

Dynamiczne podobieństwo płynów

- Zachowanie różnych płynów podczas przepływu można analizować pod względem pewnych bezwymiarowych liczb, które grupują takie parametry jak np. wymiar liniowy opływającego ciała czy średnia prędkość.
- Dwa płyny wykazują podobieństwo pod względem dynamicznym jeśli bezwymiarowe liczby przyjmują te same albo zbliżone wartości.
- Aby określić odpowiednie bezwymiarowe parametry, równania przepływu oraz warunki brzegowe należy poddać normalizacji.

W tym celu wprowadza się następujące bezwymiarowe zmienne:

$$x^* = x / L_0$$

$$y^* = y / L_0$$

$$z^* = z / L_0$$

$$t^* = t / t_0 = U_0 t / L_0$$

$$u^* = u / U_0$$

$$v^* = v / U_0$$

$$w^* = w / U_0$$

$$p^* = (p - p_0) / (\rho U_0)$$

L_0 – charakterystyczny wymiar liniowy

U_0 – charakterystyczna prędkość

Podstawowe liczby bezwymiarowe

Liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{U_0 L_0}{\nu}$$

ν – kinematyczny wsp.
lepkości

Liczba Froude'a:

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL_0}}$$

μ_0 – dynamiczny wsp.
lepkości

Liczba Prandtla:

$$Pr = \frac{\mu_0 c_p}{k_0}$$

c_p – ciepło właściwe
(przy $p=\text{const}$)

c_v – ciepło właściwe
(przy $V=\text{const}$)

Liczba Macha:

$$M = \frac{U_0}{a_0} = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma RT_0}}$$

k_0 – wsp. przewodności
cieplnej

a_0 – prędkość dźwięku

T – temperatura

**Wykładnik adiabaty:
(wsp. ściśliwości)**

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Podobieństwo dynamiczne przepływów

- cieczy ze swobodną powierzchnią (przypadek nieściśliwy) gdy liczby ***Re*** i ***Fr*** przyjmują te same wartości
- większości gazów gdy liczby ***Re***, ***M***, ***Pr*** oraz γ przyjmują te same wartości

Liczba Froude'a przedstawia relację prędkości przepływu do prędkości propagacji zaburzenia, lub wskazuje relację sił bezwładności i grawitacji.

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL_0}}$$

prędkość przepływu

prędkość propagacji
zaburzenia

- Przypadek przepływu wody ze swobodą powierzchnią (rzeki, zbiorniki)
 - ruch krytyczny: $Fr = 1$
 - ruch spokojny: $Fr < 1$
 - ruch rwący: $Fr > 1$

Liczba Reynoldsa przedstawia relację sił bezwładności do sił lepkości.

$$\text{Re} = \frac{U_0 L_0}{\nu}$$

siła bezwładności

siła lepkości

Liczba Re bliska 0 pozwala na zaniechanie siły bezwładności.
Duża liczba Re ($\text{Re} \sim 10$) – można zaniechać siły lepkości
(z wyłączeniem obszaru blisko powierzchni).

Tab. Typowe wartości liczby Reynoldsa

Opis	Re
Spadająca kropla wody	0.6
Przepływ w gruncie	1-5
Wiejący wiatr (10 m/s)	1000
Przepływ laminarny wody w rurze	< 2300
Przepływ turbulentny wody w rurze	> 5×10^4
Duży samolot odrzutowy	7×10^7

Liczba Macha jest miarą prędkości płynu w odniesieniu do prędkości dźwięku, dostarcza też miary ściśliwości lub zmiany gęstości spowodowanej przepływem

$$M = \frac{U_0}{a_0}$$

- Dla $M < 0.14$, efekty wynikające ze ściśliwości płynu są pomijalne (mniej niż 1 % zmian w gęstości).
- Woda w normalnych warunkach ciśnienia i temperatury jest prawie nieściśliwa (ale w przypadku tzw. uderzenia hydraulicznego należy uwzględnić ściśliwość).
- Zagadnienia związane z odpowiednio dużymi wartościami liczby Macha dotyczą głównie przepływów gazów takich jak powietrze.

Liczba Prandtla jest miarą stosunku dyfuzyjności pędu (lepkości) do dyfuzyjności ciepła

$$Pr = \frac{\mu_0 c_p}{k_0}$$

← **dyfuzyjność pędu**

← **dyfuzyjność ciepła**

Dla powietrza $Pr=0.72$ w normalnych warunkach temperatury i ciśnienia, lekko maleje wraz ze wzrostem temp.

Dla wody $Pr=8$ w temp 15°C , gwałtownie spada wraz ze wzrostem temp.

Tab. Wartości Pr i γ dla powietrza

Temp. T [K]	Liczba Prandtla Pr	Wykładnik adiabaty γ
100	0.770	1.39
300	0.708	1.40
500	0.680	1.39
900	0.696	1.34

Tab. Wartości Pr i γ dla wody

Temp. T [°C]	Liczba Prandtla Pr	Wykładnik adiabaty γ
0.01	13.6	1.0
40	4.34	1.0
100	1.74	1.0
200	0.94	1.0

KLASYFIKACJA PRZEPŁYWÓW

Przepływ laminarny oraz przepływ turbulentny

- Liczbą kryterialną jest liczba Reynoldsa (Re)

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu}$$

siła bezwładności

siła lepkości

Jeśli $Re \ll 1$ przepływ zdominowany przez siły lepkości

Jeśli $Re \gg 1$ przepływ zdominowany przez siły bezwładności (inercji)

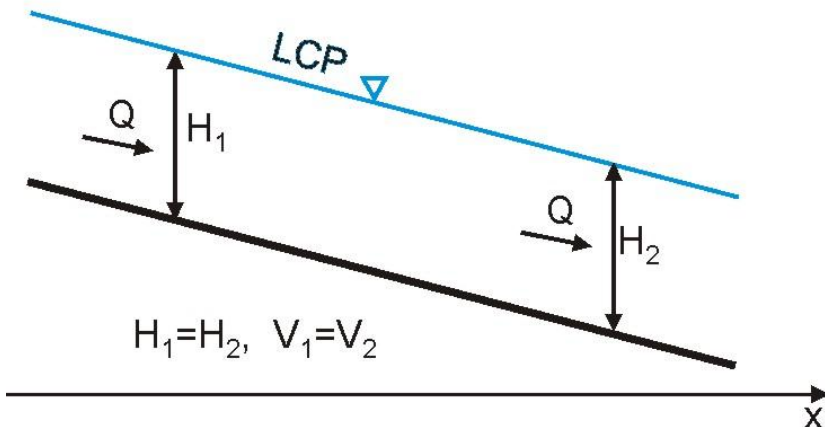
- W **przepływie laminarnym** cząsteczki płynu poruszają się wzdłuż warstw, każda warstwa przechodzi płynnie obok sąsiednich warstw bez mieszania
- Podczas **przepływu turbulentnego** prędkość (a także inne parametry) wykazują niewielkie oraz szybkozmienne losowe fluktuacje

Przepływ ustalony oraz przepływ nieustalony

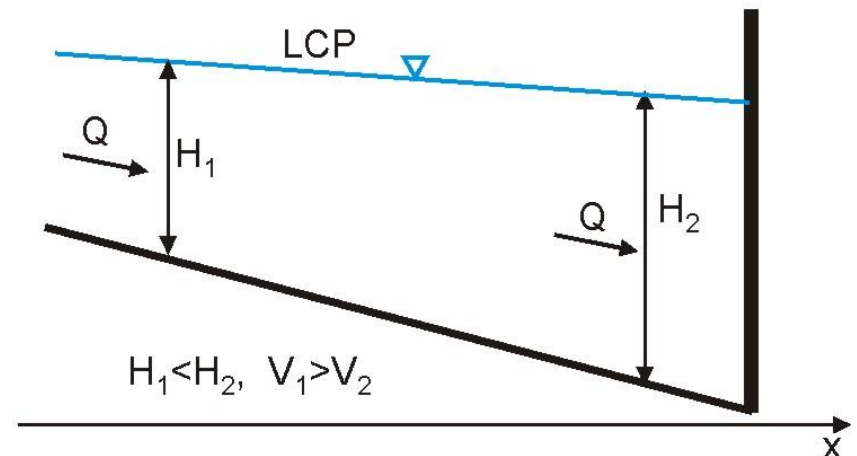
- **Przepływ ustalony jednostajny** – parametry płynu w danym punkcie przestrzeni są stałe w czasie, np. natężenie przepływu $Q=\text{const}$, głębokość $H(x)=H_1=H_2=\text{const}$ oraz prędkość $V(x)=V_1=V_2=\text{const}$
- **Przepływ ustalony niejednostajny** – np. natężenie przepływu stałe w czasie i przestrzeni $Q=\text{const}$, głębokość oraz prędkość pozostają stałe w czasie, ale zmieniają się w przestrzeni $H_1 \neq H_2$, $V_1 \neq V_2$, czyli $H(x)$ oraz $V(x)$

ruch ustalony jednostajny
 $Q, H, V = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

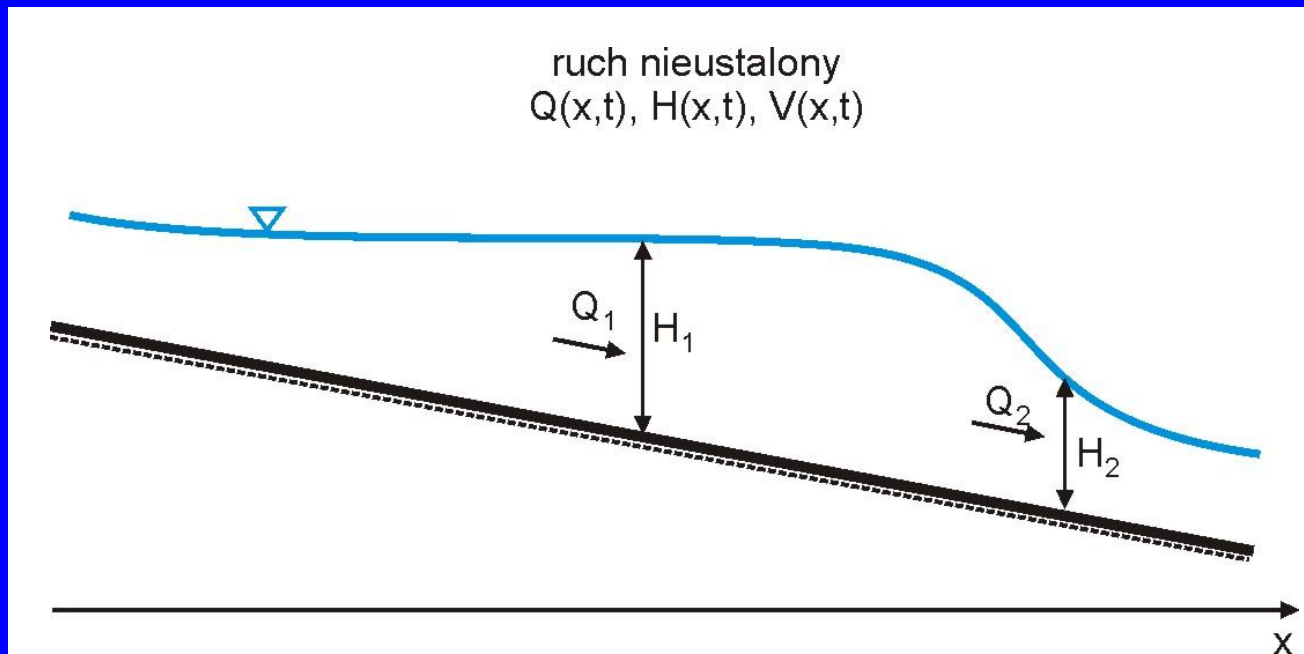


ruch ustalony niejednostajny
 $Q=\text{const} \quad H(x), V(x)$



- **Przepływ nieustalony** – parametry płynu w danym punkcie przestrzeni są zmienne w czasie, np. natężenie przepływu $Q(x,t)$, głębokość $H(x,t)$ oraz prędkość $V(x,t)$, np. przejście fali wezbraniowej w rzece

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$$



Przepływ nieściśliwy oraz przepływ ściśliwy

- **Przepływ nieściśliwy** – objętość danego elementu płynu nie ulega zmianie, w konsekwencji gęstość jest stała ($\rho = \text{const}$), np. wodę można traktować jako płyn nieściśliwy w większości zastosowań inżynierskich
- **Przepływ ściśliwy** – objętość danego elementu płynu ulega zmianie, w konsekwencji gęstość nie jest stała w całym polu przepływu.

Przepływy ściśliwe są klasyfikowane w zależności od wartości liczby Macha (M):

$$M = \frac{U}{a}$$

prędkość przepływu

prędkość dźwięku

- przepływ poddźwiękowy, $M < 1$
- przepływ naddźwiękowy, $M > 1$

Przepływ krytyczny, przepływ rwący, przepływ spokojny

- Klasyfikacja dotyczy tylko przepływów ze swobodną powierzchnią (kanały otwarte (rzeki), zbiorniki)
- Liczbą kryterialną jest liczba Froude'a (Fr)

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

← prędkość przepływu

← prędkość propagacji zaburzenia

- **Przepływ krytyczny** ($Fr = 1$) - przepływ w którym energia strumienia osiąga wartość minimalną przy stałym natężeniu przepływu
- **Przepływ spokojny** (nadkrytyczny) ($Fr < 1$) - przepływ w którym dominującą formą energii jest energia potencjalna
- **Przepływ rwący** (podkrytyczny) ($Fr > 1$) - przepływ w którym dominującą formą energii jest energia kinetyczna

Przepływ krytyczny

Wysokość energii mechanicznej strumienia względem dna kanału:

$$E_c = E_p + E_k = H + \frac{\alpha U^2}{2g} = H + \frac{\alpha Q^2}{2g \cdot A^2}$$

H – głębokość, napełnienie kanału

U – średnia prędkość

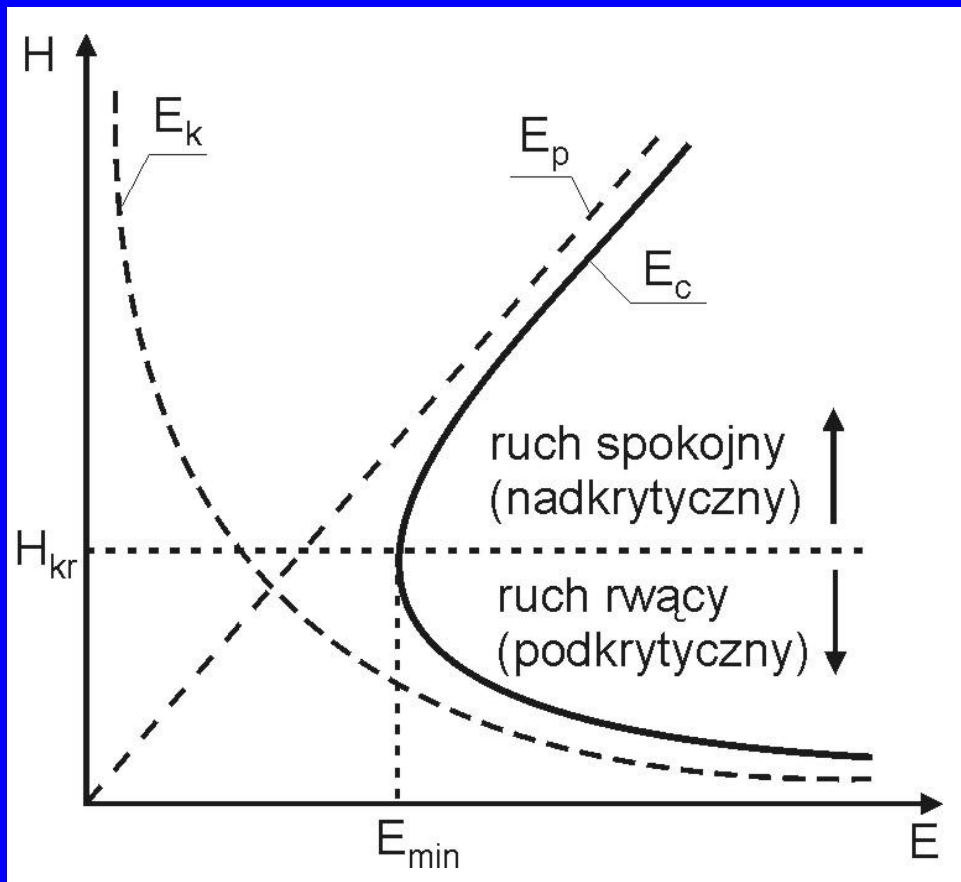
A – pole przekroju poprzecznego, $A=f(H)$

Zakładając stałe natężenie przepływu $Q=const$, energia całkowita E_c jest funkcją napełnienia kanału.

- dla $H \rightarrow 0$: $E_c \rightarrow \infty$ (ponieważ $A(H) \rightarrow 0$)

- dla $H \rightarrow \infty$: $E_c \rightarrow \infty$

Zarówno dla $H \rightarrow 0$ jak i $H \rightarrow \infty$ energia całkowita rośnie do nieskończoności ($E_c \rightarrow \infty$)



Ruch spokojny

$$H > H_{kr}$$

Ruch krytyczny

$$H = H_{kr}$$

Ruch rwący

$$H < H_{kr}$$

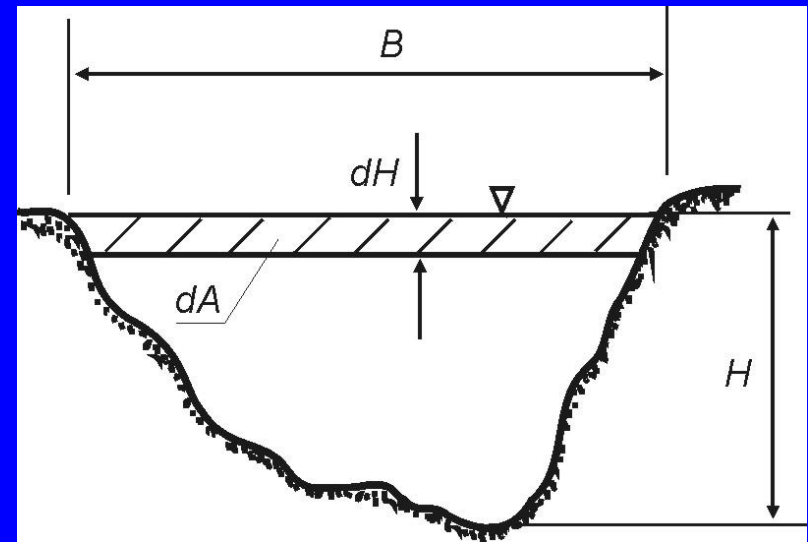
Głębokość krytyczna H_{kr} - głębokość przy której energia całkowita osiąga wartość minimalną

Ruch krytyczny – przepływ w którym przy stałym wydatku Q energia strumienia E_c osiąga wartość minimalną

Kryterium ruchu krytycznego znajdziemy z warunku istnienia minimum funkcji:

$$\frac{dE_c}{dH} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \cdot A^3} \frac{dA}{dH} = 0$$

$$B = \frac{dA}{dH}$$



Równanie ruchu krytycznego

$$\frac{A^3}{B} = \frac{\alpha \cdot Q^2}{g}$$



Głębokość krytyczna

$$H_{kr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot Q^2}{B^2 g}}$$

$$H_{kr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot Q^2}{B^2 g}}$$

$$Q = H_{kr} \cdot B \cdot V_{kr}$$

$$\alpha = 1$$



Prędkość krytyczna

$$V_{kr} = \sqrt{g \cdot H_{kr}}$$

$$E_{kr} = H_{kr} + \frac{V_{kr}^2}{2g}$$

$$V_{kr} = \sqrt{g \cdot H_{kr}}$$



lub

$$H_{kr} = \frac{2}{3} E_{kr}$$

$$E_{kr} = \frac{3}{2} H_{kr}$$

- Interpretacja przepływu krytycznego, spokojnego, rwącego pod względem prędkości propagacji zaburzenia

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g \cdot H}} = \frac{V}{c} = \frac{\text{prędkość wody}}{\text{prędkość fali}}$$

- Ruch krytyczny

$$Fr = 1 \quad V = c$$

- jeśli $Fr \sim 1$ to przepływ staje się niestabilny, formuje się fala (zaburzenie)

- Ruch spokojny

$$Fr < 1 \quad V < c$$

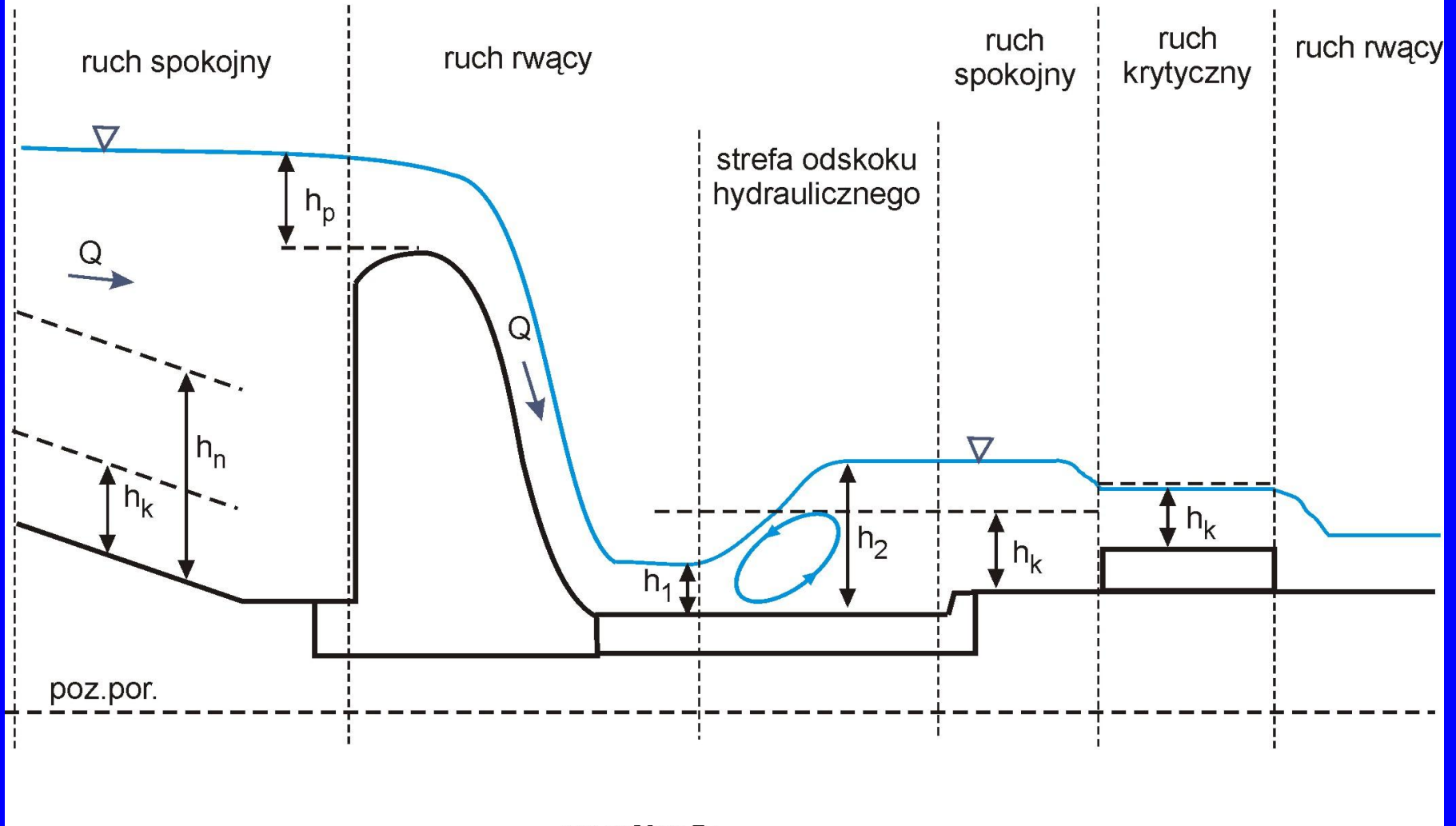
- zaburzenie rozprzestrzenia się zarówno w górę jak i w dół strumienia

- Ruch rwący

$$Fr > 1 \quad V > c$$

- zaburzenie może rozprzestrzeniać się tylko w dół strumienia

Strefy ruchu



PRZYKŁADY MODELI UPROSZCZONYCH

Równanie Bernoulliego (Przepływ ustalony)

- Równanie Bernoulliego wyprowadza się przy następujących założeniach:

- przepływ jest nielepki:

$$\mu = 0$$

- przepływ jest ustalony:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

- pole sił masowych jest potencjalne:

$$\mathbf{f} = gz$$

- Oprócz założeń należy wykorzystać następującą tożsamość:

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}$$

- Podstawiając do równania Naviera-Stokesa otrzymujemy:

$$\text{grad} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}$$

- Analiza powyższego równania prowadzi do wniosku, że **trójmian Bernoulliego** jest stały wzdłuż linii prądu, czyli:

$$TB = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}$$

Równanie Bernoulliego

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \sum H_{str}$$

z – wysokość położenia [m]

p/γ – wysokość ciśnienia [m]

$V^2/2g$ – wysokość prędkości [m]

H_{str} – sumaryczna wysokość strat hydraulicznych [m]

α – współczynnik Saint-Venanta [-]

1,2 – indeks przekroju

γ – ciężar właściwy [kg/m³]

$$\gamma = \rho \cdot g$$

Współczynnik Saint-Venanta (α)

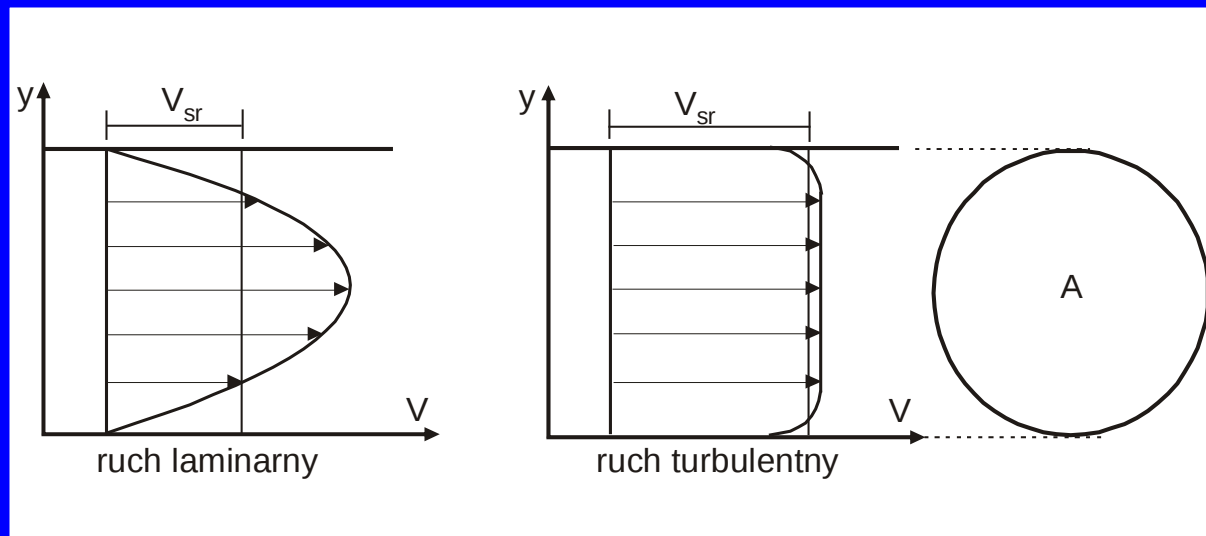
- Przez współczynnik α uwzględnia się wpływ nierównomierności rozkładu rzeczywistego prędkości w odniesieniu do rozkładu uśrednionego
- Współczynnik α - określa stosunek rzeczywistej energii kinetycznej w przekroju poprzecznym do energii kinetycznej wyznaczonej przy założeniu stałej średniej prędkości V_{sr}

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{V_{sr}^3 \cdot A}$$

V – prędkość rzeczywista

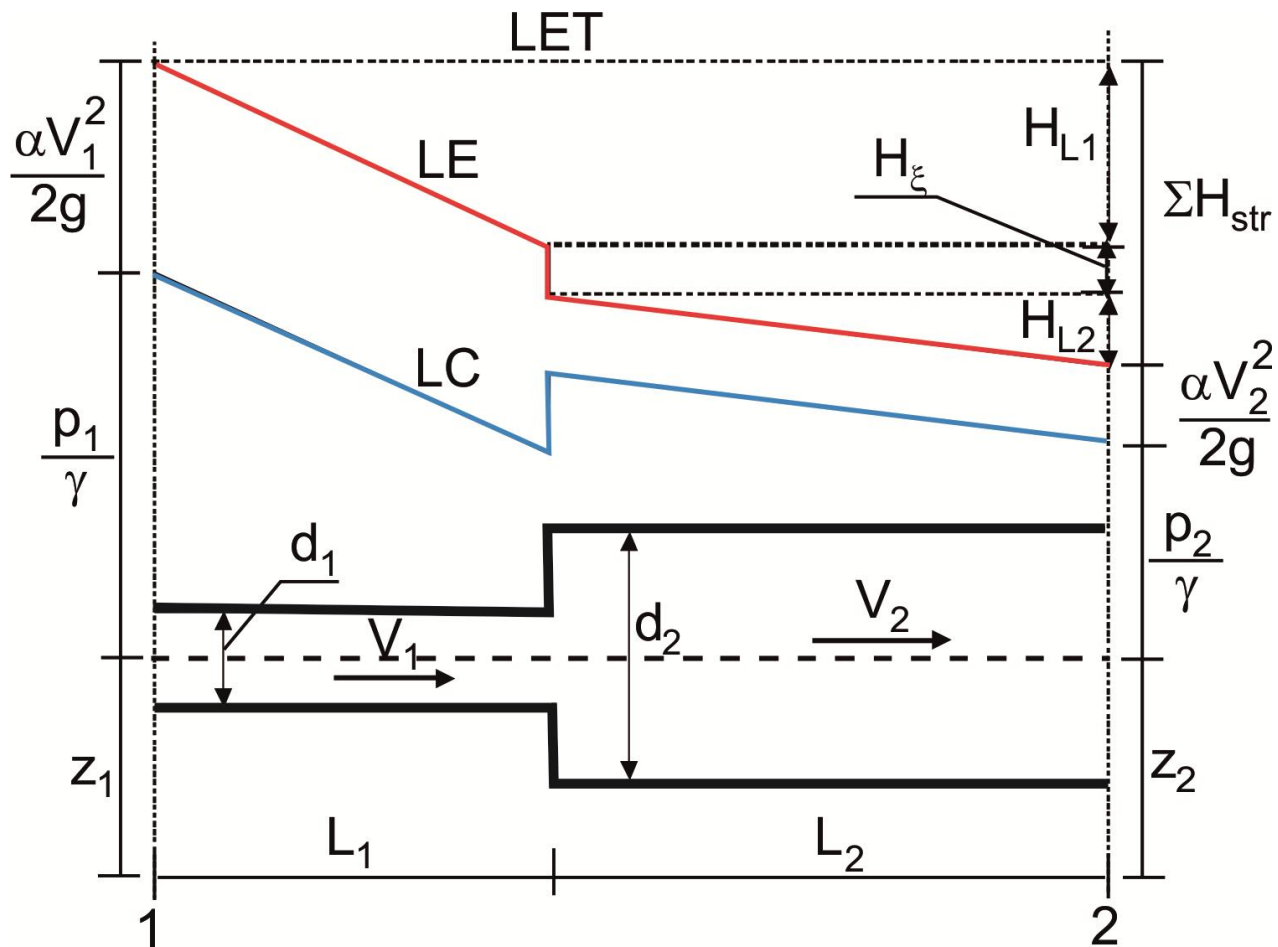
V_{sr} – prędkość uśredniona

A – pole przekroju poprzecznego



Dla ruchu turbulentnego: $\alpha \sim 1$

Równanie Bernoulliego - przepływ w rurociągu



LC – linia ciśnień

LE – linia energii

LET – linia energii teoretyczna (zał. płyn nielepki)

Straty hydrauliczne podczas przepływu w rurociągu

ΣH_{str} – suma strat hydraulicznych

$$\Sigma H_{str} = H_{\zeta} + H_L$$

H_{ζ} – straty lokalne

$$H_{\zeta} = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}$$

ζ - wsp. strat lokalnych

H_L – straty na długości

$$H_{str} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

d – średnica
 L – długość

λ – wsp. oporów liniowych

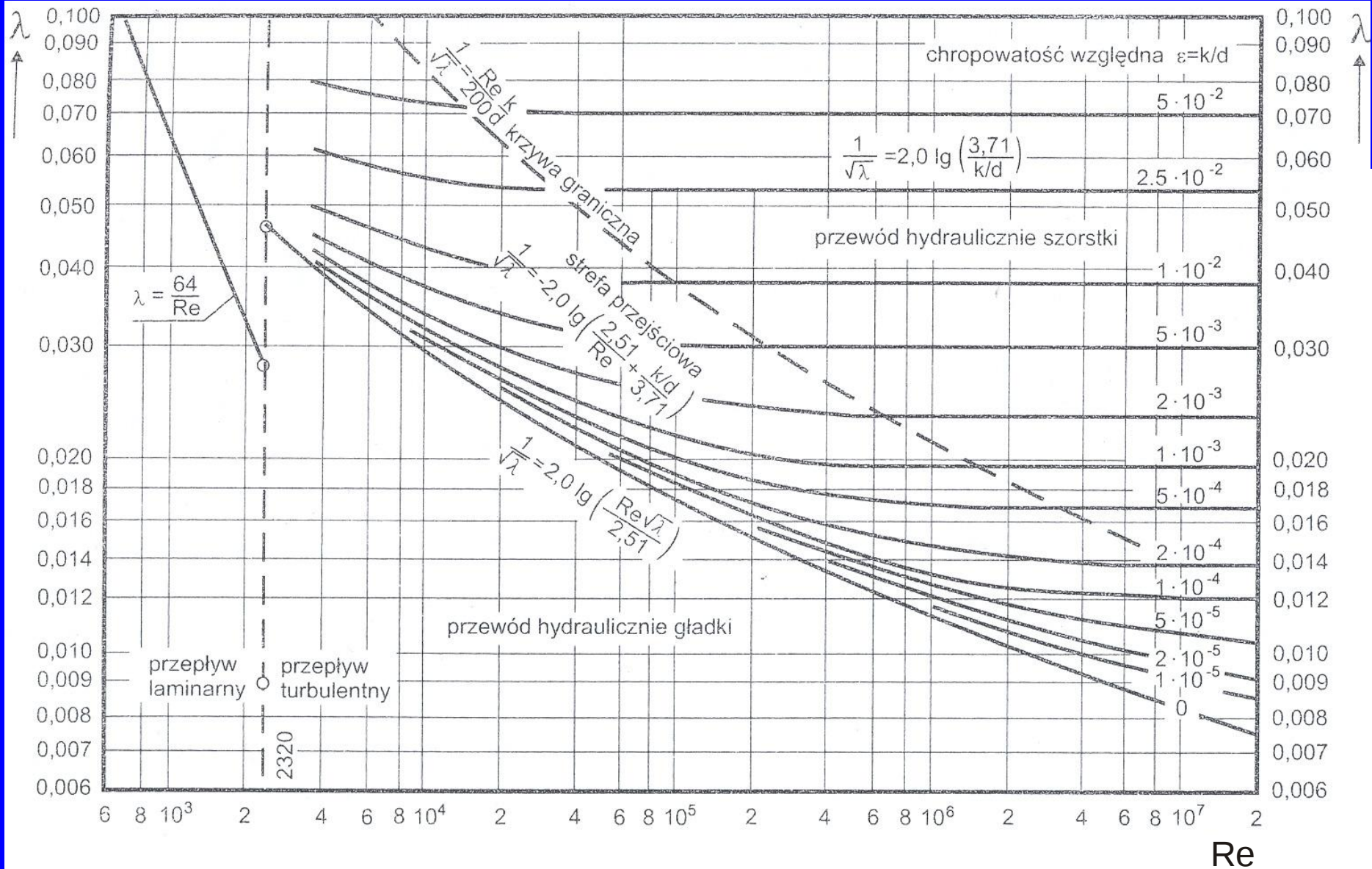
$$\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon)$$

Re – liczba Reynoldsa

ε – wsp. chropowatości względnej

$$\varepsilon = \frac{k}{d}$$

k – chropowatość bezwzględna



Wykres zależności między współczynnikiem oporów liniowych λ , liczbą Reynoldsa Re i chropowatością względną ε (źródło: Kubrak i Kubrak, 2004)

Równanie Bernoulliego – przepływ w kanale

$$H_1 + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = H_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \Delta L (S - s)$$

z – wysokość położenia, [m]

p/γ - wysokość ciśnienia, [m]

$V^2/2g$ - wysokość prędkości, [m]

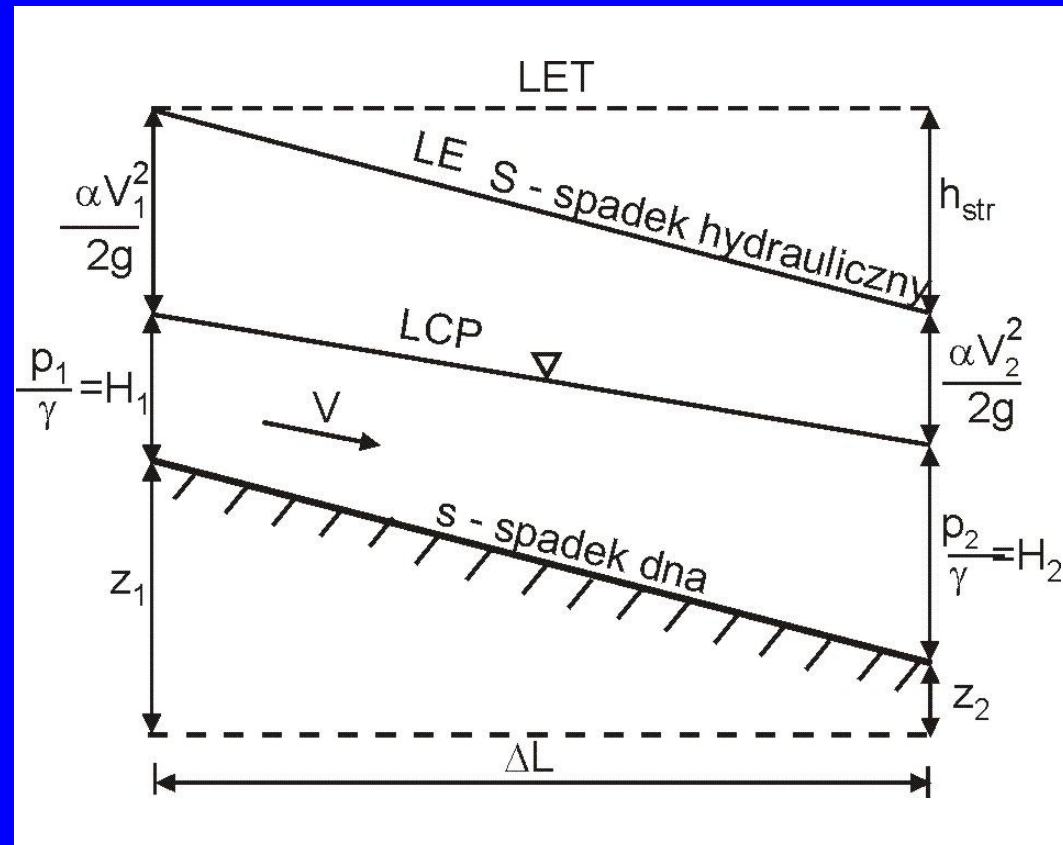
h_{str} – wysokość strat [m]

s - spadek dna [-]

$$s = \frac{z_1 - z_2}{\Delta L}$$

S - spadek hydrauliczny [-]

$$S = \frac{h_{str}}{\Delta L}$$



Zagadnienie przepływu nad progiem (ruch spokojny)

Równanie Bernoulliego (bez strat)

$$H_1 + \frac{V_1^2}{2g} = H_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta z$$

E_1

Równanie ciągłości

$$H_1 V_1 = H_2 V_2 = q$$

$$V_1 = q / H_1$$

$$V_2 = q / H_2$$

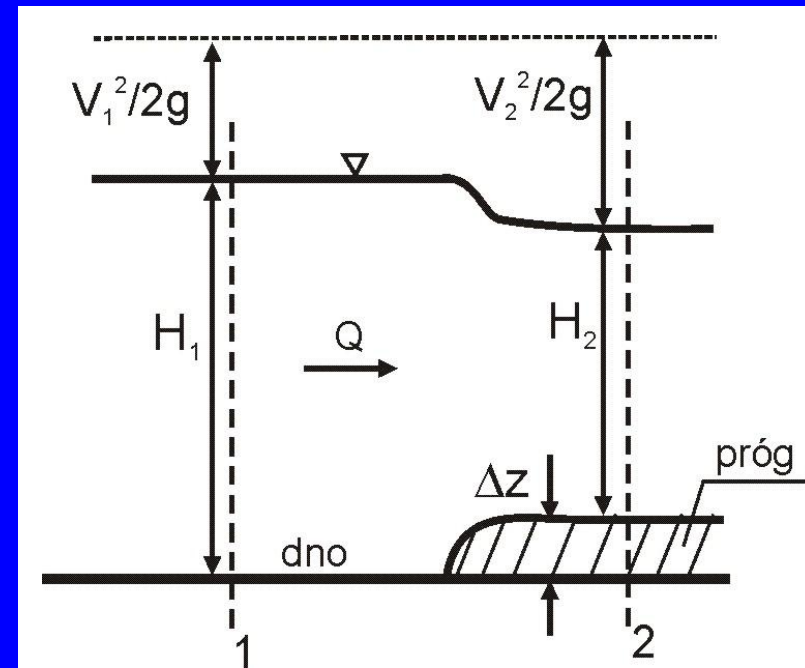
Równanie nieliniowe względem H_2

$$H_2^3 + (\Delta z - E_1) H_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

Dane: H_1 , Δz , B , Q (lub q)

q – wydatek jednostkowy, $q = Q/B$

Szukane: $H_2 = ?$



Równania Saint-Venanta (Przepływ nieustalony jednowymiarowy (1D) w kanałach otwartych)

Kanał otwarty – kanał w którym występuje swobodne zwierciadło wody na które działa ciśnienie atmosferyczne

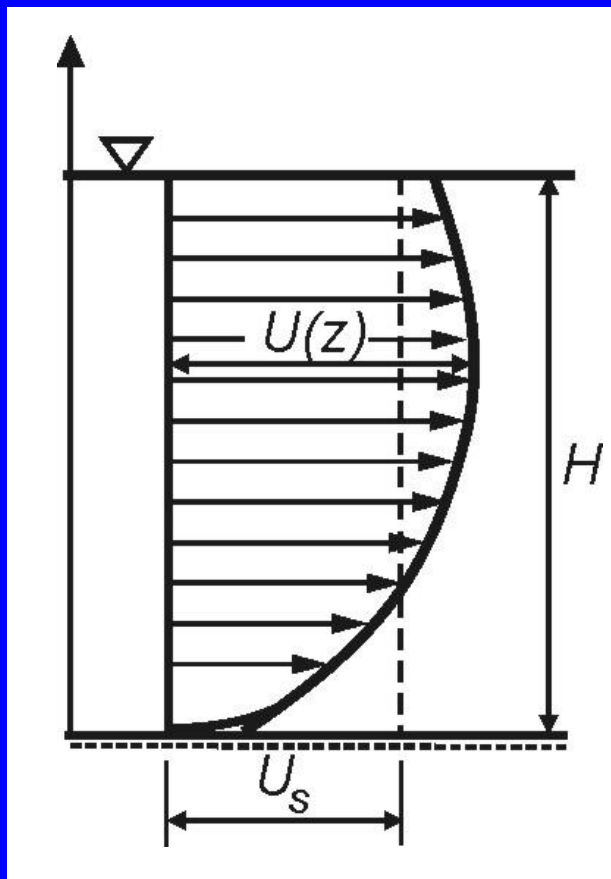
Ogólny model nieustalonego przepływu wolnozmiennego

Założenia:

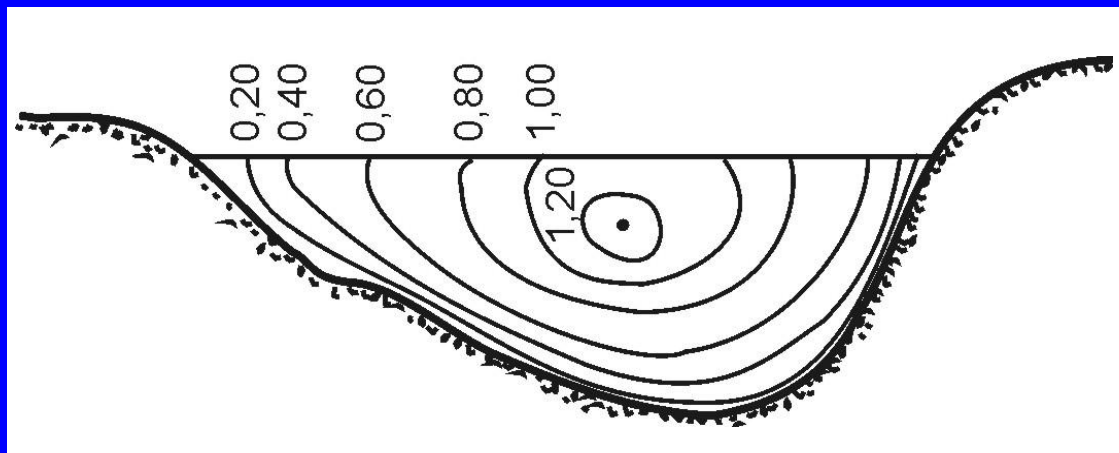
- przepływ jest wolnozmienny
- spadek dna koryta jest mały, $\sin \phi \approx \text{tg } \phi$
- wzdłuż głębokości ciśnienie zmienia się zgodnie z prawem hydrostatyki
- rozkład prędkości w przekroju poprzecznym jest jednostajny: przepływ jest jednowymiarowy
- opory ruchu liczy się jak w przepływie ustalonym

Rozkład prędkości w kanale otwartym

Rozkład prędkości po głębokości
w przekroju podłużnym



Rozkład prędkości w przekroju
poprzecznym - izotachy



Prędkość średnia
w pionie

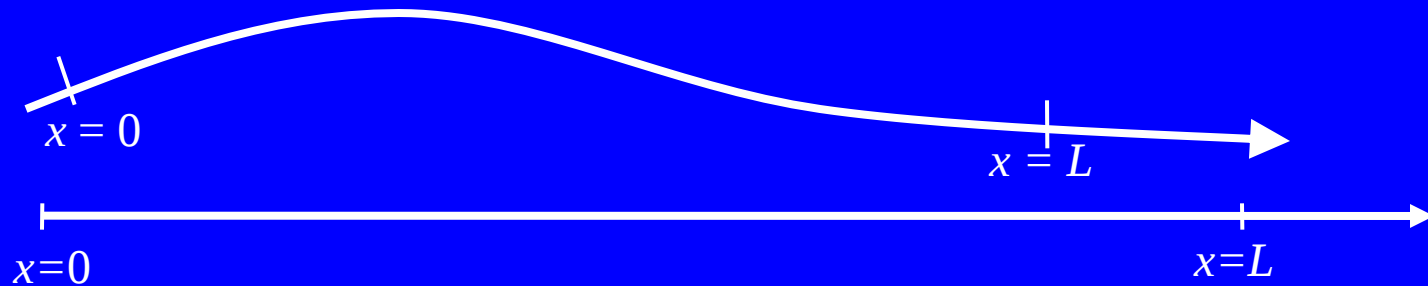
$$U_s = \frac{1}{h} \int_0^h U(z) \cdot dz$$

Prędkość średnia
w przekroju

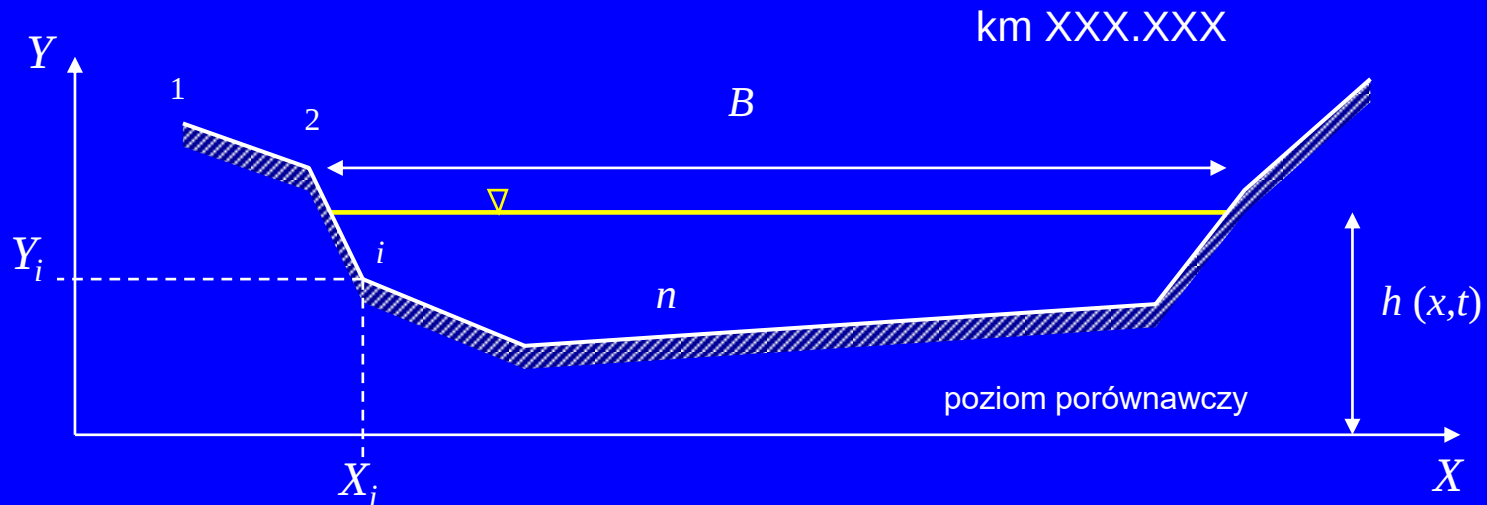
$$U_s = \frac{1}{A} \iint_A U \cdot dA$$

A – powierzchnia przekroju poprzecznego

Kanał naturalny - rzeka



- Identyfikacja przekroju poprzez kilometraż
- Przekrój poprzeczny opisany zbiorem punktów o pomierzonych współrzędnych (X_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, M$)



Parametry charakteryzujące koryto:

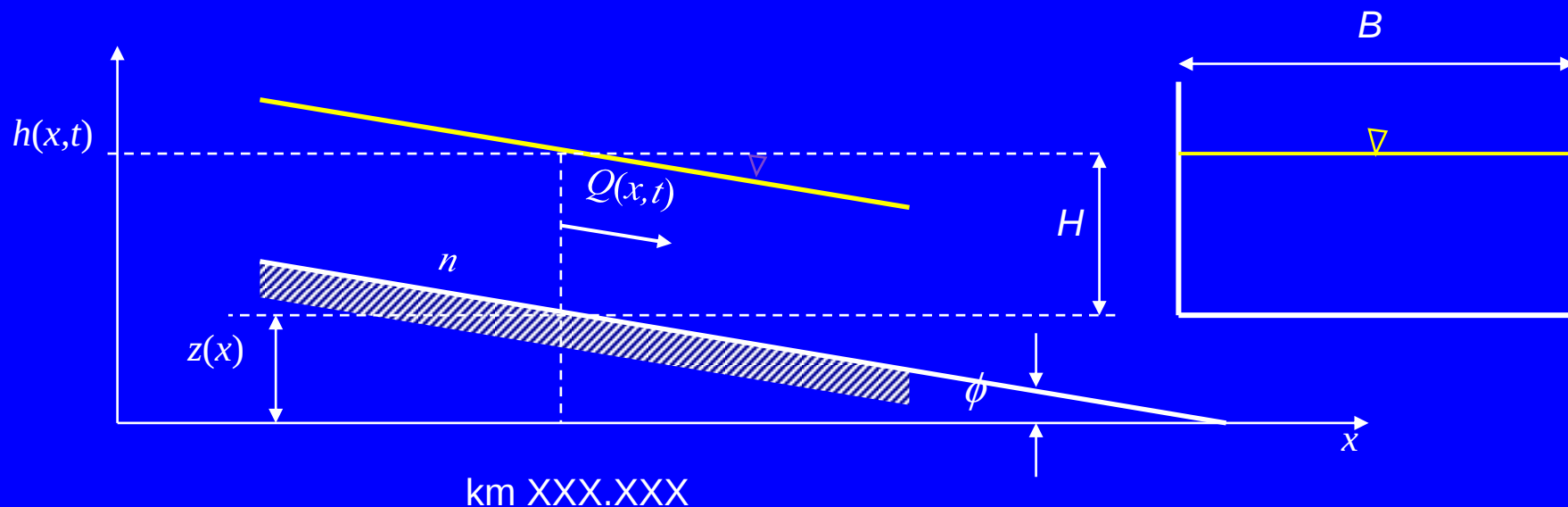
- pole przekroju czynnego: A
- szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody: B
- obwód zwilżony: p
- promień hydrauliczny: $R = A / p$
- rzędna dna kanału: z

Charakterystyka hydrauliczna przekroju:

- współczynnik szorstkości wg Manninga n

Parametry przepływu

- głębokość: H
- natężenie przepływu: Q



Kanał o przekroju pryzmatycznym – stały kształt na długości

Układ równań de Saint-Venanta dla kanału naturalnego

- **równanie ciągłości** (z zasady zachowania masy)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q_b}{B}$$

- **równanie dynamiczne** (z zasady zachowania pędu)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot A \cdot S = 0$$

gdzie:

$$S = \frac{n^2 \cdot Q \cdot |Q|}{R^{4/3} \cdot A^2}$$

S - spadek linii energii (spadek hydrauliczny) wg Manninga

Zmienne niezależne:

- położenie x
- czas t

Zmienne zależne:

- natężenie przepływu $Q(x, t)$
- rzędna zwierciadła wody $h(x, t)$

Pozostałe symbole:

g - przyspieszenie ziemskie

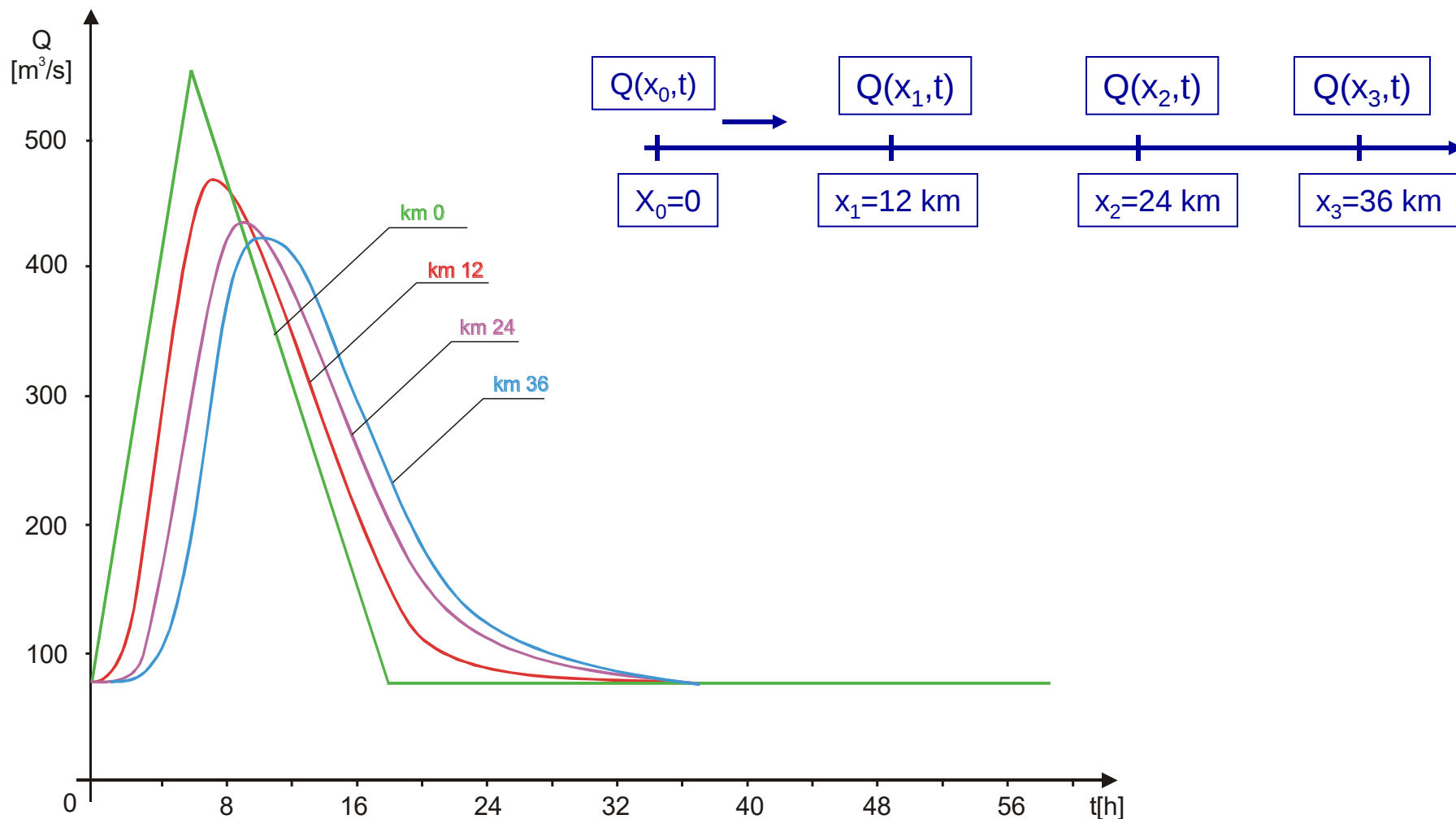
A – powierzchnia przekroju czynnego

q_b – dopływ boczny

B – szerokość kanału na poziomie zw. wody

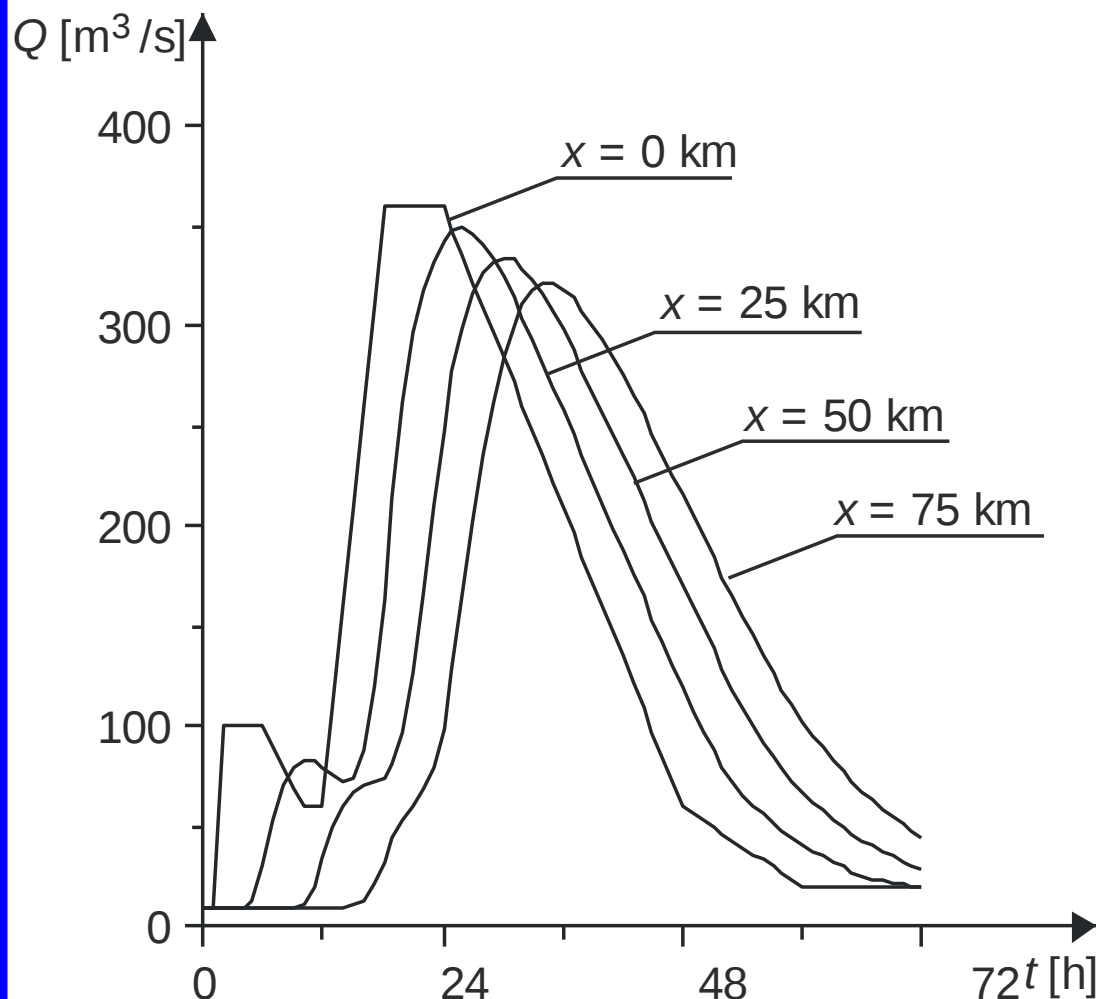
R – promień hydrauliczny

Przykład 1 - Obliczone hydrogramy w różnych przekrojach kanału



W kanale bez dopływów przemieszczająca się fala ulega spłaszczeniu - jej kulminacja maleje zaś podstawa wydłuża się

Przykład 2 - Transformacja fali o dwóch kulminacjach



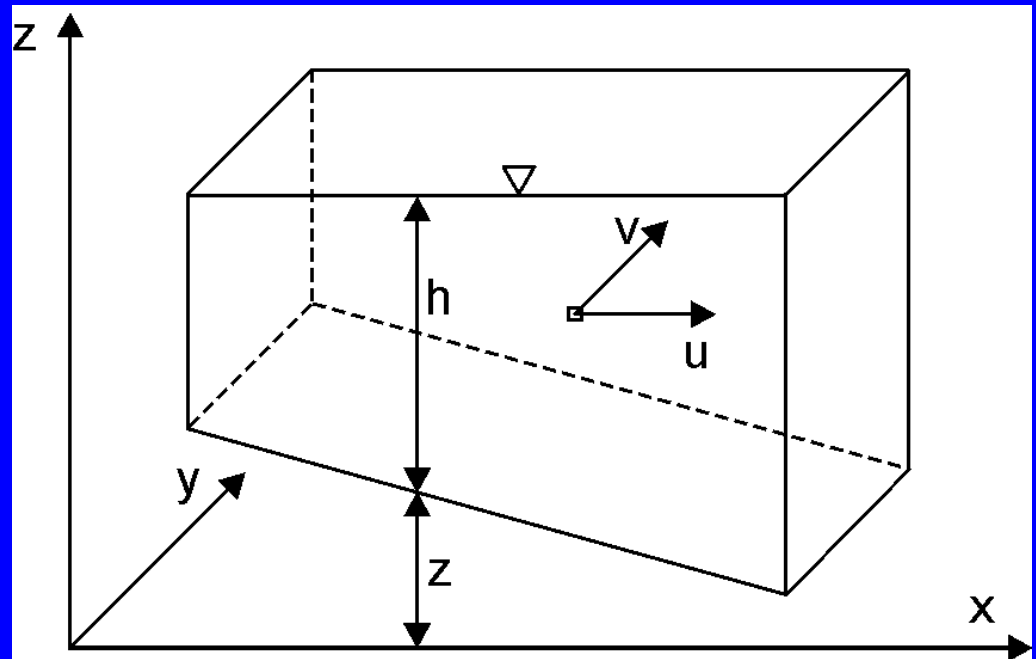
Oprócz spłaszczenia fali w hydrogramie znikają lokalne kulminacje

Prędkość fali rośnie wraz z głębokością: fale większe przemieszczają się szybciej niż fale niższe – z biegiem czasu wezbranie o jednej kulminacji

Równania płytkiej wody (Przepływ nieustalony dwuwymiarowy (2D))

Założenia:

- hydrostatyczny rozkład ciśnienia
- rozkład prędkości jednostajny
- opory ruchu jak w przepływie ustalonym



Zmienne zależne:

$u(x,y,t)$ - średnia prędkości przepływu w kierunku x

$v(x,y,t)$ - średnia prędkości przepływu w kierunku y

$h(x,y,t)$ - głębokość wody

Równania płytkiej wody w zapisie wektorowym

- 1 równanie ciągłości
- 2 równania dynamiczne

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + 0.5gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$

S_{0x} , S_{0y} - spadek dna wzdłuż kierunku x i y

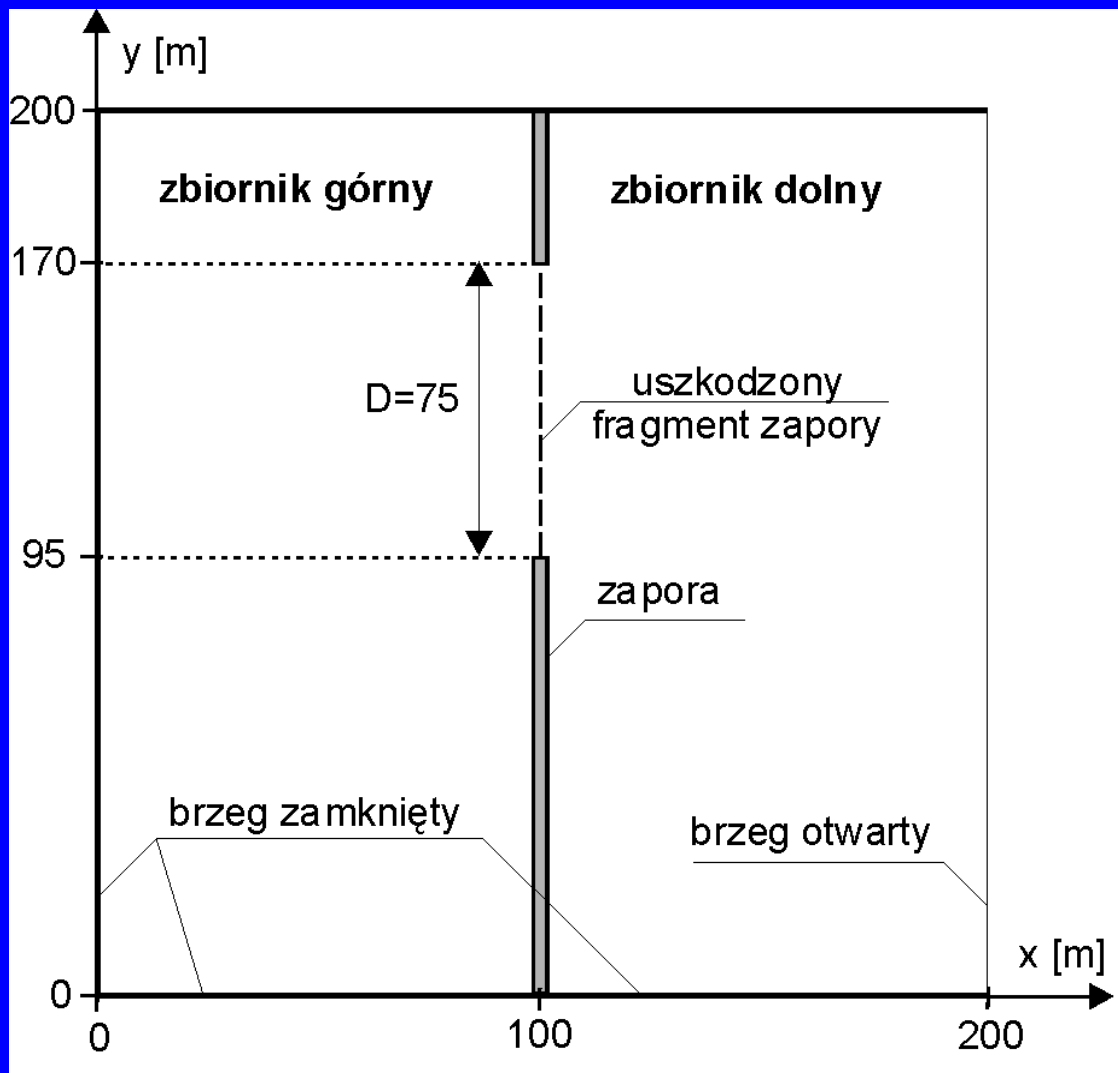
S_{fx} , S_{fy} - spadek linii energii w kierunku x oraz y obliczony według formuły Manninga:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u}{h^{4/3}} \sqrt{u^2 + v^2}$$

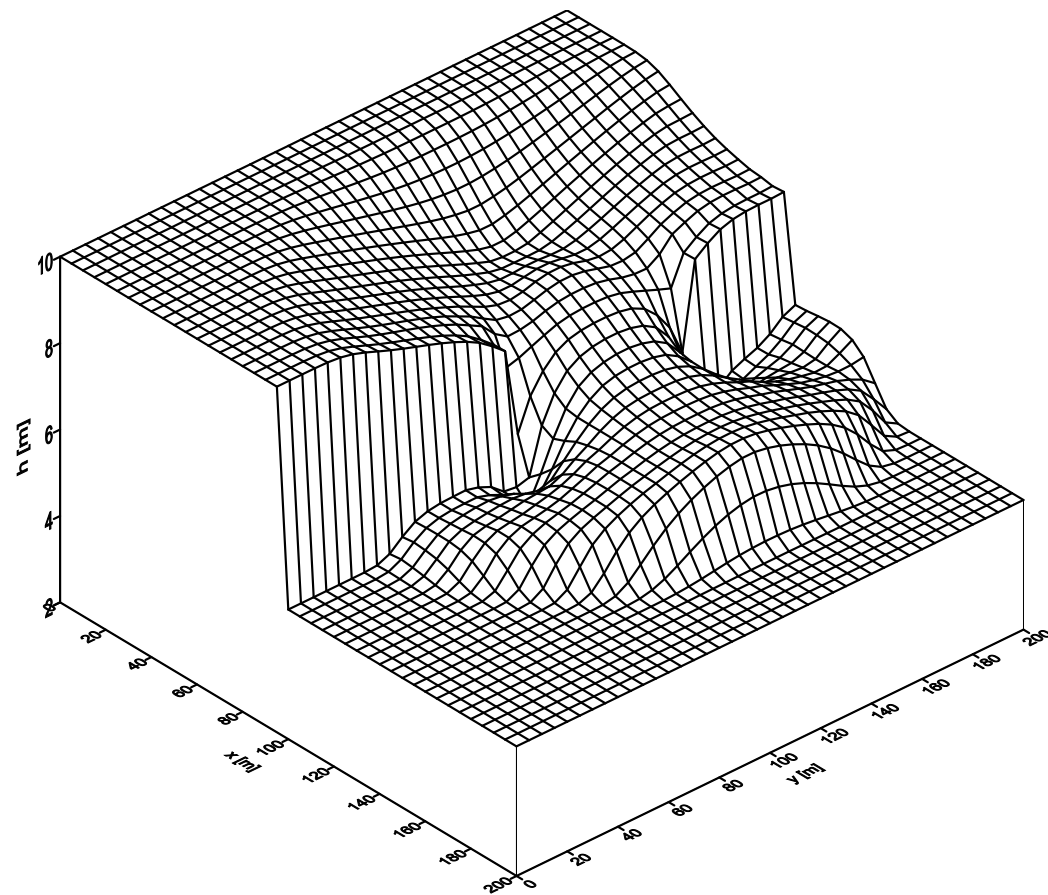
$$S_{fy} = \frac{n^2 v}{h^{4/3}} \sqrt{u^2 + v^2}$$

Przykład – nieustalony przepływ w wyniku katastrofy zapory

Obszar rozwiązania 200x200 m

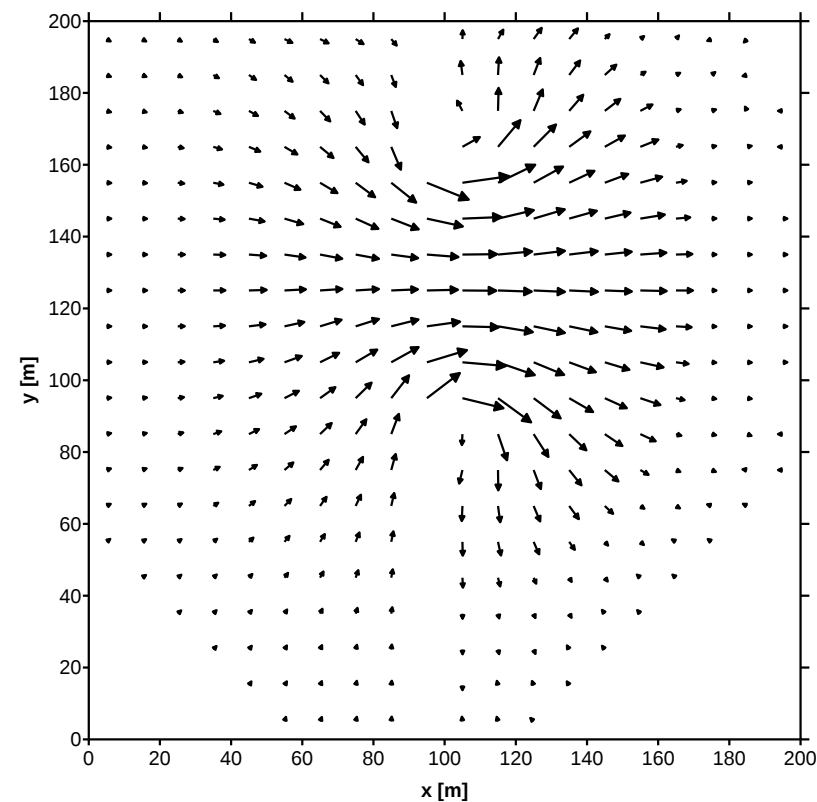


Układ zwierciadła wody



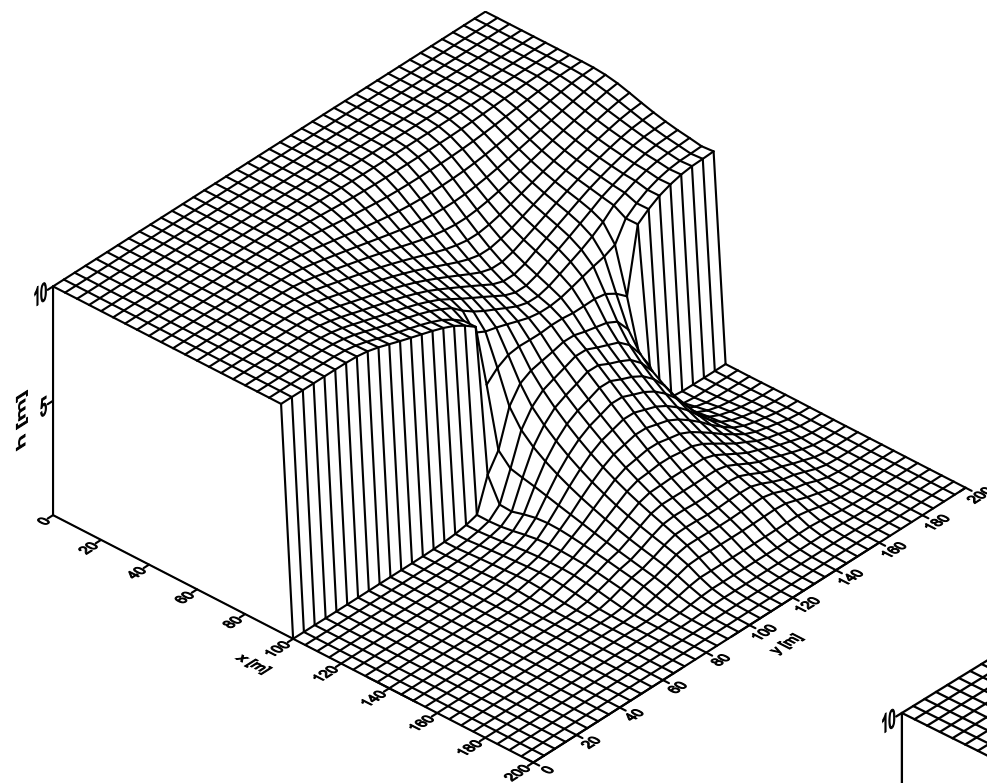
Rozwiązanie dla czasu $t = 7.2$ s ($n=0$)

Pole prędkości

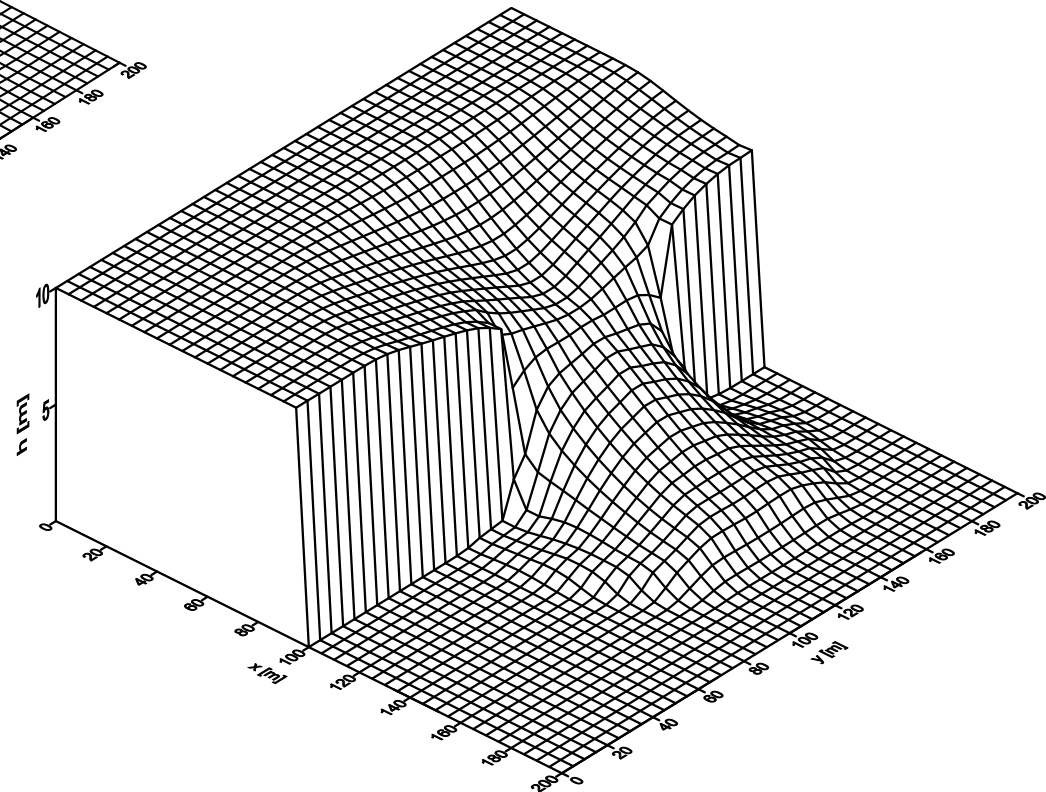


Układ zwierciadła wody dla warunków „suchego dna” po czasie $t=7$ s

Brak tarcia ($n=0$)



Z uwzględnieniem tarcia
($n=0.025$)



Równanie fali dyfuzyjnej

(Przepływ nieustalony dwuwymiarowy)

- Dwuwymiarowe równanie fali dyfuzyjnej wyprowadza się z układu równań płytkiej w których pomija się człony opisujące siłę bezwładności

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \Phi$$

1 równanie

x, y - współrzędne przestrzenne

t - czas

$H=H(x,y,t)$ – rzędna zw. wody

K – współczynnik dyfuzji

Φ – człon źródłowy reprezentujący
opad, parowanie oraz infiltrację

$$K(H) = \frac{\frac{1}{3} \cdot h^{5/3}}{\left| \frac{\partial H}{\partial s} \right|^{1/2}}$$

h – głębokość wody

s – kierunek przepływu (x lub y)

Dwuwymiarowe równane fali dyfuzyjnej

ZALETY

- Jedno równanie transportu adwekcyjno-dyfuzyjnego z jedną niewiadomą $H(x,y,t)$
 - potrzeba mniej informacji związanych z warunkami granicznymi
 - mniej złożony algorytm numeryczny
- Model fali dyfuzyjnej pozwala na przeprowadzenie obliczeń bez rozróżnienia umiejscowienia aktualnej granicy rozdzielającej teren „suchy” od „mokrego”
 - zmienna granica jest wynikiem rozwiązywania równania fali dyfuzyjnej
 - eliminacja problemu tzw. „suchego dna”

WADY

- Model uproszczony w stosunku do modelu fali dynamicznej
 - otrzymujemy mniej dokładny opis w pobliżu obiektów gdzie występują duże zmiany głębokości i prędkości wody (np. wyrwa w wale)
- Problemy numeryczne wynikające z nieliniowości członu dyfuzyjnego

Uwzględnienie procesu infiltracji

Podczas propagacji fali wezbraniowej na terenie zalewowym część objętości wody może infiltrować od powierzchni w głąb gruntu

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) = f$$

Do opisu zmienności procesu infiltracji w czasie można przyjąć równanie Hortona w następującej formie:

$$f(t) = f_c + (f_o - f_c) \exp(-k \cdot t)$$

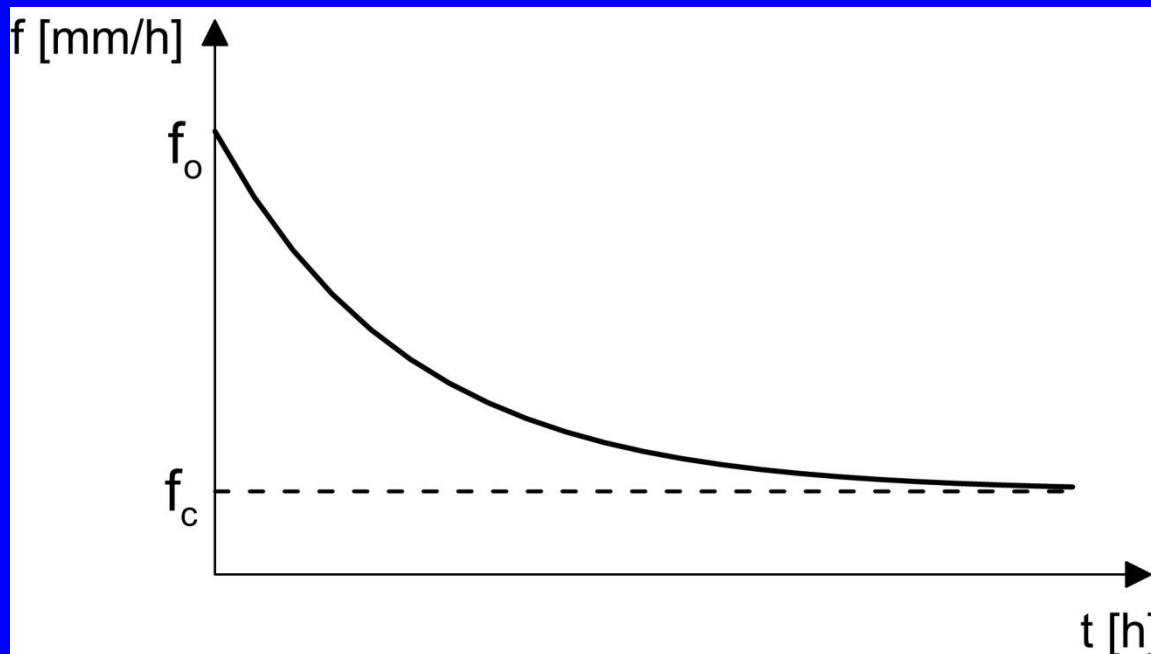
$f(t)$ – chwilowe natężenie infiltracji

f_c – natężenie infiltracji w stanie nasycenia zależne od rodzaju gruntu

f_o – początkowe natężenie infiltracji, zależne od rodzaju gruntu i wilgotności

k – stała zanikania

- Zgodnie z równaniem Hortona w miarę upływu czasu natężenie infiltracji maleje w sposób wykładniczy i zmierza do ustalonej wartości natężenie infiltracji w stanie nasycenia f_c
- Przebieg procesy infiltracji jest zgodny z równaniem Hortona tylko przy założeniu ciągłego zasilania gruntu wodą



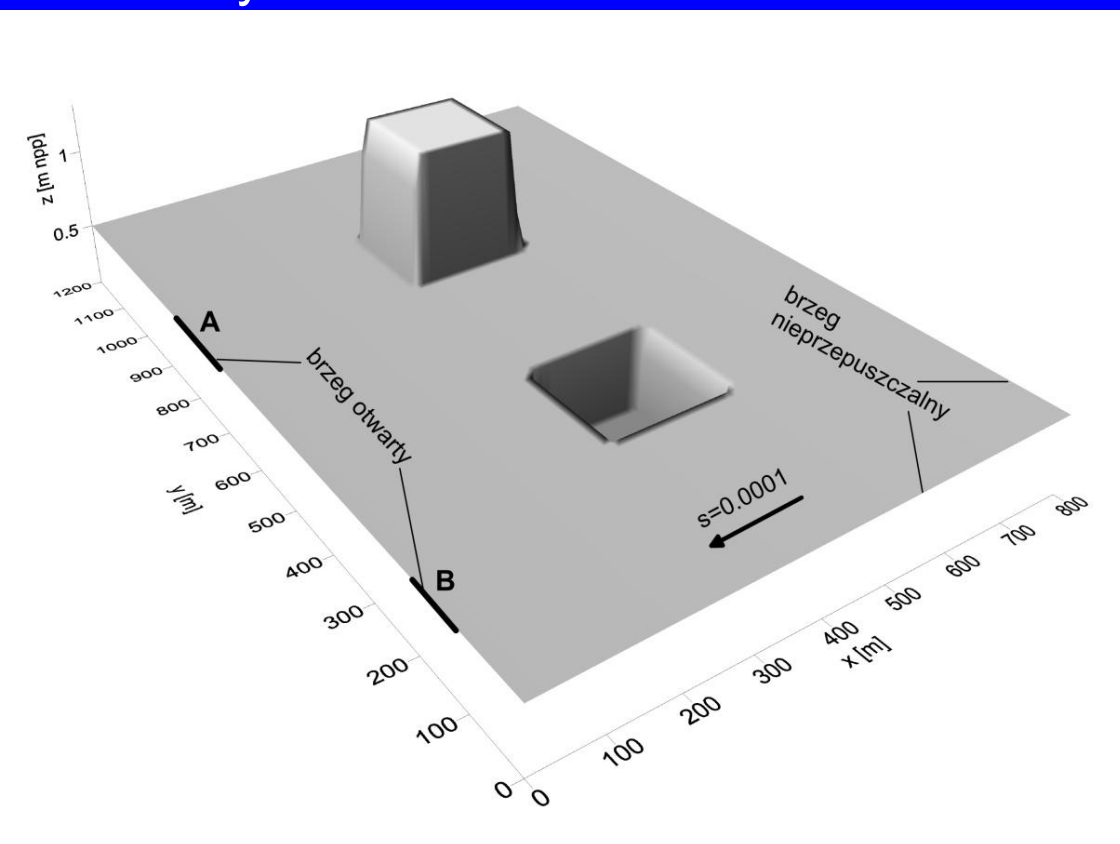
Przykład – symulacja pracy polderu

Obszar:

- polder o wymiarach 1200 m x 800 m
- wsp. Manninga $n = 0.05 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$

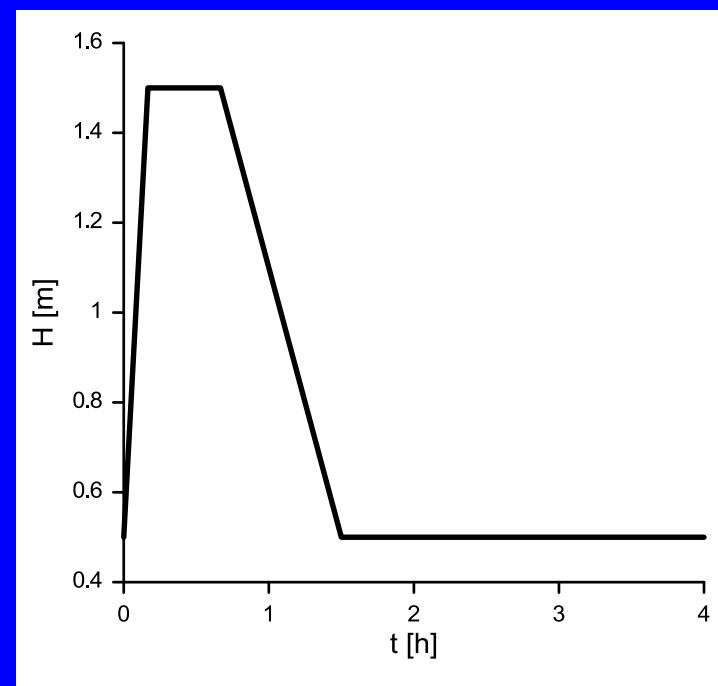
Warunek początkowy:

- w całym obszarze w czasie suche dno



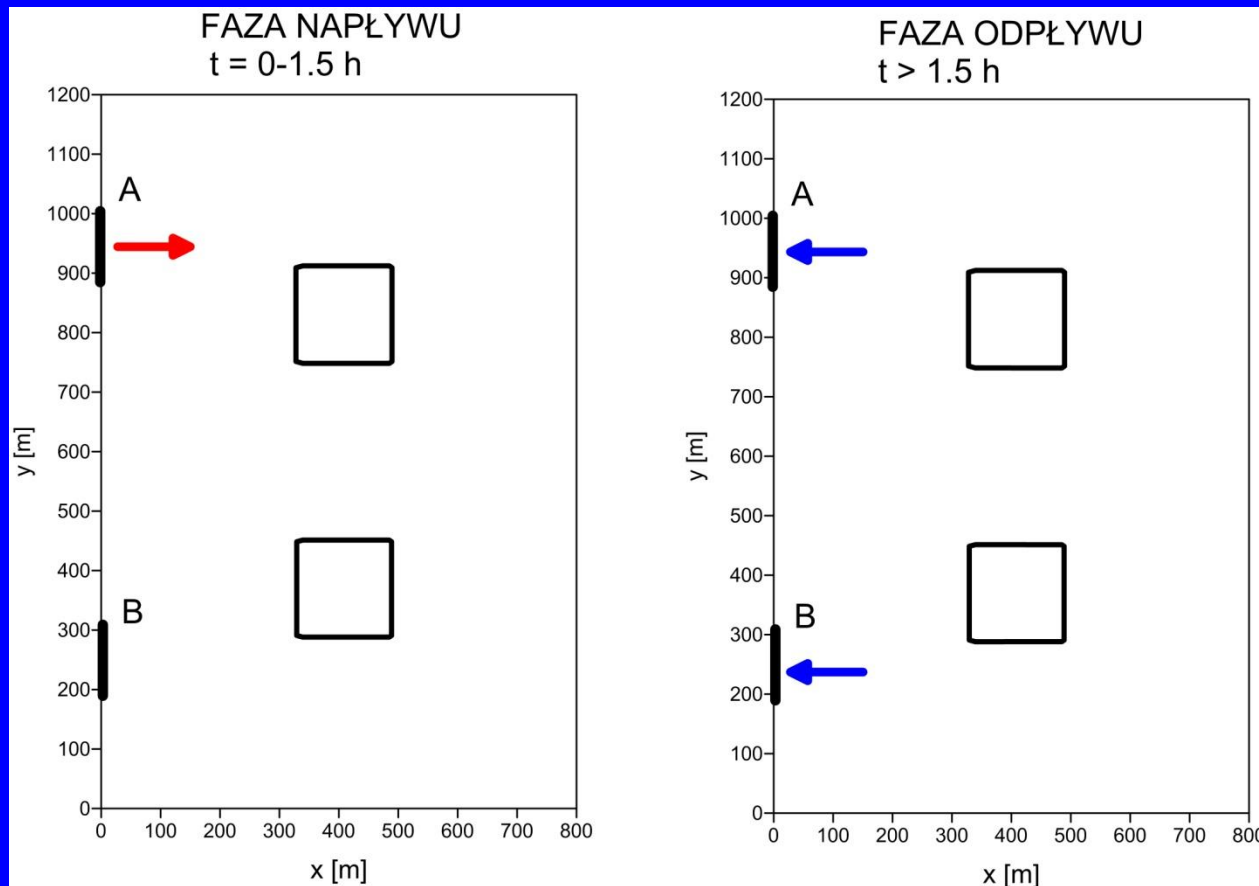
Warunki brzegowe:

- na brzegu $x=0$ (odcinek A):
funkcja $H(t, x=0, y) = H_B(t)$



- na pozostałej części brzegu:
brzeg nieprzepuszczalny

Schemat pracy polderu



Parametry infiltracyjne gruntu

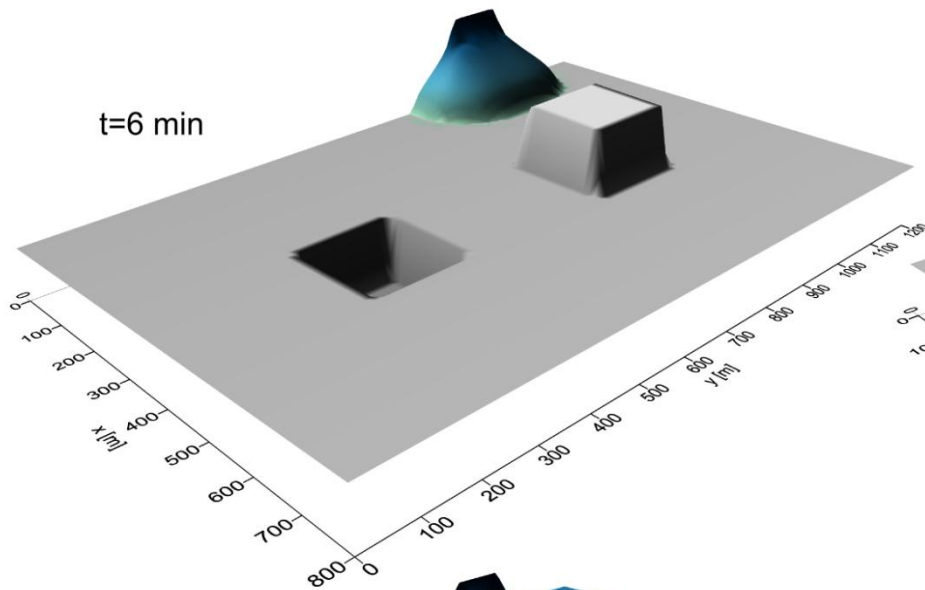
- początkowe natężenie infiltracji
 $f_o = 2 \text{ mm/h}$
- maksymalne natężenie infiltracji w stanie nasycenia $f_c = 0.7 \text{ mm/h}$
- stała zanikania $k = 2 \text{ 1/h}$

Parametry numeryczne

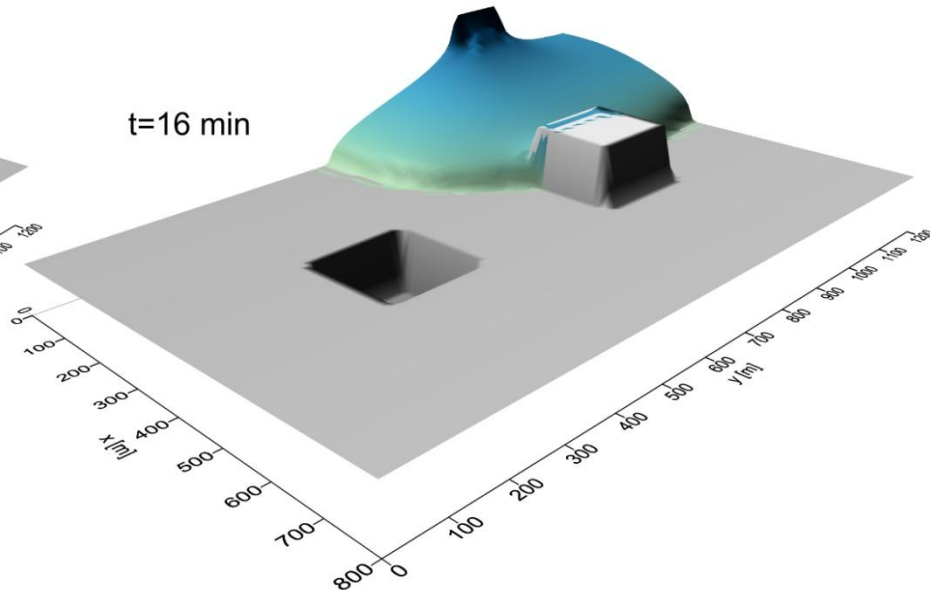
- siatka o wymiarach $\Delta x = 10 \text{ m} \times \Delta y = 10 \text{ m}$
- liczba węzłów siatki 9801
- krok czasowy $\Delta t = 10 \text{ s}$
- parametry wagowe $\theta = 0.65$ oraz $\omega = 0.7$

FAZA NAPŁYWU

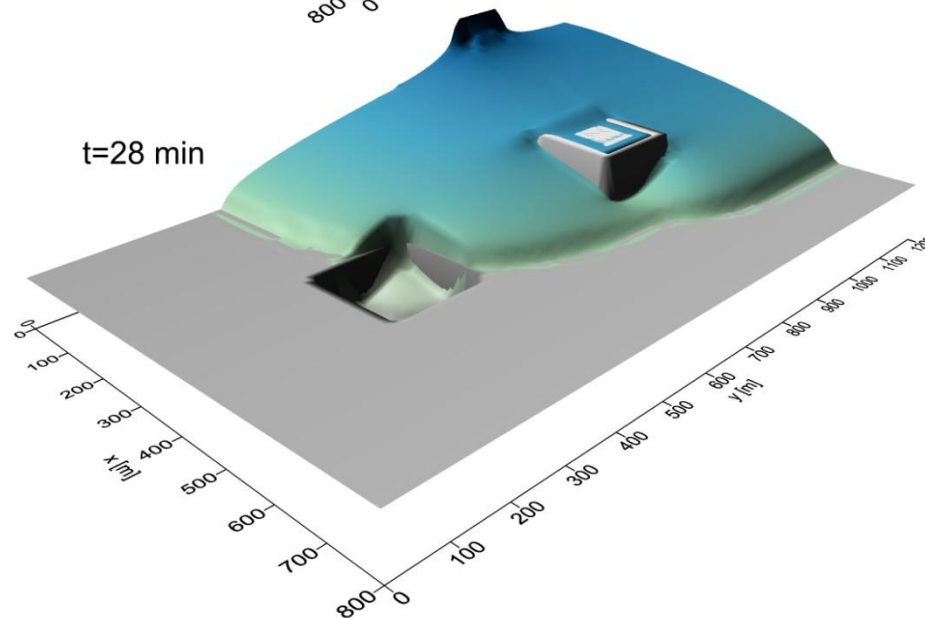
t=6 min



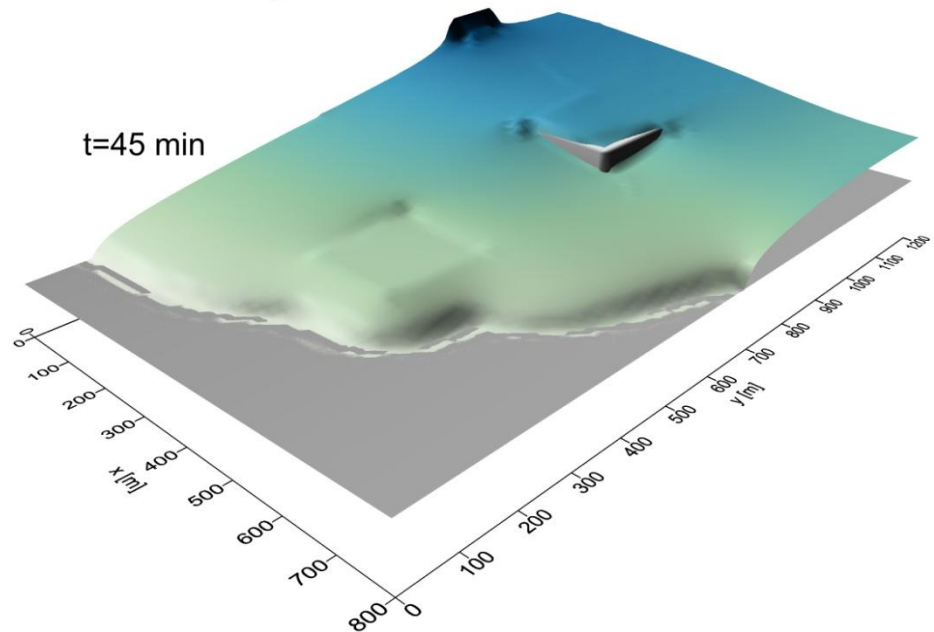
t=16 min



t=28 min

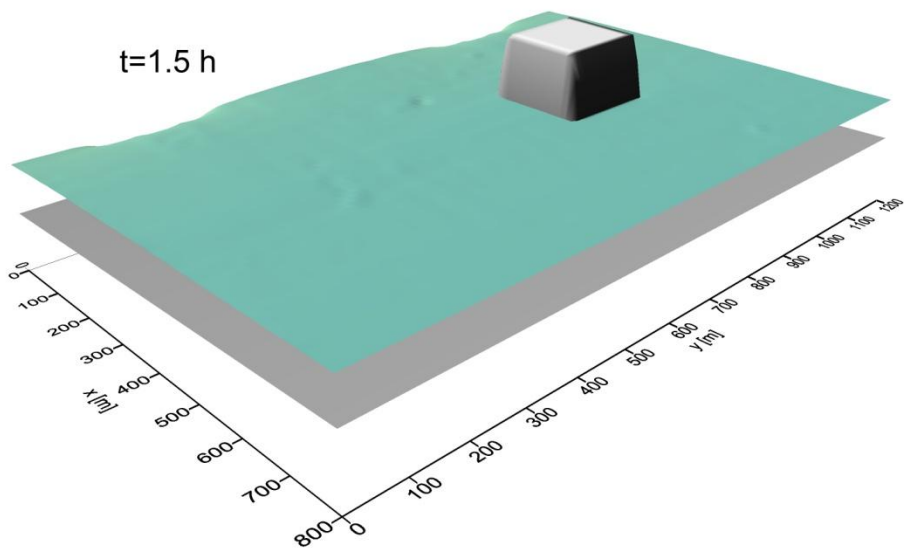


t=45 min

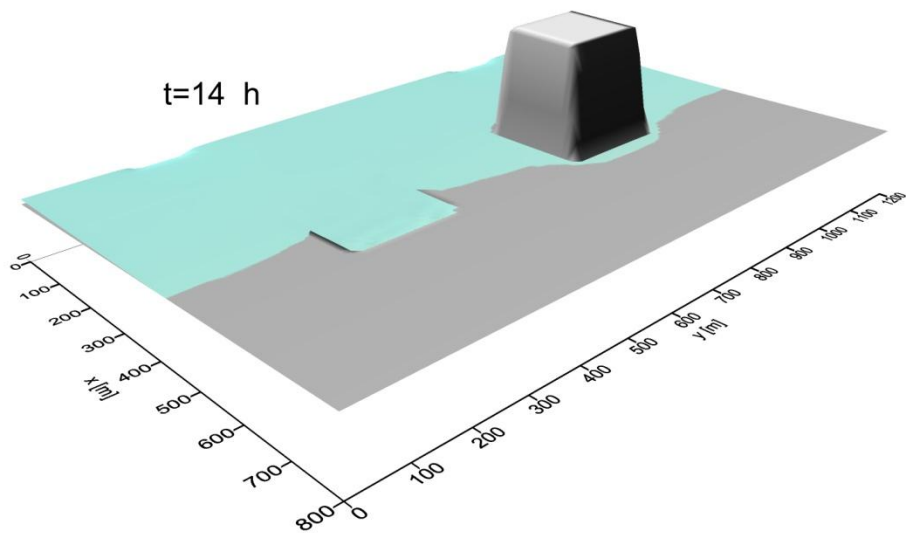


FAZA ODPŁYWU

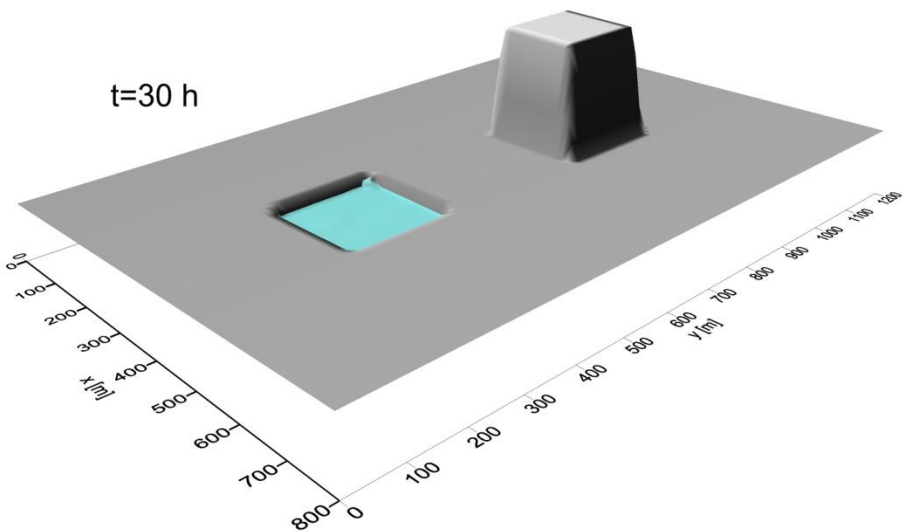
t=1.5 h



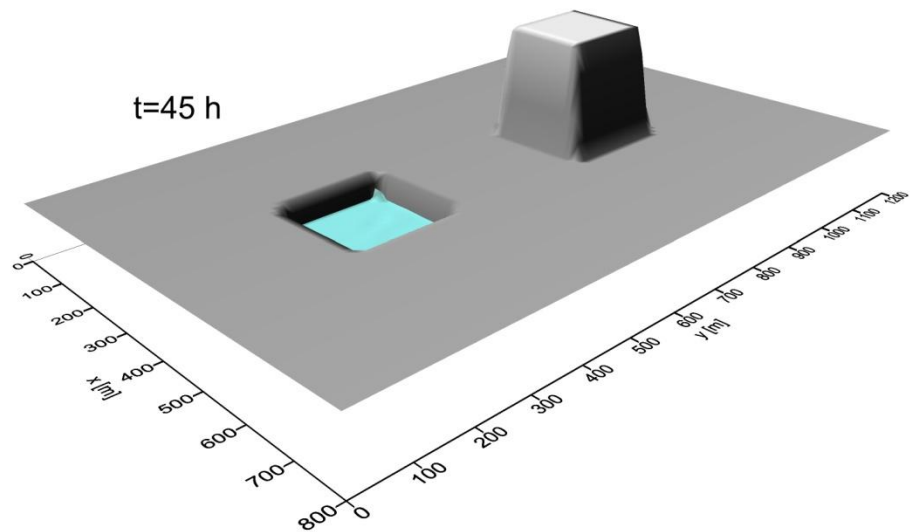
t=14 h



t=30 h

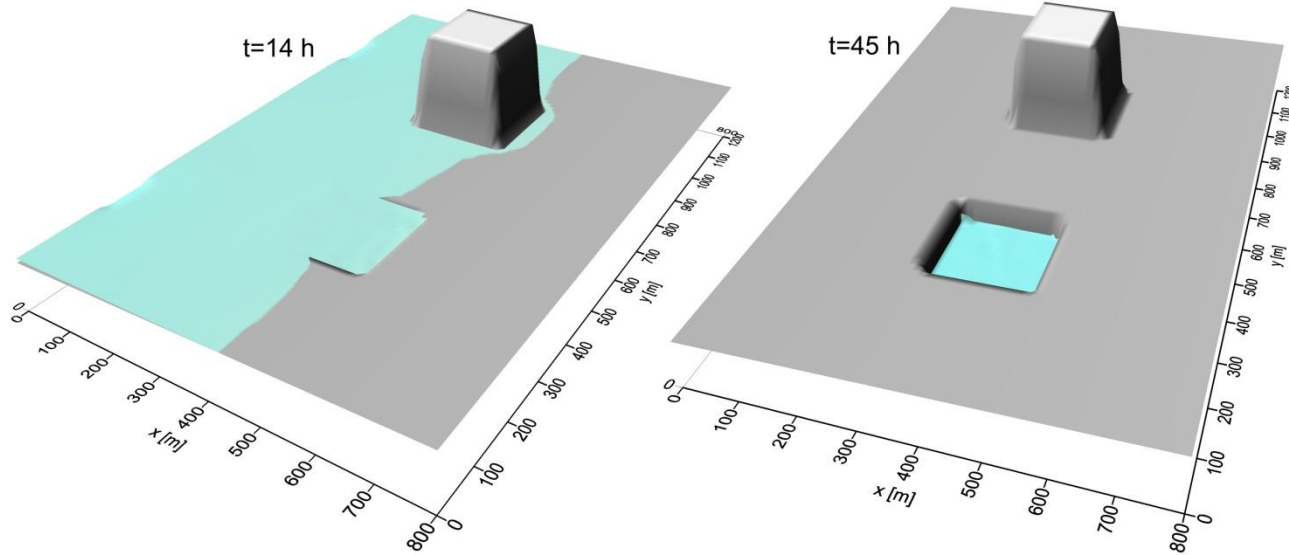


t=45 h

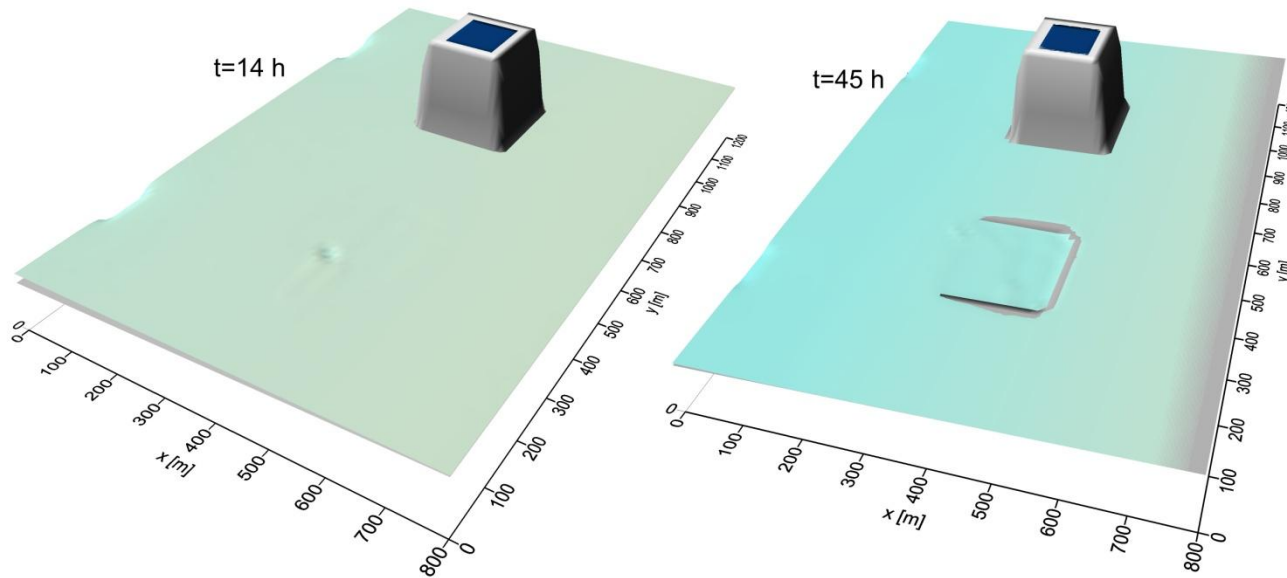


FAZA ODPŁYWU - porównanie rozwiązań z uwzględnieniem oraz bez infiltracji

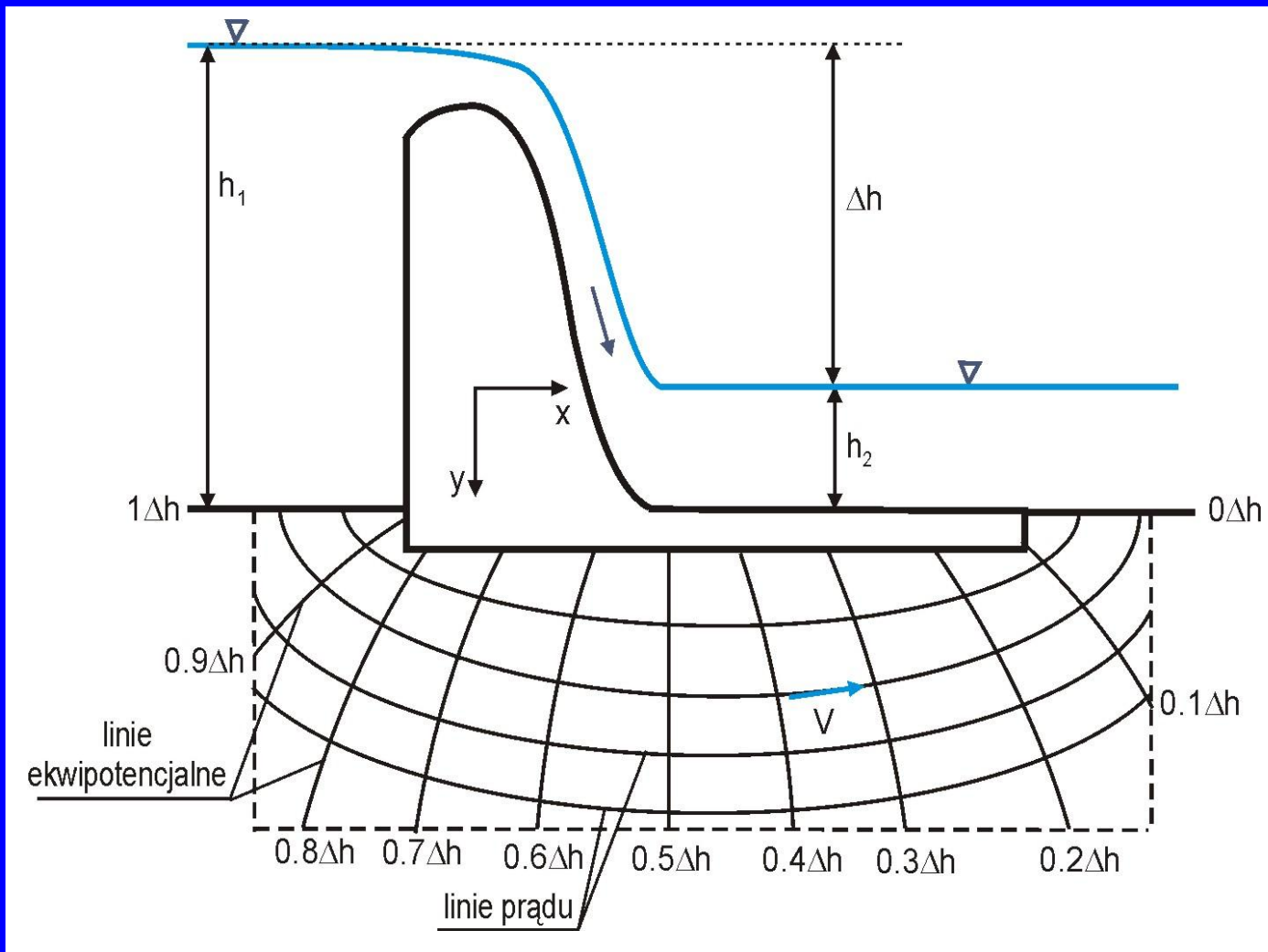
infiltracja $f > 0$



bez infiltracji $f=0$



Równanie Laplace'a oraz równanie Poissona (Przepływ ustalony dwuwymiarowy (2D))



Założenia ruchu:

- laminarny $Re < 5$
- płaski $H(x, y)$
- potencjalny
- obowiązuje prawo Darcy

Ustalona filtracja pod budowlą piętrzącą

Linia ekwipotencjalna – linia o jednakowej wartości ciśnienia (wzdłuż danej linii ciśnienie jest stałe $h=const$)

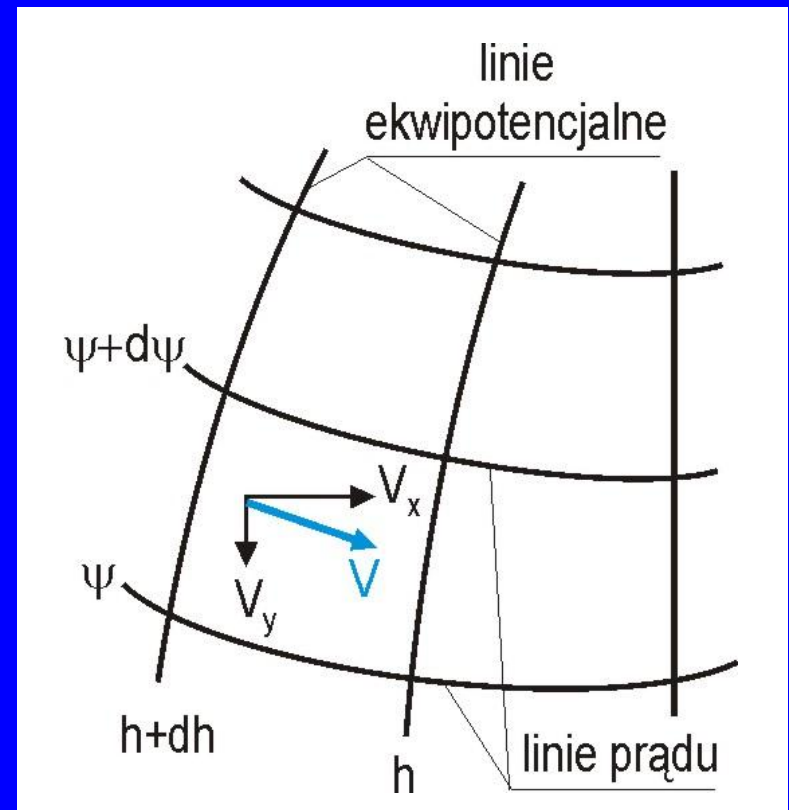
Linia prądu – linia do której wektory prędkości V są styczne (linie prądu wyznaczają trajektorie wzdłuż których poruszają się cząstki cieczy)

Rodzina linii prądu jest zwana **funkcją prądu** $\psi(x,y)$

Za pomocą **funkcji prądu** $\psi(x,y)$ można wyrazić składowe prędkości filtracji:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Ruch w granicach stosowalności prawa Darcy (równanie dynamiczne)

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}$$

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Podstawiając rów. Darcy do rów. ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{jeśli } k = \text{const} \quad \longrightarrow$$

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Równanie Laplace'a względem funkcji ciśnienia piezometrycznego $h(x,y)$

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

W przepływie filtracyjnym pole prędkości można określić za pomocą ciśnień piezometrycznych → wówczas pole prędkości jest polem potencjalnym, które opisane jest **funkcją potencjału** $\varphi(x,y)$

Składowe prędkości mogą być wyrażone także za pomocą **funkcji potencjału** $\varphi(x,y)$:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Wykorzystując związek prędkości filtracji z funkcją prądu oraz z funkcją potencjału i podstawiając do rów. ciągłości otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Równanie Laplace'a względem funkcji prądu $\psi(x,y)$

Rozwiązanie równania Laplace'a względem:

- ciśnienia piezometrycznego

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

$h(x, y)$

+

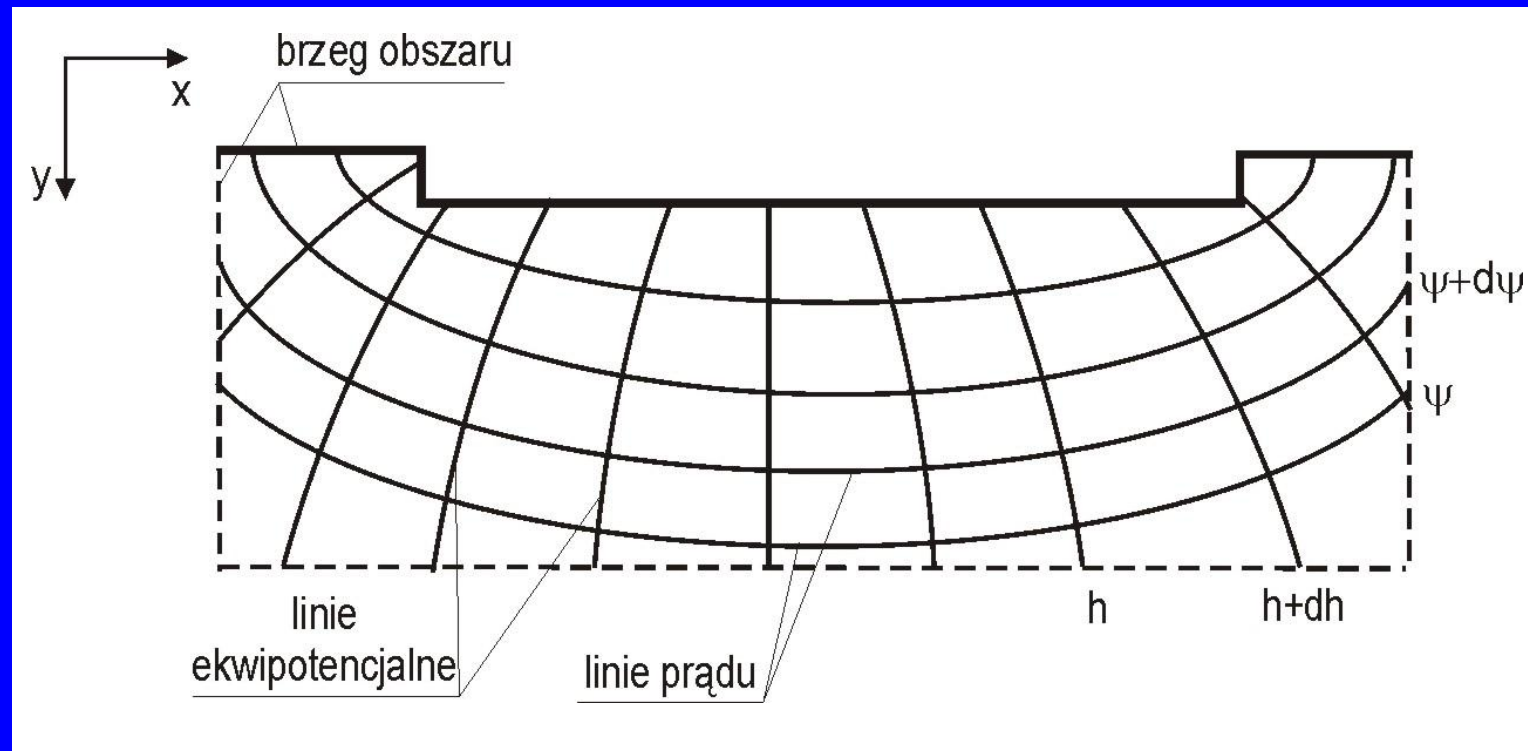
- funkcji prądu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$\psi(x, y)$

Siatka hydrodynamiczna

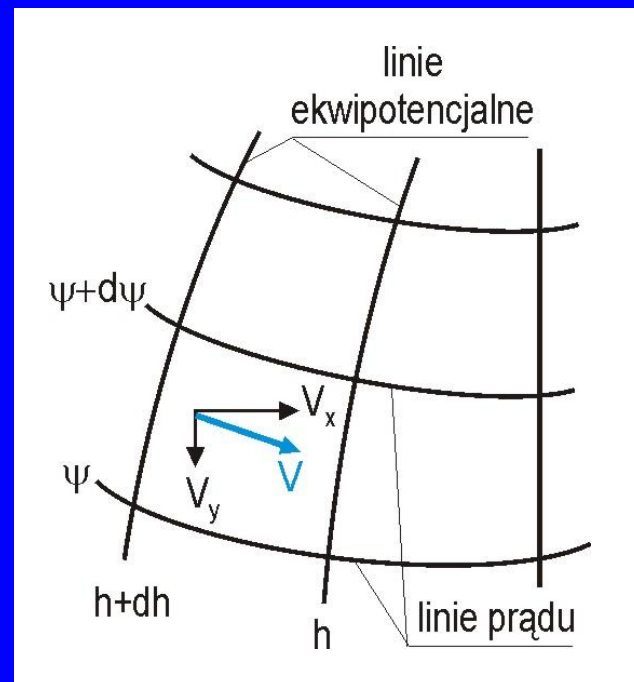
przebieg linii prądu ($\psi(x, y)$) oraz linii ekwipotencjalnych $h(x, y)$ w układzie (x, y)



Własności siatki hydrodynamicznej

Kąt zawarty między kierunkami stycznych do linii ekwipotencjalnej oraz linii prądu wynosi $90^\circ \rightarrow$ siatka jest **ortogonalna**

Wektor prędkości filtracji jest prostopadły do linii ekwipotencjalnej (jako styczny do linii prądu)



Rozwiązanie równania Laplace'a

Równanie Laplace'a jest równaniem różniczkowym typu eliptycznego.

Rozwiązanie tego typu równania formułujemy jako **zagadnienie brzegowe**,
 $\rightarrow$ poszukujemy rozwiązania w postaci funkcji $h(x,y)$ lub $\psi(x,y)$, która spełni wyjściowe równanie różniczkowe oraz zadane warunki brzegowe.

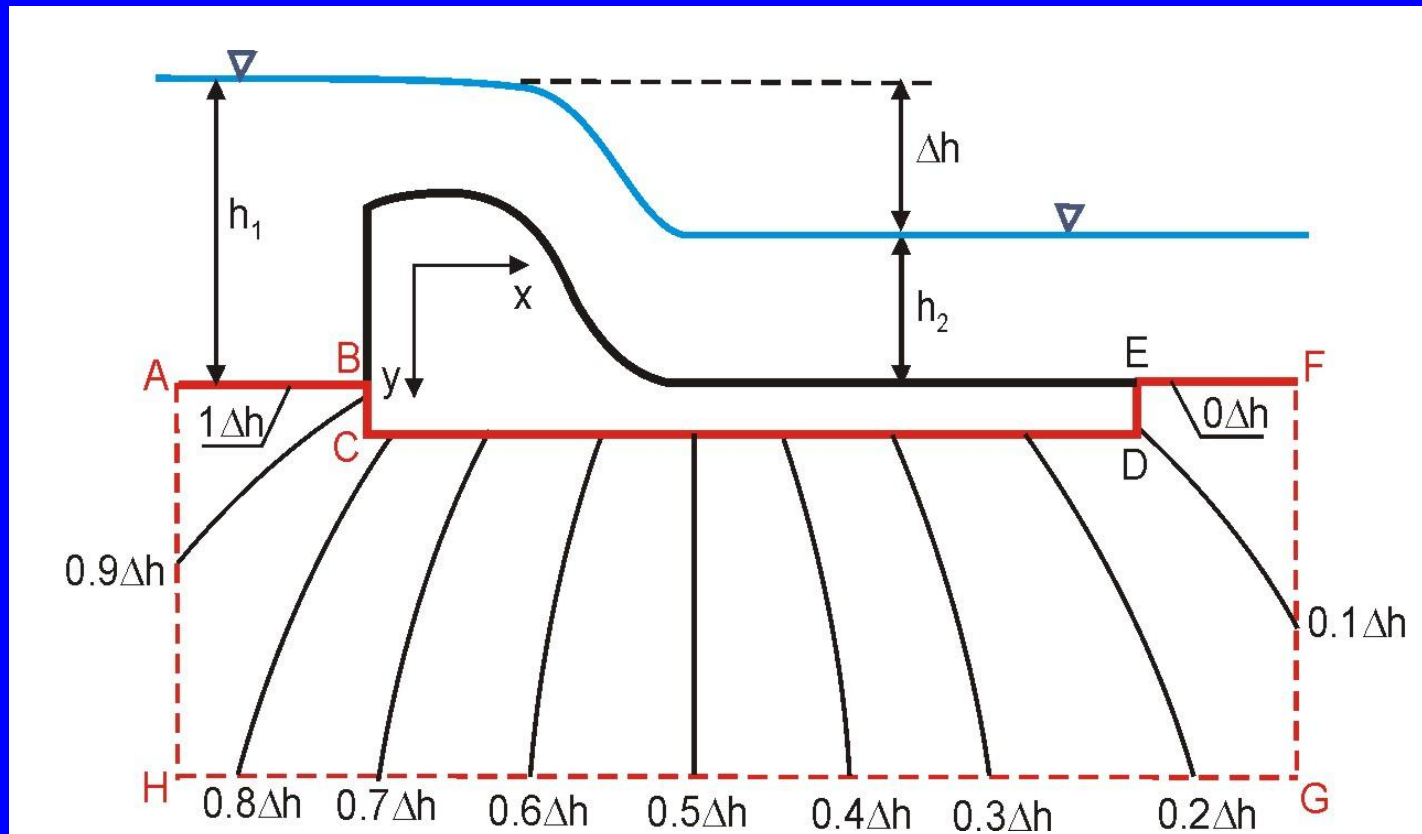
Warunki brzegowe (linie ekwipotencjalne)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$



$$h(x, y)$$

- wzdłuż linii A-B: $h=h_1$
- wzdłuż linii E-F: $h=h_2$
- wzdłuż linii B-C-D-E (podziemny kontur): $\partial h / \partial n = 0$
- wzdłuż linii A-H-G-F: $\partial h / \partial n = 0$

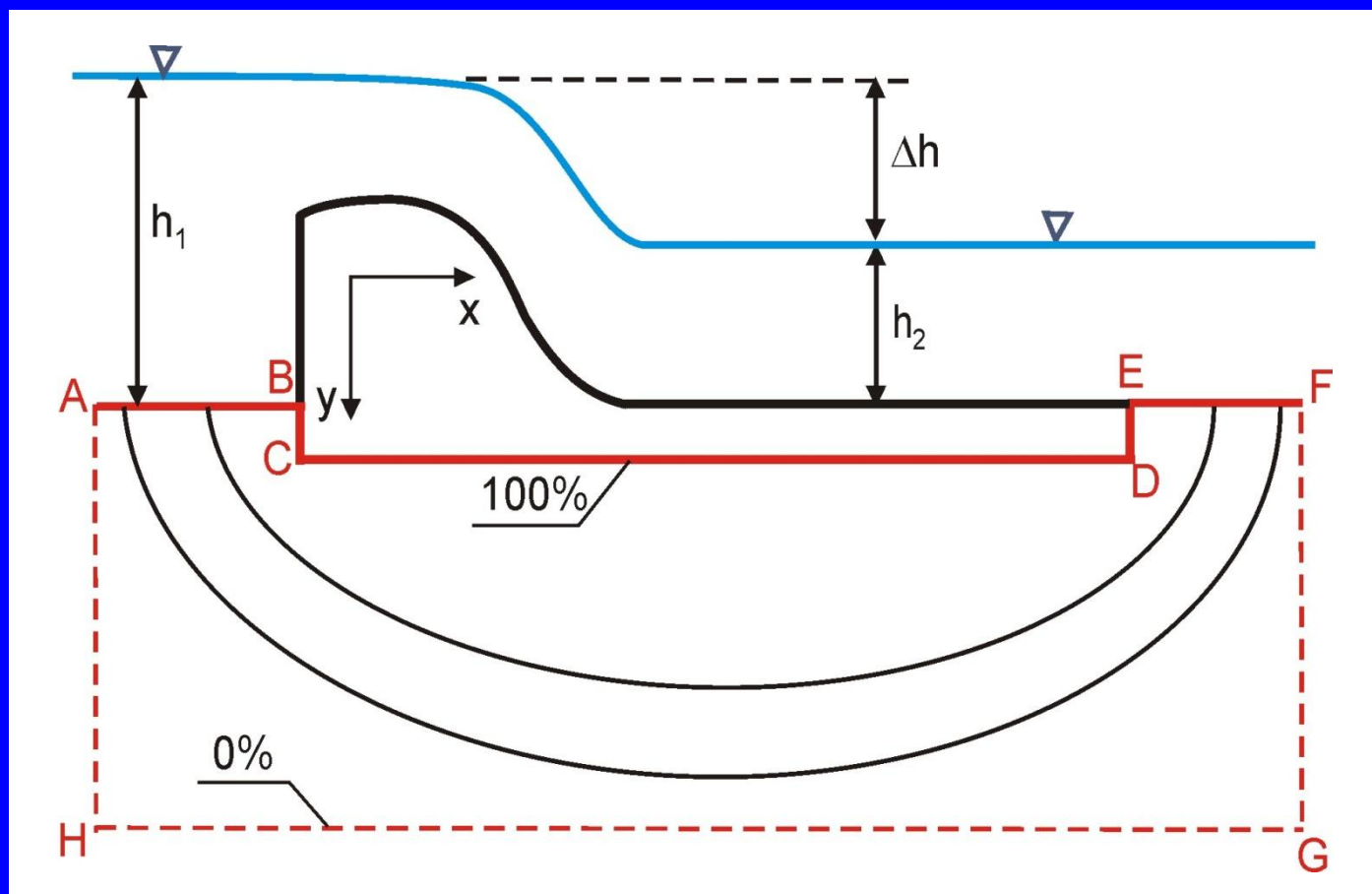


Warunki brzegowe (linie prądu)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$\psi(x, y)$

- wzdłuż linii B-C-D-E: $\psi=100\%$
- wzdłuż linii H-G, A-H, F-G : $\psi=0\%$
- wzdłuż linii A-B oraz E-F: $\partial\psi/\partial n=0$



Wydatek filtrującej wody q

Wydatek jednostkowy na 1mb warstwy

$$\Delta q_j = V_j \cdot \Delta b_j$$

Prędkość filtracji

$$V_j = k_j \frac{\Delta h_j}{\Delta l_j}$$

$$q = \sum_{j=1}^N \Delta q_j = k_j \sum_{j=1}^N \frac{\Delta h_j}{\Delta l_j} \Delta b_j$$

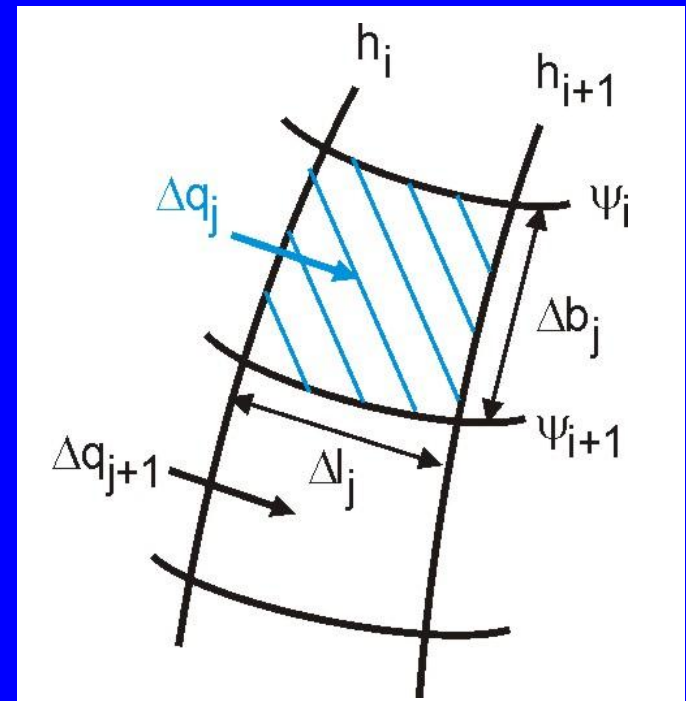
$$q = k \cdot \Delta h \sum_{j=1}^N \frac{\Delta b_j}{\Delta l_j} \quad \begin{matrix} k_j = k = \text{const} \\ \Delta h_j = \Delta h = \text{const} \end{matrix}$$

V_j – prędkość filtracji

Δb_j – odległość między kolejnymi liniami prądu ψ_i oraz ψ_{i+1}

Δl_j – odległość między kolejnymi liniami ekwipotencjalnymi h_i oraz h_{i+1}

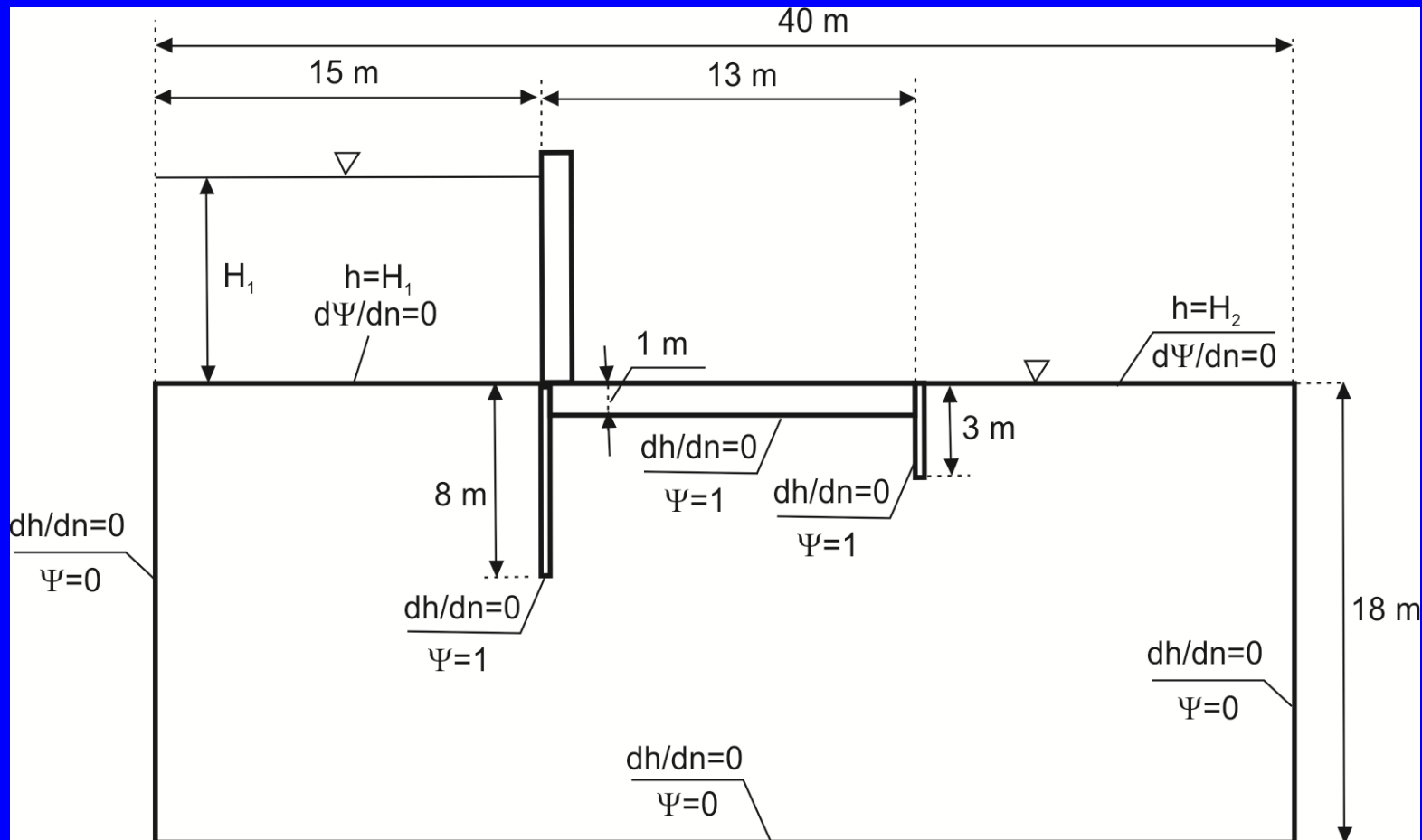
Δh_j – różnica wysokości ciśnienia piezometrycznego, $\Delta h_j = h_i - h_{i+1}$



Przykład 1

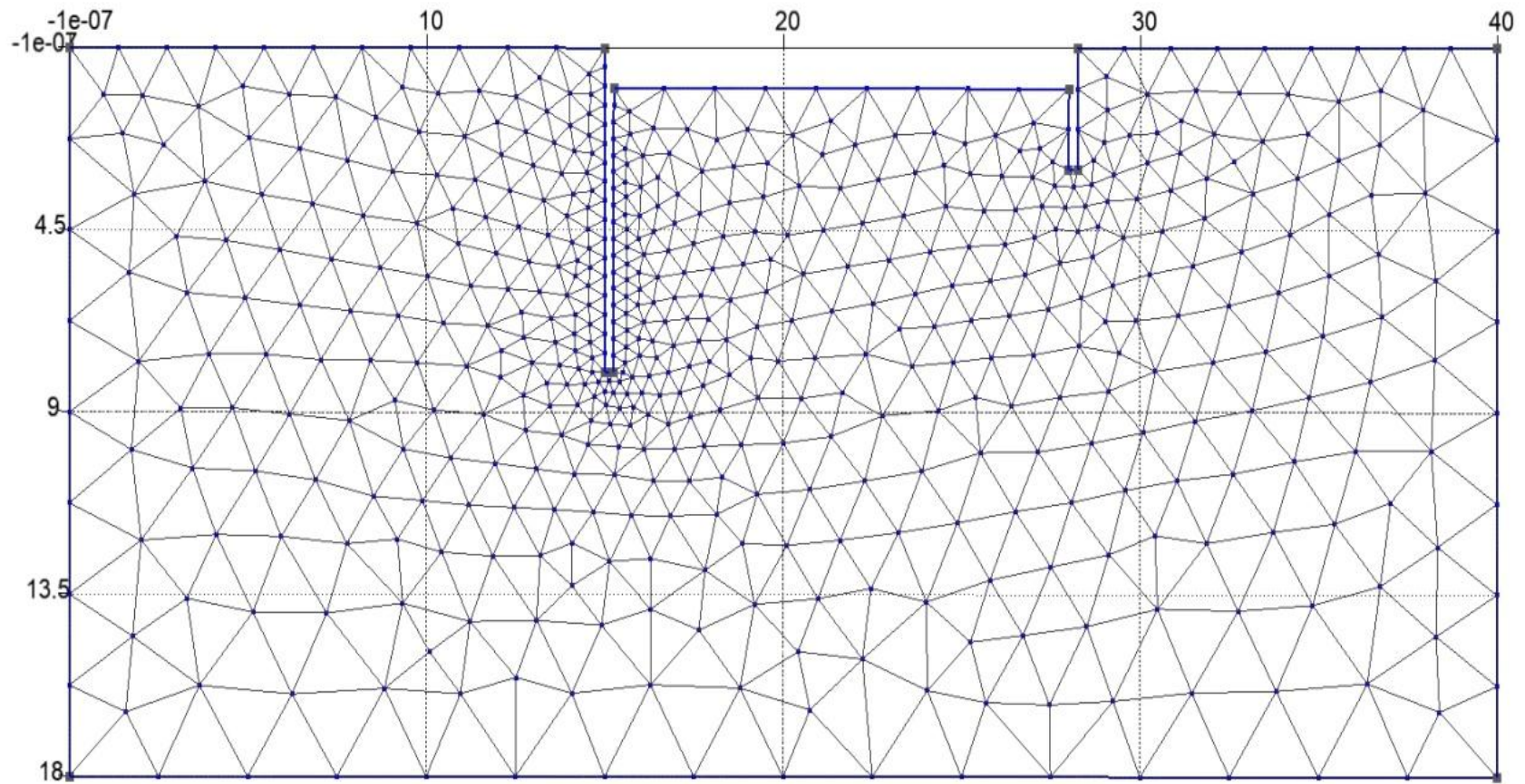
Przepływ ustalony pod jazem z dwoma ściankami szczelnymi

- wysokość nadciśnienia: woda górna - $H_1=5$ m, woda dolna - $H_2=0$ m,
- grunt jednorodny - współczynnik filtracji $k=k_x=k_y=0.000001$ m/s,



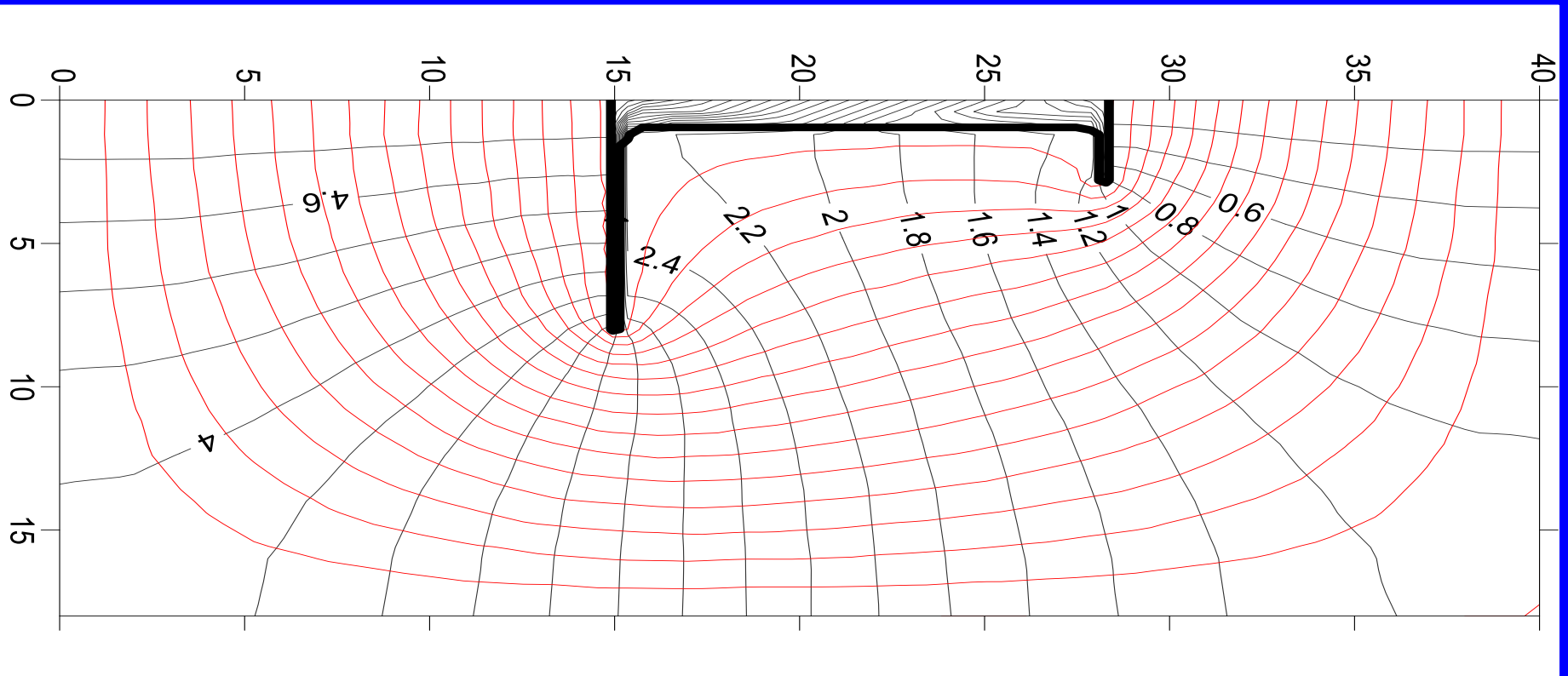
Rys. Geometria obszaru wraz z zadanymi warunkami brzegowymi

Siatka utworzona w programie generującym siatkę elementów skończonych trójkątnych (program: **gmsh**)

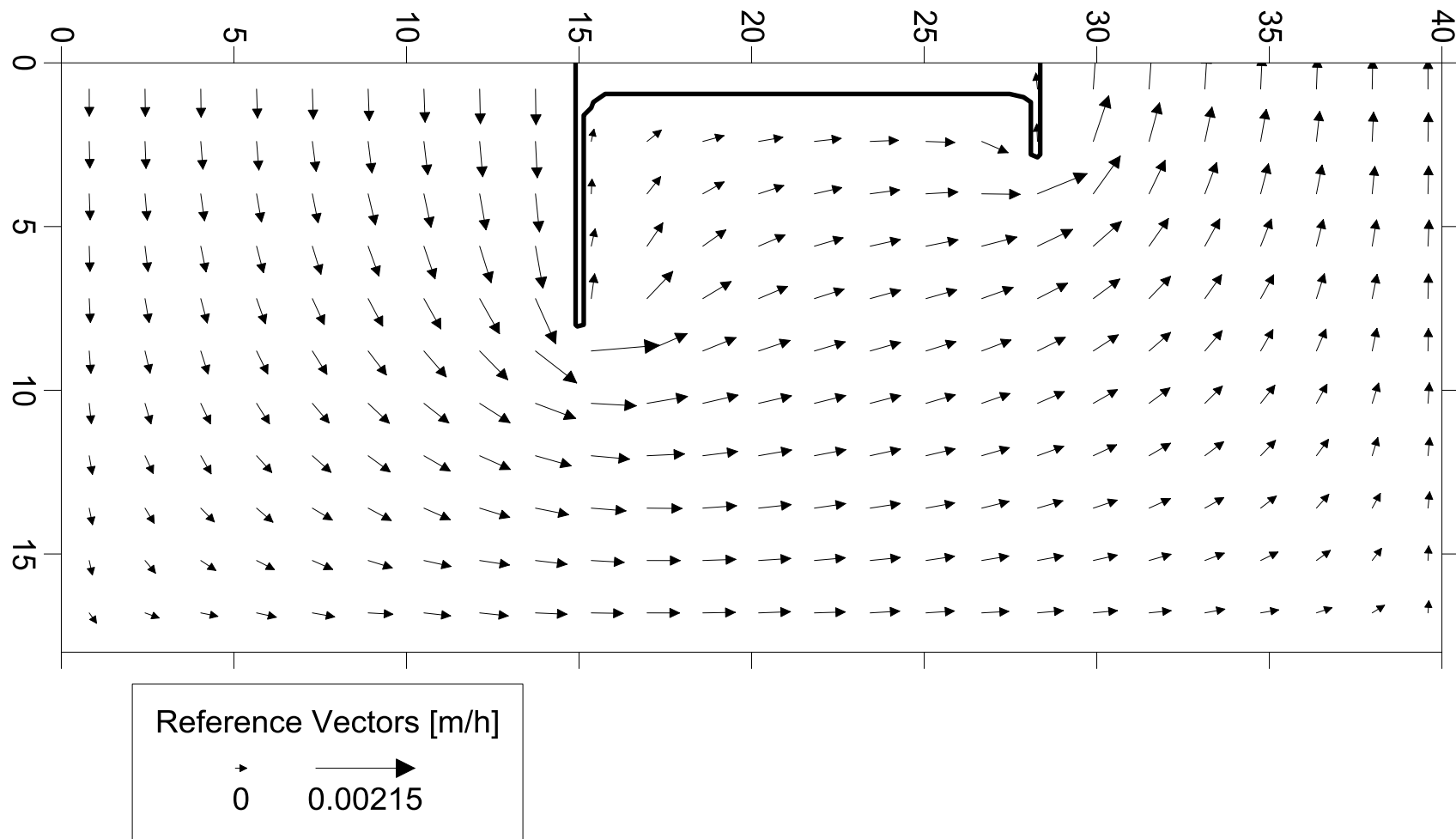


Siatka hydrodynamiczna uzyskana na podstawie rozwiązania równania Laplace'a względem:

- ciśnienie $h(x,y)$ - linie ekwipotencjalne,
- funkcji prądu $\Psi(x,y)$ - linie prądu.



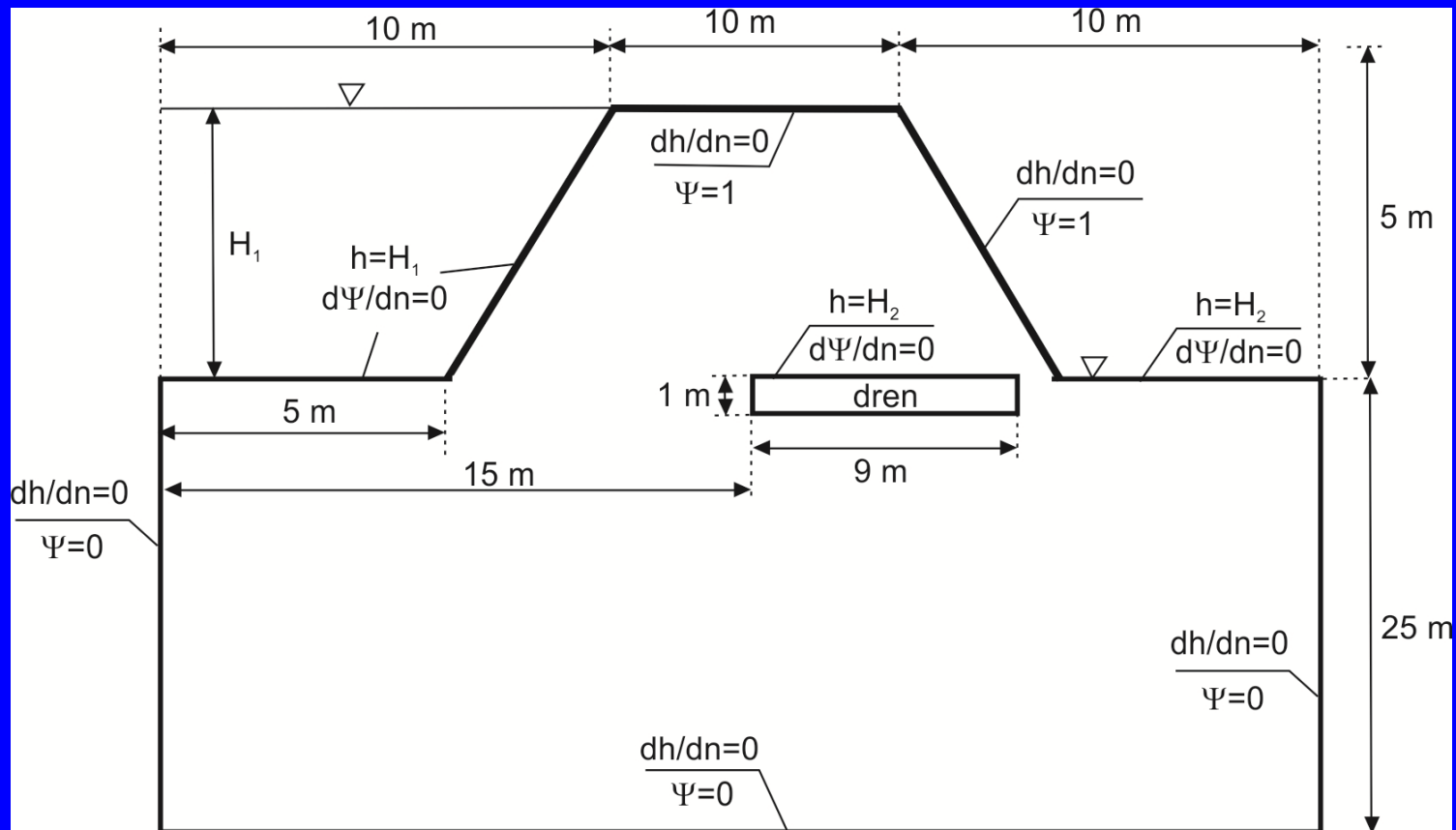
Pole prędkości filtracji $V_f(x,y)$



Przykład 2

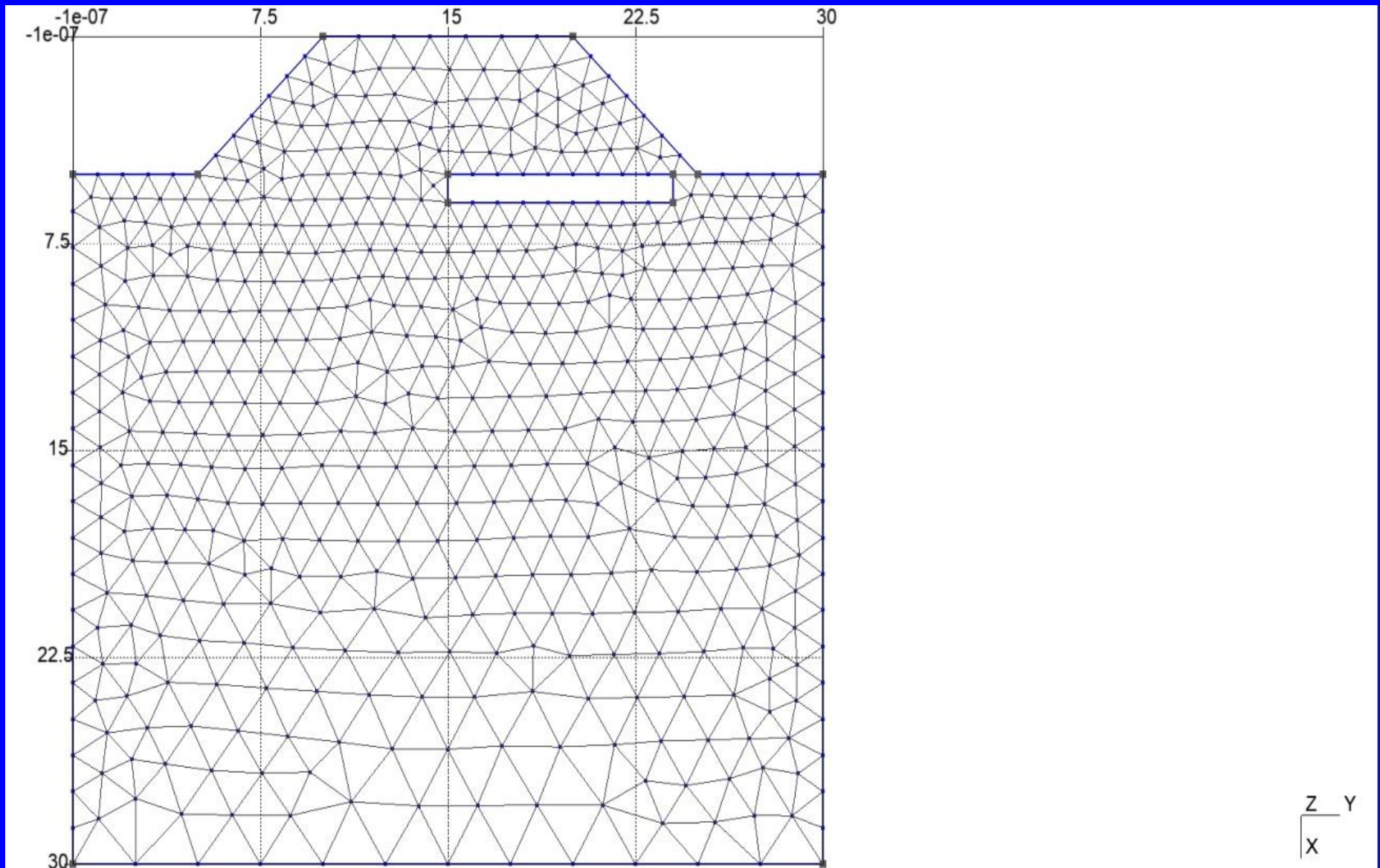
Przepływ ustalony przez zaporę ziemną z drenem prostokątnym:

- wysokość nadciśnienia: woda górna - $H_1=5$ m, woda dolna - $H_2=0$ m,
- wysokość nadciśnienia wewnątrz drena $H_2=0$ m,
- grunt jednorodny – współczynnik filtracji $k=k_x=k_y=0.0001$ m/s

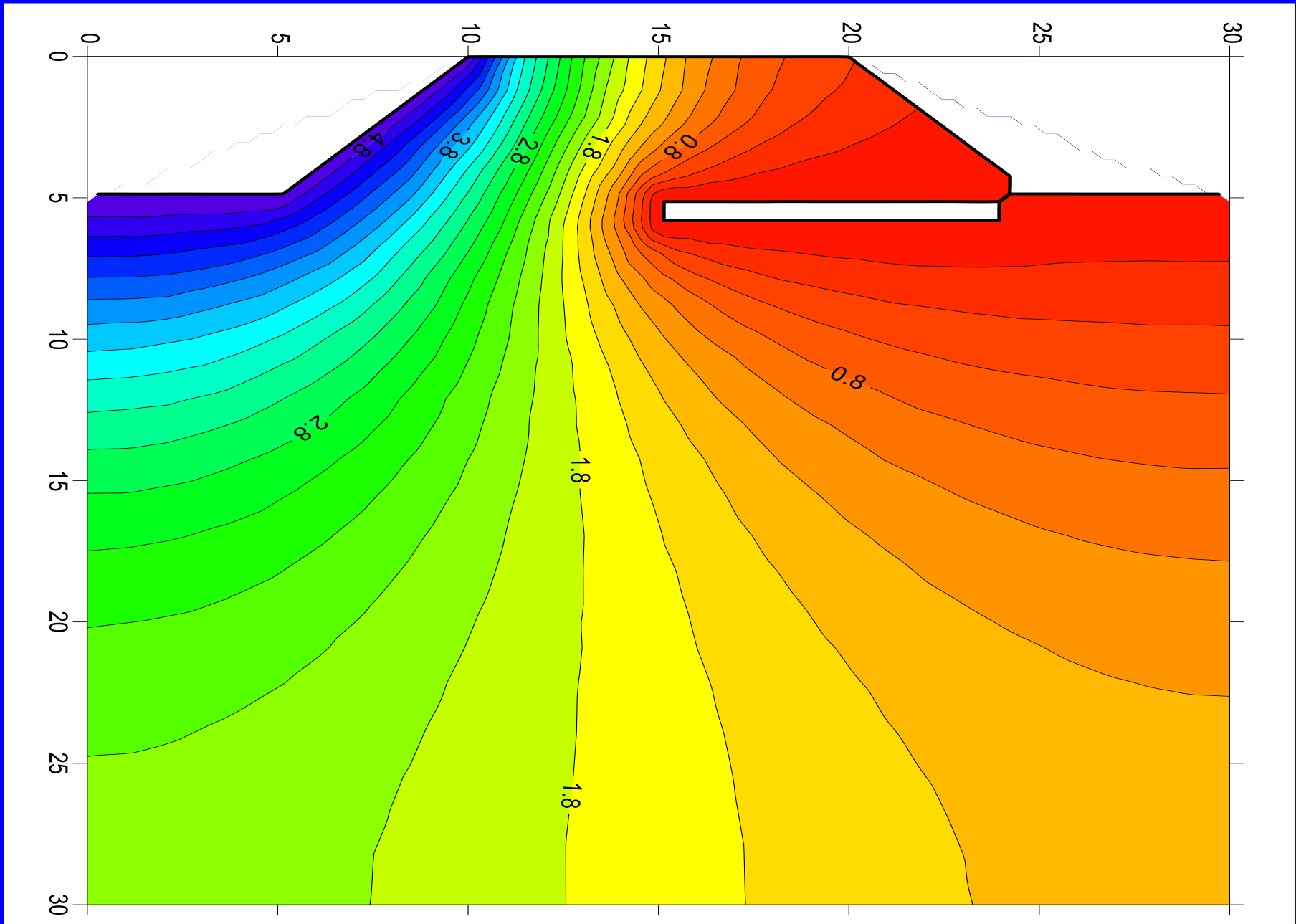


Rys. Geometria obszaru wraz z zadanymi warunkami brzegowymi

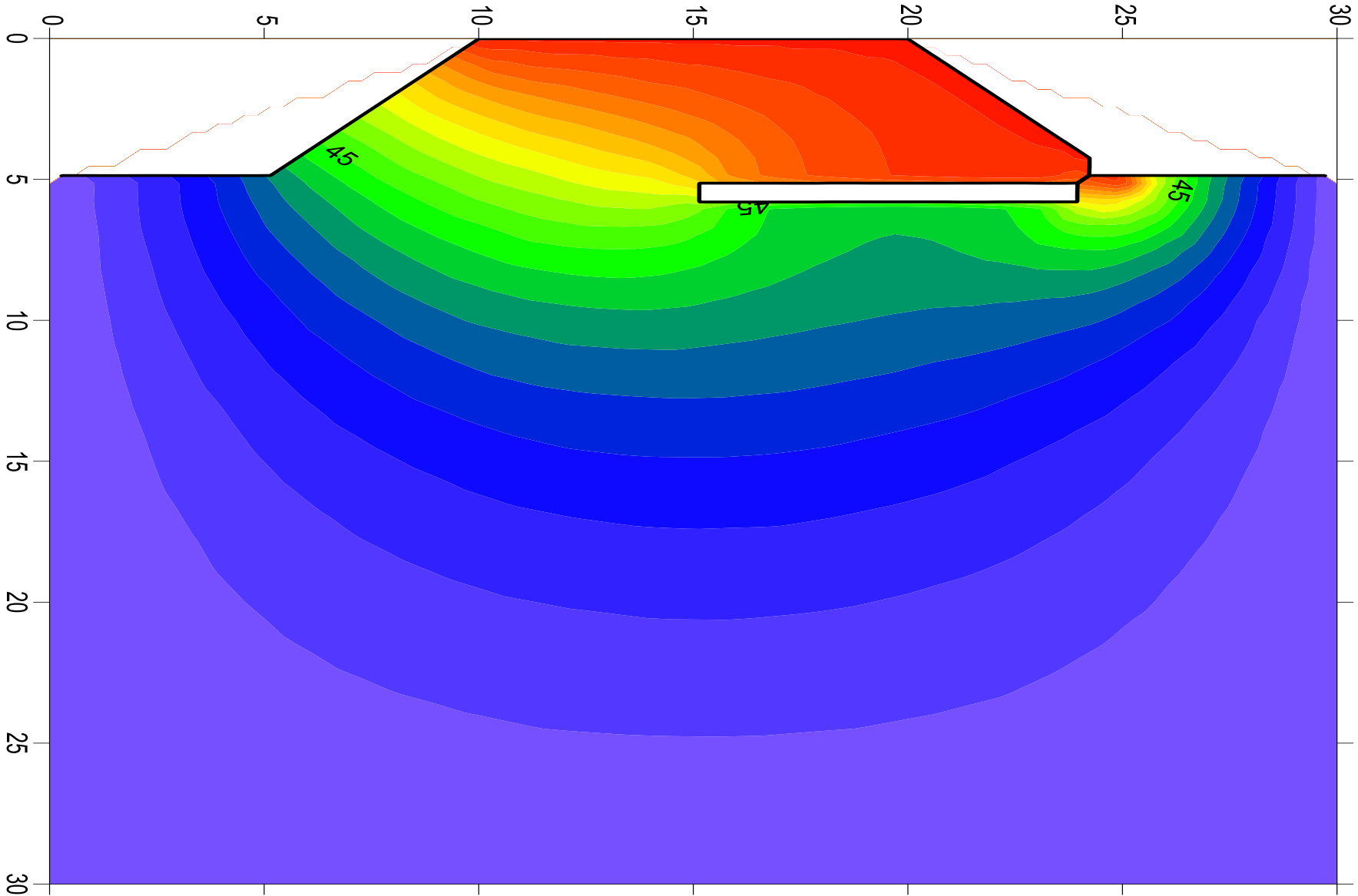
Siatka utworzona w programie generującym siatkę elementów skończonych trójkątnych (program: **gmsh**)



Rozkład ciśnienia $h(x,y)$



Rozkład linii prądu $\Psi(x,y)$



Równania uderzenia hydraulicznego

Przepływ nieustalony jednowymiarowy (1D)

- równanie dynamiczne

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} U^2 = 0$$

- równanie ciągłości

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

- prędkość fali ciśnienia

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E b} \right)}}$$

x - współrzędna przestrzenna

t - czas

U - prędkość w przewodzie

H - wysokość ciśnienia

f - wsp. Darcy-Weisbacha

D - wewnętrzna średnica przewodu

g - przyspieszenie grawitacyjne

ρ - gęstość cieczy

K - moduł sprężystości cieczy

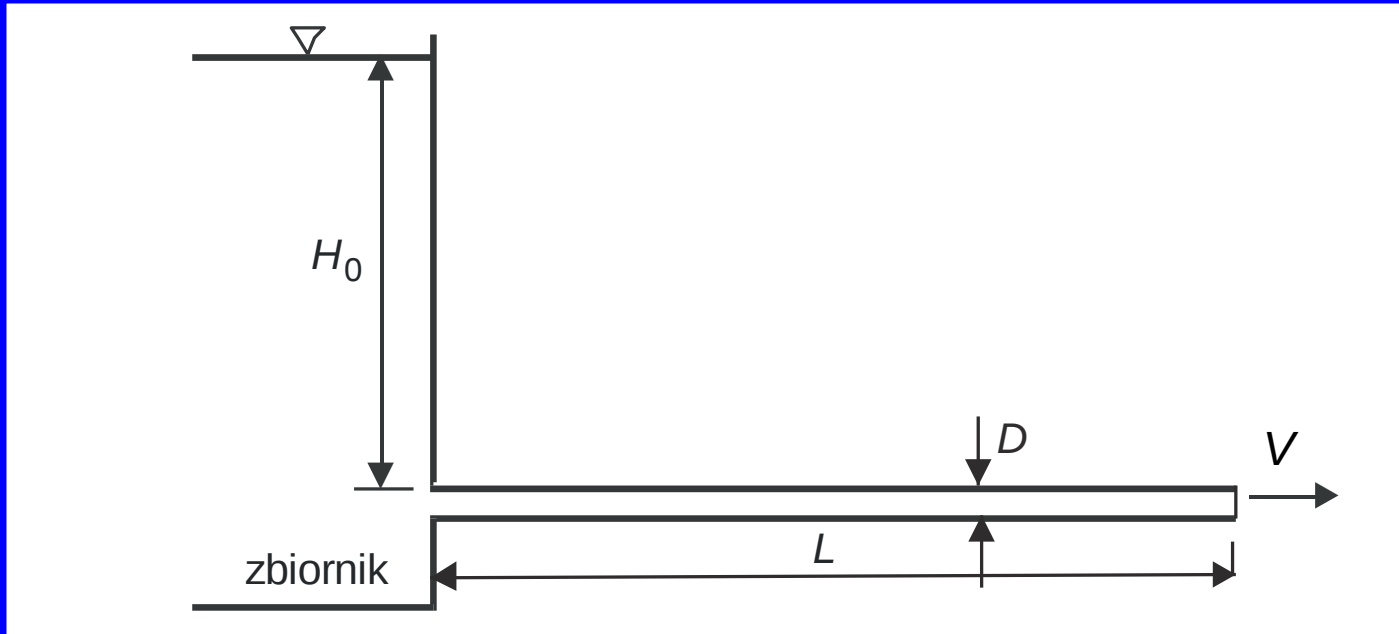
E - moduł sprężystości ścianki rurociągu

b - grubość ścianki rurociągu

Przykładowe prędkości fali ciśnienia:

- rurociąg stalowy: $\sim 1200 - 1400$ m/s;
- rurociąg z polietylenu: ~ 350 m/s

UDERZENIE HYDRAULICZNE

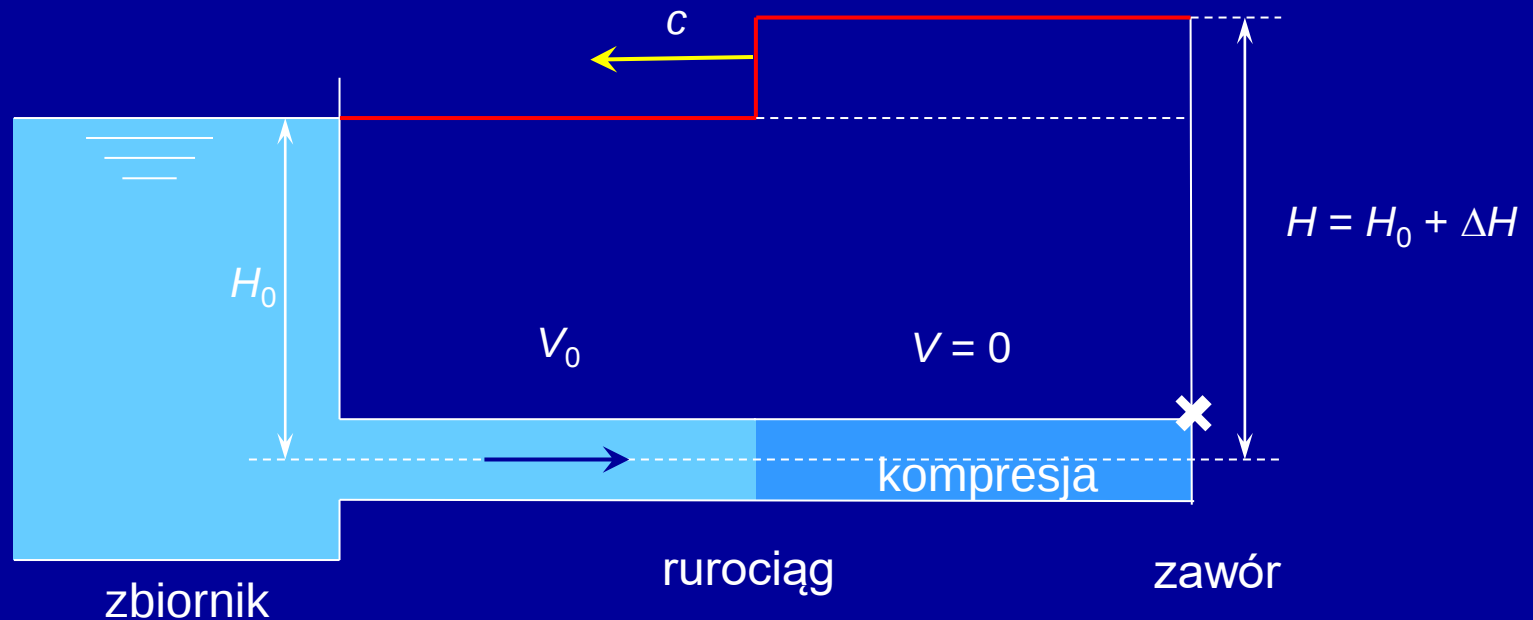


- W rurociągu o długości L i średnicy D w którym woda płynie z prędkością V (przepływ ustalony) następuje gwałtowne zamknięcie zaworu na jego końcu.
- Energia kinetyczna zamienia się w energię potencjalną – następuje gwałtowny wzrost ciśnienia w rurociągu.

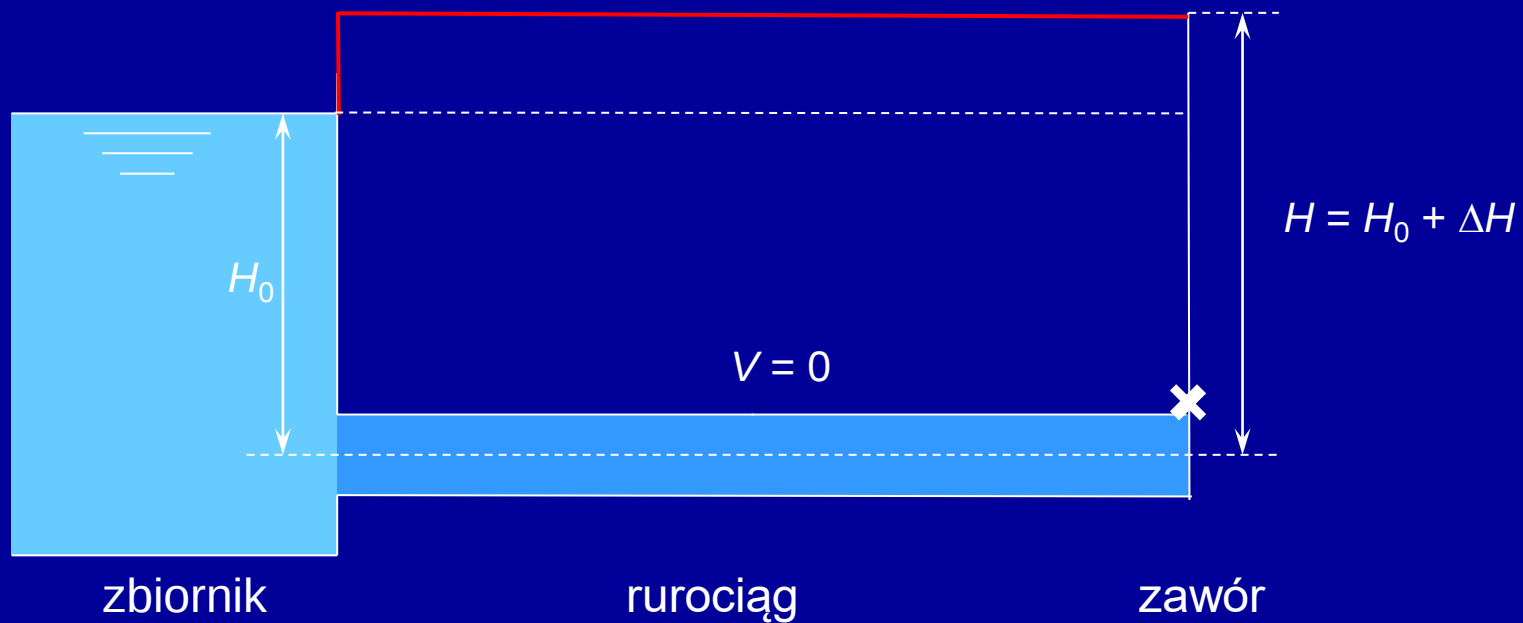
Przebieg zjawiska:

Ściśliwość cieczy i sprężystość rurociągu powodują powstanie fali ciśnienia która propaguje w rurociągu pomiędzy zaworem a zbiornikiem.

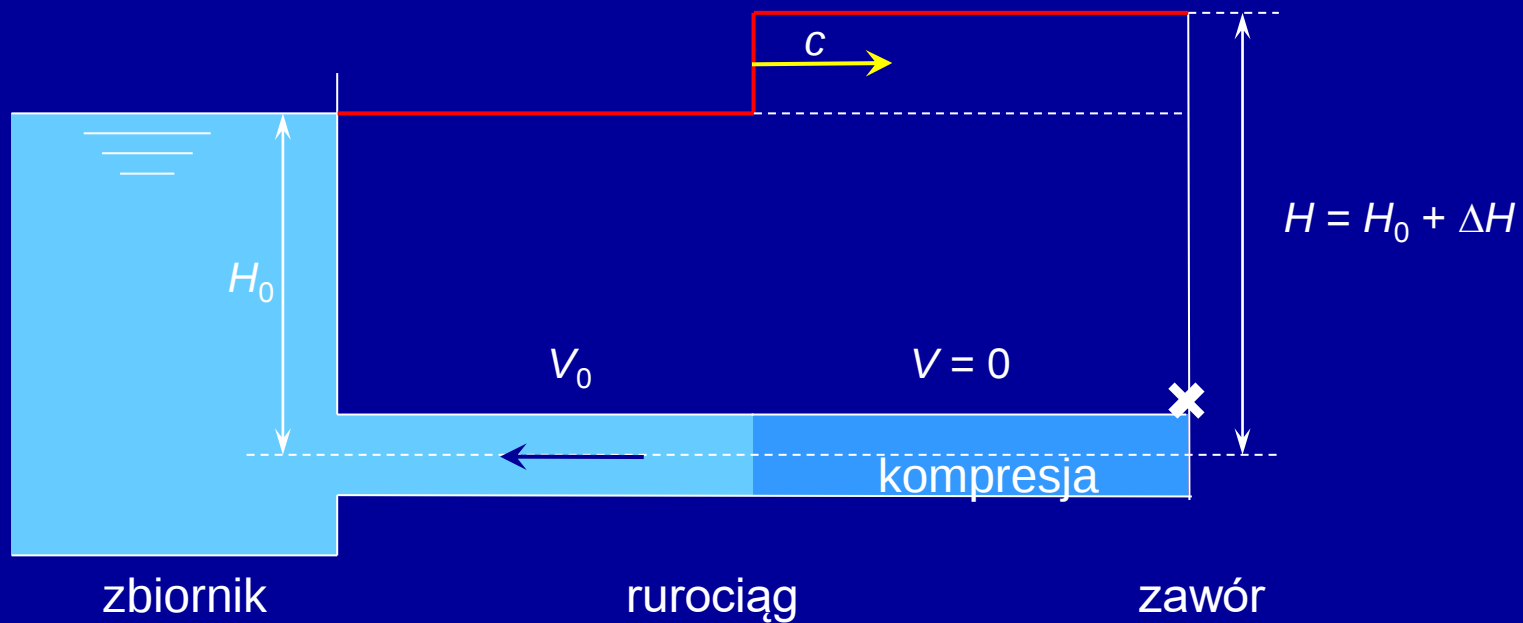
Faza 1: Propagacja fali ciśnienia c w kierunku zbiornika
 $0 < t < L / c$



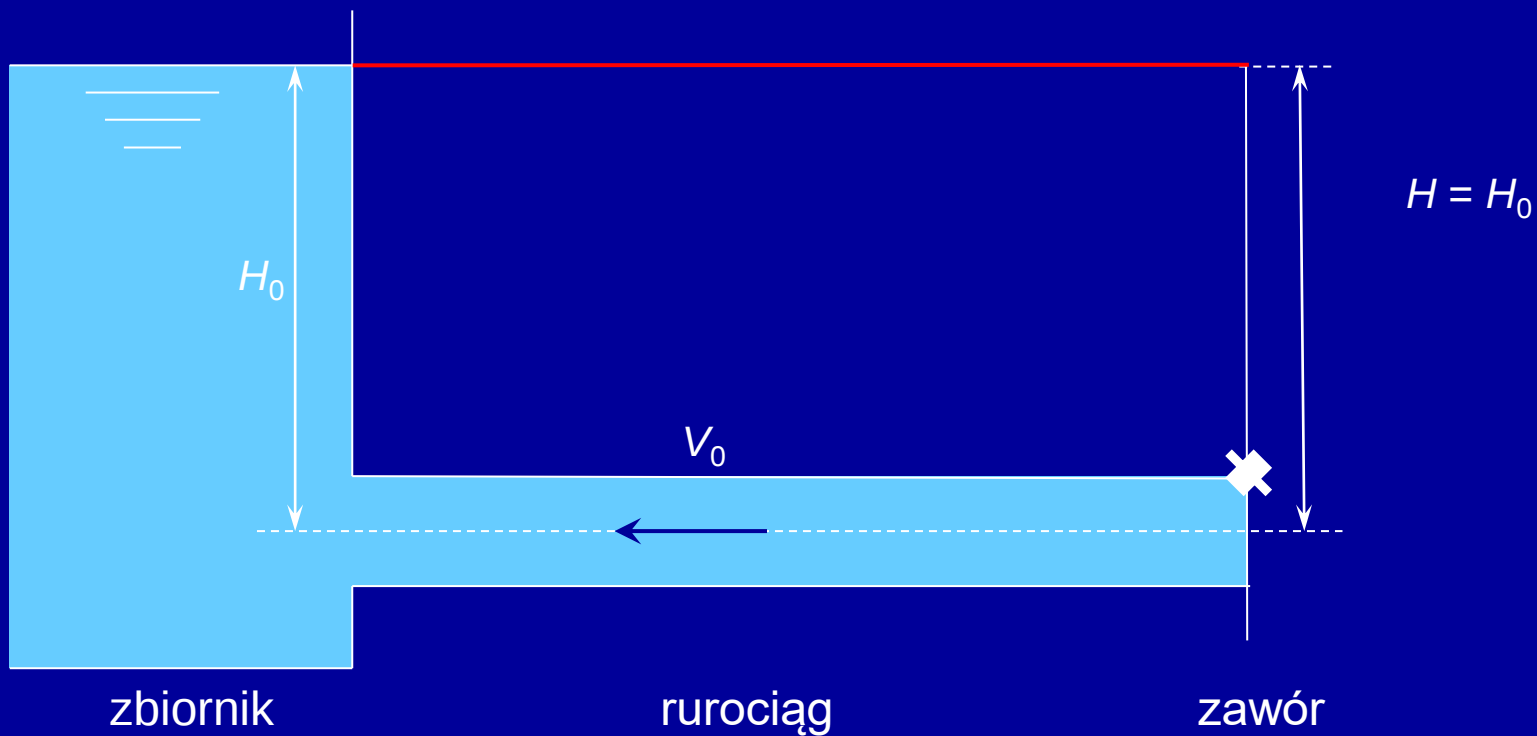
Faza 2: Ciecz ulega kompresji na całej długości rurociągu
 $t = L / c$



Faza 3: Odbicie fali na zbiorniku i propagacja w kierunku zaworu
(dekompresja)
 $L / c < t < 2L / c$

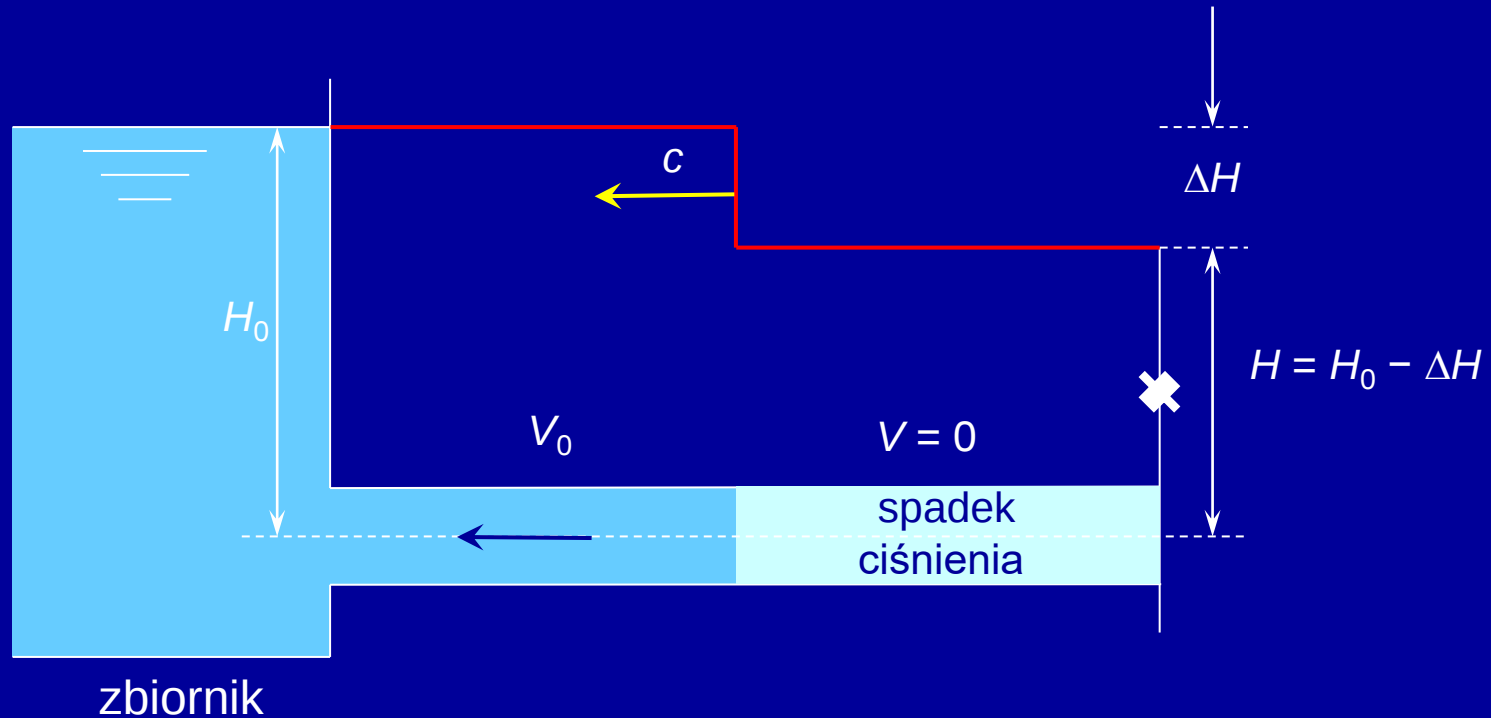


Faza 4: Ciecz ulega dekompresji na całej długości przewodu
 $t = 2L / c$



Faza 5: Odbicie fali na zaworze i propagacja w kierunku zbiornika
(spadek ciśnienia $-\Delta H$)

$$3L / c < t < 4L / c$$



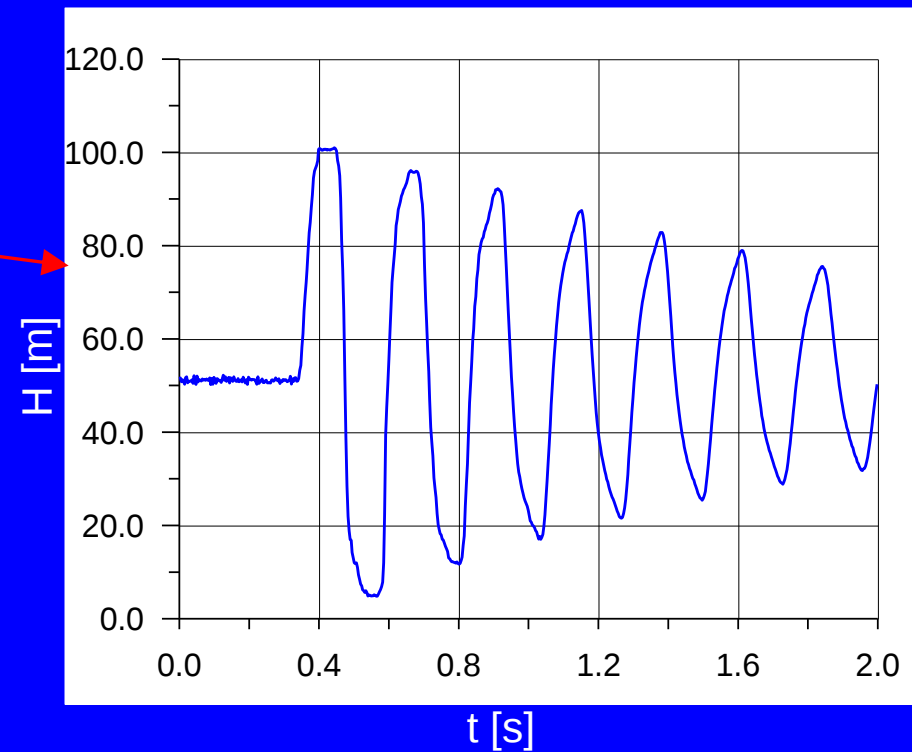
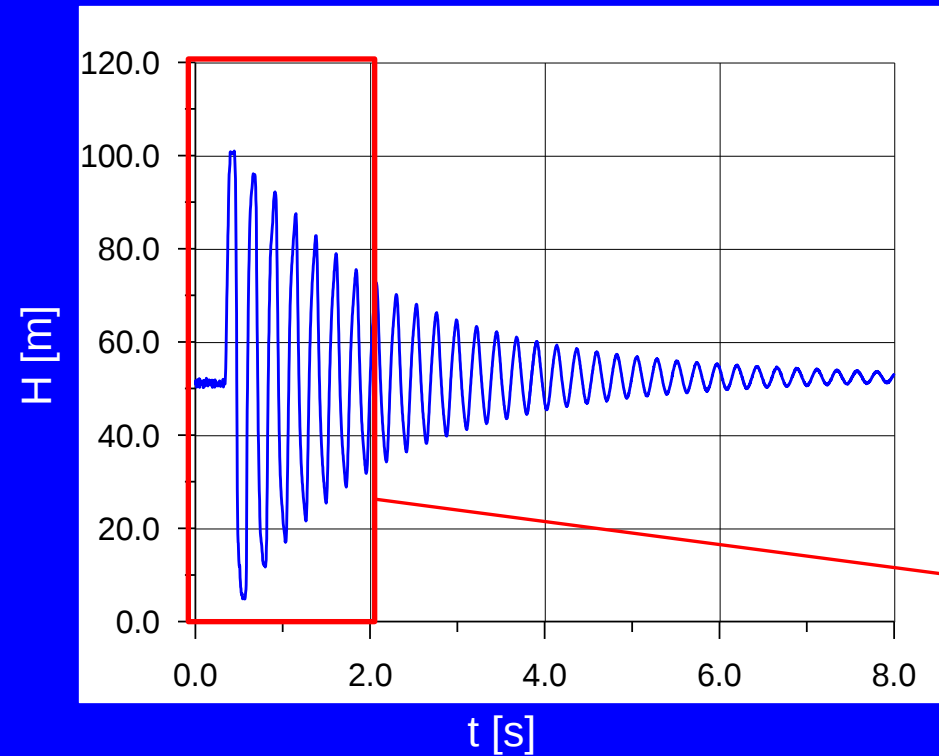
Pod wpływem procesów dyssypacyjnych fala jest tłumiona i po pewnym czasie zanika.

Przykład obliczeniowy

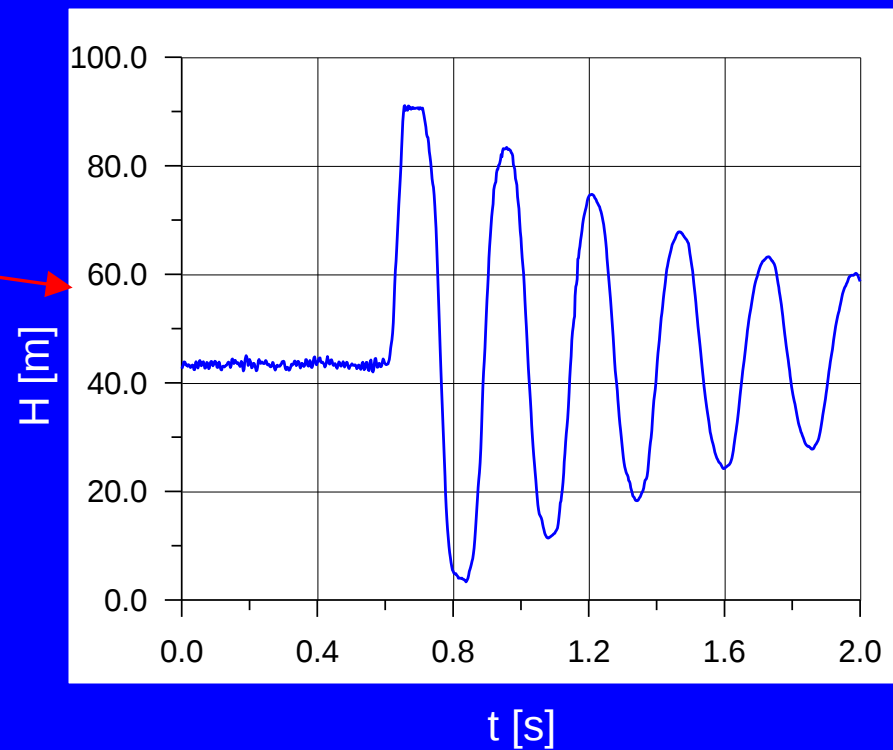
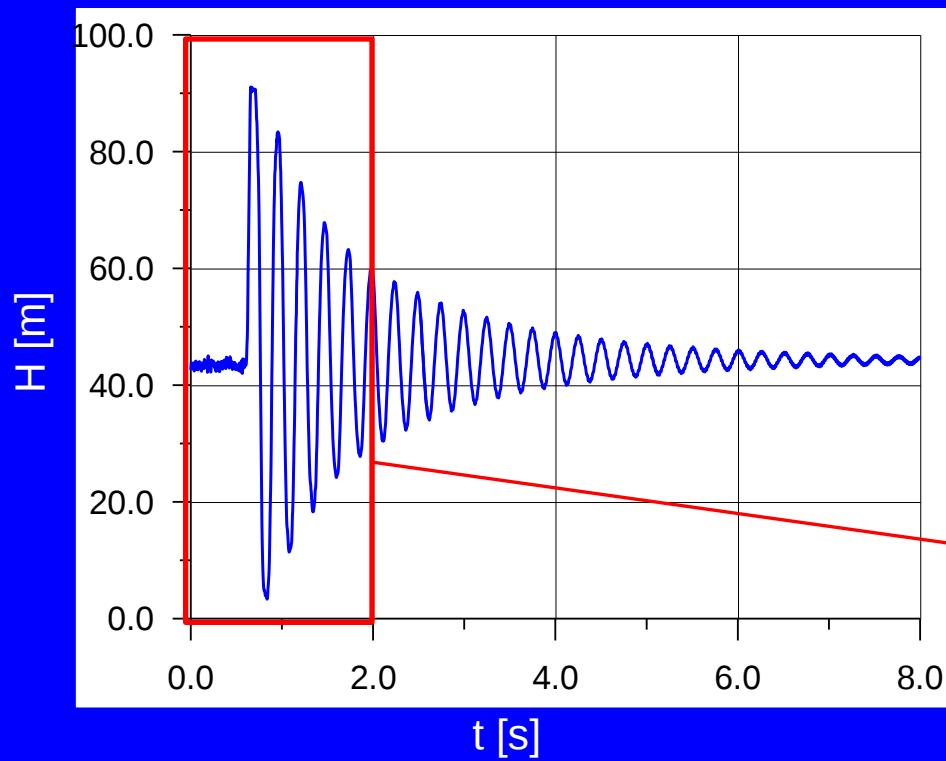
Parametry badanych przewodów

Parametr	Przewód stalowy	Przewód PCV
Długość L [m]	72.0	27.0
Średnica wewnętrzna D [m]	0.042	0.0452
Grubość ścianki b [m]	0.003	0.0024
Szorstkość k [m]	0.00008	0.000004
Prędkość fali c [m/s]	1245.0	425.0
Czas zamknięcia T_c [s]	0.022	0.026
Ciśnienie początkowe H_0 [m]	51.0	43.0
Prędkość początkowa V_0 [m/s]	0.408	1.05

Oscylacje ciśnienia pomierzone przy wylocie (rurociąg stalowy)

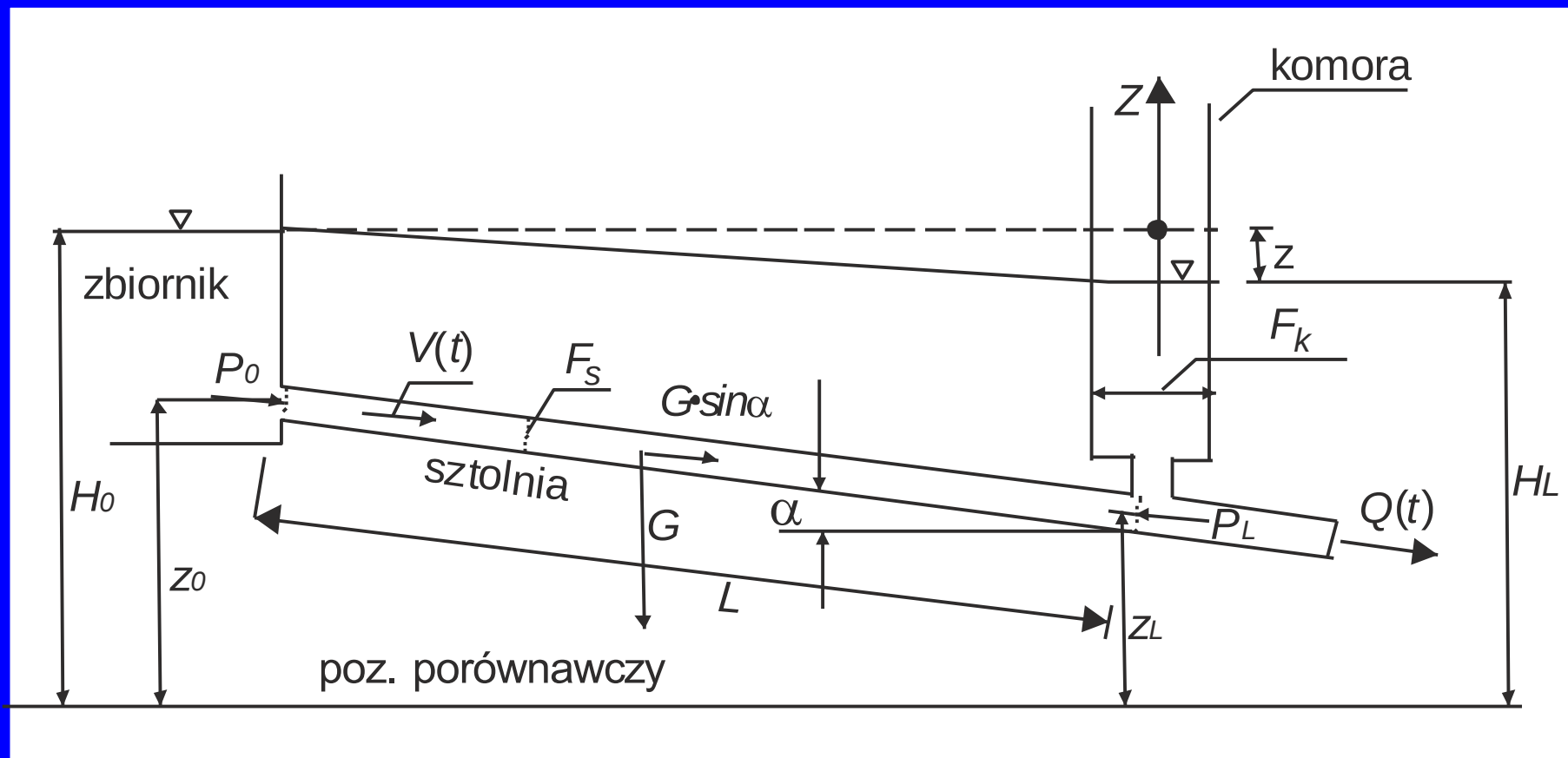


Oscylacje ciśnienia pomierzone przy wylocie (rurociąg PVC)



Równania uderzenia hydraulicznego

Przepływ nieustalony jednowymiarowy (1D)



Schemat układu zbiornik – sztolnia - komora wyrównawcza

Oznaczenia:

$V(t)$ – prędkość wody w sztolni

$Z(t)$ – wzniesienie zwierciadła wody w komorze ponad przyjęty poziom

L – długość sztolni

F_s – pole przekroju poprzecznego sztolni

F_k – pole przekroju poprzecznego komory

$Q(t)$ – znana funkcja czasu reprezentująca odpływ ze sztolni

P_0, P_L – parcie hydrostatyczne odpowiednio w przekroju początkowym i końcowym

Założenia:

- woda jest cieczą nieściśliwą,
- ścianki sztolni są niesprężyste,
- przekrój poprzeczny sztolni jest stały.

Równanie ciągłości

Z zasady zachowania masy wynika, że w przekroju komory wyrównawczej objętość wody, która płynie sztolnią jest równa sumie objętości wody wpływającej do komory oraz odpływającej rurociągiem:

$$F_s \cdot V = F_k \cdot \frac{dz}{dt} + Q(t)$$

Zatem ostatecznie:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{F_k} (F_s \cdot V - Q(t))$$

gdzie: F_k – pole przekroju komory

F_s – pole przekroju sztolni,

V – prędkość przepływu wody w sztolni,

$Q(t)$ – natężenie przepływu w rurociągu,

$z(t)$ – wzniesienie zw. wody w komorze ponad poziom wody w zbiorniku.

Równanie dynamiczne

Siły działające na wodę wypełniającą sztolnię:

- 1) Ciężar własny wody
- 2) Parcie hydrostatyczne w przekroju początkowym i końcowym
- 3) Siła tarcia
- 4) Siła bezwładności

Przyjmując układ współrzędnych na poziomie wody w zbiorniku równanie to ostatecznie zapisujemy następująco:

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = -z - \frac{n^2 \cdot L \cdot V^2}{R^{4/3}}$$

Końcowy układ równań

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left(-z - \frac{n^2 \cdot L \cdot V^2}{R^{4/3}} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{F_k} (F_s \cdot V - Q(t))$$

Znając warunki początkowe $V(t=0)$ i $z(t=0)$ oraz przyjmując dowolną funkcję $Q(t)$ układ całkujemy dla $t > 0$.