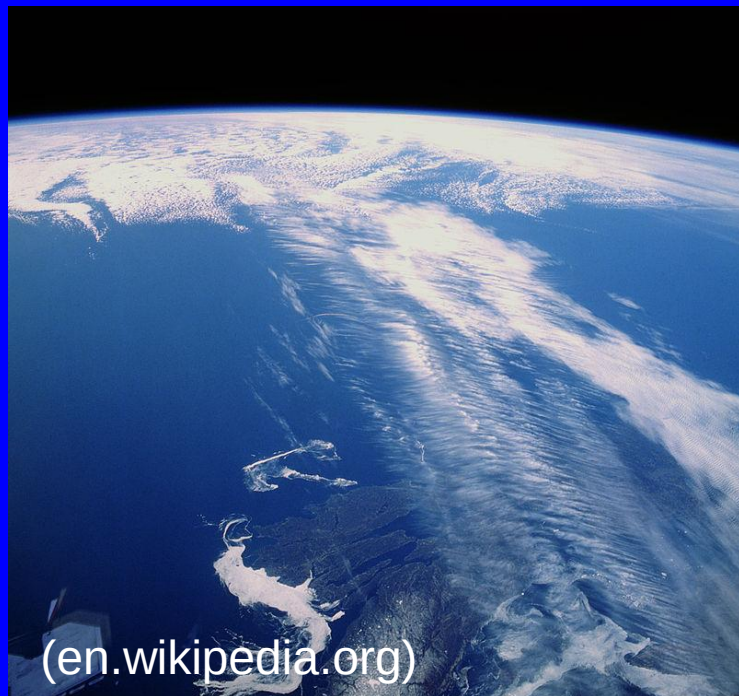


TURBULENCJA

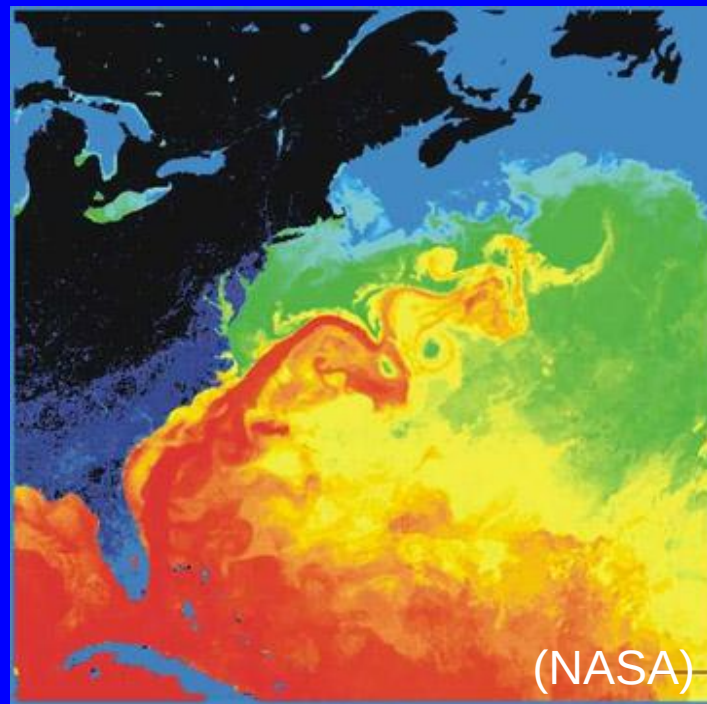
Zjawisko turbulencji (przepływu turbulentnego) jest powszechnie spotykane zarówno w naturze jak i praktyce inżynierskiej.

Przykłady turbulencji

- Wielkoskalowe cyrkulacje atmosferyczne i oceaniczne

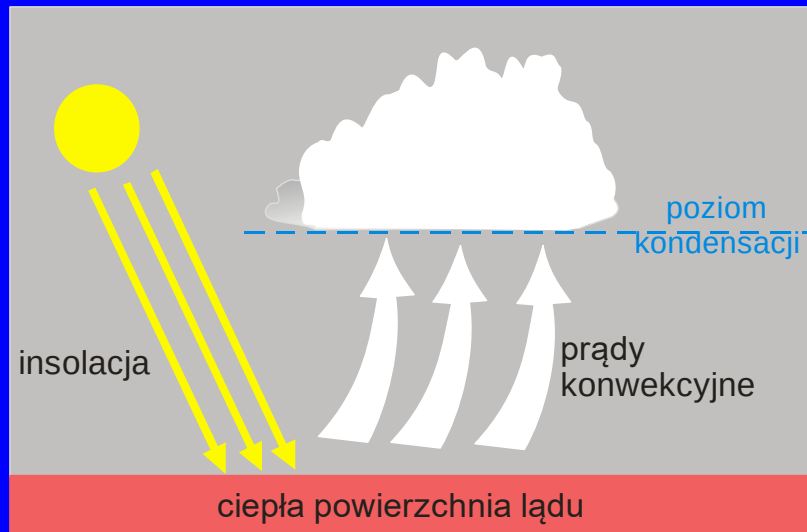


Chmury wzdłuż atmosferycznego prądu strumieniowego (jet-streamu)



Prąd Zatokowy w oceanie (kolor czerwony)

- Wiatry, konwekcja atmosferyczna, przepływy orograficzne

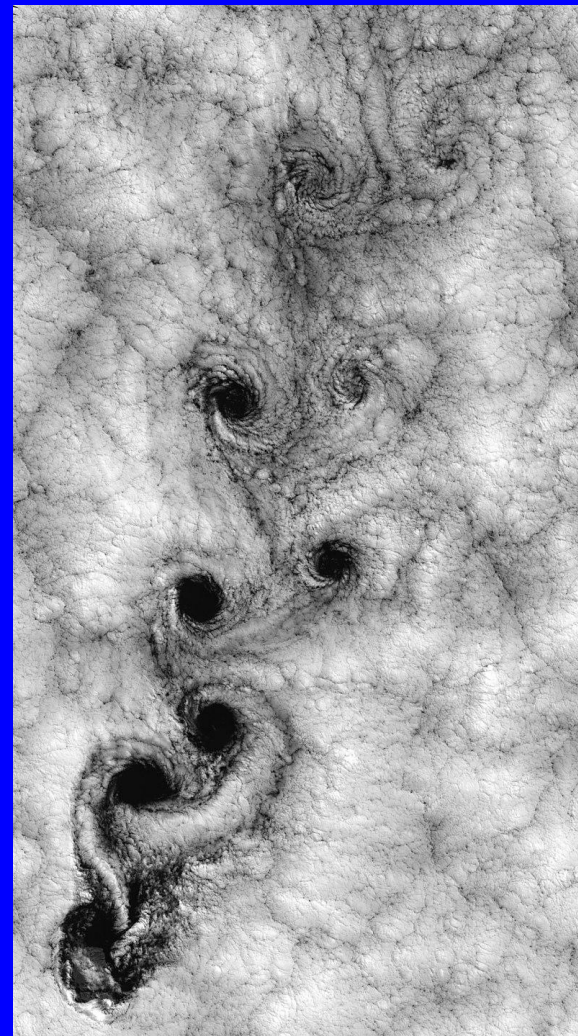


Konwekcja i powstawanie chmury



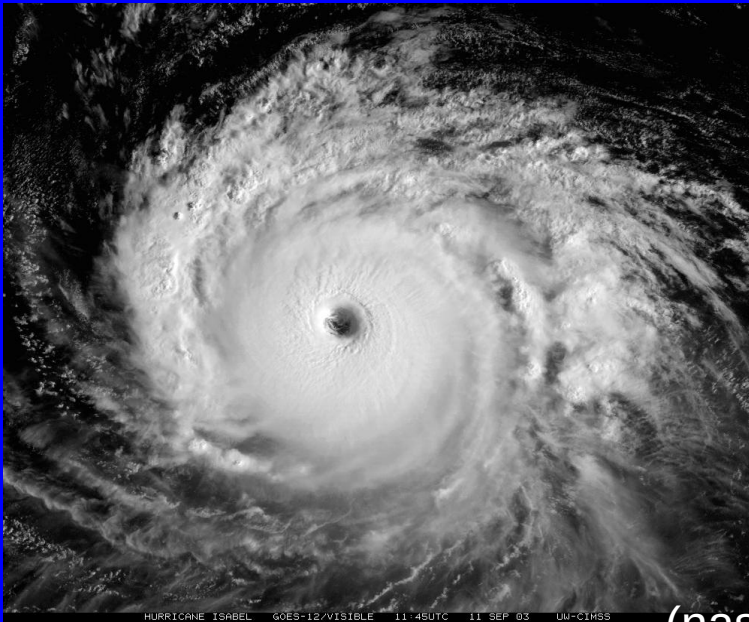
Chmura burzowa Cumulonimbus

(en.wikipedia.org)



Wiry Karmána spowodowane wiatrem opływającym wyspę

- Ekstremalne zjawiska atmosferyczne (huragany, tornada, itd.)



Huragan

(nasa.gov)



Tornado



Superkomórka
burzowa

- Przepływy w rzekach, morzach, estuariach



(wikipedia.org)

Przepływ w obszarze wodospadu



Załamanie fali

- Przepływy w inżynierskich instalacjach (rurociągi, kanały, systemy wentylacyjne) oraz w maszynach (turbiny wodne oraz gazowe, silniki).

- Przepływy generowane wokół samochodów, samolotów, statków, filarów



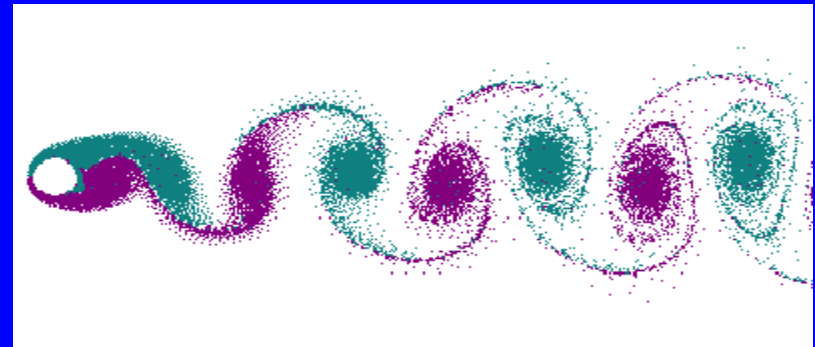
Wir utworzony wokół krawędzi skrzydła samolotu przelatującego przez Kolorowy dym



Burzliwy przepływ wody przez kadłub łodzi podwodnej



Wizualizacja ścieżki wirów generowanych przez kołowy cylinder



Animacja ścieżki wirów generowanych przez kołowy cylinder

CHARAKTERYSTYKA ZJAWISKA

- Charakter przepływu płynu ulega zmianie w miarę wzrostu wartości **liczby Reynoldsa**:

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu}$$

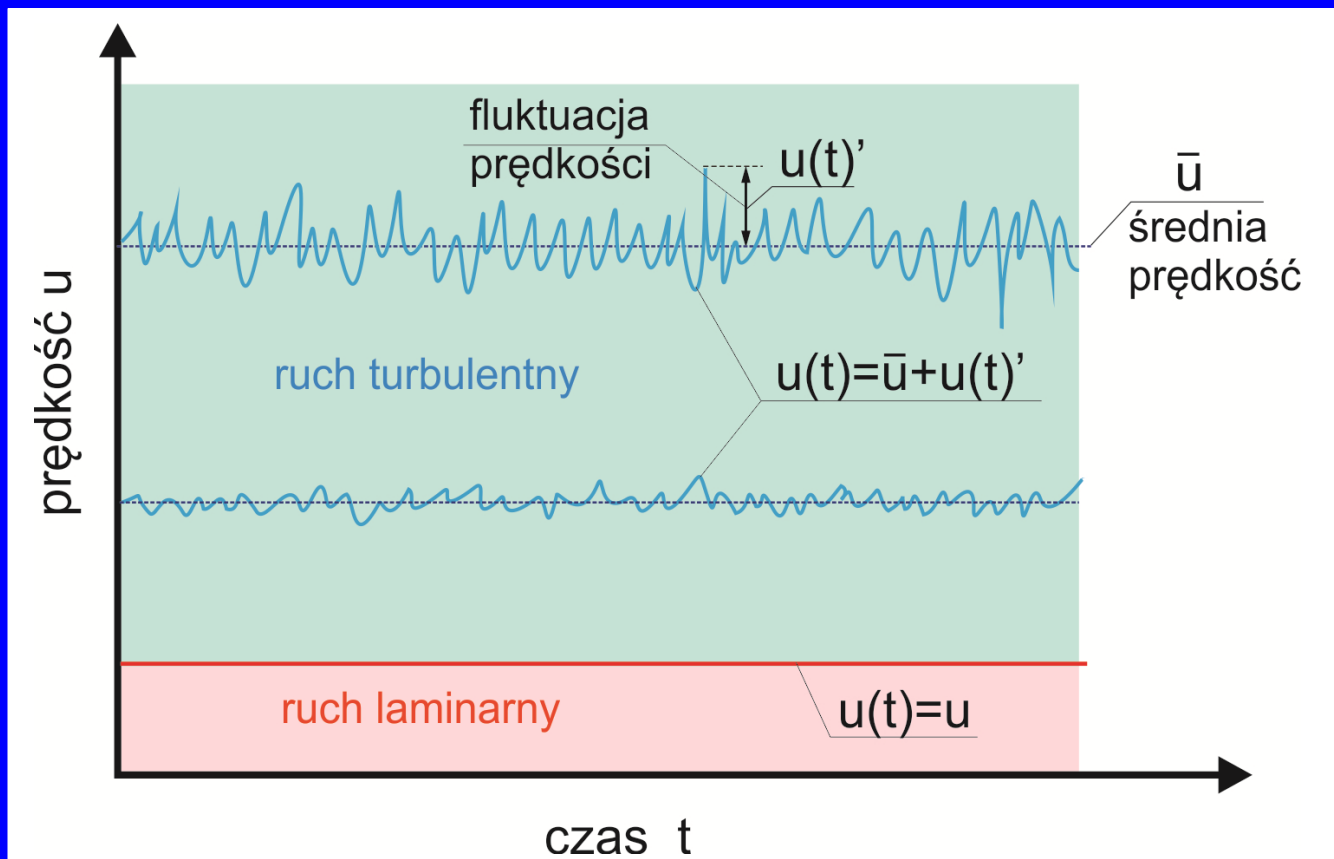
U – charakterystyczna prędkość

L – charakterystyczny wymiar liniowy
(np. średnica rurociągu)

ν – kinematyczny wsp. lepkości

- Po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości liczby Reynoldsa ruch **laminarny (uwarstwiony)** przechodzi w ruch **turbulentny (burzliwy)**.
- W przepływie laminarnym cząsteczki płynu poruszają się wzdłuż warstw, każda warstwa przechodzi płynnie obok sąsiednich warstw bez mieszania.
- Podczas przepływu turbulentnego prędkość (a także ciśnienie, gęstość, itd.) wykazują niewielkie oraz szybkozmienne **chaotyczne (losowe) fluktuacje**.

- Wraz ze wzrostem prędkości płynu następuje intensyfikacja turbulencji.



Zapis prędkości w czasie $u(t)$ w przypadku ruchu laminarnego oraz turbulentnego.

- Mechanizm powstawania turbulentnych fluktuacji podczas przepływu nie jest całkowicie rozpoznany. Najprawdopodobniej fluktuacje mają charakter drgań samowzbudnych, generowanych przez sam przepływ.

- **Laminarny przepływ** występuje przy niskich wartościach liczby Reynoldsa, wówczas dominują **siły lepkości**, przepływ stały stabilny.

$$\text{Re} = \frac{U \cdot L}{\nu}$$

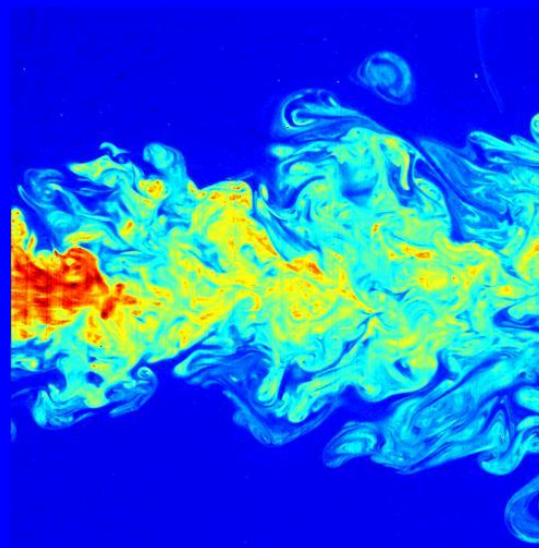
← **siła bezwładności**

← **siła lepkości**

- **Turbulentny przepływ** występuje przy wysokich wartościach liczby Reynoldsa, dominują **siły bezwładności**, następuje utrata stabilności przepływu, pojawiają się chaotycznie wirujące obszary zwane **wirami**.



Wysoka lepkość miodu
powoduje laminarny przepływ



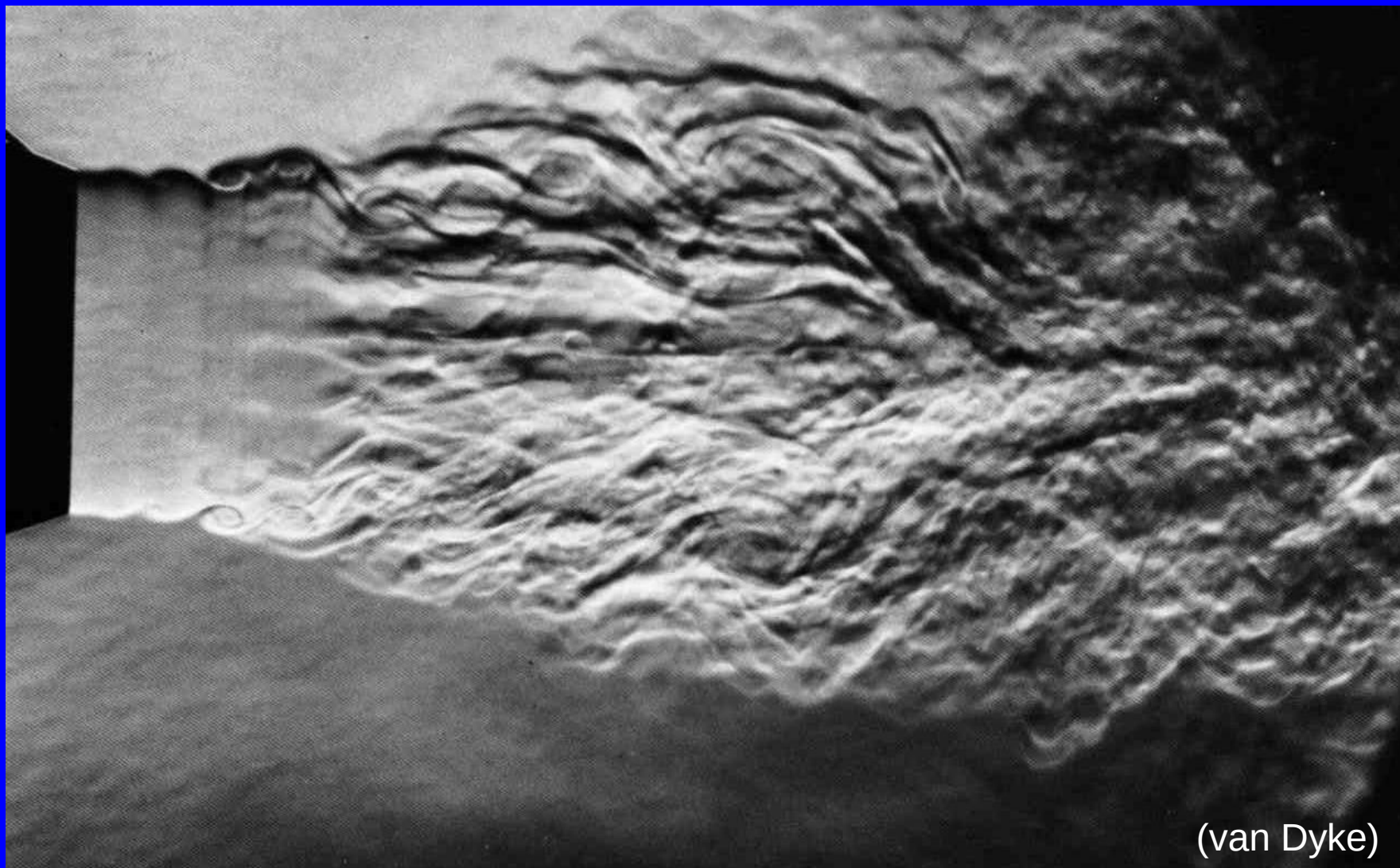
Wizualizacja przepływu turbulentnego

Przepływ laminarny (uwarstwiony)



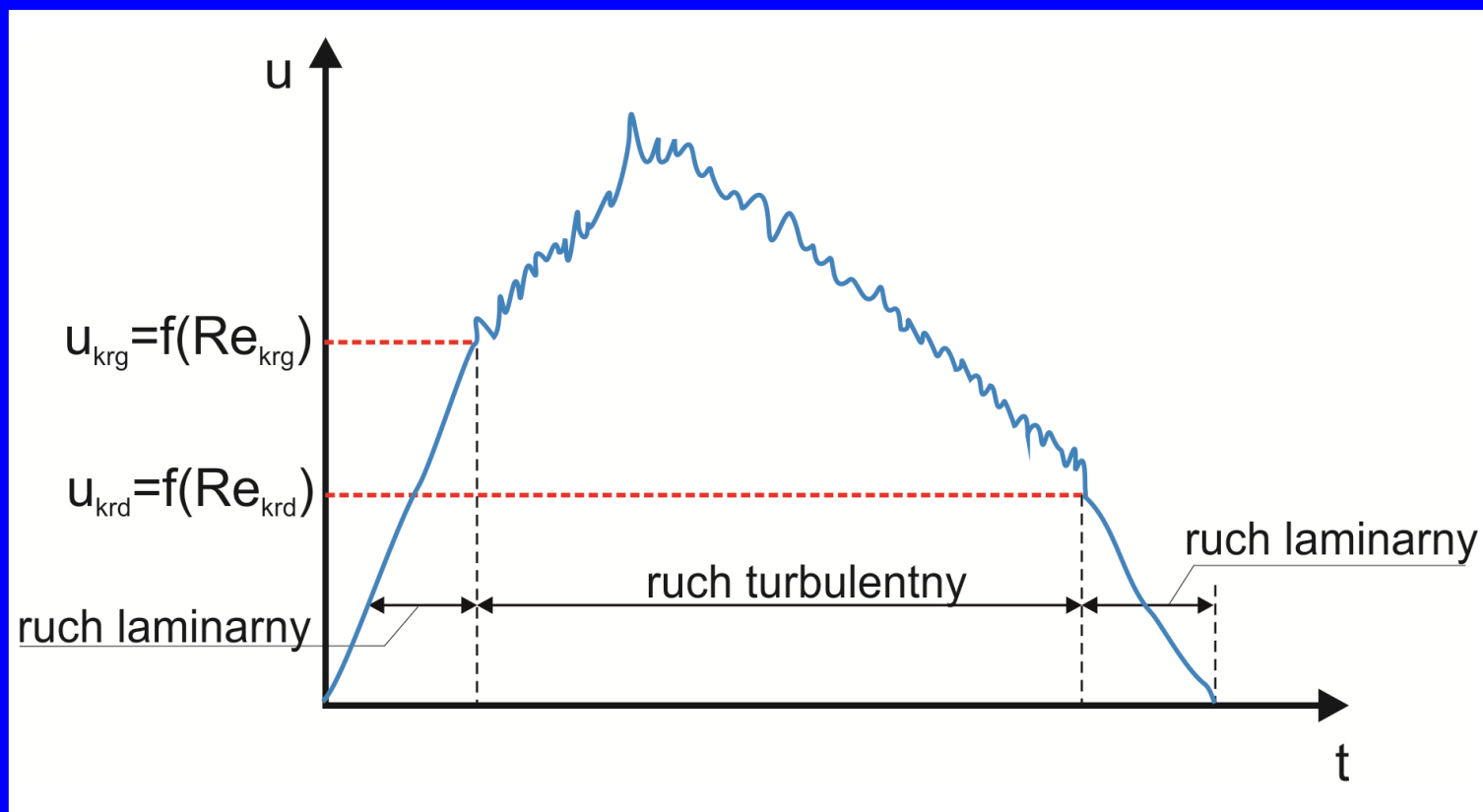
Przepływ laminarny wokół przeszkody ($Re=6000$) – linie prądu są widoczne poprzez małe bąbelki powietrza w wodzie

Przepływ turbulentny



Strumień powietrza wypływającego z dyszy (średnica 5 cm)
z prędkością 12 m/s

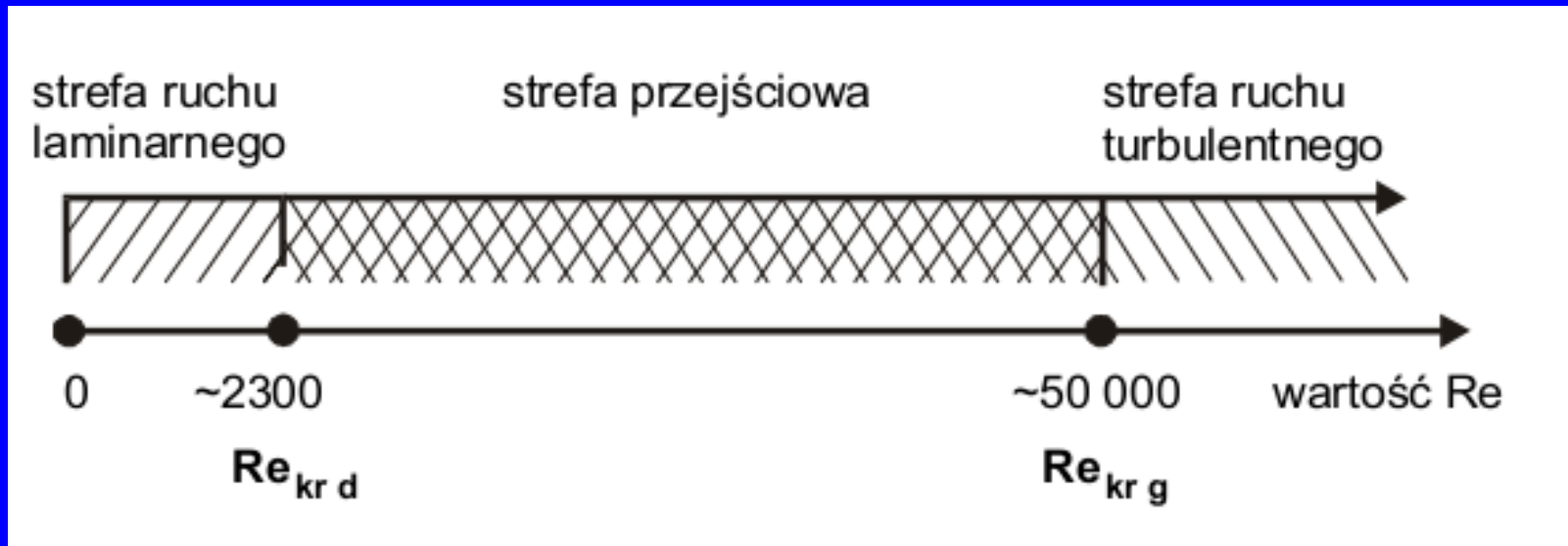
- Najmniejsza liczba, przy której charakter ruchu zmienia się z turbulentnego w laminarny nosi nazwę **dolnej krytycznej liczby Reynoldsa ($Re_{kr d}$)**. Poniżej tej wartości zawsze obserwujemy ruch laminarny.



Przejście z ruchu laminarnego w turbulentny oraz z turbulentnego w laminarny.

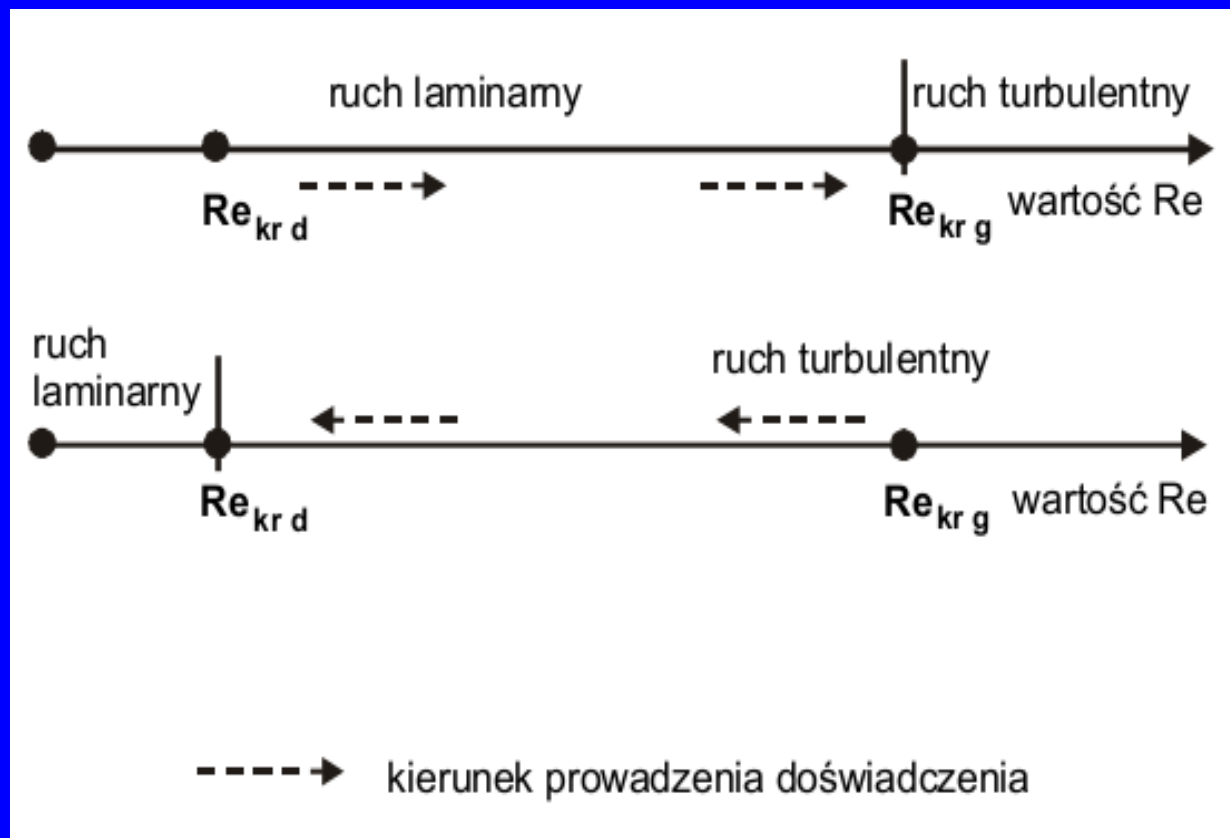
Przepływ w rurociągu

- W warunkach łagodnego wzrostu prędkości płynu, powyżej wartości $Re_{kr d}$, można nadal obserwować ruch laminarny, aż do granicznej **qórnej krytycznej liczby Reynoldsa** ($Re_{kr g}$). Powyżej tej liczby zawsze obserwujemy ruch turbulentny.
- W **strefie przejściowej** może występować zarówno ruch laminarny jak i turbulentny w zależności od tego jakie występują warunki zewnętrzne.



Zależność rodzaju ruchu od wartości liczby Reynoldsa dla przepływu wody w rurociągu.

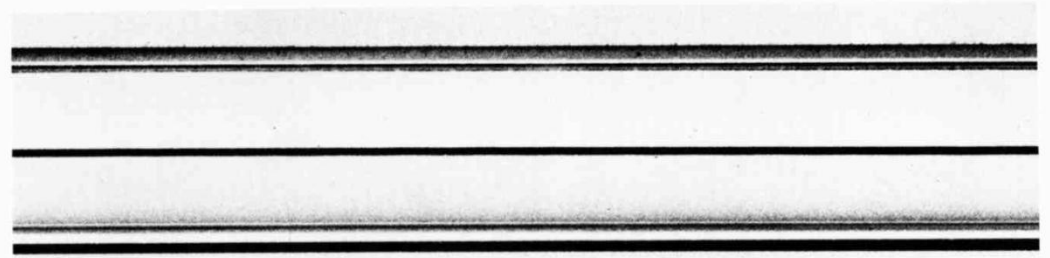
- Stopniowe zmniejszanie prędkości cieczy płynącej ruchem turbulentnym w strefie przejściowej nie prowadzi do wytworzenia ruchu laminarnego, nadal będą utrzymywać się burzliwe fluktuacje zmiennych.
- Ruch laminarny wystąpi dopiero wtedy, gdy liczba Reynoldsa osiągnie wartość mniejszą od $Re_{kr d}$



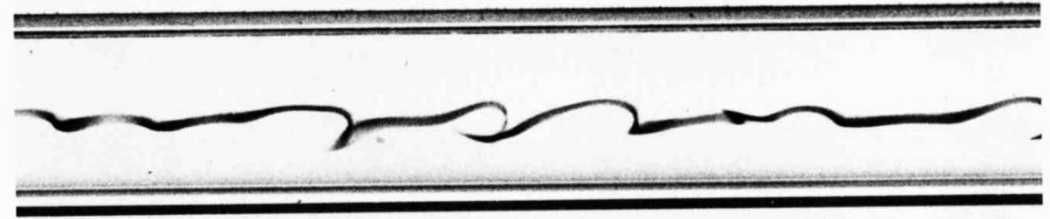
Występowanie danego rodzaju ruchu w strefie przejściowej.

Eksperyment Reynoldsa w miarę wzrostu prędkości (wzrostu wartości Re) przepływ laminarny przechodzi w przepływ turbulentny

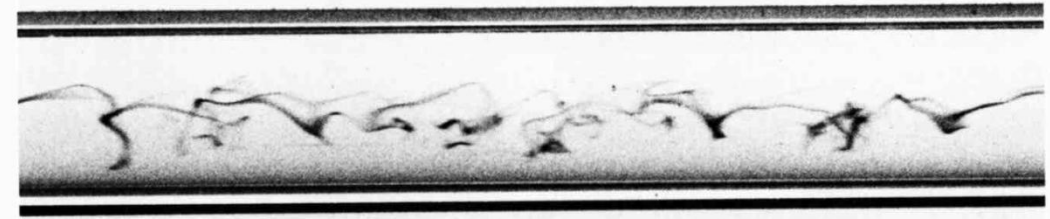
Przepływ laminarny



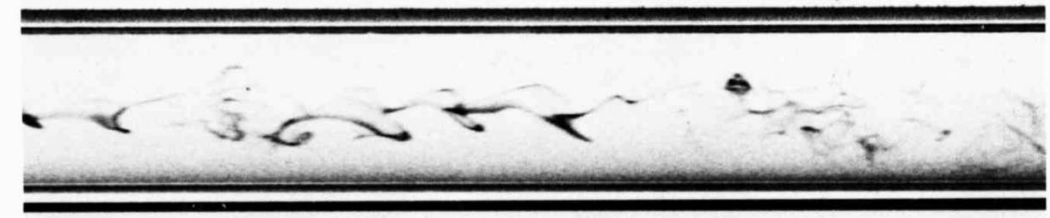
Przepływ w strefie
przejściowej



Przepływ turbulentny

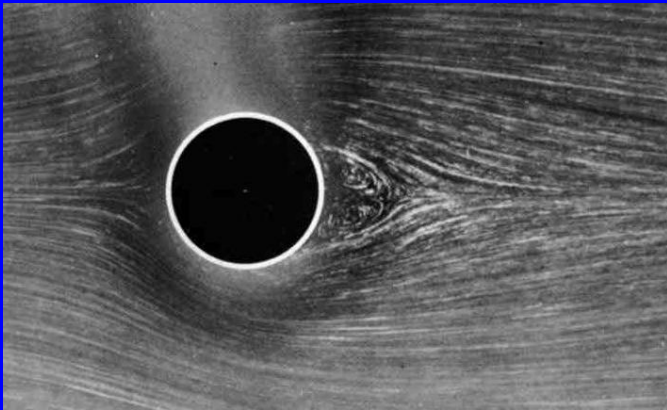


Przepływ turbulentny

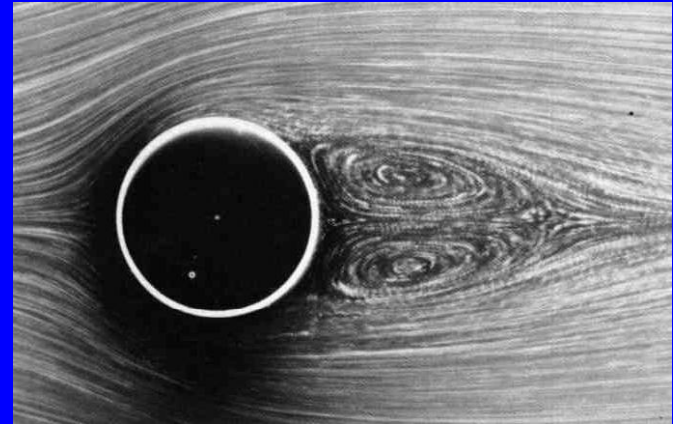


Przepływ wokół cylindra

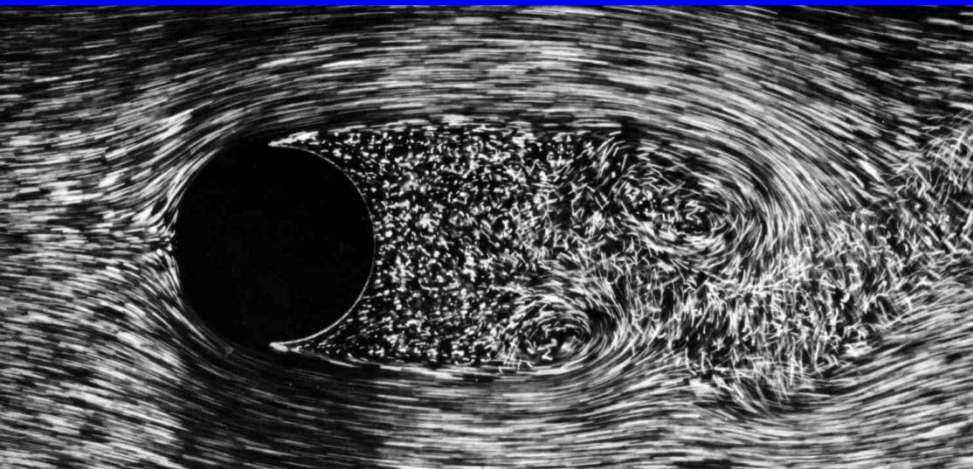
- Dla liczby Re poniżej 40 przepływ jest stabilny.
Stacjonarny wir wydłuża się jak wzrasta wartość liczby Re .



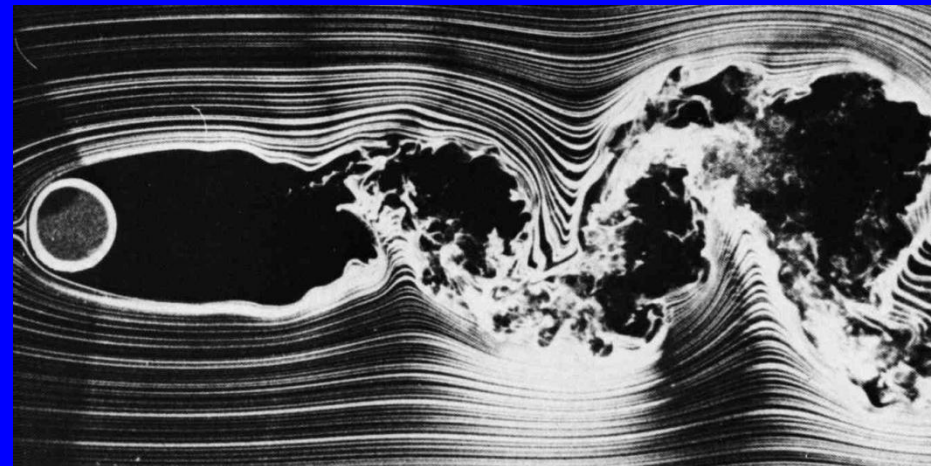
$Re=13.1$



$Re=26$



$Re=2000$



$Re=10000$

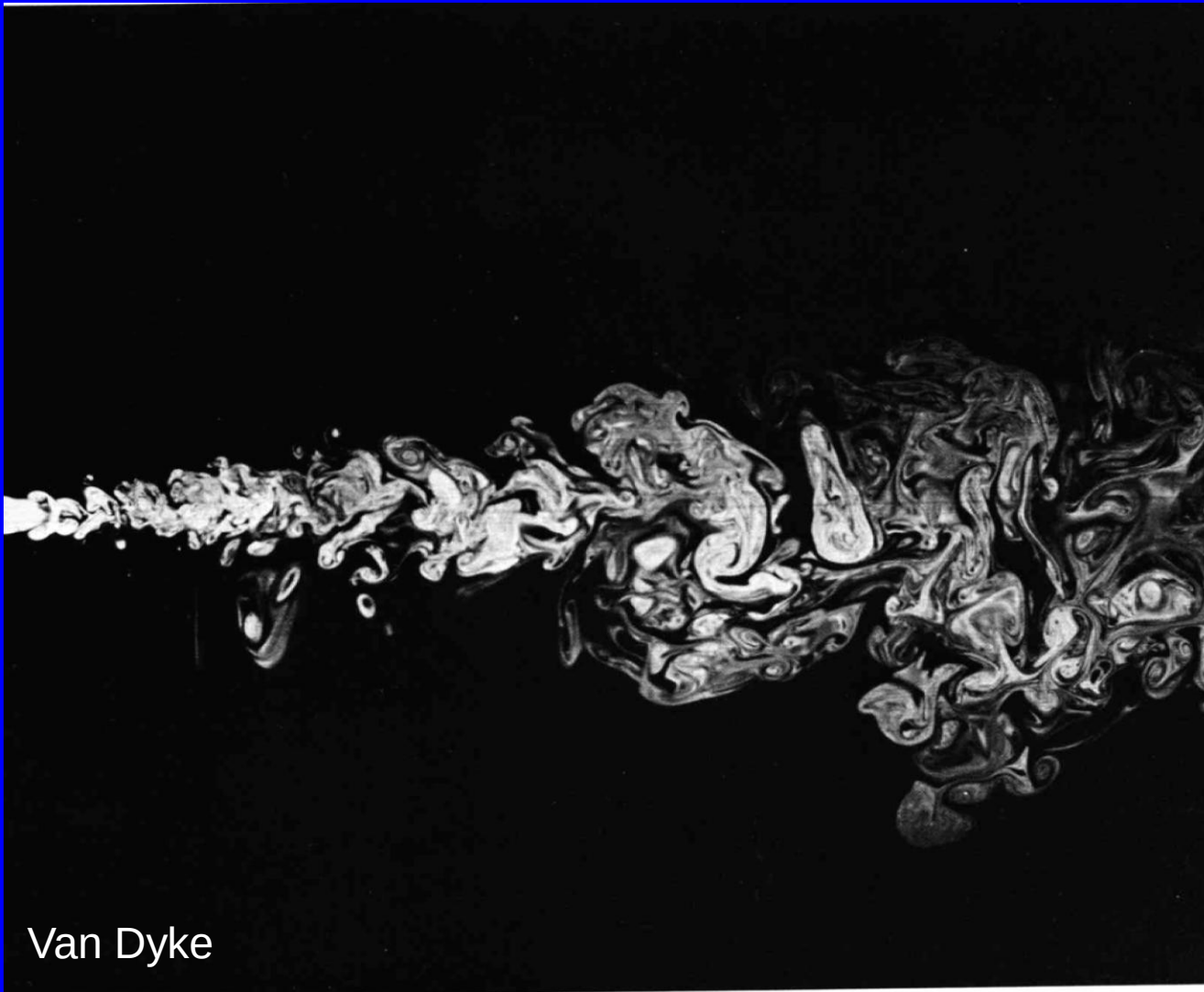
Charakterystyka turbulencji

- Przepływy turbulentne zawsze występują przy odpowiednio wysokich liczbach Reynoldsa (wartość liczby Re zależy od rodzaju przepływu).
- Fluktuacje przepływu turbulentnego mają losowy (chaotyczny) i nieregularny charakter. Pełny opis deterministyczny turbulencji jest bardzo trudny. Zwykle przepływy turbulentne są opisane statystycznie.
- Turbulencja powoduje szybkie mieszanie i zwiększa transport masy, pędu oraz ciepła.
- Przepływy turbulentne mają charakter dyssypacyjny (rozpraszający). Energia kinetyczna zostaje zamieniona na ciepło spowodowane dodatkowymi „lepkimi naprężeniami”.
- **Turbulencja jest cechą przepływu płynu, a nie cechą płynu.** Kiedy liczba Reynoldsa jest wystarczająco wysoka, wówczas „większość” dynamiki przepływu jest niezależna od właściwości płynu.

- W przypadku zagadnień ruchu laminarnego symulację przepływu można wykonać za pomocą podstawowych równań zachowania masy i pędu (równania Naviera-Stokesa).
- W przypadku symulacji przepływu turbulentnego wymagane jest zastosowanie odpowiednio „uśrednionych” równań Naviera-Stokesa (równań Reynoldsa) wraz z odpowiednim modelem turbulencji

Skale turbulencji

- Wizualizacja turbulentnego przepływu ujawnia wirowe struktury zwane turbulentnymi wirami o szerokim zakresie liniowych skal.



Van Dyke

Turbulentny przepływ
strumienia wody
($Re=2300$)

Skale turbulencji

- Kolmogorow opisał ruch turbulentny jako **kaskadowy zbiór wirów** od wymiarów największych do wymiarów najmniejszych.
- W **modelu Kolmogorowa** można wyróżnić następujące skale o wymiarach liniowych:
 - **skala l_0** dużych wirów (zwana skalą zewnętrzną),
 - **skala l** pośrednich wirów,
 - **skala η** małych wirów ulegających dyssypacji.
- Turbulencja rozumiana jest jako proces transferu energii ruchu głównego (ze średnią prędkością) do dużych wirów o skali l_0 . Wiry te następnie ulegają rozpadowi poprzez coraz mniejsze wiry aż do wirów o skali η , które ulegają dyssypacji poprzez lepkość molekularną.
- Małe wiry ulegają **dyssypacji**, czyli następuje zamiana energii kinetycznej wirów w energię cieplną.

Skala Kołmogorowa

- Skala Kołmogorowa jest skalą małych wirów na poziomie której energia kinetyczna przepływu ulega dyssypacji w energię cieplną.
- Na podstawie intensywności dyssypacji energii kinetycznej ε oraz kinematycznego współczynnika lepkości ν , korzystając z analizy wymiarowej, można sformułować następujące skale Kołmogorowa:

- skalę długości:

$$\eta = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}$$

- skalę prędkości:

$$u_\eta = \left(\varepsilon \nu \right)^{1/4}$$

- skalę czasu:

$$\tau_\eta = \left(\nu / \varepsilon \right)^{1/2}$$

- Dla małych wirów skali Kolmogorowa **liczba Raynolda** równa jest 1:

$$\text{Re}_\eta = \frac{\eta \cdot u_\eta}{\nu} = 1$$

czyli rozpad wirów na coraz mniejsze wiry jest kontynuowany do momentu, aż liczba Reynolda osiągnie na tyle małe wartości aby proces dyssypacji był wystarczająco efektywny.

- Wykorzystując związek pomiędzy energią kinetyczną turbulencji k , intensywnością dyssypacji ε oraz liniową skalą dużych wirów l_0

$$l_0 \propto k^{3/2} / \varepsilon$$

można wyznaczyć relacje pomiędzy skalami małych i dużych wirów:

$$\eta / l_0 \sim \text{Re}_L^{-3/4}$$

$$u_\eta / u_0 \sim \text{Re}_L^{-1/4}$$

$$\tau_\eta / \tau_0 \sim \text{Re}_L^{-1/2}$$

gdzie Re_L jest turbulentną liczbą Reynolda

$$\text{Re}_L = \frac{k^{1/2} l_0}{\nu}$$

- Ponieważ relacja η/l maleje wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa, to przy wysokich wartościach Re zakres skali pośredniej l jest mały w porównaniu do skali l_0 oraz duży w stosunku do η , czyli:

$$l_0 \gg l \gg \eta$$

- Typowe wartości skali długości η Kolmogorowa dla przepływów atmosferycznych (gdzie duże wiry mają wymiar kilometrów) wahają się od 0.01 m do 0.1 m, natomiast w przypadku przepływów w skali laboratoryjnej wahają się od 0.1 mm do 10 mm.

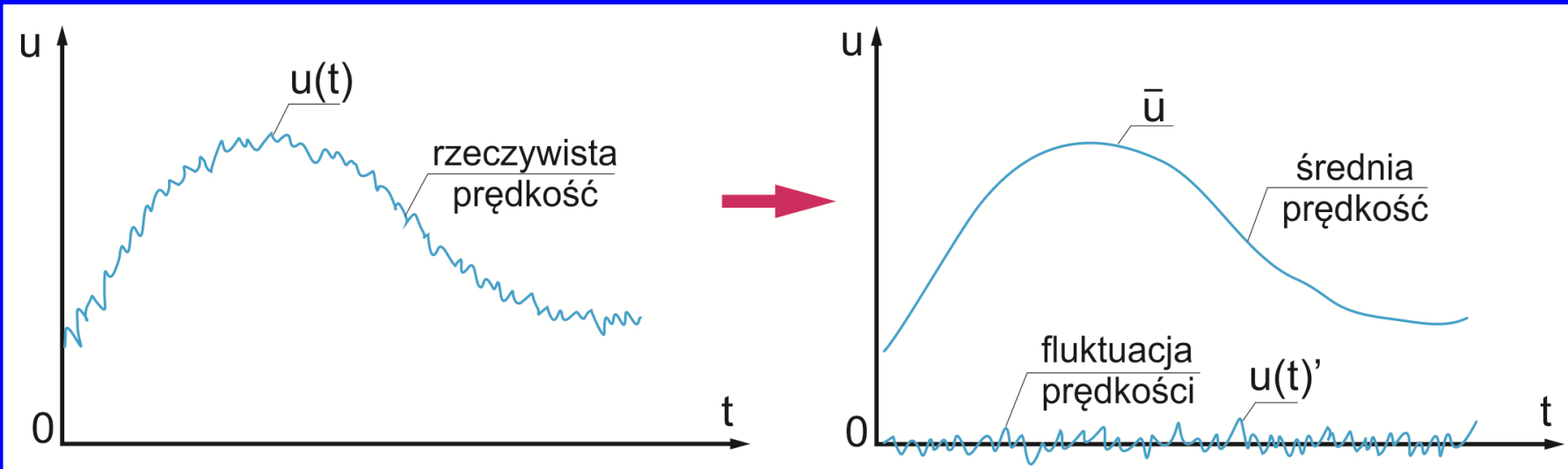
- Złożoność zjawiska turbulencji powoduje, że nie można wyznaczyć kompletnych charakterystyk ruchu turbulentnego. Przyjmuje się, że rzeczywiste chwilowe parametry przepływu rozdziela się na część średnią oraz fluktuacyjną:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}'(t)$$

$u(t)$ – prędkość rzeczywista

$\bar{u}(t)$ – prędkość średnia

$u'(t)$ – fluktuacja prędkości



- Wartość rzeczywista i średnia parametru są ze sobą powiązane poprzez uśrednianie:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u} dt$$

- Z powyższej definicji wynika, że średnia z fluktuacji jest równa zero:

$$\bar{\mathbf{u}'} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}' dt = 0$$

- Natomiast różne od zera są iloczyny fluktuacji:

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}'\mathbf{u}' dt \neq 0$$

- Wobec tego można wyprowadzić tensor o następujących składowych:

$$\begin{pmatrix} \overline{u'_x u'_x} & \overline{u'_x u'_y} & \overline{u'_x u'_z} \\ \overline{u'_y u'_x} & \overline{u'_y u'_y} & \overline{u'_y u'_z} \\ \overline{u'_z u'_x} & \overline{u'_z u'_y} & \overline{u'_z u'_z} \end{pmatrix}$$

RÓWNANIA REYNOLDSA

(Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) Equations)

- Równania RANS wyprowadza się z równań Naviera-Stokesa (NS) poprzez uśrednianie w czasie parametrów przepływu.
- W wyniku otrzymujemy uśrednione równania ciągłości oraz dynamiczne.
Dla płynu nieściśliwego **równania RANS** przyjmują postać:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = \rho \bar{\mathbf{f}} - \nabla \bar{p} + \mu \cdot \Delta \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \tau$$

$\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, \bar{\mathbf{f}}$ – średnia wartość parametru
 u' – fluktuacja prędkości
 τ – tensor naprężeń Reynoldsa

**tensor naprężeń
Reynoldsa**

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

- **Tensor Reynoldsa** jest interpretowany jako dodatkowy stan naprężenia jaki pole fluktuacji prędkości wywołuje w płynie podczas przepływu turbulentnego.

Równania RANS dla płynu nieściśliwego (w układzie kartezjańskim)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{f}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{D\bar{w}}{Dt} = \rho \bar{f}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right)$$

Równania RANS (w zapisie wektorowym)

naprężenia Reynoldsa

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = \rho \bar{\mathbf{f}} - \nabla \bar{p} + \mu \cdot \Delta \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Równania przepływu turbulentnego dla płynu ściśliwego

- W przypadku płynu ściśliwego, gdy gęstość jest zmienna, stosuje się uśrednianie Favra dla równań Naviera-Stokesa

Prędkość uśredniona
wg Favra

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0$$

$$\frac{D(\bar{\rho} \tilde{u})}{Dt} = \bar{\rho} \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \tilde{u}) - \left(\frac{\partial \overline{\rho u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho u' w'}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{D(\bar{\rho} \tilde{v})}{Dt} = \bar{\rho} \bar{f}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \tilde{v}) - \left(\frac{\partial \overline{\rho v' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho v' w'}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{D(\bar{\rho} \tilde{w})}{Dt} = \bar{\rho} \bar{f}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \tilde{w}) - \left(\frac{\partial \overline{\rho w' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho w' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w' w'}}{\partial z} \right)$$

MODELE TURBULENCJI

- Tensor Reynoldsa (tensor naprężeń turbulentnych) jest symetryczny i zawiera 6 nieznanych składowych. W celu rozwiązania równań RANS należy dołączyć odpowiednie relacje określające te składowe. Zestaw takich 6 funkcji stanowi odpowiedni **model turbulencji**.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \overline{u'u'} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'v'} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'w'} \end{pmatrix}$$

- Najczęściej modele turbulencji są klasyfikowane na podstawie liczby dodatkowych równań różniczkowych cząstkowych:
 - model zero-równaniowy: np. model drogi mieszania turbulentnego,
 - model jednego równania: np. model Spalart-Almarasa,
 - model dwóch równań: np. model ***k-ε***, model ***k-ω***,

Hipoteza Boussinesqa

- Przy tworzeniu modeli turbulencji często wykorzystuje się analogię pomiędzy chaotycznym ruchem molekuł, a chaotycznym ruchem tzw. autonomicznych obszarów wirowych.
- Według **hipotezy Boussinesqa** efekt wynikający z turbulencji przepływu może być rozważany jako **dodatkowy wzrost lepkości**.
- Zakłada się, że naprężenia turbulentne są proporcjonalne do średniego tempa deformacji płynu, co można zapisać według relacji:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \cdot k \cdot \delta_{ij}$$

μ_T – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej

δ_{ij} – delta Kroneckera ($\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$)

k – kinetyczna energia turbulencji

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

Wykorzystując relację Boussinesqa równanie dynamiczne RANS można zapisać jako:

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = \rho \bar{\mathbf{f}} - \nabla \bar{p}_c + \mu \cdot \Delta \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot 2\mu_T \mathbf{S}$$

gdzie: $\mathbf{S}$ - tensor prędkości deformacji:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\bar{p}_c = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k$$

Współczynnik lepkości turbulentnej μ_T

- W relacji na naprężenia turbulentne wg Boussinesqa:

$$\tau_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \cdot k \cdot \delta_{ij}$$

pojawił się parametr – **dynamiczny wsp. lepkości turbulentnej μ_T**

- Lepkość turbulentna μ_T ma taki sam wymiar jak współczynnik lepkości molekularnej, jednakże μ_T przyjmuje znacznie większe wartości niż współczynnik lepkości molekularnej.
- Proces modelowania turbulencji polega na określeniu zależności opisujących μ_T (mogą to być równania algebraiczne lub różniczkowe)
- Lepkość μ_T jest niejednorodna, tzn. jej wartość może zmieniać się w przestrzeni. Często zakłada się, że lepkość μ_T jest izotropowa, tzn. nie zależy od kierunku przepływu (założenie to nie zawsze jest ważne, np. w przypadku przepływów wirowych).

Turbulentna liczba Schmidta (Prandtla)

- Turbulentny transport ciepła, masy lub innej wielkości skalarnej może być modelowany także z wykorzystaniem teorii Boussinesqa, która zakłada, że turbulentny transport pędu jest proporcjonalny do gradientu prędkości.
- Poprzez analogię można założyć, że turbulentny transport dowolnej wielkości skalarnej także jest proporcjonalny do gradientu średniej wartości tej transportowanej wielkości Φ :

$$\overline{-\rho u_i' \phi'} = \Gamma_T \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

gdzie: Γ_T - turbulentna dyfuzyjność

- Turbulentna dyfuzyjność Γ_T jest obliczana na podstawie lepkości μ_T wykorzystując stałą zwaną **turbulentną liczbą Schmidta (Prandtla)**:

$$\sigma_t = \frac{\mu_T}{\Gamma_T}$$

- Eksperymenty wykazują, że turbulentna liczba Schmidta jest w przybliżeniu stała z typowymi wartościami pomiędzy 0.7 a 1.0.

Model drogi mieszania turbulentnego

- Z analizy wymiarowej wynika, że kinematyczny współczynnik lepkości turbulentnej:

$$\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho}$$

związany jest z drogą tzw. mieszania turbulentnego l_m następującą relacją:

$$\nu_T = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Powyższa relacja zwana jest **modelem drogi mieszania Prandtla**.

- Wykorzystując hipotezę Boussinesqa naprężenia Reynoldsa w modelu drogi mieszania Prandtla można wyrazić następująco:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

- W modelu Prandtla droga mieszania l_m dla prostych dwuwymiarowych przepływów turbulentnych może być określona za pomocą algebraicznych formuł, np. w przypadku przepływu w rurociągu lub kanale otrzymujemy:

$$l_m = L \left[0.14 - 0.08(1 - y/L)^2 - 0.6(1 - y/L)^4 \right]$$

gdzie $2L$ jest średnicą rurociągu lub szerokością kanału

- Model Prandtla jest łatwy w implementacji oraz nie wymaga czasochłonnych obliczeń. Daje dobre rezultaty dla prostych przepływów, gdzie istnieje eksperymentalna możliwość wyznaczenia drogi mieszania.
- Model Prandtla jest nieodpowiedni dla przepływów, w których turbulentna skala długości ulega zmianie, np. w przypadku recyrkulacji.

Model turbulencji k - ε

- Współczynnik lepkości burzliwej μ_T można wyrazić za pomocą kinetycznej energii turbulencji k oraz intensywności dyssypacji energii ε :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{lub} \quad \nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

gdzie: C_μ - bezwymiarowy parametr ($C_\mu = 0.09$),

k - kinetyczna energia turbulencji zdefiniowana następująco:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

- Kinetyczna energia turbulencji k oraz intensywność dyssypacji energii ε nie są stałe w przestrzeni i czasie. Podczas przepływu turbulentnego wartości k oraz ε mogą zmieniać się w przestrzeni w szerokim zakresie, nawet o rzędy wielkości.

- Standardowy model k - ε wykorzystuje następujące równania w celu wyznaczenia parametrów k oraz ε

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho k \mathbf{v}) = \operatorname{div}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \operatorname{grad} k\right) + 2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{v}) = \operatorname{div}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon\right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

gdzie: $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ – liczby Prandtla wiążące dyfuzyjność z lepkością burzliwą
(typowe wartości $\sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3$),

C_1, C_2 – stałe (typowe wartości $C_1=1.44, C_2=1.92$),

S_{ij} – tensor prędkości deformacji.

- Interpretacja równań opisujących transport wielkości k oraz ε

$\rho \frac{\partial k}{\partial t}$	$+$	$\text{div}(\rho k \mathbf{v})$	$=$	$\text{div}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \text{grad} k\right)$	$+$	$2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij}$	$-$	$\rho \varepsilon$
$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$	$+$	$\text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{v})$	$=$	$\text{div}\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon\right)$	$+$	$C_1 \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij}$	$-$	$C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$
↑ tempo zmian k lub ε		↑ transport adwekcyjny k lub ε		↑ transport dyfuzyjny k lub ε		↑ produkcja k lub ε		↑ zanik k lub ε

- Produkcja i zanik parametrów k oraz ε są ściśle ze sobą powiązane. Tempo produkcji i zaniku ε jest proporcjonalne do produkcji i zaniku k . Np. temp dyssypacji ε jest duże tam, gdzie produkcja energii k jest duża.

- Model $k-\varepsilon$ jest najbardziej powszechnie stosowanym modelem turbulencji dającym dobre rezultaty podczas symulacji przepływów o dużej różnorodności.

Zalety modelu $k-\varepsilon$

- Stosunkowo prosty w implementacji,
- Prowadzi do stabilnych obliczeń,
- Dobra dokładność symulacji wielu przepływów w inżynierii przemysłowej oraz inżynierii środowiska.

Wady modelu $k-\varepsilon$

- Większe obciążenie komputera, niż w przypadku zastosowania np. modelu Prandtla (dodatkowe dwa równia różniczkowe cząstkowe),
- Słaba dokładność symulacji niektórych przepływów (np. przepływy wirowe, przepływy z silną separacją, przepływy w nieregularnych kanałach oraz z nieregularnymi warstwami granicznymi).