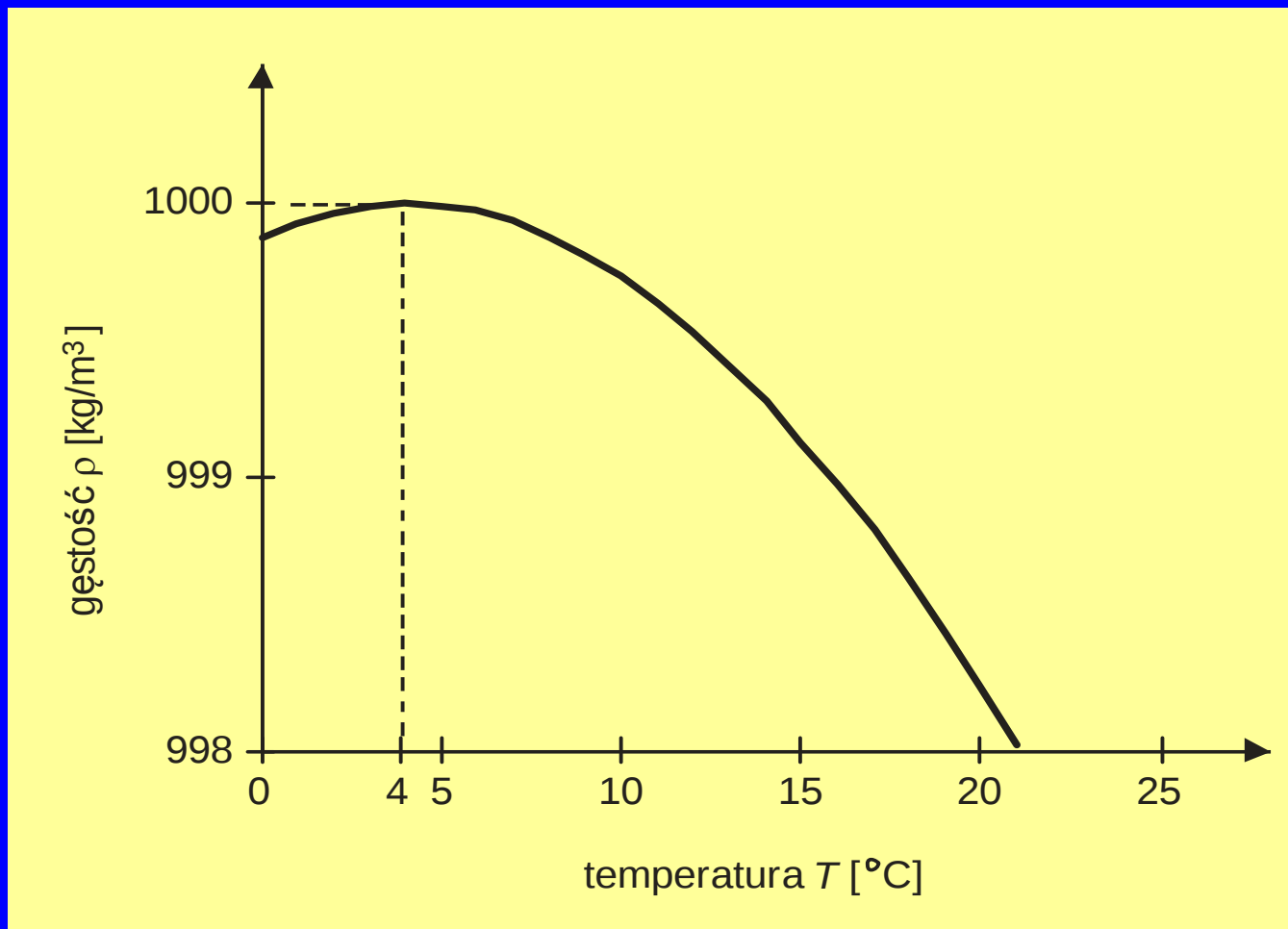
Temp. T [°C]	Gęstość ρ [kg/m³]	Lepkość dynam. $\mu \times 10^5$ [kg/ms]	Lepkość kinemat. $\nu \times 10^5$ [m²/s]	Przewod. cieplna k [W/mK]
0.01	999.87	178.94	0.179	0.552
4	1000.00	157.25	0.157	0.562
40	992.25	66.30	0.067	0.628
100	958.08	27.25	0.028	0.680
200	862.10	10.82	0.013	0.665

- Lepkość wody, w przeciwieństwie do lepkości powietrza, bardzo szybko maleje wraz ze wzrostem temperatury



Rys. Zmiany dynamicznego współczynnika lepkości wody wraz ze zmianą temperatury

- Woda osiąga maksymalną gęstość w temperaturze ok. 4°C



Rys. Zmiana gęstości wody wraz ze zmianą jej temperatury

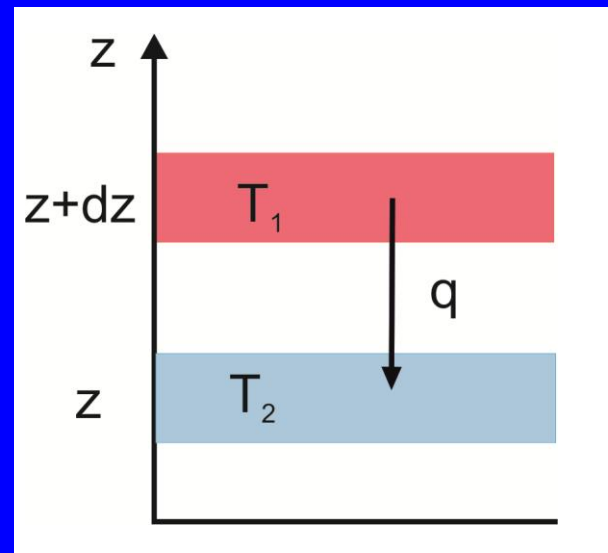
- W przypadku zagadnień przepływu z uwzględnieniem zmian temperatury tempo transportu ciepła jest wprost proporcjonalne do gradientu temperatury – **prawo Fouriera**.

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

q – strumień ciepła [W/m²]

k – współczynnik przewodności cieplnej [W/mK]

T – temperatura [K]



- Przewodność cieplna gazów rośnie wraz ze wzrostem temperatury. W przypadku płynów jak woda przewodność cieplna niewiele rośnie wraz ze wzrostem temperatury w zakresie 0° -100°C i przy ciśnieniu 1 atm.

RÓWNANIA PRZEPŁYWU PŁYNÓW

- Równania opisujące dynamikę płynów wynikają z praw zachowania:
 - masy
 - pędu
 - energii
- Prawa zachowania mają charakter bilansowy - wyrażają tempo zmian wielkości fizycznej wywołanych przez wypadkowy strumień adwekcyjny, dyfuzyjny oraz przemiany substancji (intensywność wytwarzania lub zużywania substancji)

**Zmiana wielkości w czasie = wypadkowy strumień adwekcyjny +
wypadkowy strumień dyfuzyjny + suma funkcji źródłowych**

RÓWNANIE ZACHOWANIA MASY

Zmiana w czasie masy zawartej w objętości kontrolnej V odpowiada strumieniowi masy przez powierzchnię S tej objętości kontrolnej

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho dV}_{\text{zmiana masy w czasie}} + \underbrace{\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{strumień masy przez powierzchnię}} = \boxed{0}$$

masa nie jest generowana lub rozkładana

ρ – gęstość

$\mathbf{v}$ – wektor prędkości

$\mathbf{n}$ – jednostkowy wektor normalny do elementu powierzchni

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, całkę powierzchniową można zastąpić całką objętościową, wówczas otrzymujemy:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Równanie całkowe jest ważne dla dowolnej wielkości objętości V , wobec tego można zapisać następujące **równanie zachowania masy**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{D\rho}{Dt} \right) + \text{div} \mathbf{v} = 0$$

lub w układzie kartezjańskim

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

∇ – operator nabla, $\nabla = \text{grad}$

grad – gradient

div – dywergencja

D/Dt – pochodna substancjalna

Równanie zachowania masy (równanie ciągłości)

- Płyn ściśliwy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{D\rho}{Dt} \right) + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

- Płyn nieściśliwy (gdy gęstość jest stała, $\rho = \text{const}$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$
$$\text{lub} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Pomimo, że w równaniu zachowania masy dla **płynu nieściśliwego** nie występuje pochodna czasowa, to równanie obowiązuje zarówno w przypadku **ruchu ustalonego** jak i **nieustalonego**!

OPERATORY RÓŻNICZKOWE

(układ kartezjański)

- Nabla ∇

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – wektory jednostkowe
grad – gradient

- Gradient wielkości skalarnej jest wektorem:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}$$

lub

$$\nabla p = \left[\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right]^T$$

lub

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Gradient wielkości wektorowej jest tensorem:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Dywergencja wielkości wektorowej (iloczyn skalarny ∇ i wektora):

np.

$$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Operator Laplace'a , laplasjan:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- **Pochodna substancjalna** (pochodna materialna) – tempo zmiany wielkości fizycznej w układzie związanym z poruszającym się płynem

**pochodna
substancjalna
(materialna)**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

**pochodna
lokalna**

**pochodna
kierunkowa
(adwekcyjna, konwekcyjna)**

Pochodna lokalna - czasowa zmiana w ustalonej lokalizacji

Pochodna kierunkowa - zmiana przestrzenna wywołana adwekcją (wynikająca z poruszającego się płynu)

**pochodna
substancjalna
(materialna)**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

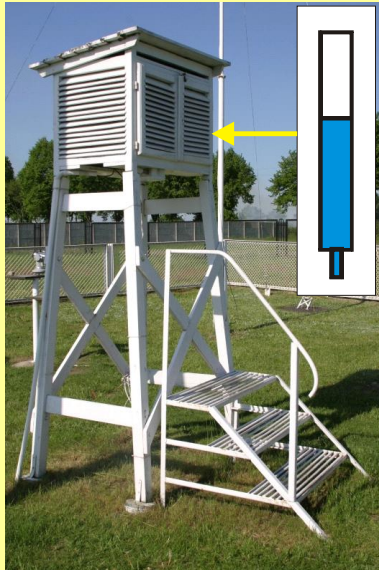
**pochodna
lokalna**

**pochodna
kierunkowa (adwekcyjna)**

Przykład

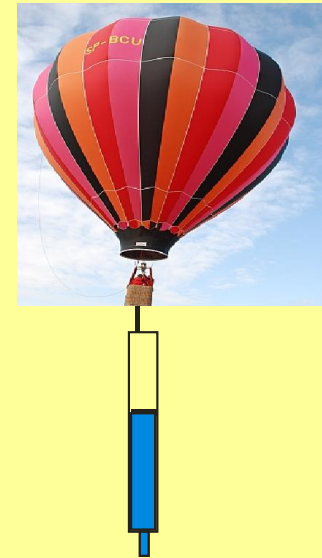
pochodna
lokalna
temperatury T

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$



pochodna
substancjalna
temperatury T

$$\frac{DT}{Dt}$$



RÓWNANIE ZACHOWANIA PĘDU (RÓW. DYNAMICZNE)

Zmiana w czasie pędu w objętości kontrolnej V równa jest sumie sił działających na tą objętość

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \sum \mathbf{F}$$

zmiana
pędu

suma
sił



Masa x Przyspieszenie = Siła

II prawo Newtona

ρ – gęstość

$\mathbf{v}$ – wektor prędkości

$\mathbf{F}$ – wektor siły

$D\mathbf{v}/Dt$ – przyspieszenie, pochodna substancjalna prędkości

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Równanie zachowania pędu – płyn nielepki

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_S p \mathbf{n} dS$$

zmiana
pędu w
czasie

siły
objętościowe

siły
powierzchniowe

p – ciśnienie
 $\mathbf{f}$ – wektor siły
objętościowej

- **Siła powierzchniowa** – działająca na powierzchnię objętości kontrolnej,
 - siła ta zależy od tego czy uwzględniona jest lepkość płynu,
 - w przypadku założenia **płynu nielepkiego**, siła powierzchniowa wynika tylko z **ciśnienia**, które działa w kierunku normalnym do powierzchni.
- **Siła objętościowa (masowa)** – np. siła wynikająca z siły grawitacji, siła Coriolisa.

Zastosowanie twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego prowadzi do równania:

$$\int_V \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} + \nabla p \right] dV = 0$$

Równanie całkowe jest ważne dla dowolnej wielkości V , wobec tego równanie pędu można zapisać w formie różniczkowej wektorowej:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p$$

lub w formie różniczkowej zachowawczej

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p$$

Powyższe równanie zwane jest **równaniem Eulera**.

- **Równanie Eulera** opisuje **płyn nielepki** i ma zastosowanie zarówno do **płynu ściśliwego** jak i **nieściśliwego**

W układzie kartezjańskim gdy siłą masową jest siła grawitacji otrzymujemy:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

kierunek x

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

kierunek y

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

kierunek z

g – przyspieszenie ziemskie

Równanie zachowania pędu – płyn lepki

- W przypadku założenia płynu lepkiego, siły powierzchniowe muszą być wyrażone za pomocą **tensora naprężeń**, który uwzględnia naprężenia we wszystkich kierunkach (nie tylko w kierunku normalnym).

Równania w układzie kartezjańskim

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Równanie w formie wektorowej

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

f_x, f_y, f_z – składowe siły
objętościowej $\mathbf{f}$

$\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężeń

$\tau_{xx}, \tau_{yx}, \dots$ – składowe
tensora naprężeń „lepkich”

• Tensor naprężeń

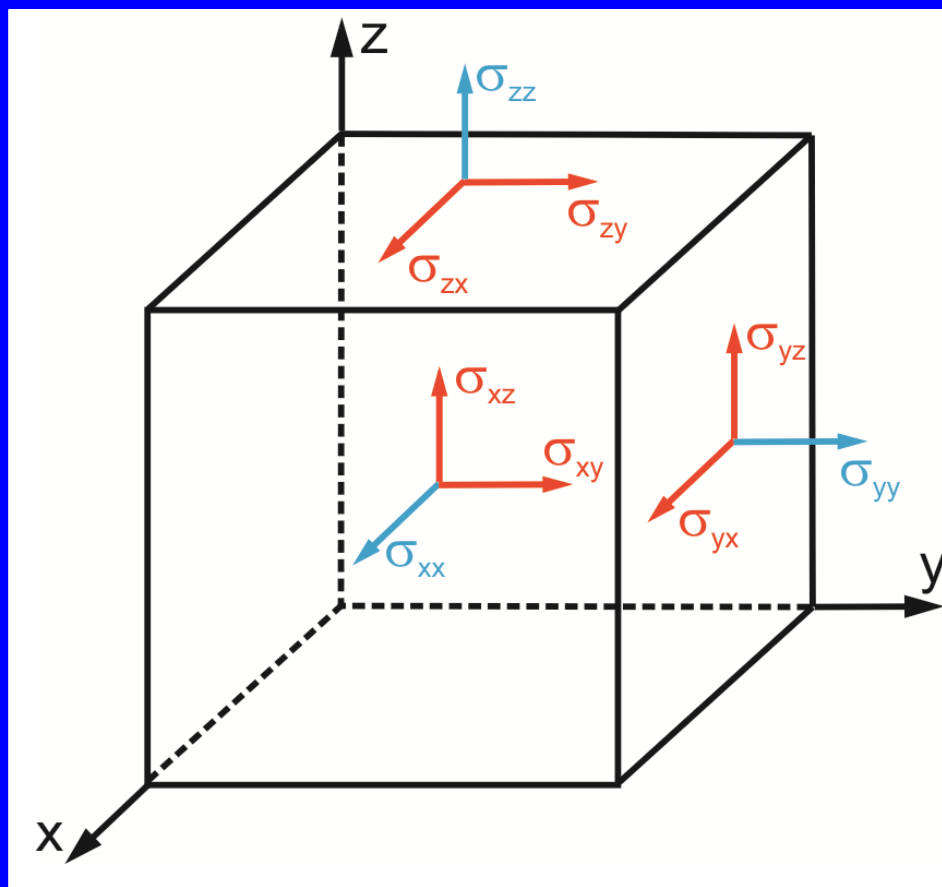
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

naprężenia normalne

Tensor naprężeń jest symetryczny

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \end{aligned}$$

naprężenia styczne



Konwencja:

- **pierwszy indeks** wskazuje kierunek orientacji powierzchni (np. x wskazuje element powierzchni prostopadłej do osi x układu)
- **drugi indeks** wskazuje kierunek działania danego komponentu naprężenia

- Tensor naprężeń można rozdzielić na dwie części:
 - tensor naprężeń wywołanych **ciśnieniem hydrostatycznym** - powoduje tylko zmianę objętości ciała,
 - **tensor naprężeń „lepkich”** τ – wywołuje deformacje ciała.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}}_{\text{ciśnienie hydrostatyczne}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{tensor naprężeń „lepkich”}}$$

lub

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

p – ciśnienie

$\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa

$\boldsymbol{\tau}$ – tensor naprężeń „lepkich”

- W przypadku płynu pozostającego w spoczynku

$$\tau = 0$$

naprężenia „lepkie” nie mają znaczenia, w konsekwencji występuje tylko ciśnienie hydrostatyczne (naprężenia normalne):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

- Ciśnienie p jest równe ujemnej wartości średniej z naprężeń normalnych:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

- Równania wymagają wprowadzenia związku pomiędzy składowymi tensora naprężeń τ , a składowymi prędkości u, v, w .
- Dla ściśliwego płynu Newtona odpowiednie relacje wyprowadził Stokes

Hipoteza Stokesa

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zz} = \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

gdzie

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Równania Naviera-Stokesa dla modelu płynu ściśliwego lepkiego

- w układzie kartezjańskim

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right]$$

- w zapisie wektorowym

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p - \mu \left[\frac{2}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\text{def} \mathbf{v}) \right]$$

gdzie

$$\text{def} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Zapis wskaźnikowy

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

Przykład:

$$\begin{array}{l} i = j \\ i = 1, \quad j = 1 \end{array}$$



$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{array}{l} i \neq j \\ i = 1, \quad j = 2 \end{array}$$



$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\begin{array}{l} i \neq j \\ i = 1, \quad j = 3 \end{array}$$



$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Model płynu nieściśliwego lepkiego

- Dla płynu nieściśliwego gęstość jest stała, co prowadzi do równania ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{lub} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

w konsekwencji ogólne równania Naviera-Stokesa można uprościć

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right]$$

Forma końcowa równań dla płynu nieściśliwego lepkiego

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

- w zapisie wektorowym

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \cdot \Delta \mathbf{v}$$

gdzie

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}$$

Komplet równań dla płynu nieściśliwego lepkiego

- Równanie zachowania masy

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- Równanie zachowania pędu

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \cdot \Delta \mathbf{v}$$

- Dwa równania wektorowe (równanie zachowania masy oraz pędu) tworzą układ czterech równań różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi
- Równania nieliniowe drugiego rzędu względem czterech niewiadomych: ciśnienie p oraz trzy składowe wektora prędkości u, v, w .

Forma zachowawcza oraz forma niezachowawcza równań NS

Rozpatrzmy równanie NS zapisane w kierunku x:

Forma niezachowawcza

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} +$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Forma zachowawcza

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} +$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Rozpiszmy lewą stronę równania w formie zachowawczej

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \\ &+ u \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \rho \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \rho \cdot v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} + \rho \cdot w \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

po uporządkowaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ &+ u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

=0

Ostatecznie otrzymujemy związek pomiędzy obiema formami zapisu

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Zastosowanie analogicznego przekształcenia do pozostałych równań prowadzi do równań NS zapisanych w **formie zachowawczej**:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \dots$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot w)}{\partial z} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \dots$$

Forma zachowawcza równań prowadzi do lepszego spełnienia podstawowych zasad zachowania podczas ich numerycznego rozwiązania

RÓWNANIE ZACHOWANIA ENERGII

- Równanie energii jest wyprowadzane w oparciu o **pierwsze prawo termodynamiki**

Zmiana energii systemu równa jest sumie pracy oraz ciepła dodanego do systemu

$$\rho \frac{DE}{Dt} = W + Q$$

zmiana energii suma pracy i ciepła

W – praca wykonana przez siły powierzchniowe

Q – strumień energii wywołany przewodzeniem ciepła

E – całkowita energia odniesiona do jednostki objętości

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

i – wewnętrzna (termalna) energia

$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ - energia kinetyczna

Praca wykonana przez siły powierzchniowe

$$-\text{div}(p\mathbf{v}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right]$$

Strumień energii wywołany przewodzeniem ciepła

Strumień przewodzonego ciepła opisany jest prawem Fouriera:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

Wobec tego strumień ciepła dodany do układu można zapisać jako:

$$-\text{div}\mathbf{q} = \text{div}(k\text{grad}T)$$

k – wsp. przewodzenia ciepła

Równanie zachowania energii całkowitej

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + \operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)$$

gdzie:

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

Równanie zachowania energii kinetycznej

$$\rho \frac{1}{2} \frac{D(u^2 + v^2 + w^2)}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}p + u \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Równanie zachowania energii wewnętrznej

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}$$

gdzie:

$$i = -cT$$

c – ciepło właściwe

Równanie zachowania temperatury (płyn nieściśliwy)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Równanie zachowania temperatury (model Newtona)

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \text{div}(k \text{grad} T) + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (\text{div} \mathbf{v})^2$$

Równania stanu

- Model przepływu w 3 wymiarach jest opisany przez układ 5 równań różniczkowych: rów. masy, 3 rów. dynamiczne ($x, y, z,$) oraz rów. energii.
- Liczba 6 nieznanymi parametrów: ρ, p, u, v, w, T wymaga wprowadzenia dodatkowego równania, tzw. **równania stanu** ($p=f(\rho, T)$):

(np. rów. gazu doskonałego)

$$p = \rho RT$$

R – stała gazowa