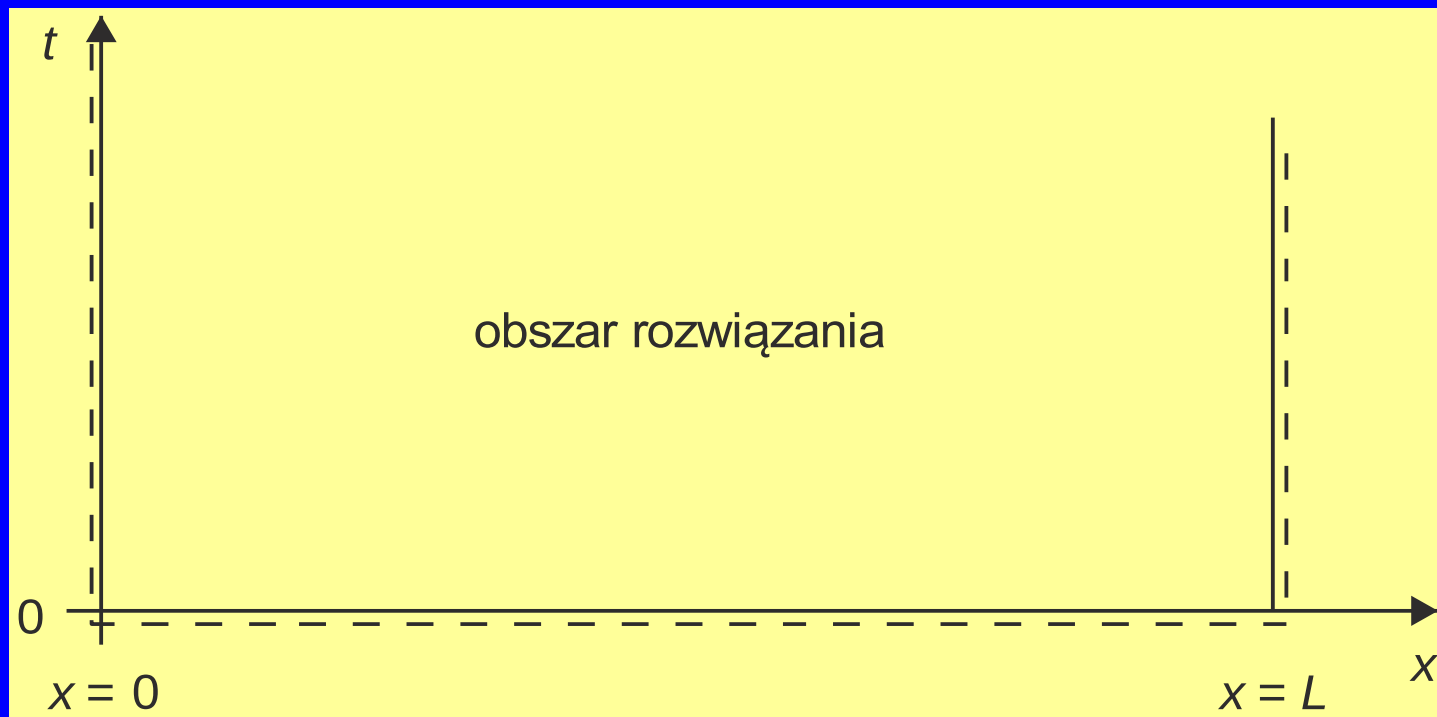


Formułowanie problemu rozwiązania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych

- Równania wynikające z zasad zachowania są podobne mimo, że opisują różne procesy fizyczne
- Wszystkie przypadki nieustalonego przepływu płynu oraz przepływu ustalonego w przestrzeni co najmniej 2 wymiarowej opisują **równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych**
- Rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego jest funkcja, która jednocześnie spełnia:
 - równanie w obszarze rozwiązania,
 - dodatkowe warunki na granicach tego obszaru, narzucone na rozwiązanie.
- Dodatkowe warunki nazywa się zwykle **warunkami granicznymi**.

- Warunki graniczne mogą składać się z warunków początkowych i brzegowych, bądź tylko początkowych lub brzegowych.



Rys. Obszar rozwiązania równania 1D: $0 \leq x \leq L$ oraz $t \geq 0$

Poprawne sformułowanie problemu rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego

Równanie problemu i dodatkowe warunki rozwiązania, czyli warunki graniczne, są dobrze postawione matematycznie, jeśli zapewniają:

- **istnienie rozwiązania**
- **jednoznaczność rozwiązania**
- **ciągłą zależność rozwiązania od dodatkowych warunków**

Istnienie rozwiązania

- Dowód istnienia rozwiązania jest wyzwaniem raczej dla matematyków niż inżynierów.
- W wypadku zagadnień technicznych zwykle nie zajmujemy się kwestią istnienia rozwiązania zakładając, że równania wynikające z podstawowych zasad zachowania zawsze mają rozwiązania.
- Do tej pory nie ma dowodu na istnienie rozwiązania równań Naviera – Stokesa.

Jednoznaczność rozwiązania

- Warunek jest ściśle związany z typem rozwiązywanego równania.
- Przyczyną niejednoznaczności rozwiązania jest zwykle niespełnienie warunku właściwego dopasowania warunków (granicznych) do typu rozwiązywanego równania.
- Ogólnie uznaje się, że:
 - Niedookreślenie warunków brzegowych prowadzi do rozwiązań niejednoznacznych
 - Nadokreślenie warunków brzegowych prowadzi do rozwiązań niefizycznych
- **Podstawą właściwego doboru warunków dodatkowych jest znajomość typu rozwiązywanego równania lub układu równań.**
- Dla poszczególnych typów równań sposób poprawnego formułowania warunków dodatkowych jest dobrze znany.

Klasyfikacja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych w przypadku równania II rzędu o dwóch zmiennych niezależnych

Równanie różniczkowe cząstkowe II rzędu o dwóch zmiennych niezależnych można napisać w następującej ogólnej postaci:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f \cdot u = F(x, y)$$

$u=u(x,y)$ – szukana funkcja,

$F(x,y)$ – funkcja źródłowa,

x, y – zmienne niezależne,

$a, b, c, \dots, f$ – współczynniki równania

Uwaga:

O typie równania decydują współczynniki przy pochodnych II rzędu

Z powyższym równaniem związany jest tzw. wyróżnik

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c$$

Znak wyróżnika Δ określa typ równania. I tak, równanie jest:

- typu eliptycznego, jeżeli $\Delta < 0$
- typu parabolicznego, jeżeli $\Delta = 0$
- typu hiperbolicznego, jeżeli $\Delta > 0$

- **Równania hiperboliczne** opisują zjawiska falowe
- **Równania paraboliczne** opisują dysypacyjne procesy zmienne w czasie
- **Równania eliptyczne** opisują procesy ustalone i są charakterystyczne dla zagadnień równowagi

Korzystając z powyższego sposobu klasyfikacji określmy typ

Równania dyfuzji

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Równanie ma następujące współczynniki przy pochodnych II-go rzędu:

$$a = -\alpha, \quad b = 0, \quad c = 0$$

Wyróżnik Δ przyjmie następującą wartość:

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c = 0 - 4 \cdot \alpha \cdot 0 = 0$$

Wniosek: **Równanie dyfuzji jest typu parabolicznego**

Równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \delta(x, y)$$

Równania mają następujące współczynniki przy pochodnych II-go rzędu:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1$$

Wyróżnik Δ będzie więc równy:

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$$

Równania Laplace'a i Poissona są **typu eliptycznego**

Równanie falowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

gdzie u jest prędkością fali

Równanie falowe ma następujące współczynniki:

$$a=1, \quad b=0, \quad c=-u^2$$

Wyróżnik Δ przyjmie następującą wartość:

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c = 0 + 4 \cdot 1 \cdot u^2 > 0$$

Równanie falowe jest **typu hiperbolicznego**

Równanie adwekcji

$$\frac{f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

c - prędkość adwekcji

Równanie adwekcji jest równaniem I-go rzędu a więc przedstawionej metody klasyfikacji nie można zastosować.

Klasyfikacja za pomocą tzw. charakterystyk określa **równanie adwekcji jako równanie typu hiperbolicznego**.

W zagadnieniach dynamiki płynów (np. podczas rozwiązywania równań Naviera-Stoksa) występują wszystkie typy równań: równania typu hiperbolicznego, parabolicznego i eliptycznego, czyli równania adwekcji, adwekcji-dyfuzji, adwekcji-dyfuzji-reakcji, Laplace'a oraz Poissona

- Równania typu hiperbolicznego oraz parabolicznego → **zagadnienia początkowo-brzegowe**
- Równania typu eliptycznego → **zagadnienia brzegowe**

Uwagi:

1. Równanie różniczkowe cząstkowe może zmieniać typ w obszarze rozwiązania, może także zmieniać typ w różnych częściach obszaru rozwiązania.
2. Jeśli współczynniki równania $a, b, c, \dots$ są funkcjami $x, y, f, \partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ to podana metoda klasyfikacji może być stosowana tylko lokalnie.
3. Uproszczenie równania może zmienić jego typ.

Warunki graniczne dla równania parabolicznego



Rys. Obszar rozwiązania równania dyfuzji: $0 \leq x \leq L$ oraz $t \geq 0$

Warunki graniczne dla równania parabolicznego:

- **warunek początkowy** w postaci zadanej funkcji C na granicy $t = 0$: $f(x, t) = f_p(x)$ dla $0 \leq x \leq L$;

- **warunki brzegowe** w postaci zadanej funkcji f lub jej pochodnej w punktach brzegowych obszaru $x = 0$ oraz $x = L$ czyli

$$f(x=0, t) = f_0(t) \quad \text{dla } t \geq 0$$

oraz

$$f(x=L, t) = f_L(t) \quad \text{dla } t \geq 0$$

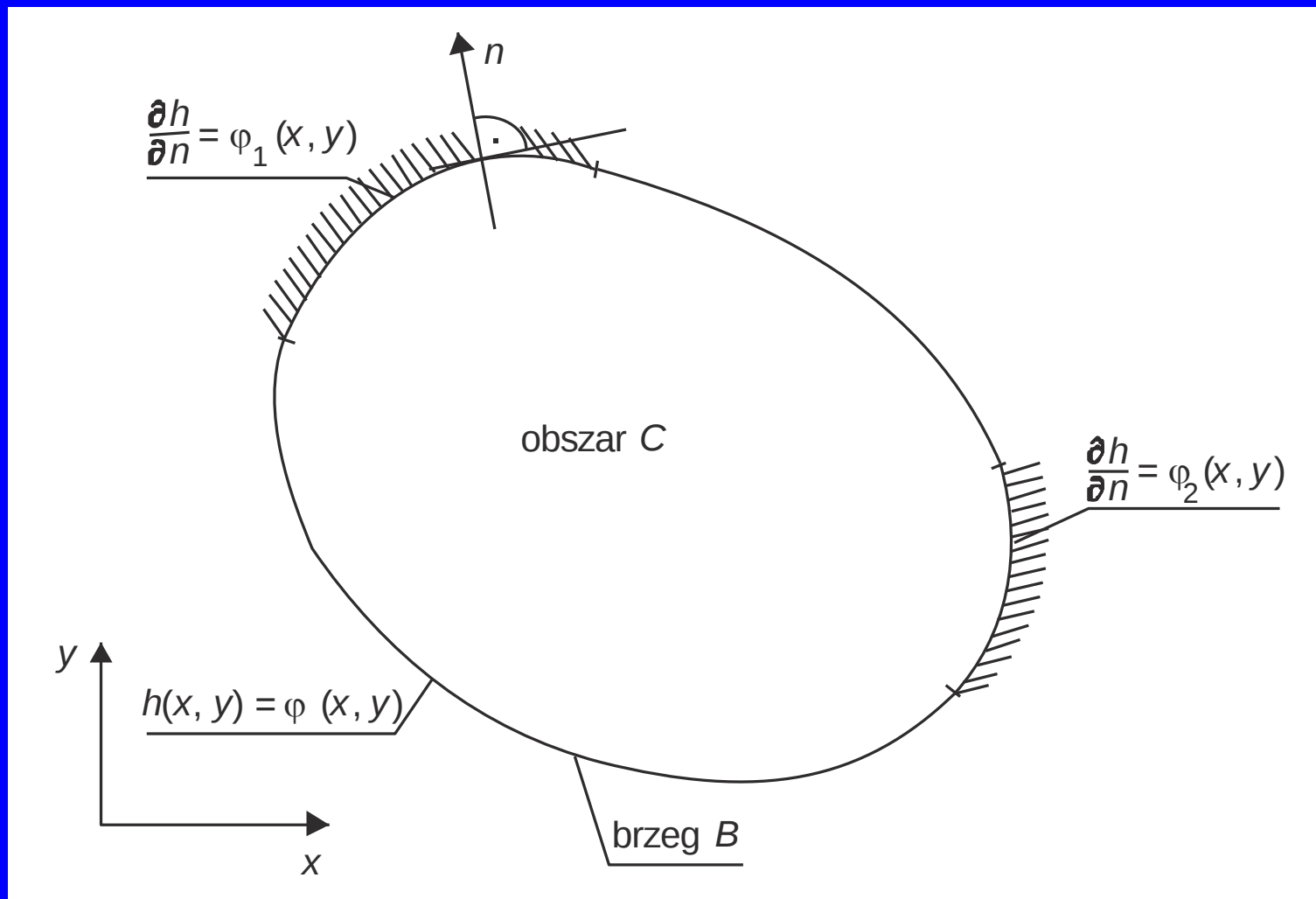
lub

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=L} = \varphi_L(t) \quad \text{dla } t \geq 0$$

Powyższe warunki definiują tzw. **zagadnienie początkowo – brzegowe** dla równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego.

Warunki graniczne dla równania eliptycznego

- Jednoznaczność rozwiązania równanie Laplace'a wymaga, aby poszukiwana funkcja spełniała w obszarze rozwiązania to równanie oraz zadane warunki na brzegu obszaru. Nie mówi się tutaj nic o warunku początkowym (w równaniu Laplace'a nie występuje czas).
- Zagadnienie rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego **typu eliptycznego** jest tzw. **zagadnieniem brzegowym**.
- Wyróżnia się trzy zasadnicze rodzaje zagadnienia brzegowego:
 - a) zagadnienie brzegowe I rodzaju,
 - b) zagadnienie brzegowe II rodzaju,
 - c) zagadnienie brzegowe III rodzaju.



Rys. Warunki brzegowe dla równania eliptycznego (np. Laplace'a)

Ad a)

Na brzegu B obszaru C dana jest funkcja $\varphi(x, y)$.

Należy znaleźć funkcję $h(x, y)$ spełniającą we wnętrzu obszaru C równanie Laplace'a i przyjmującą na brzegu B dane wartości $\varphi(x, y)$, czyli $h(x, y) = \varphi(x, y)$ dla $x, y \in B$

Ad b)

Na brzegu B obszaru C dana jest funkcja $\varphi_1(x, y)$.

Należy znaleźć funkcję $h(x, y)$ spełniającą we wnętrzu obszaru równanie Laplace'a, taką że jej pochodna w kierunku normalnym zewnętrznym do brzegu B w każdym jego punkcie przyjmuje wartość φ_1 , czyli

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \varphi_1(x, y)$$

Ad c)

Na części brzegu B zadany jest warunek pierwszego rodzaju (tj. funkcja), a na pozostałej części brzegu zadany jest warunek drugiego rodzaju (tzn. pochodna).

Zadane na brzegach warunki określa się jako:

- **warunki Dirichleta**, gdy zadana jest funkcja
- **warunki Neumanna**, gdy zadana jest pochodna normalna do brzegu
- **warunki mieszane**, gdy na części brzegu zadany jest warunek Dirichleta, a na części – warunek Neumanna

Warunki graniczne dla równania hiperbolicznego

Zasada:

na każdej granicy obszaru całkowania równania hiperbolicznego należy zadać **tylko warunków dodatkowych** (w tym wypadku początkowych i brzegowych), **ile charakterystyk wchodzi** przez daną granicę do obszaru rozwiązania

Równanie charakterystyczne – równanie różniczkowe zwyczajne na płaszczyźnie $x-t$ zdefiniowane ogólnym równaniem:

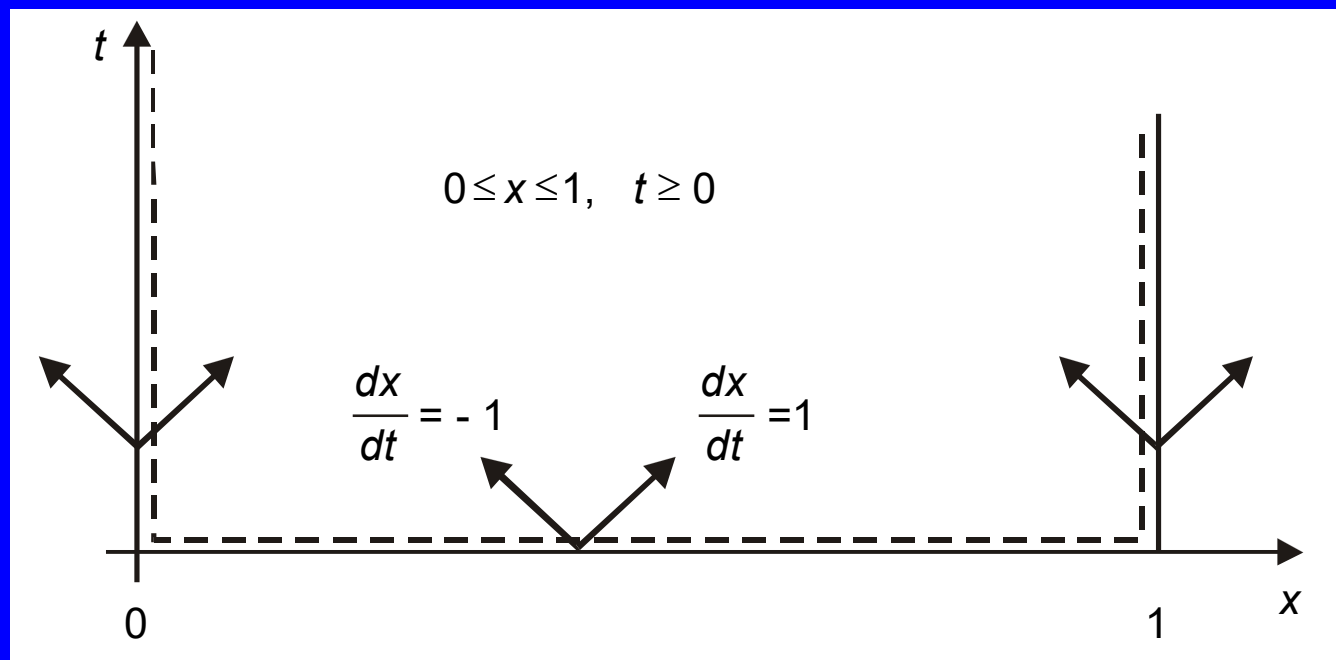
$$\frac{dx}{dt} = C$$

C - prędkość rozchodzenia się zaburzenia

Przykład 1: Liniowe równanie falowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

ma dwie charakterystyki:
 $dx/dt = 1$, $dx/dt = -1$



Zgodnie z przedstawioną zasadą należy zadać:

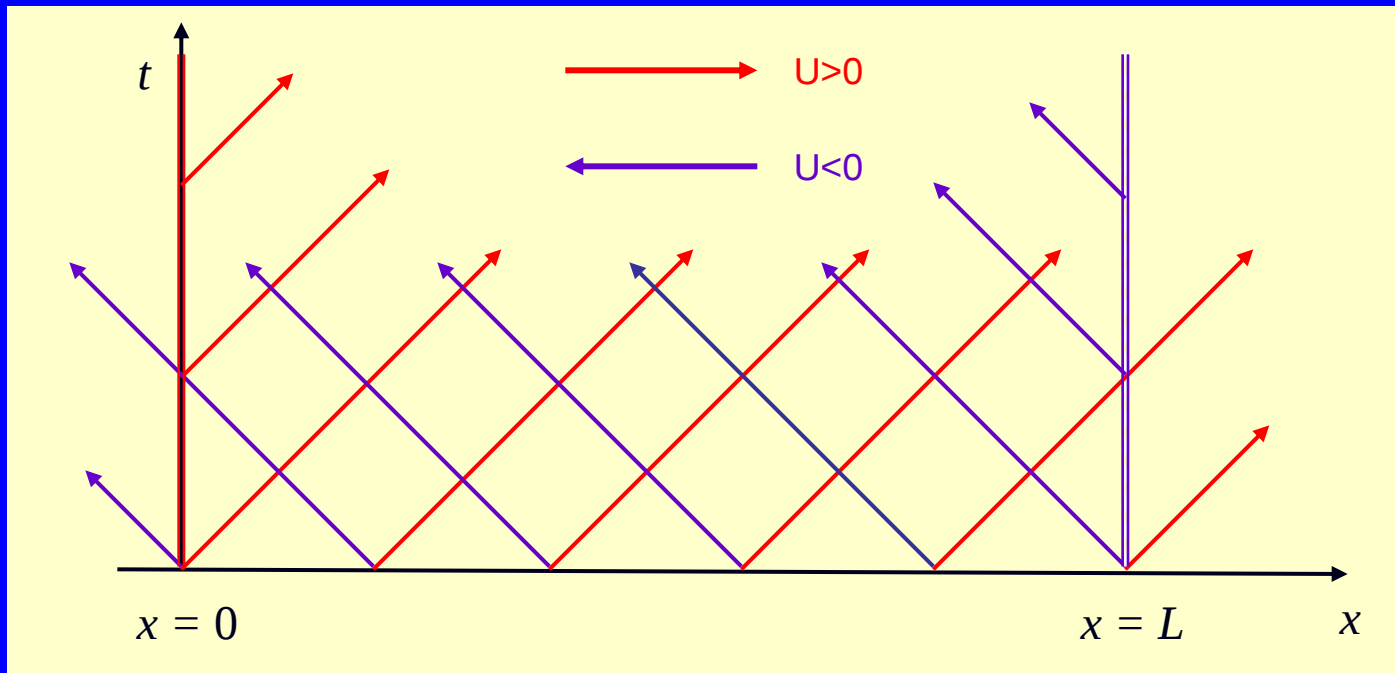
- dwa warunki na granicy $t = 0$
- po jednym warunku na granicach $x = 0$ oraz $x = 1$

Przykład 2: Równanie adwekcji

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

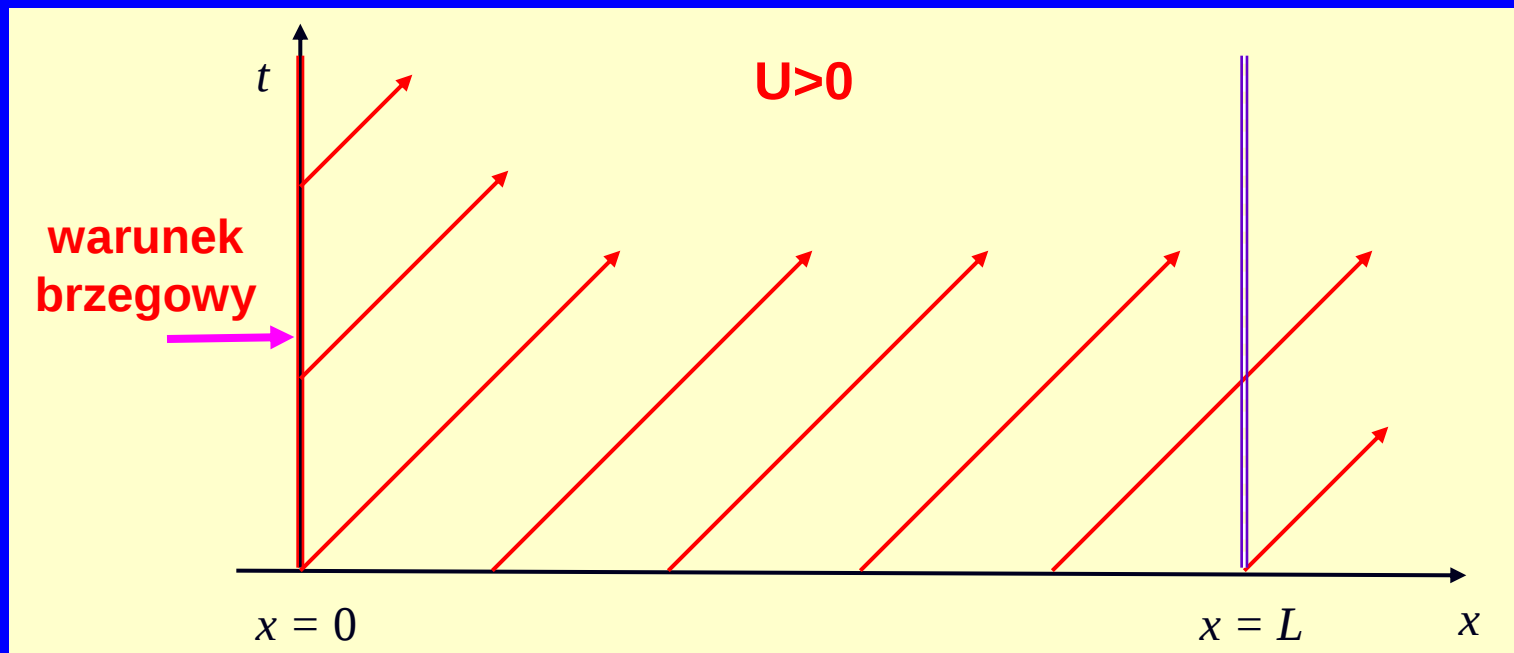
ma jedną charakterystykę: $dt/dx = 1/U$.

Przy $U = \text{const.}$ jest to linia prosta, w przypadku ogólnym charakterystyka może być krzywą.



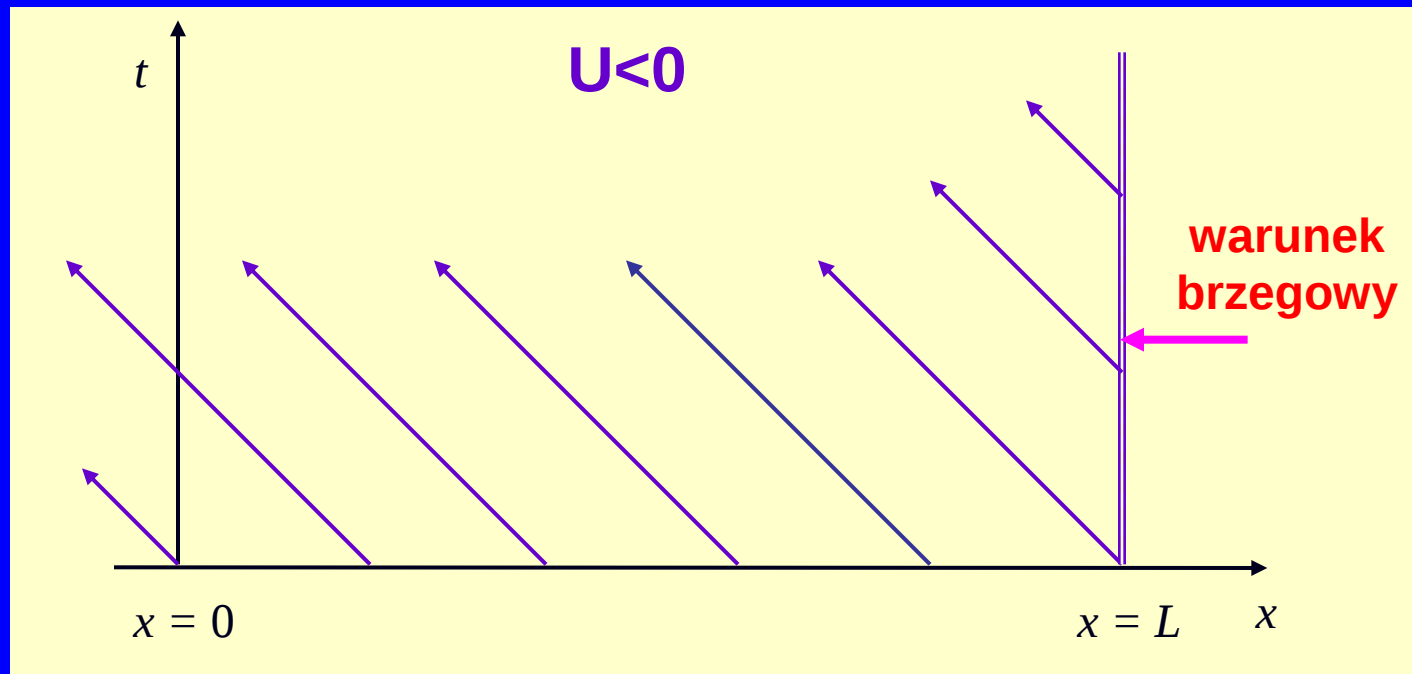
Rys. Układy charakterystyk równania adwekcji 1D przy różnych kierunkach przepływu

Z układu charakterystyk dla równania adwekcji wynika, że należy zadawać warunek początkowy oraz warunek brzegowy tylko na tym brzegu przez który następuje dopływ — na brzegu odpływowym nie zadaje się żadnego warunku.



Warunki początkowo - brzegowe dla równania adwekcji jeżeli $U > 0$

- $f(x, t = 0) = f_p(x)$ dla $0 \leq x \leq L$
- $f(x = 0, t) = f_0(t)$ dla $t \geq 0$



Warunki początkowo - brzegowe dla równania adwekcji gdy $U < 0$:

- $f(x, t = 0) = f_p(x)$ dla $0 \leq x \leq L$
- $f(x = L, t) = f_L(t)$ dla $t \geq 0$

Przykład 3: Układ równań de Saint Venanta

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U \cdot H)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + g(s - S) = 0$$

Zmienne niezależne: położenie x i czas t

Zmienne zależne: prędkość przepływu $U(x, t)$ i głębokość $H(x, t)$,

Oznaczenia:

- przyspieszenie ziemskie: g
- rzędna dna kanału: z
- spadek dna: s
- spadek linii energii: S

- Obszar rozwiązania równań:

$$0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

gdzie: L - długość odcinka kanału

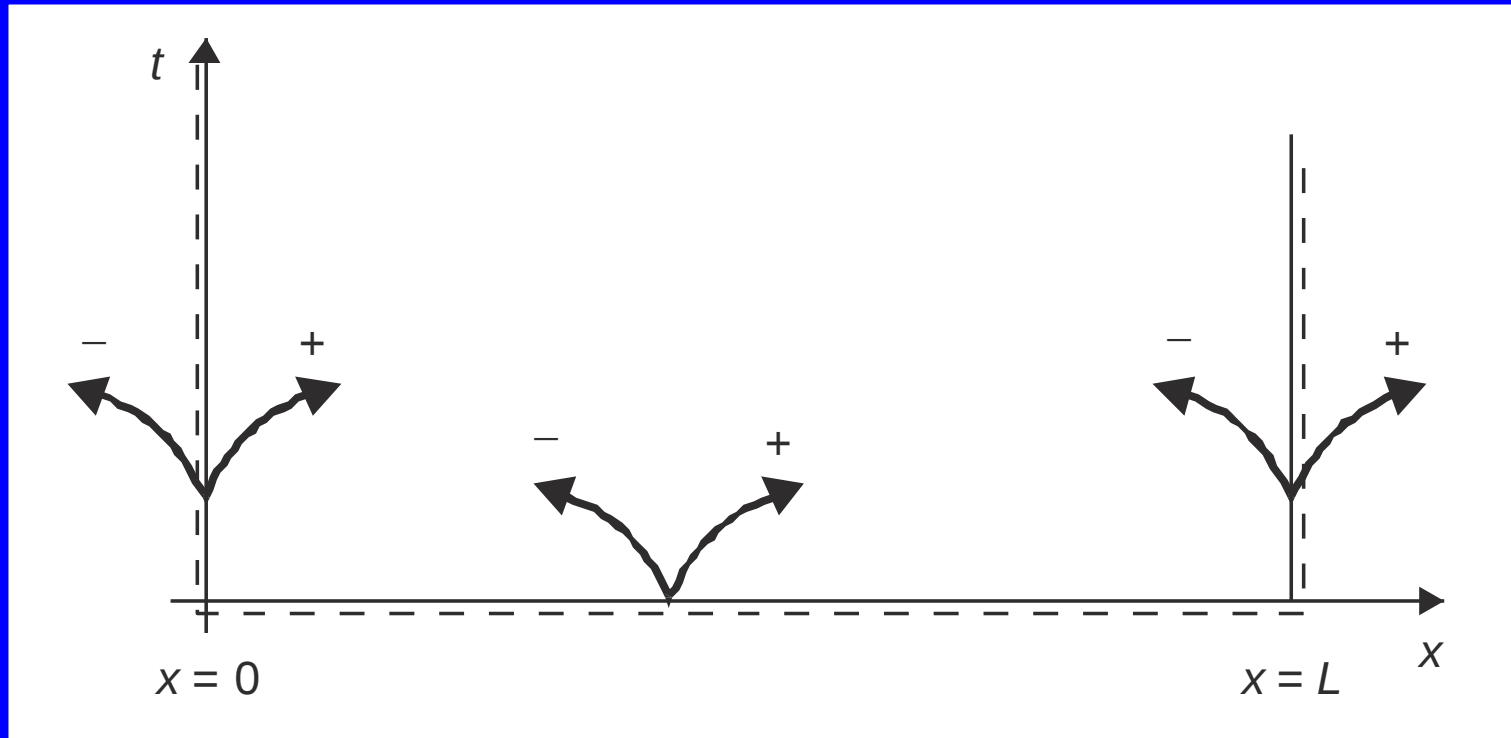
- Układ ma 2 charakterystyki rzeczywiste zdefiniowane równaniami:

$$C^+ = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{U + \sqrt{gH}}, \quad C^- = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{U - \sqrt{gH}}$$

- Układ charakterystyk zależy od rodzaju przepływu w kanale (przepływ spokojny czy rwący)

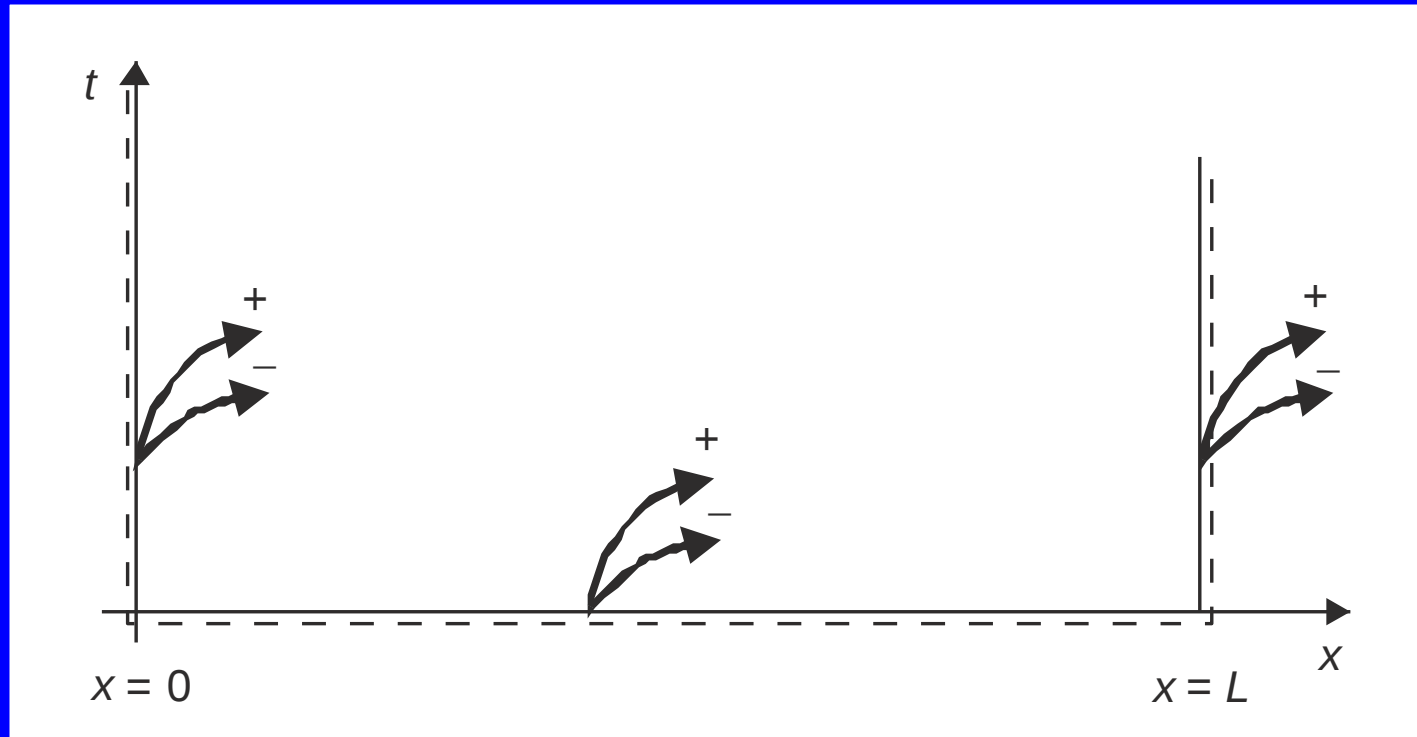
- kryterium podziału ruchu wody pod względem energetycznym jest **liczba Froude'a** zdefiniowana następująco:

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g \cdot H}}$$



Układ charakterystyk przy **przepływie spokojnym**

$$U < \sqrt{g \cdot H} \rightarrow F_r = \frac{U}{\sqrt{g \cdot H}} < 1$$



Układ charakterystyk przy **przepływie rwącym**

$$U > \sqrt{g \cdot H} \rightarrow F_r = \frac{U}{\sqrt{g \cdot H}} > 1$$

- Warunki początkowo-brzegowe

- Warunki początkowe

Dla $t = 0$ w obu przypadkach należy zadać 2 informacje:

$$Q(x, t) = Q_p(x)$$

oraz

$$h(x, t) = h_p(x)$$

dla

$$0 \leq x \leq L$$

- Warunki brzegowe

Zasada:

Rozwiązując równanie typu hiperbolicznego na każdej granicy obszaru rozwiązania należy zadać tyle warunków, ile charakterystyk wchodzi z niej do obszaru rozwiązania

- **Przepływ spokojny**

$$Fr < 1, \quad U < \sqrt{gH}$$

- dla $x = 0$

należy zadać 1 informację:

albo $Q(0,t) = Q_0(t) \quad (t \geq 0)$

albo $h(0,t) = h_0(t) \quad (t \geq 0)$

- dla $x = L$

należy zadać 1 informację:

albo $Q(L,t) = Q_L(t) \quad (t \geq 0)$

albo $h(L,t) = h_L(t) \quad (t \geq 0)$

- **Przepływ rwący**

$$Fr > 1, \quad U > \sqrt{gH}$$

- dla $x = 0$

należy zadać 2 informacje:

$$Q(0,t) = Q_0(t) \quad (t \geq 0)$$

oraz

$$h(0,t) = h_0(t) \quad (t \geq 0)$$

- dla $x = L$

nie zadaje się żadnej informacji

Podstawowe procesy przenoszenia masy i energii

- adwekcja:

$$\Phi_A = U \cdot f$$

f – transportowana wielkość,
 Φ_A – całkowity strumień adwekcyjny,
 U – prędkość przepływu,
 Φ_D – całkowity strumień dyfuzyjny,
 D – współczynnik dyfuzji.

- dyfuzja:

$$\Phi_D = -D \frac{\partial f}{\partial x}$$

Równanie adwekcji-dyfuzji-reakcji

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \delta(x, t)$$

Równanie adwekcji-dyfuzji opisuje szeroką gamę różnych procesów fizycznych jak przepływ wody w gruncie nienasyconym, dyfuzję domieszek rozpuszczonych w wodzie, przepływ ciepła w pręcie (równanie dyfuzji) itd.

Równanie adwekcji-dyfuzji

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Brak procesów przemian chemicznych:
 $\delta=0$

Równanie adwekcji

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Brak procesów transportu dyfuzyjnego:
 $D = 0$

Równanie dyfuzji

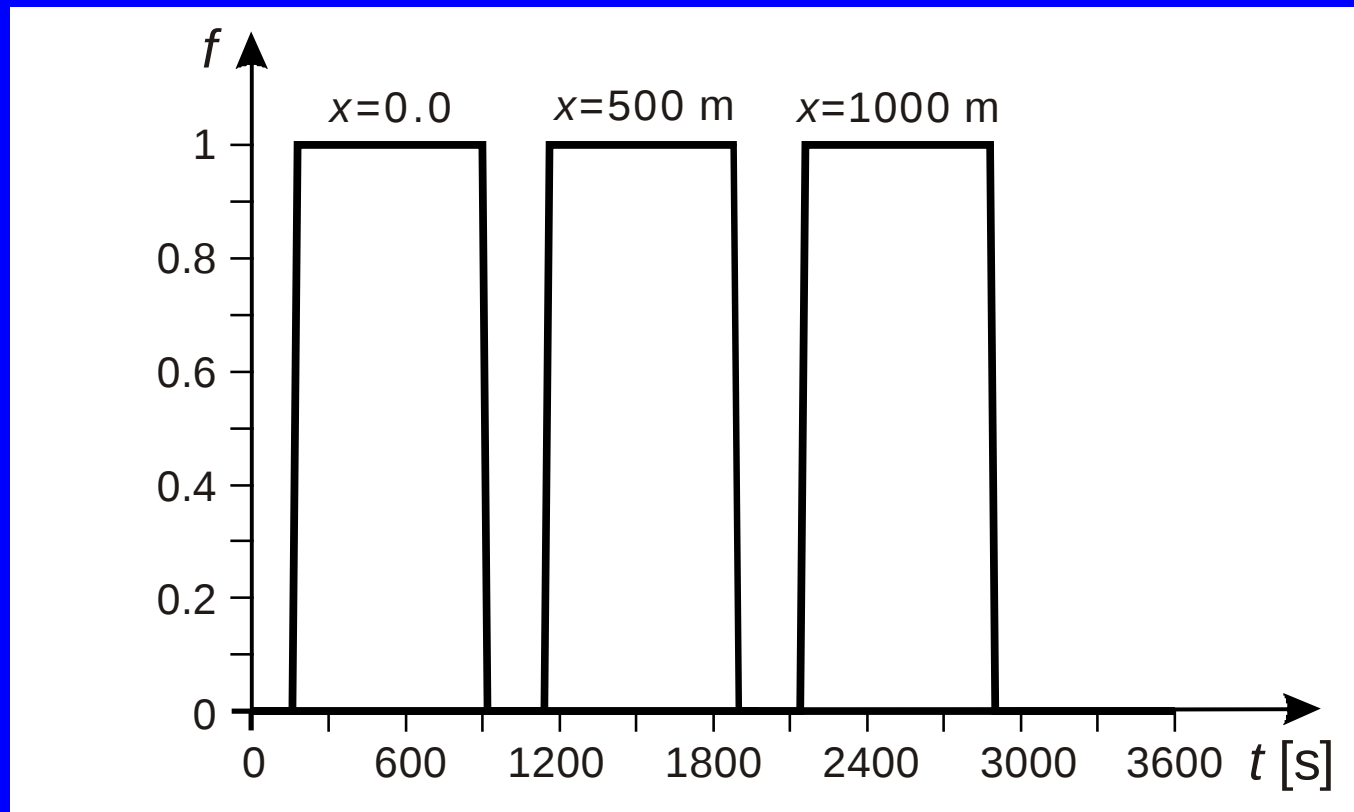
$$\frac{\partial f}{\partial t} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Brak procesów transportu adwekcyjnego:
 $C = 0$

Rozwiązanie równania czystej adwekcji:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Założenie: $C=0.5 \text{ m/s} = \text{const.}$

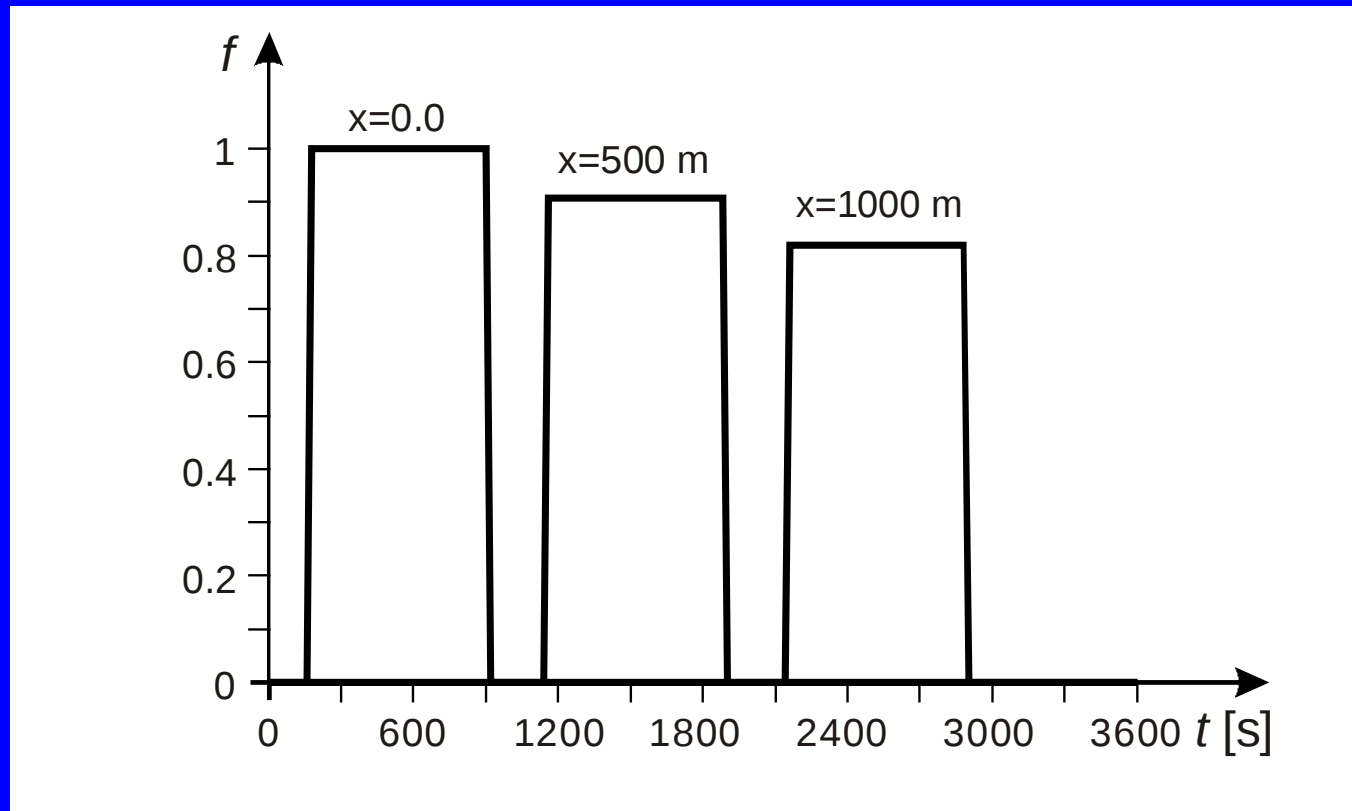


Rys. Rozwiązanie w formie czystej translacji (przesunięcia) z prędkością U prostokątnego rozkładu wielkości f

Rozwiązanie równania adwekcji z członem źródłowym:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = \delta$$

Założenie: $C=0.5 \text{ m/s} = \text{const.}$,
 $\delta = \kappa \cdot f$ z $\kappa = 0.0001 \text{ s}^{-1}$

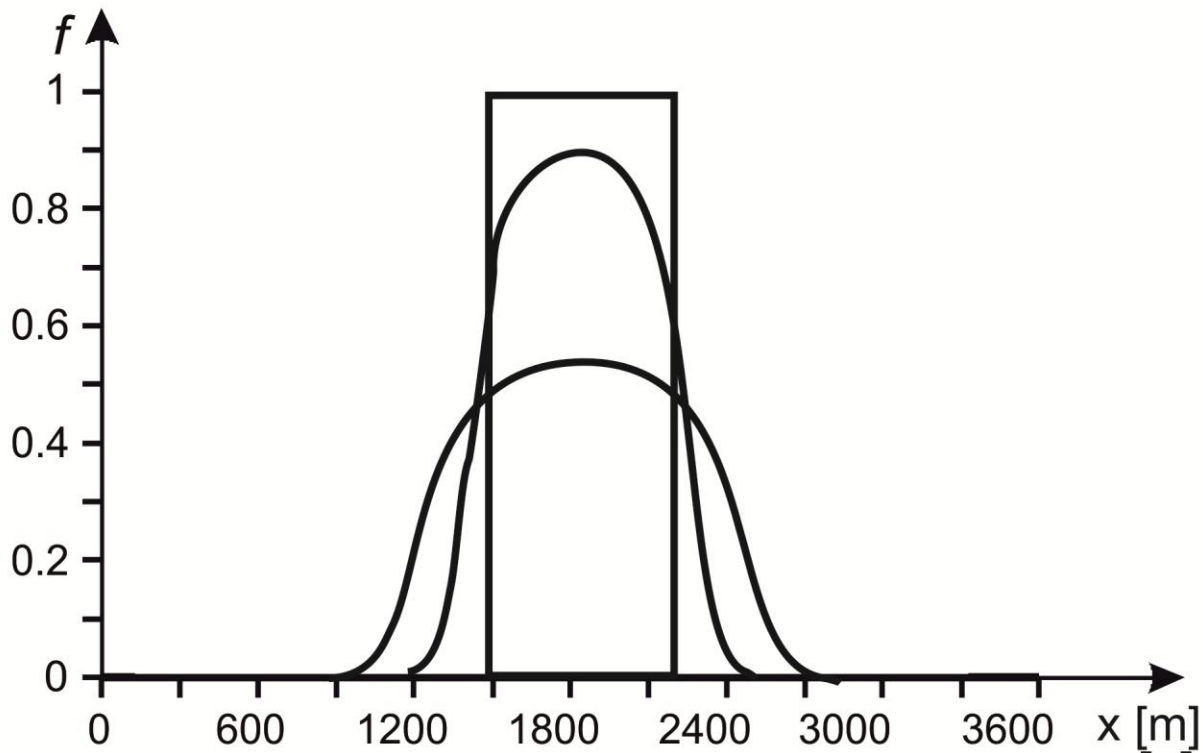


Rys. Translacja prostokątnego rozkładu wielkości f z redukcją wynikającą z obecności aktywnego członu źródłowego δ

Rozwiązanie równania dyfuzji:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Założenie: $D=0.625 \text{ m}^2/\text{s}$



Rys. Dyfuzja rozkładu wielkości f

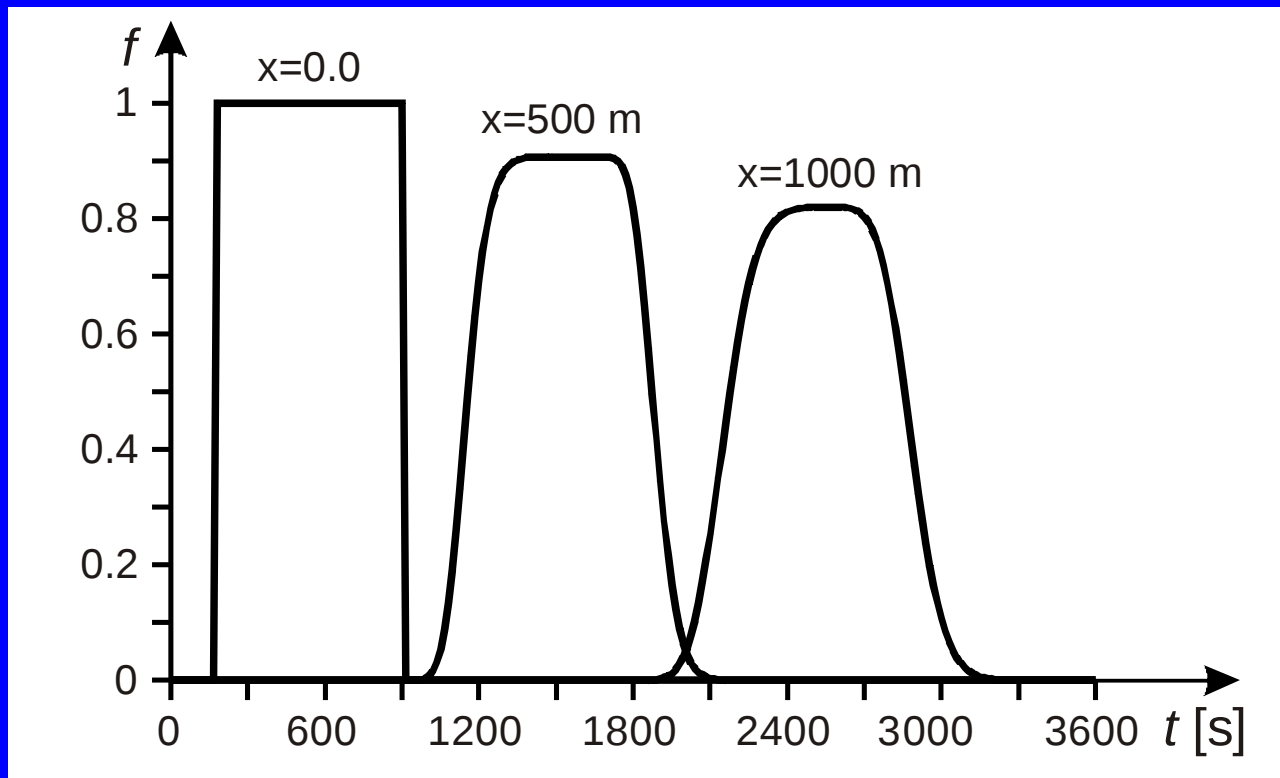
Rozwiązanie równania adwekcji-dyfuzji:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Założenie:

$C=0.5 \text{ m/s} = \text{const.}$,

$D=0.625 \text{ m}^2/\text{s}$,



Rys. Translacja (przesunięcie), dyfuzja (wygładzenie) oraz reakcja (redukcja) wielkości f

- Obecność członu dyfuzyjnego zmienia typ równania.
Zamiast równania hiperbolicznego mamy równanie typu parabolicznego.
- Efekt działania poszczególnych członów. Zadany prostokątny rozkład f w przekroju $x = 0$ podlega:
 - translacji wzdłuż osi kanału z prędkością C
 - redukcji wynikającej z działania członu źródłowego δ
 - wygładzania wynikającego z obecności dyfuzji D

Rozwiązanie równania adwekcji-dyfuzji-reakcji:

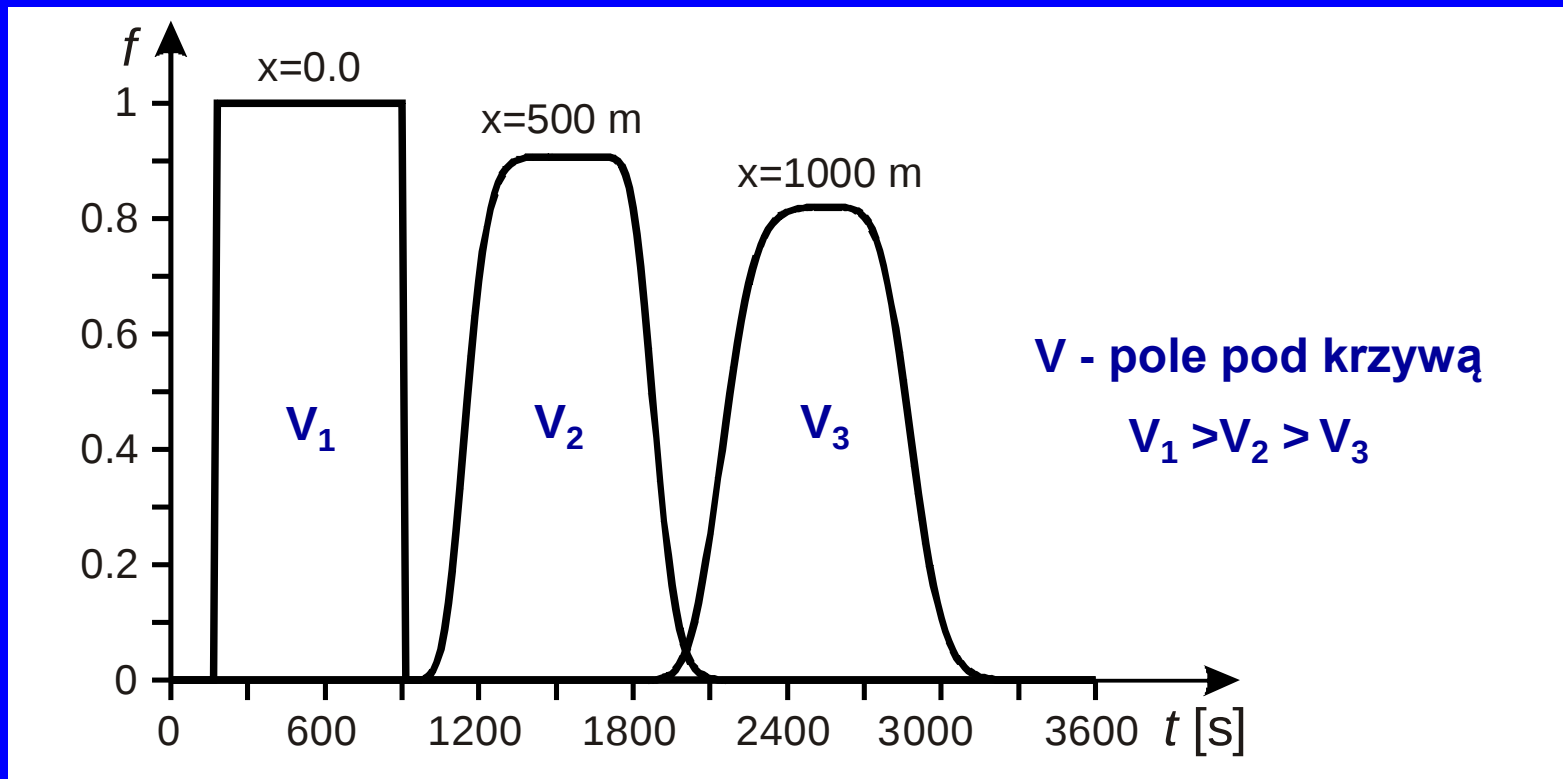
$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \delta(x, t)$$

Założenie:

$C=0.5 \text{ m/s} = \text{const.}$,

$D=0.625 \text{ m}^2/\text{s}$,

$\delta = \kappa \cdot f$ z $\kappa = 0.0001 \text{ s}^{-1}$



Rys. Translacja (przesunięcie), dyfuzja (wygładzenie) oraz reakcja (redukcja) wielkości f ($V_1 > V_2 > V_3$)