

# Metoda elementów skończonych

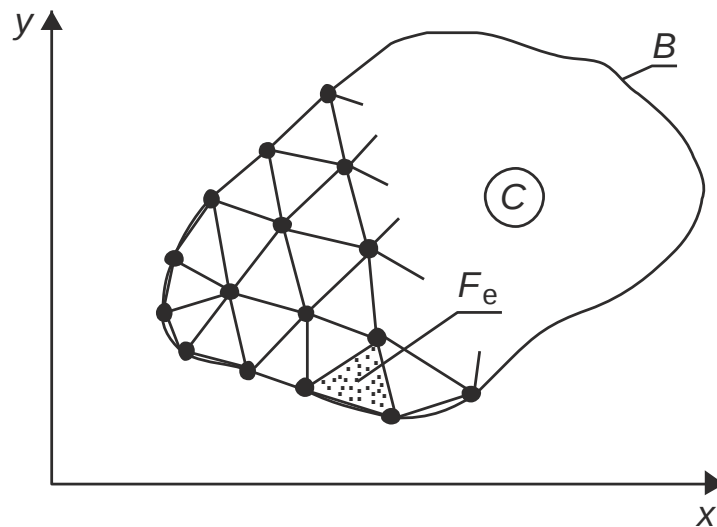
Rozpatrzmy równanie różniczkowe ważne w obszarze ciągłym  $C$  zapisane symbolicznie

$$\Omega(h) = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$B(h) = 0$$

gdzie  $h$  reprezentuje poszukiwaną funkcję.



W celu uzyskania przybliżonego rozwiązania obszar  $C$  dzieli się na mniejsze podobszary – „elementy skończone” .

Zakłada się, że elementy łączą się ze sobą tylko w skończonej liczbie punktów znajdujących się na ich obwodzie. Punkty te nazywa się węzłami.

Nieznaną funkcję  $h$  aproksymuje się wewnątrz obszaru  $C$  wyrażeniem:

$$\bar{h} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{h}$$

gdzie:  $\bar{h}$  – przybliżenie funkcji  $h$ ,

$$\mathbf{N} = [..., N_i, N_j, N_k, ...],$$

$$\mathbf{h} = (..., h_i, h_j, h_k, ...)^\top.$$

Składowymi wektora  $\mathbf{h}$  są węzłowe wartości funkcji  $h$ .

W zagadnieniu nieustalonym wartości węzłowe są funkcjami czasu.

**N** jest zbiorem funkcji zależnych tylko od współrzędnych przestrzennych. Funkcje te należy tak dobrać, aby powyższe równanie było spełnione, gdy wstawi się do niego współrzędne odpowiednich węzłów obszaru. Są to tzw. **funkcje kształtu** lub **funkcje bazowe**.

Jeżeli funkcja  $\bar{h}$  jest przybliżeniem rozwiązania dokładnego  $h$  w obszarze rozwiązania  $C$ , to nie spełni ona dokładnie rozwiązywanego równania różniczkowego i będzie

$$\Omega(\bar{h}) = R \neq 0$$

Rozwiązaniem najdokładniejszym będzie takie, które zredukuje resztę  $R$  do wartości najmniejszych w całym obszarze rozwiązania.

Zatem rozwiązanie powinno spełniać warunek:

$$\int_C W \cdot R \cdot dC = 0$$

gdzie:  $W$  jest pewną funkcją wagową zależną tylko od współrzędnych.

Jeżeli poszukiwana funkcja  $h$  aproksymowana jest na podstawie  $M$  nieznanych jej wartości w  $M$  węzłach, to można wybrać  $M$  liniowo niezależnych funkcji wagowych  $W_i$ , uzyskując w ten sposób odpowiednią liczbę równań

$$\int_C W_i \cdot \Omega(\bar{h}) \cdot dC = \int_C W_i \cdot \Omega(\mathbf{N} \cdot \mathbf{h}) dC = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

z których należy wyznaczyć  $\mathbf{h}$  jako rozwiązanie problemu.

Jeżeli przyjmiemy  $W_i = N_i$ , tzn. że funkcjami wagowymi będą funkcje kształtu, to proces taki, znany pod nazwą **procedury Galerkina** prowadzi z reguły do najlepszego przybliżenia.

Procedura Galerkina sprowadza rozwiązanie problemu do następującego układu równań:

$$\int_C \Omega(\mathbf{N} \cdot \mathbf{h}) N_i \cdot dC = 0$$

gdzie:  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ,  
 $M$  – liczba węzłów w obszarze  $C$ .

Przyjmuje się, że całka liczona w całym obszarze  $C$  może być zastąpiona sumą całek liczonych w poszczególnych elementach obszaru. Zatem:

$$\int_C \Omega(\mathbf{N} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{N} \cdot dC = \sum_{e=1}^m \int_{F_e} \Omega(\mathbf{N}_e \cdot \mathbf{h}_e) \mathbf{N}_e^T dF_e = 0$$

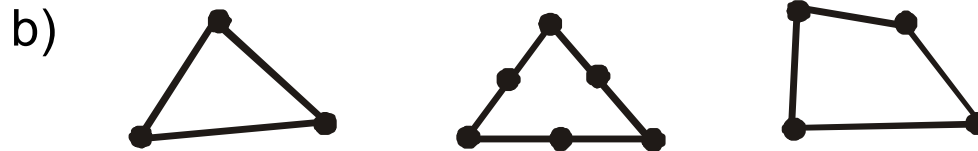
gdzie:  $m$  – całkowita liczba elementów, na jaką podzielono obszar  $C$ ,  
 $F_e$  – powierzchnia „elementu skończonego” o numerze  $e$ .

## Wybór funkcji kształtu:

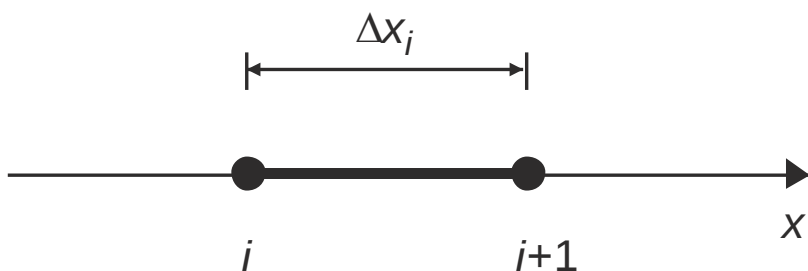
Od funkcji kształtu wymaga się, aby:

- były ciągłe w elemencie,
- zapewniały ciągłość funkcji  $f$  na styku elementów.

Dla zagadnień 1D elementem skończonym może być odcinek zbudowany na dwu lub więcej węzłach (a), natomiast dla zagadnień 2D będzie nim dowolna figura płaska (b).



Rozpatrzmy jednowymiarowy element  $e$  będący odcinkiem ograniczonym węzłami  $i$  oraz  $i + 1$  o długości  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$



W najprostszym wypadku funkcję  $h$  można aproksymować wewnątrz elementu za pomocą wyrażenia liniowego:

$$\bar{h} = a \cdot x + b$$

Współczynniki  $a$  i  $b$  można wyznaczyć z warunków w węzłach na końcach elementów

$$h_i = a \cdot x_i + b$$

$$h_{i+1} = a \cdot x_{i+1} + b$$

Są one równe

$$a = \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad b = \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} x_i + h_i$$

Formuła aproksymacyjna przyjmie postać:

$$\bar{h} = \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} x - \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} x_i + h_i$$

W standardowej formie:

$$\bar{h} = \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{h}_e$$

gdzie

$$\mathbf{N}_e = [N_i, N_{i+1}], \quad \mathbf{h}_e = \begin{Bmatrix} h_i \\ h_{i+1} \end{Bmatrix}$$

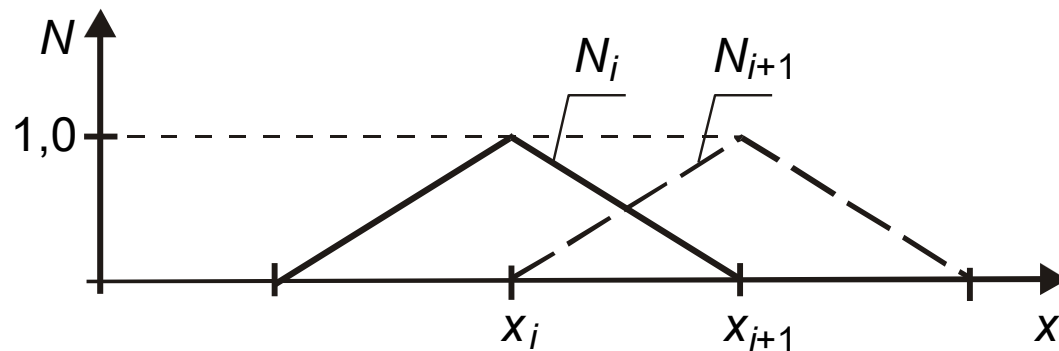
$e$  - indeks elementu, w którym dokonujemy aproksymacji.

przy czym

$$N_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{dla} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$N_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 1 & \text{dla } x = x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{dla } x > x_{i+1}. \end{cases}$$

Funkcje „daszkowate”  $N_i(x)$  przyjmują w każdym węźle  $j$  wartość jednostkową i liniowo zmieniają ją w kierunku sąsiednich węzłów  $j-1$  oraz  $j+1$ . Poza tymi węzłami ich wartości są zerowe.



Rys. Liniowe funkcje kształtu  $N_j$  oraz  $N_{j+1}$

## Aproksymacja funkcji $h$ w elemencie 1D:

$$\bar{h} = N_i \cdot h_i + N_{i+1} \cdot h_{i+1}$$

Różniczkowanie funkcji kształtu w elemencie:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right) = -\frac{1}{\Delta x_i};$$

$$\frac{dN_{i+1}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) = \frac{1}{\Delta x_i}$$

gdzie:  $\Delta x_i$  – długość elementu.

Całkowanie funkcji kształtu w elemencie:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} dx = \frac{1}{2} \Delta x_i$$

Obliczanie całek z iloczynu funkcji kształtu można prowadzić wykorzystując wzór:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^\alpha N_j^\beta dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^\beta N_j^\alpha dx = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \Delta x_i = \frac{A}{B} \Delta x_i$$

gdzie:  $\alpha, \beta$  – całkowite wykładniki potęg

## Wartości całek z iloczynów funkcji kształtu dla elementów liniowych

| $\alpha + \beta$ | $\alpha$    | $\beta$     | <b>A</b>     | <b>B</b> |
|------------------|-------------|-------------|--------------|----------|
| 1                | 1           | 0           | 1            | 2        |
| 2                | 2<br>1      | 0<br>1      | 2<br>1       | 6        |
| 3                | 3<br>2      | 0<br>1      | 3<br>1       | 12       |
| 4                | 4<br>3<br>2 | 0<br>1<br>2 | 12<br>3<br>2 | 60       |
| 5                | 5<br>4<br>3 | 0<br>1<br>2 | 10<br>2<br>1 | 60       |

Różniczkowanie funkcji aproksymowanej  $\bar{h} = N_i \cdot h_i + N_{i+1} \cdot h_{i+1}$

- względem zmiennej  $x$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{h}}{dx} &= \frac{d}{dx} (N_i \cdot h_i + N_{i+1} \cdot h_{i+1}) = h_i \frac{dN_i}{dx} + h_{i+1} \frac{dN_{i+1}}{dx} = \\ &= h_i \frac{-1}{\Delta x} + h_{i+1} \frac{1}{\Delta x} = \frac{-h_i + h_{i+1}}{\Delta x}\end{aligned}$$

- względem czasu  $t$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{d}{dt} (N_i \cdot h_i + N_{i+1} \cdot h_{i+1}) = N_i \frac{dh_i}{dt} + N_{i+1} \frac{dh_{i+1}}{dt}$$

## Aproksymacja funkcji $h$ w elemencie 2D (trójkątnym):

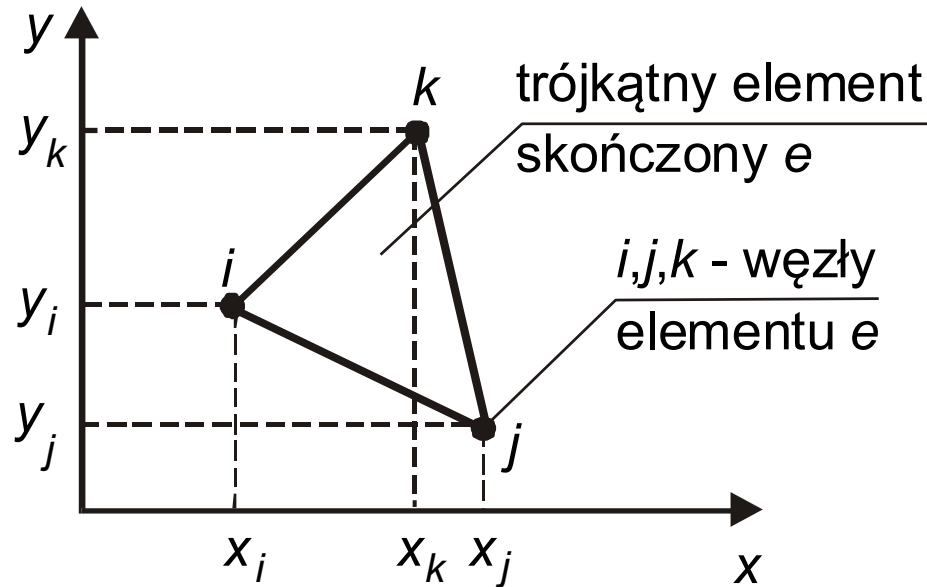
W przypadku zagadnień 2D elementami skończonymi mogą być dowolne figury płaskie.

Najbardziej popularny: element trójkątny

Korzystne cechy elementów trójkątnych:

- większa, niż w przypadku np. elementów kwadratowych lub prostokątnych, elastyczność w odwzorowywaniu geometrii obszarów;
- dla każdego elementu trójkątnego można, w zależności od liczby węzłów, dobrać wielomiany gwarantujące wymagane własności funkcji kształtu;
- wynikowe całki oblicza się analitycznie.

## Bezpośredni sposób tworzenia liniowych funkcji kształtu dla elementów trójkątnych.



Najprostsza funkcja kształtu dla trójkątnego elementu skończonego  $e$  zbudowanego na węzłach  $(i, j, k)$  to liniowa funkcja kształtu

Liniowa funkcja kształtu ma następującą postać:

$$\bar{h}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

gdzie:  $h_i, h_j, h_k$  - wartości funkcji  $h(x, y)$  w węzłach.

Współczynniki  $\alpha_0, \alpha_1$  i  $\alpha_2$  należy tak dobrać, aby w węzłach  $i, j, k$  funkcja  $h$  przyjęła wartości  $h_i, h_j$  oraz  $h_k$  czyli

$$h_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$

$$h_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j$$

$$h_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k$$

Równania tworzą układ, który po rozwiązaniu względem  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  umożliwia zapisanie następującej formuły aproksymującej funkcję  $h(x, y)$

$$\begin{aligned}\bar{h} = & \frac{1}{2F_e}(a_i + b_i x + c_i y)h_i + \frac{1}{2F_e}(a_j + b_j x + c_j y)h_j \\ & + \frac{1}{2F_e}(a_k + b_k x + c_k y)h_k,\end{aligned}$$

lub krócej w standardowej formie

$$\bar{h} = N_i h_i + N_j h_j + N_k h_k = \mathbf{N}_e \mathbf{h}_e$$

gdzie:  $N_i(x, y) = \frac{1}{2F_e} (a_i + b_i x + c_i y)$

$$N_j(x, y) = \frac{1}{2F_e} (a_j + b_j x + c_j y)$$

$$N_k(x, y) = \frac{1}{2F_e} (a_k + b_k x + c_k y)$$

$$F_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (c_k b_j - c_j b_k) \quad (\text{pole elementu } e)$$

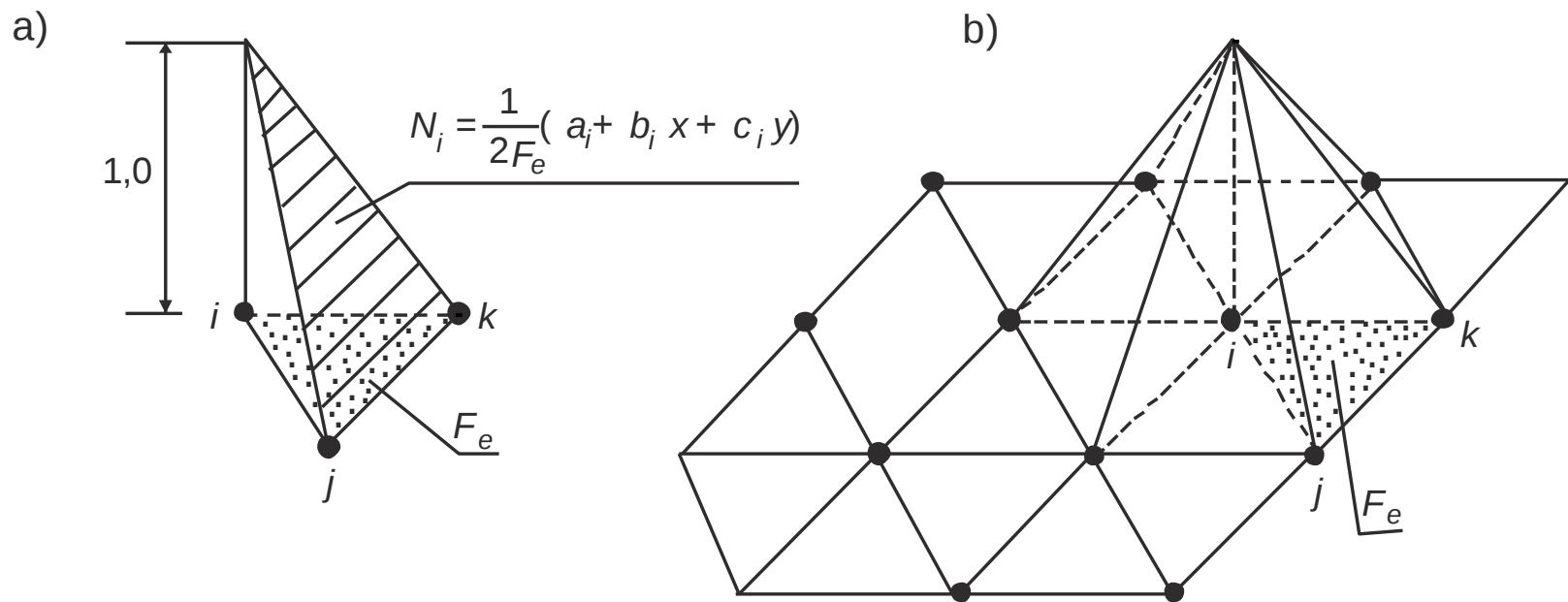
przy czym:  $a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad a_k = x_i y_j - x_j y_i,$

$$b_i = y_j - y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad b_k = y_i - y_j,$$

$$c_i = x_k - x_j, \quad c_j = x_i - x_k, \quad c_k = x_j - x_i.$$

Funkcje  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_k$  zależą od geometrii elementu i spełniają warunki nałożone na funkcje kształtu:

$$\begin{array}{ll} N_i = 1 & \text{w węźle } i \\ N_j = 1 & \text{w węźle } j \\ N_k = 1 & \text{w węźle } k \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{ll} N_i = 0 & \text{w węzłach } j \text{ oraz } k, \\ N_j = 0 & \text{w węzłach } i \text{ oraz } k, \\ N_k = 0 & \text{w węzłach } i \text{ oraz } j. \end{array}$$



Rys. Liniowe funkcje kształtu dla elementów trójkątnych

Różniczkowanie funkcji kształtu względem zmiennych przestrzennych:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2F_e}, \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{b_j}{2F_e}, \quad \frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{b_k}{2F_e}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2F_e}, \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{c_j}{2F_e}, \quad \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{c_k}{2F_e}$$

Różniczkowanie funkcji aproksymowanej względem  $x$  oraz  $y$ :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{1}{2F_e} (b_i h_i + b_j h_j + b_k h_k)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{1}{2F_e} (c_i h_i + c_j h_j + c_k h_k)$$

Różniczkowanie względem czasu funkcji aproksymowanej:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = N_i \frac{dh_i}{dt} + N_j \frac{dh_j}{dt} + N_k \frac{dh_k}{dt}$$

Całka z funkcji kształtu w elemencie  $e$  jest równa objętości ostrosłupa o podstawie elementu i wysokości jednostkowej, czyli

$$\iint_{F_e} N_i(x, y) dx dy = \frac{F_e}{3}$$

Obliczanie całki po powierzchni elementu  $e$  z iloczynu funkcji kształtu podniesionych do potęgi całkowitej:

$$\iint_{F_e} N_i^\alpha N_j^\beta N_k^\gamma dx dy = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2F_e = \frac{A}{B} F_e$$

# Wartości całek z iloczynów funkcji kształtu dla elementów trójkątnych

| $\alpha + \beta + \gamma$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | <b>A</b> | <b>B</b> |
|---------------------------|----------|---------|----------|----------|----------|
| 1                         | 1        | 0       | 0        | 1        | 3        |
| 2                         | 2        | 0       | 0        | 2        | 12       |
|                           | 1        | 1       | 0        | 1        | 12       |
| 3                         | 3        | 0       | 0        | 6        | 60       |
|                           | 2        | 1       | 0        | 2        |          |
|                           | 1        | 1       | 1        | 1        |          |
| 4                         | 4        | 0       | 0        | 12       | 180      |
|                           | 3        | 1       | 0        | 3        |          |
|                           | 2        | 2       | 0        | 2        |          |
|                           | 2        | 1       | 1        | 1        |          |
| 5                         | 5        | 0       | 0        | 60       | 1260     |
|                           | 4        | 1       | 0        | 12       |          |
|                           | 3        | 2       | 0        | 6        |          |
|                           | 3        | 1       | 1        | 3        |          |
|                           | 2        | 2       | 1        | 2        |          |

# Rozwiązanie jednowymiarowego równania dyfuzji

1D równanie dyfuzji ze stałym współczynnikiem dyfuzji i bez członu źródłowego:

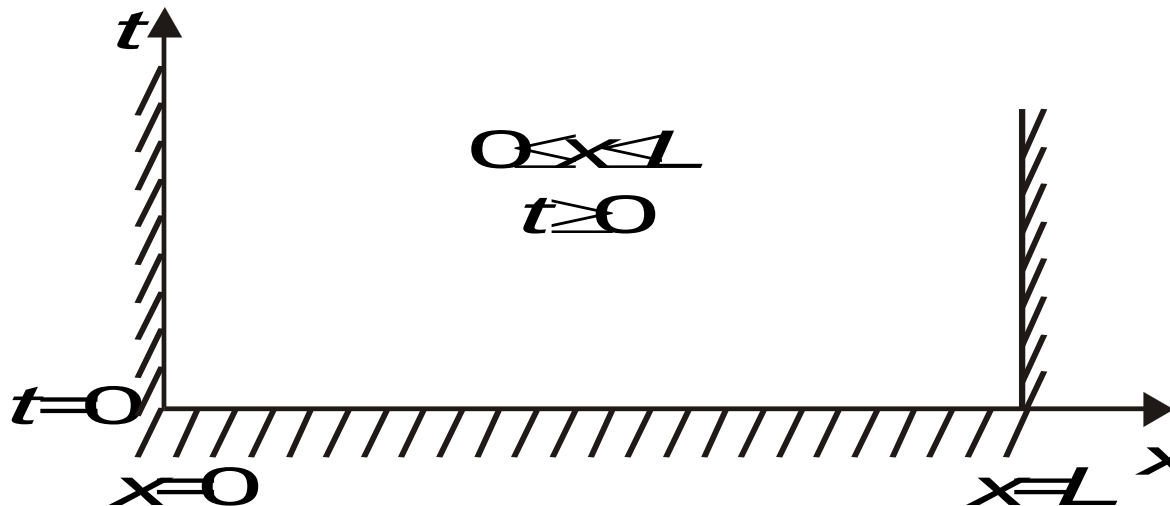
$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

oznaczenia:  $x$  – współrzędna przestrzenna,

$t$  – czas,

$C$  – wielkość skalarna (np. koncentracja czynnika rozpuszczonego w wodzie),

$D$  – współczynnik dyfuzji.



Rys. Obszar całkowania równania dyfuzji i jego granice

Problem rozwiązania równania dyfuzji:

w obszarze:  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$  (rys.) należy znaleźć funkcję  $C(x, t)$ , która spełnia w nim równanie oraz zadane warunki początkowe i brzegowe (warunki dodatkowe na granicach obszaru).

— warunki początkowe

$$\text{dla } t = 0: C(x, t) = C_p(x), \quad (0 \leq x \leq L),$$

— warunki brzegowe

$$\text{dla } x = 0: C(x, t) = C_0(t), \quad (t \geq 0),$$

$$\text{dla } x = L: C(x, t) = C_L(t), \quad (t \geq 0),$$

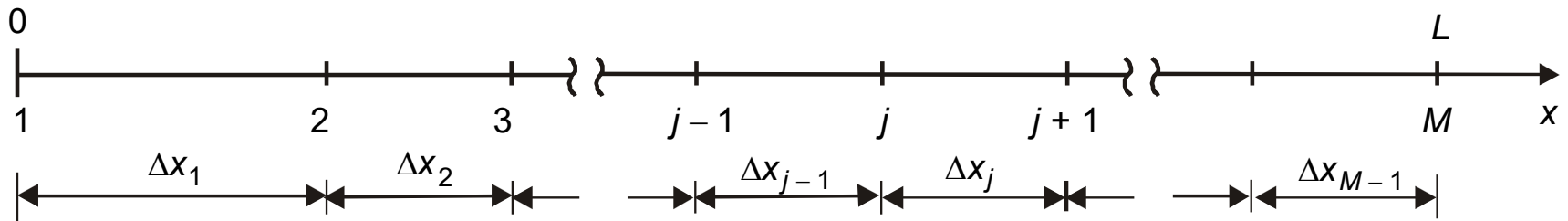
$$\text{lub } \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = \phi_L(t) \quad (t \geq 0)$$

gdzie:  $L$  – długość odcinka kanału,

$C_p(t)$ ,  $C_o(t)$ ,  $C_L(t)$ ,  $\phi_L(t)$  – znane funkcje.

## Tok postępowania

Kanał o długości  $L$  dzielimy za pomocą  $M$  węzłów na  $M - 1$  odcinków o długości  $\Delta x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M - 1$ ):



Zgodnie z procedurą Galerkiną, rozwiązanie równania dyfuzji powinno spełniać warunek:

$$\int_0^L \mathbf{N} \left( \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right) dx = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{N} \left( \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

gdzie:  $\mathbf{N} = (N_1(x), N_2(x), \dots, N_M(x))^T$  – wektor funkcji bazowych,  
 $C_a$  – aproksymacja funkcji  $C$ ,  
 $M$  – liczba węzłów,  
 $T$  – symbol transpozycji.

Standardowe podejście:

Wewnątrz każdego elementu  $j$  ograniczonego węzłami  $j$  oraz  $j + 1$ , poszukiwaną funkcję  $C$  aproksymuje się znaną formułą:

$$C_a(x, t) = \sum_{j=1}^M N_j(x) C_j(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{C}$$

gdzie  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_M)^T$  jest wektorem węzłowych wartości funkcji  $C$ .

Do aproksymacji stosujemy liniowe funkcje bazowe.

$$N_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_{j-1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{dla } x_{j-1} \leq x < x_j \\ 1 & \text{dla } x = x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{dla } x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{dla } x > x_{j+1} \end{cases}$$

Funkcje „daszkowate”  $N_i(x)$  przyjmują w każdym węźle  $j$  wartość jednostkową i liniowo zmieniają ją w kierunku sąsiednich węzłów  $j-1$  oraz  $j+1$ . Poza tymi węzłami ich wartości są zerowe.

Konsekwencja: w każdym elemencie jedynie dwie całki będą niezerowe.

$$I_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[ \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right] N_j dx$$

$$I_{j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[ \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right] N_{j+1} dx$$

Całkę  $I_j$  można przedstawić w postaci sumy dwóch całek:

$$I_j = I_j^{(1)} - I_j^{(2)}$$

Są one obliczane następująco:

$$\begin{aligned} I_j^{(1)} &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial C_a}{\partial t} N_j dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial}{\partial t} (N_j C_j + N_{j+1} C_{j+1}) N_j dx = \\ &= \frac{dC_j}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_j^2 dx + \frac{dC_{j+1}}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_j N_{j+1} dx = \\ &= \frac{\Delta x_j}{3} \frac{dC_j}{dt} + \frac{\Delta x_j}{6} \frac{dC_{j+1}}{dt}, \end{aligned}$$

W całce  $I_j^{(2)}$  występuje pochodna funkcji  $C$  II rzędu.

Tymczasem do aproksymacji  $C$  zastosowano funkcje liniowe, dla których druga pochodna nie istnieje.

W celu uniknięcia konfliktu, można dokonać całkowania przez części, według znanej formuły:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Przyjmując

$$u = N_j \quad \text{oraz} \quad v = \frac{\partial C_a}{\partial x}$$

otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 I_j^{(2)} &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} N_j dx = D \frac{dC_a}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - D \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial C_a}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx = \\
 &= D \frac{dC_a}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - D \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial}{\partial x} (N_j C_j + N_{j+1} C_{j+1}) \left( -\frac{1}{\Delta x_j} \right) dx = \\
 &= \boxed{-D \frac{dC_j}{dx}} + \frac{D}{\Delta x_j} (-C_j + C_{j+1}).
 \end{aligned}$$

Człon  $-D \frac{dC_j}{dx}$

reprezentuje strumień przez brzeg elementu, to znaczy przez węzeł  $j$ .

Wprowadzając obliczone całki do  $I_j$ , otrzymujemy równanie:

$$I_j = \frac{\Delta x_j}{6} \left( 2 \frac{dC_j}{dt} + \frac{dC_{j+1}}{dt} \right) - D \frac{1}{\Delta x_j} (-C_j + C_{j+1}) + D \frac{dC_j}{dx}$$

Obliczenie całki  $I_{j+1}$  przeprowadzamy w sposób analogiczny.

Po wykonaniu podobnych obliczeń otrzymujemy następujący wynik:

$$I_{j+1} = \frac{\Delta x_j}{6} \left( \frac{dC_j}{dt} + 2 \frac{dC_{j+1}}{dt} \right) + \frac{D}{\Delta x_j} (-C_j + C_{j+1}) - D \frac{dC_{j+1}}{dx}$$

Zapiszmy otrzymany wynik całkowania w elemencie  $j$ , stosując notację macierzową:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right) \mathbf{N}^T dx = \mathbf{S}_j \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A}_j \mathbf{C} + \mathbf{F}_j$$

gdzie: 
$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \left( \frac{dC_1}{dt}, \dots, \frac{dC_j}{dt}, \dots, \frac{dC_M}{dt} \right)^T$$

$$\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_j, C_{j+1}, \dots, C_M)^T,$$

$$\mathbf{F}_j = (0, \dots, F_j, F_{j+1}, \dots, 0)^T.$$

$\mathbf{S}_j =$

|       | 1 |  | $j$         | $j+1$         |  |  | $M$ |
|-------|---|--|-------------|---------------|--|--|-----|
| 1     |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
| $j$   |   |  | $S_{jj}$    | $S_{j,j+1}$   |  |  |     |
| $j+1$ |   |  | $S_{j,j+1}$ | $S_{j+1,j+1}$ |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
| $M$   |   |  |             |               |  |  |     |

$\mathbf{A}_j =$

|       | 1 |  | $j$         | $j+1$         |  |  | $M$ |
|-------|---|--|-------------|---------------|--|--|-----|
| 1     |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
| $j$   |   |  | $A_{jj}$    | $A_{j,j+1}$   |  |  |     |
| $j+1$ |   |  | $A_{j,j+1}$ | $A_{j+1,j+1}$ |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
|       |   |  |             |               |  |  |     |
| $M$   |   |  |             |               |  |  |     |

Niezerowe elementy macierzy  $\mathbf{S}_j$ ,  $\mathbf{A}_j$  i wektora  $\mathbf{F}_j$ , zgodnie z obliczonymi wcześniej zależnościami, są zdefiniowane następująco:

$$S_{j,j} = \frac{\Delta x_j}{3} \quad S_{j,j+1} = \frac{\Delta x_j}{6} \quad S_{j+1,j} = \frac{\Delta x_j}{6} \quad S_{j+1,j+1} = \frac{\Delta x_j}{3}$$

$$A_{j,j} = \frac{D}{\Delta x_j} \quad A_{j,j+1} = -\frac{D}{\Delta x_j} \quad A_{j+1,j} = -\frac{D}{\Delta x_j} \quad A_{j+1,j+1} = \frac{D}{\Delta x_j}$$

$$F_j = D \frac{dC_j}{dx} \quad F_{j+1} = -D \frac{dC_{j+1}}{dx}$$

Powyższy wynik całkowania w elemencie  $j$  podstawiamy do zależności wynikającej z procedury Galerkina:

$$\int_0^L \left( \frac{\partial C_a}{\partial t} - D \frac{\partial C_a}{\partial x^2} \right) \mathbf{N}^T dx = \sum_{j=1}^{M-1} \left( \mathbf{S}_j \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A}_j \mathbf{C} + \mathbf{F}_j \right) = \mathbf{0}$$

Wykonanie sumowania po kolejnych elementach daje następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu:

– dla  $j=1$

$$\frac{\Delta x_j}{3} \frac{dC_j}{dt} + \frac{\Delta x_j}{6} \frac{dC_{j+1}}{dt} - \frac{D}{\Delta x_j} (-C_j + C_{j+1}) + D \frac{dC}{dx} \Big|_j = 0$$

– dla  $j=2, 3, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{j-1}}{6} \frac{dC_{j-1}}{dt} + \left( \frac{\Delta x_{j-1}}{3} + \frac{\Delta x_j}{3} \right) \frac{dC_j}{dt} + \frac{\Delta x_j}{6} \frac{dC_{j+1}}{dt} + \\ + \frac{D}{\Delta x_{j-1}} (-C_{j-1} + C_j) - \frac{D}{\Delta x_j} (-C_j + C_{j+1}) = 0 \end{aligned}$$

– dla  $j=M$

$$\frac{\Delta x_{j-1}}{6} \frac{dC_{j-1}}{dt} + \frac{\Delta x_{j-1}}{3} \frac{dC_j}{dt} + \frac{D}{\Delta x_{j-1}} (-C_{j-1} + C_j) - D \frac{dC}{dx} \Big|_j = 0$$

W notacji macierzowej:

Rozpisując wyrażenie objęte symbolem sumowania, uzyskujemy

$$\left( \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{S}_j \right) \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \left( \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{A}_j \right) \mathbf{C} + \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{S}_j, \quad \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{F}_j$$

otrzymuje się

$$\mathbf{S} \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Wymiar układu: równy liczbie węzłów występujących w obszarze, tzn.  $M \times M$ .

macierz **S** – wynik całkowania pochodnej po czasie,

macierz **A** – wynik całkowania członu dyfuzyjnego,

wektor **F** – reprezentuje strumień przez brzeg, z wyjątkiem pierwszej  
i ostatniej pozostałe składowe są równe zero.

Macierze **S** oraz **A** są trójdzielne.

Struktura macierzy **S** złożonej z 6 elementów:

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{\Delta x_1}{3} & \frac{\Delta x_1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\Delta x_1}{6} & \frac{\Delta x_1}{3} + \frac{\Delta x_2}{3} & \frac{\Delta x_2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\Delta x_2}{6} & \frac{\Delta x_2}{3} + \frac{\Delta x_3}{3} & \frac{\Delta x_3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{\Delta x_3}{6} & \frac{\Delta x_3}{3} + \frac{\Delta x_4}{3} & \frac{\Delta x_4}{6} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta x_4}{6} & \frac{\Delta x_4}{3} + \frac{\Delta x_5}{3} & \frac{\Delta x_5}{6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta x_5}{6} & \frac{\Delta x_5}{3} + \frac{\Delta x_6}{3} & \frac{\Delta x_6}{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta x_6}{6} & \frac{\Delta x_6}{3} \\ \hline \end{array}$$

Struktura macierzy **A** złożonej z 6 elementów:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{D}{\Delta x_1} & -\frac{D}{\Delta x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{D}{\Delta x_1} & \frac{D}{\Delta x_1} + \frac{D}{\Delta x_2} & -\frac{D}{\Delta x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{\Delta x_2} & \frac{D}{\Delta x_2} + \frac{D}{\Delta x_3} & -\frac{D}{\Delta x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{D}{\Delta x_3} & \frac{D}{\Delta x_3} + \frac{D}{\Delta x_4} & -\frac{D}{\Delta x_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{D}{\Delta x_4} & \frac{D}{\Delta x_4} + \frac{D}{\Delta x_5} & -\frac{D}{\Delta x_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D}{\Delta x_5} & \frac{D}{\Delta x_5} + \frac{D}{\Delta x_6} & -\frac{D}{\Delta x_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D}{\Delta x_6} & \frac{D}{\Delta x_6} \end{bmatrix}$$

Metoda elementów skończonych sprowadza problem rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego do zagadnienia początkowego układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Warunek początkowy: dla  $t = 0$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_p$ ,

gdzie  $\mathbf{C}_p$  - wektor zawierający początkowe wartości węzłowe funkcji  $C$ ,  
tzn. odpowiadające chwili  $t = 0$ .

Do rozwiązania układu można zastosować dowolną metodę rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych.

W tym wypadku: ogólny schemat dwupoziomowy:

$$\mathbf{C}_{t+\Delta t} = \mathbf{C}_t + \Delta t((1-\theta)\mathbf{C}'_t + \theta \cdot \mathbf{C}'_{t+\Delta t})$$

gdzie:  $\Delta t$  – krok czasowy,

$$\mathbf{C}' = d\mathbf{C}/dt.$$

Po zastosowaniu schematu do rozwiązywania układu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \Delta t \cdot \theta \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}_{t+\Delta t} &= \\ &= (\mathbf{S} - \Delta t \cdot (1-\theta)\mathbf{A})\mathbf{C}_t - \Delta t((1-\theta)\mathbf{F}_t + \theta \cdot \Delta t \cdot \mathbf{F}_{t+\Delta t}) \end{aligned}$$

Przyjmując szczególne wartości  $\theta$  otrzymuje się znane schematy.

Szczególne przypadki schematu zależnie od wartości parametru wagowego  $\theta$

| $\theta$ | <b>Metoda – schemat</b>  |
|----------|--------------------------|
| 1/2      | schemat Cranka-Nicolsona |
| 1        | schemat Eulera niejawny  |
| 0        | schemat Eulera jawny     |
| 2/3      | schemat Galerkina        |

Jeśli ponadto wprowadzimy dodatkowe oznaczenia:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{S} + \Delta t \cdot \theta \cdot \mathbf{A})$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{S} - \Delta t \cdot (1 - \theta) \mathbf{A}) \mathbf{C}_t - \Delta t ((1 - \theta) \mathbf{F}_t + \theta \cdot \Delta t \cdot \mathbf{F}_{t+\Delta t})$$

to finalne równanie można zapisać w ostatecznej postaci:

$$\mathbf{B} \mathbf{C}_{t+\Delta t} = \mathbf{W}$$

Jest to układ algebraicznych równań liniowych.

Jego rozwiązanie w kolejnych krokach czasowych:  $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , z uwzględnieniem zadanych warunków brzegowych, jest przybliżonym rozwiązaniem równania dyfuzji. Są nim wartości funkcji  $C$  w węzłach. Macierz współczynników układu  $\mathbf{B}$  jest macierzą trójdziagonalną.

Komentarz nt uwzględnienia zadanych warunków brzegowych:

Jeśli na obu brzegach zadane są warunki Dirichleta, oznacza to, że w wektorze niewiadomych  $\mathbf{C}_{t+\Delta t}$  znana jest pierwsza i ostatnia składowa. Zatem z układu tego należy wyeliminować pierwsze i ostatnie równanie.

Postępowanie takie jest kłopotliwe ponieważ zmienia strukturę układu. Aby nie przekształcać macierzy układu, wygodniej jest zastosować inny sposób uwzględnienia warunków brzegowych.

Pierwsze i ostatnie równanie układu należy zastąpić równaniem wynikającym z zadanych warunków brzegowych, tzn. przyjmując:

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= 1, & b_{1,2} &= 0, & w_1 &= C_0(t+\Delta t), \\ b_{M, M-1} &= 0, & b_{M, M} &= 1, & w_M &= C_L(t+\Delta t) \end{aligned}$$

W tym przypadku wektory  $\mathbf{F}_t$  i  $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$  znikają, bo wszystkie ich składowe są równe zero.

Jeśli natomiast na brzegu  $x = 0$  zadany jest warunek typu Dirichleta  $C_L(t)$ , zaś na brzegu  $x = L$  warunek typu Neumanna  $\partial C / \partial x = \phi_L(t)$ , pierwsze równanie układu modyfikujemy jak poprzednio, natomiast ostatnie równanie pozostawiamy bez zmian.

Warunek Neumanna wprowadzamy do układu poprzez wektor  $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ , którego ostatni element będzie miał wartość równą  $\phi_L(t + \Delta t)$ .

## Przykład rozwiązania równania dyfuzji

1D równanie filtracji ze swobodną powierzchnią, przy pominięciu członu źródłowego ( $w = 0$ ) i po zlinearyzowaniu względem wysokości piezometrycznej  $h$ , można zapisać w postaci liniowego równania dyfuzji:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad \text{gdzie} \quad D = \frac{k(h_s - z)}{\mu}$$

gdzie:  $x, t$  – położenie i czas,

$h$  – wysokość piezometryczna,

$k$  – współczynnik filtracji,

$h_s$  – średnia wysokość piezometryczna,

$z$  – rzędna spągu warstwy nieprzepuszczalnej,

$\mu$  – współczynnik porowatości efektywnej.

Prostokątna grobla ziemna oddziela dwa zbiorniki, w których poziomy wody są zmienne w czasie.

Wyznaczyć zmiany położenia zwierciadła wody w grobli rozwiązując powyższe równanie.

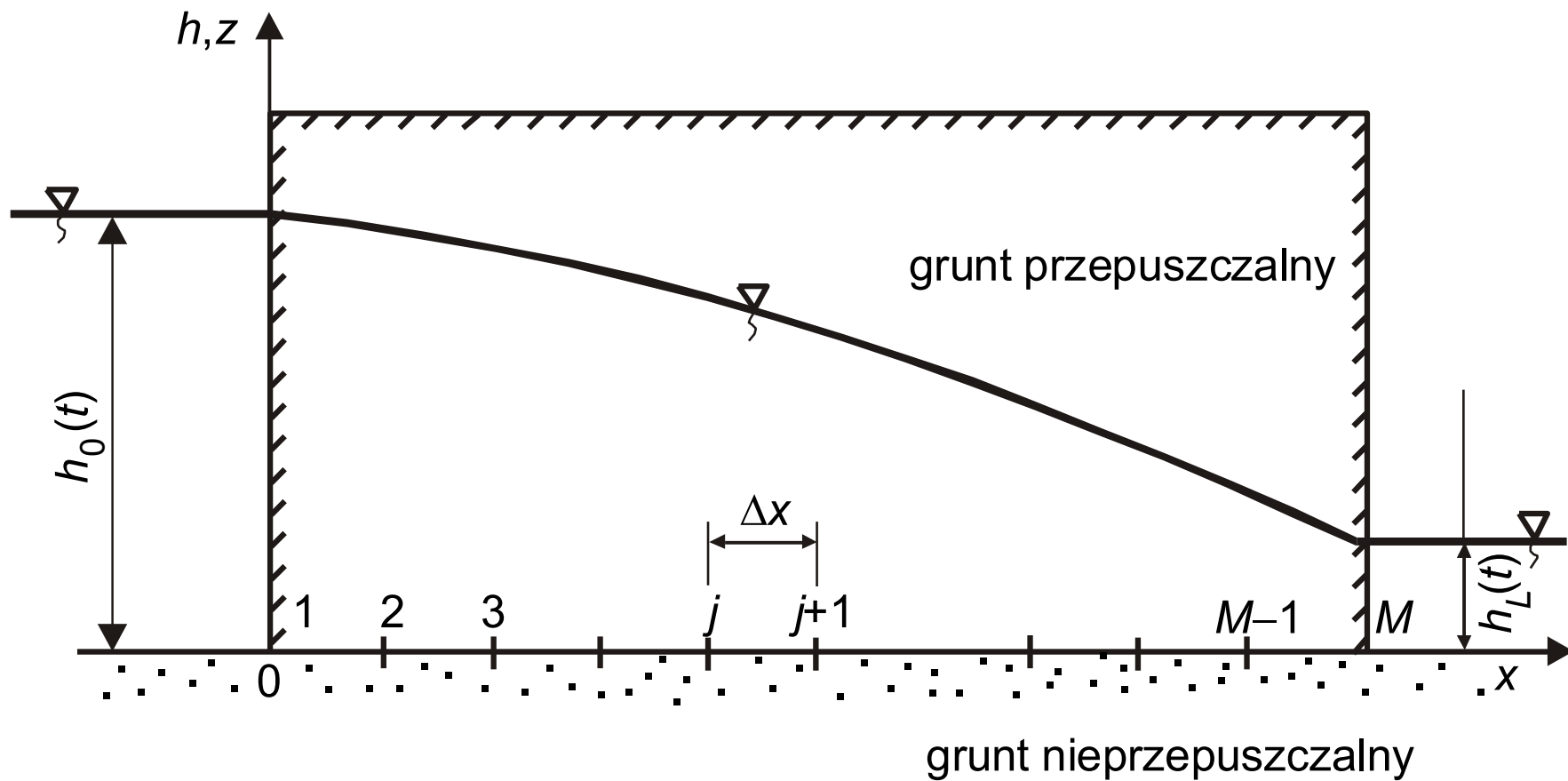
Warunki graniczne:

— warunek początkowy

w chwili  $t = 0$  znane jest położenie zwierciadła wody w grobli, czyli  $h(x, t = 0) = h_p(x)$ ,

— warunki brzegowe

na brzegu prawym  $x = 0$  i lewym  $x = L$  zadane są zmiany położenia zwierciadła wody, czyli  $h(x = 0, t) = h_0(t)$ , oraz  $h(x = L, t) = h_L(t)$ .



Rys. Schemat filtracji przez groblę prostokątną.

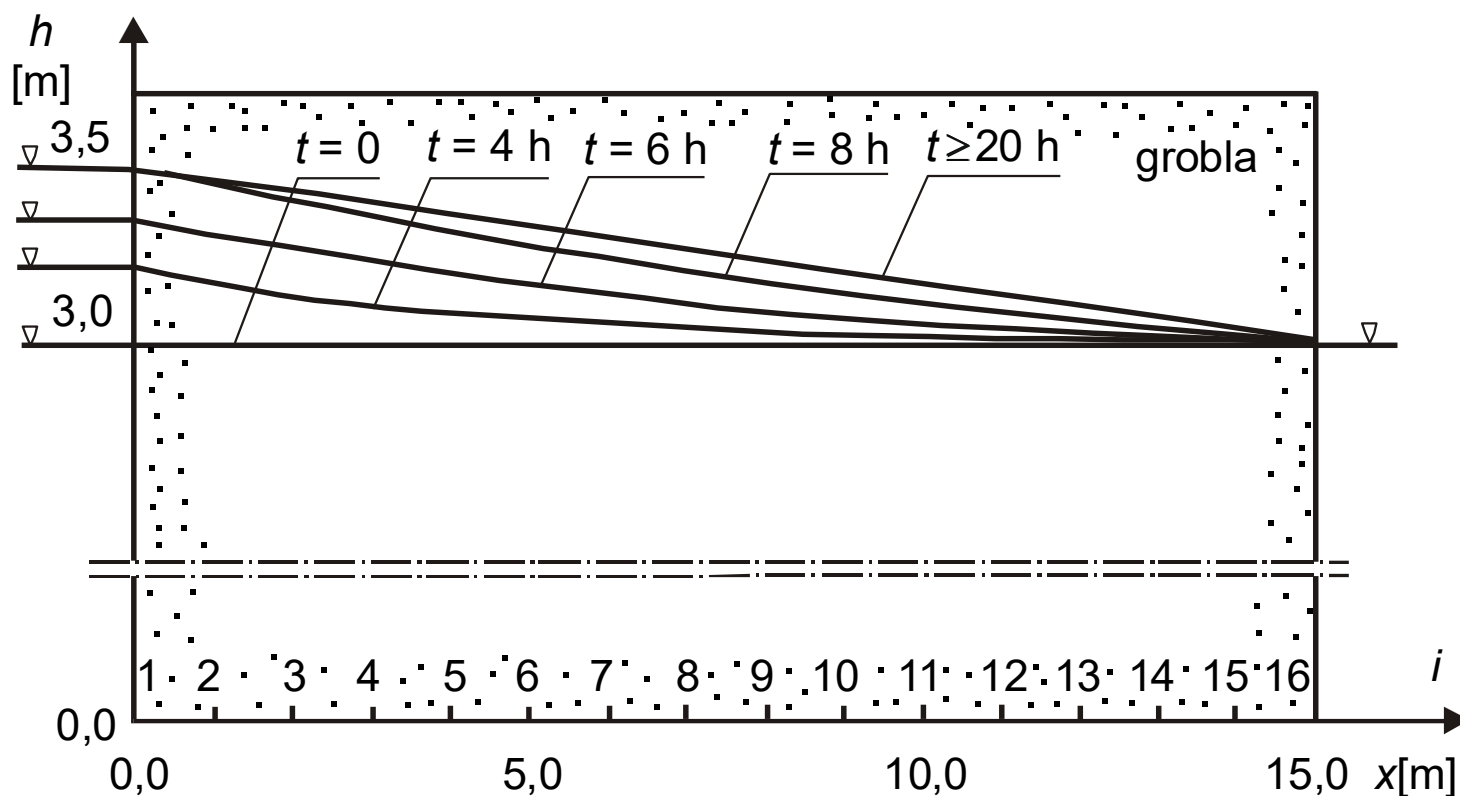
Przyjęte dane:

- groblę podzielono na 15 elementów, przyjmując krok przestrzenny  $\Delta x = 1 \text{ m} = \text{const}$ ,
- porowatość gruntu wynosi  $\mu = 0,2$ ,
- współczynnik filtracji wynosi  $k = 1 \text{ m/h}$ ,
- początkowa rzędna zwierciadła wody wynosi  $h_p(x) = H_0 = 3 \text{ m} = \text{const}$ ,
- zmianę zwierciadła wody na brzegu  $x = 0$  opisuje funkcja o postaci

$$h_0(t) = \begin{cases} H_0 & \text{dla } t \leq t_0 \\ H_0 + \frac{H_1 - H_0}{t_1 - t_0} \cdot (t - t_0) & \text{dla } t_0 < t < t_1 \\ H_1 & \text{dla } t \geq t_1 \end{cases}$$

przy czym przyjęto:  $t_0 = 2,5 \text{ h}$ ,  $t_1 = 7,5 \text{ h}$ ,  $H_1 = 3,5 \text{ m}$ ,

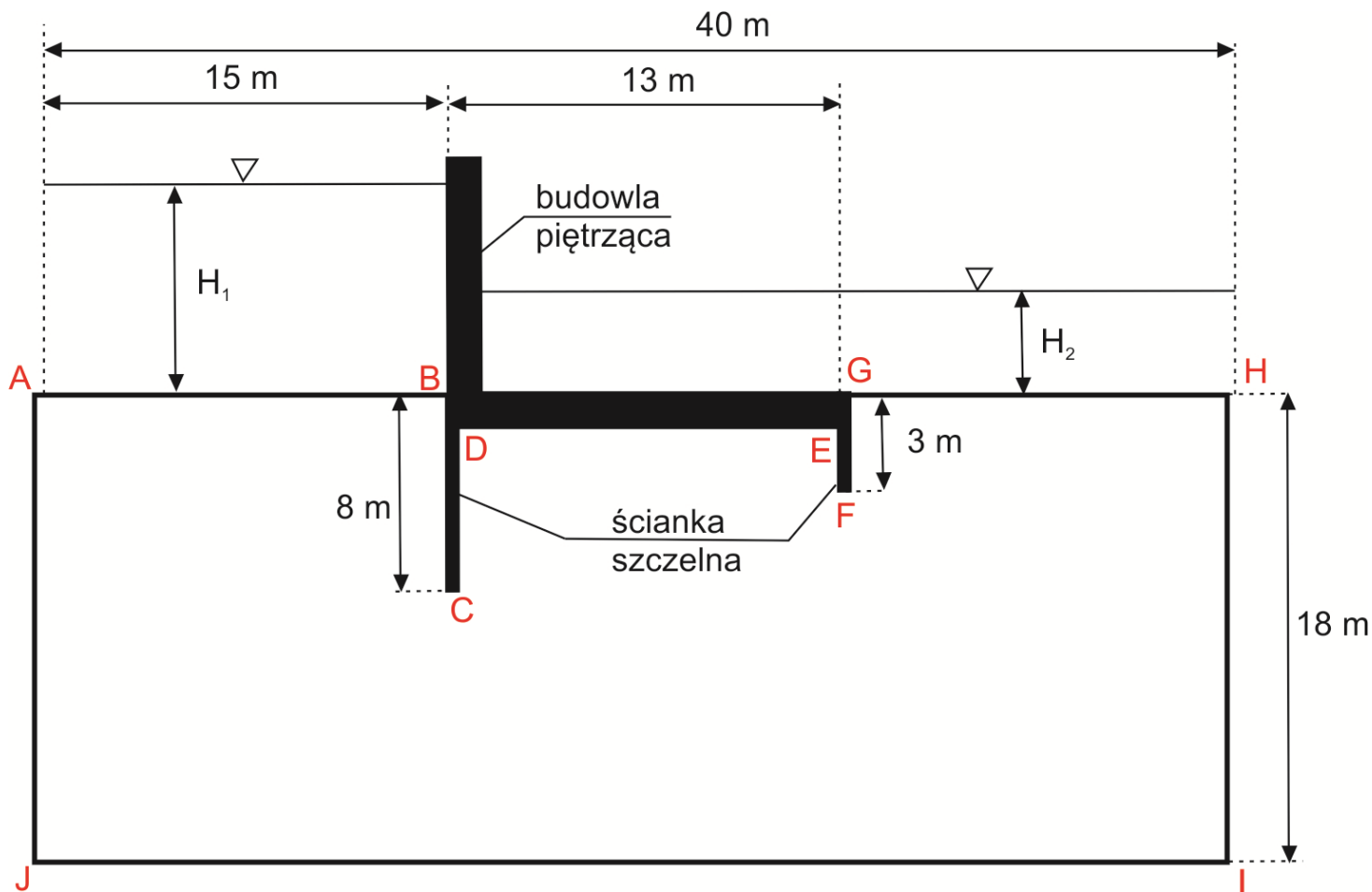
- na brzegu  $x = L$  poziom wody jest stały:  $h_L(t) = H_0 = \text{const}$ ,
- średnia głębokość wynosi  $h_s = 3,25$  m,
- krok całkowania wynosi  $\Delta t = 0,025$  h,
- zjawisko odtworzono dla  $0 \leq t \leq 20$  h.



Rys. Chwilowe układy zwierciadła wody w grobli

# Rozwiązanie równania Laplace'a metodą elementów skończonych

Filtracyjny ustalony przepływ pod fundamentem budowli piętrzącej.



Rys. Schemat budowli piętrzącej posadowionej na warstwie gruntu

**Metoda:** rozwiązanie równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

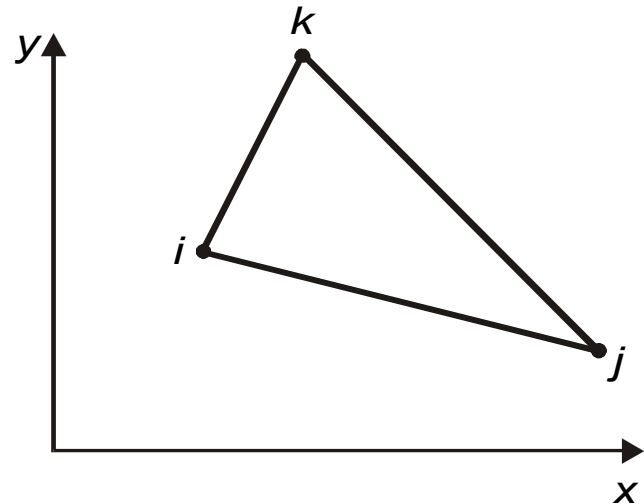
gdzie:  $x, y$  – współrzędne przestrzenne,  
 $h$  – ciśnienie piezometryczne.

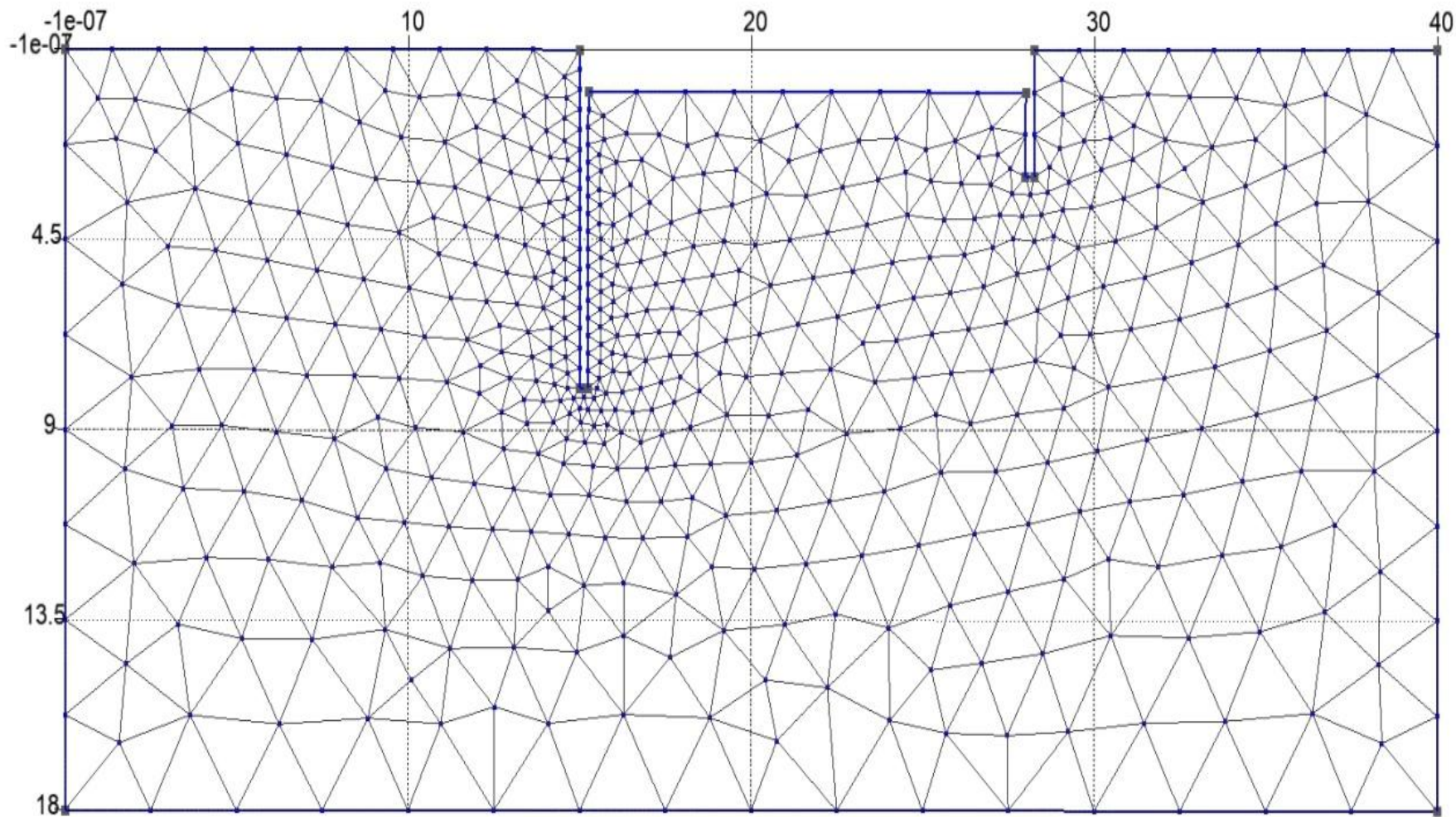
### **Sformułowanie problemu:**

- Zagadnienie brzegowe mieszane (III rodzaju)
- Znaleźć funkcję  $h(x, y)$  spełniającą w obszarze rozwiązania równanie Laplace'a, a na jego brzegach następujące warunki brzegowe:
  - brzeg A÷B:  $h=H_1$
  - brzeg G÷H:  $h=H_2$
  - brzeg A÷J, J÷I, I÷H, B÷C, C÷D, D÷E, E÷F, F÷G:  $\partial H / \partial n = 0$

## Dyskretyzacja obszaru – generowanie siatki

- Obszar filtracji pokrywamy siatką trójkątów. Trójkąty mogą mieć dowolną wielkość.
- W obszarach spodziewanych dużych gradientów funkcji  $h$  siatkę należy zagęścić, natomiast w obszarach małych gradientów  $h$  można stosować elementy o większych wymiarach.
- Założenie:
  - elementy trójkątne (3 węzły),
  - liniowe funkcje kształtu.





Rys. Podział obszaru filtracji na elementy skończone  
(siatka utworzona w programie **gmsh**)

## Aproksymacja funkcji $h(x, y)$ :

$$h_a = \mathbf{N}\mathbf{h} = N_i h_i + N_j h_j + N_k h_k$$

gdzie funkcje kształtu  $N(x, y)$  definiuje równanie

$$N_l(x, y) = \frac{1}{2F_e} (a_l + b_l x + c_l y); \quad l = i, j, k$$

w którym

- $F_e$  oznacza pole elementu,
- współczynniki  $a_l, b_l, c_l$  zależne od współrzędnych węzłów elementu, obliczone są według podanych wcześniej formuł.

Zgodnie z **procedurę Galerkina**:

$$\iint_F \left[ \frac{\partial^2 h_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_a}{\partial y^2} \right] N_l dx dy = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, M),$$

gdzie:  $F$  – obszar rozwiązania,  
 $M$  – liczba węzłów w obszarze rozwiązania  $F$ .

Wyrażenie zawiera pochodne drugiego rzędu.

Obniżenie stopienia operatora różniczkowego - przekształcenie Greena:

$$\iint_F \left( \omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy = - \iint_F \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_B \omega \frac{\partial \phi}{\partial n} dB$$

gdzie:  $B$  – brzeg obszaru  $F$ ,  
 $n$  – kierunek normalny do brzegu  $B$ .

- Całka krzywoliniowa istnieje tylko dla tych elementów, których jeden z boków leży na brzegu  $B$ . Reprezentuje ona strumień przez brzeg obszaru. Dla brzegów nieprzepuszczalnych jej wartość jest równa zeru.
- W przypadku zagadnienia filtracji rozwiązywanego metodą elementów skończonych będzie  $\omega = N_l$  oraz  $\phi = h$ .

### **Warunek Galerkina:**

$$\begin{aligned} \iint_F \left( \frac{\partial^2 h_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_a}{\partial y^2} \right) N_l dx dy &= \iint_F \left( N_l \frac{\partial^2 h_a}{\partial x^2} + N_l \frac{\partial^2 h_a}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= - \iint_F \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right) dx dy + \int_B N_l \frac{\partial h_a}{\partial n} dB = 0, (l = 1, 2, \dots, M) \end{aligned}$$

## Warunki graniczne:

- na części brzegu dana jest funkcja  $h$ ,
- na części brzegu pochodna tej funkcji normalna do brzegu jest równa zero, czyli
  - na odcinkach brzegu równoległych do osi  $y$  obowiązuje warunek:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 = \frac{\partial h}{\partial n}$$

- na części brzegu równoległej do osi  $x$  obowiązuje warunek:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 = \frac{\partial h}{\partial n}$$

Zatem dla przyjętych warunków brzegowych na całym obwodzie  $B$  obszaru  $F$  będzie obowiązywał warunek

$$\int_B N_l \frac{\partial h}{\partial n} dB = 0$$

Całkę tę można więc pominąć w rozważaniach a zatem warunek Galerkina uprosi się do postaci:

$$\iint_F \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{e=1}^m \iint_{F_e} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right) dx dy = 0$$
$$(l = 1, 2, \dots, M),$$

gdzie:  $F_e$  – pole elementu  $e$ ,

$m$  – liczba elementów,

$N_l(x, y)$  – funkcja kształtu związana z węzłem  $l$ .

## Całkowanie w elemencie o wierzchołkach $i, j$ oraz $k$

- W elemencie tym tylko 3 składowe wektora funkcji kształtu, a mianowicie  $N_i$ ,  $N_j$  oraz  $N_k$  są niezerowe.
- Wszystkie pozostałe funkcje kształtu w elemencie  $e$  są równe zero. Zatem dla elementu  $e$  należy obliczyć tylko 3 następujące całki:

$$I_l = \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right] dx dy, \quad (l = i, j, k)$$

Obliczenie całki dla  $i \neq j$ .

$$\begin{aligned}
 I_i &= \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right] dx dy = \\
 &= \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (N_i h_i + N_j h_j + N_k h_k) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (N_i h_i + N_j h_j + N_k h_k) \right] dx dy = \\
 &= \iint_{F_e} \left\{ \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} h_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} h_j + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} h_k \right] + \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} h_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} h_j \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} h_k \right] \right\} dx dy = h_i \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dx dy + \\
 &\quad + h_j \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy + h_k \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right] dx dy.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu pochodnych funkcji bazowych, które są stałe względem zmiennych całkowania, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 I_i &= h_i \iint_{F_e} \left[ \frac{1}{2F_e} b_i \frac{1}{2F_e} b_i + \frac{1}{2F_e} c_i \frac{1}{2F_e} c_i \right] dxdy + \\
 &+ h_j \iint_{F_e} \left[ \frac{1}{2F_e} b_i \frac{1}{2F_e} b_j + \frac{1}{2F_e} c_i \frac{1}{2F_e} c_j \right] dxdy + \\
 &+ h_k \iint_{F_e} \left[ \frac{1}{2F_e} b_i \frac{1}{2F_e} b_k + \frac{1}{2F_e} c_i \frac{1}{2F_e} c_k \right] dxdy = \\
 &= h_i \left( \frac{1}{4F_e^2} b_i b_i \iint_{F_e} dxdy + \frac{1}{4F_e^2} c_i c_i \iint_{F_e} dxdy \right) + \\
 &+ h_j \left( \frac{1}{4F_e^2} b_i b_j \iint_{F_e} dxdy + \frac{1}{4F_e^2} c_i c_j \iint_{F_e} dxdy \right) + \\
 &+ h_k \left( \frac{1}{4F_e^2} b_i b_k \iint_{F_e} dxdy + \frac{1}{4F_e^2} c_i c_k \iint_{F_e} dxdy \right)
 \end{aligned}$$

Ponieważ  $\iint_{F_e} dx dy = F_e$

to ostatecznie całka  $I_i$  jest równa:

$$I_i = \frac{1}{4F_e} (b_i b_i + c_i c_i) h_i + \frac{1}{4F_e} (b_i b_j + c_i c_j) h_j + \frac{1}{4F_e} (b_i b_k + c_i c_k) h_k$$

Analogiczne postępowanie dla  $N_j(x, y)$  oraz  $N_k(x, y)$  daje wynik

$$I_j = \frac{1}{4F_e} (b_j b_i + c_j c_i) h_i + \frac{1}{4F_e} (b_j b_j + c_j c_j) h_j + \frac{1}{4F_e} (b_j b_k + c_j c_k) h_k$$

oraz

$$I_k = \frac{1}{4F_e} (b_k b_i + c_k c_i) h_i + \frac{1}{4F_e} (b_k b_j + c_k c_j) h_j + \frac{1}{4F_e} (b_k b_k + c_k c_k) h_k$$

Stosując notację macierzową wynik całkowania zapisujemy następująco:

$$\iint_{F_e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right] dx dy = \mathbf{A}_e \mathbf{h}$$

|     | 1 | $i$       | $j$       | $k$       | $M$ |       |
|-----|---|-----------|-----------|-----------|-----|-------|
|     |   |           |           |           |     | $h_1$ |
|     |   |           |           |           |     |       |
| $i$ |   | $A_{i,i}$ | $A_{i,j}$ | $A_{i,k}$ |     | $h_i$ |
|     |   |           |           |           |     |       |
| $j$ |   | $A_{j,i}$ | $A_{j,j}$ | $A_{j,k}$ |     | $h_j$ |
|     |   |           |           |           |     |       |
| $k$ |   | $A_{k,i}$ | $A_{k,j}$ | $A_{k,k}$ |     | $h_k$ |
|     |   |           |           |           |     |       |
| $M$ |   |           |           |           |     | $h_M$ |

x

Elementy macierzy  $\mathbf{A}_e$  są zdefiniowane następująco:

$$A_{i,i} = \frac{1}{4F_e} (b_i b_i + c_i c_i) \quad A_{i,j} = \frac{1}{4F_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad A_{i,k} = \frac{1}{4F_e} (b_i b_k + c_i c_k)$$

$$A_{j,i} = \frac{1}{4F_e} (b_j b_i + c_j c_i) \quad A_{j,j} = \frac{1}{4F_e} (b_j b_j + c_j c_j) \quad A_{j,k} = \frac{1}{4F_e} (b_j b_k + c_j c_k)$$

$$A_{k,i} = \frac{1}{4F_e} (b_k b_i + c_k c_i) \quad A_{k,j} = \frac{1}{4F_e} (b_k b_j + c_k c_j) \quad A_{k,k} = \frac{1}{4F_e} (b_k b_k + c_k c_k)$$

$\mathbf{A}_e$  jest macierzą symetryczną!

W podobny sposób oblicza się całki dla każdego elementu  $e = 1, 2, \dots, m$ .  
Po podstawieniu do ogólnej formuły otrzymamy

$$\sum_{e=1}^m \iint_{F_e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial h_a}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial h_a}{\partial y} \right] dx dy = \sum_{e=1}^m (\mathbf{A}_e \mathbf{h}) = 0$$

Zsumowanie rezultatów całkowania w każdym elemencie:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

gdzie  $\mathbf{A} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}_e$

Jest to układ algebraicznych równań liniowych.

Macierz  $\mathbf{A}$ , podobnie jak jej składowe  $\mathbf{A}_e$ , jest macierzą pasmową i symetryczną.

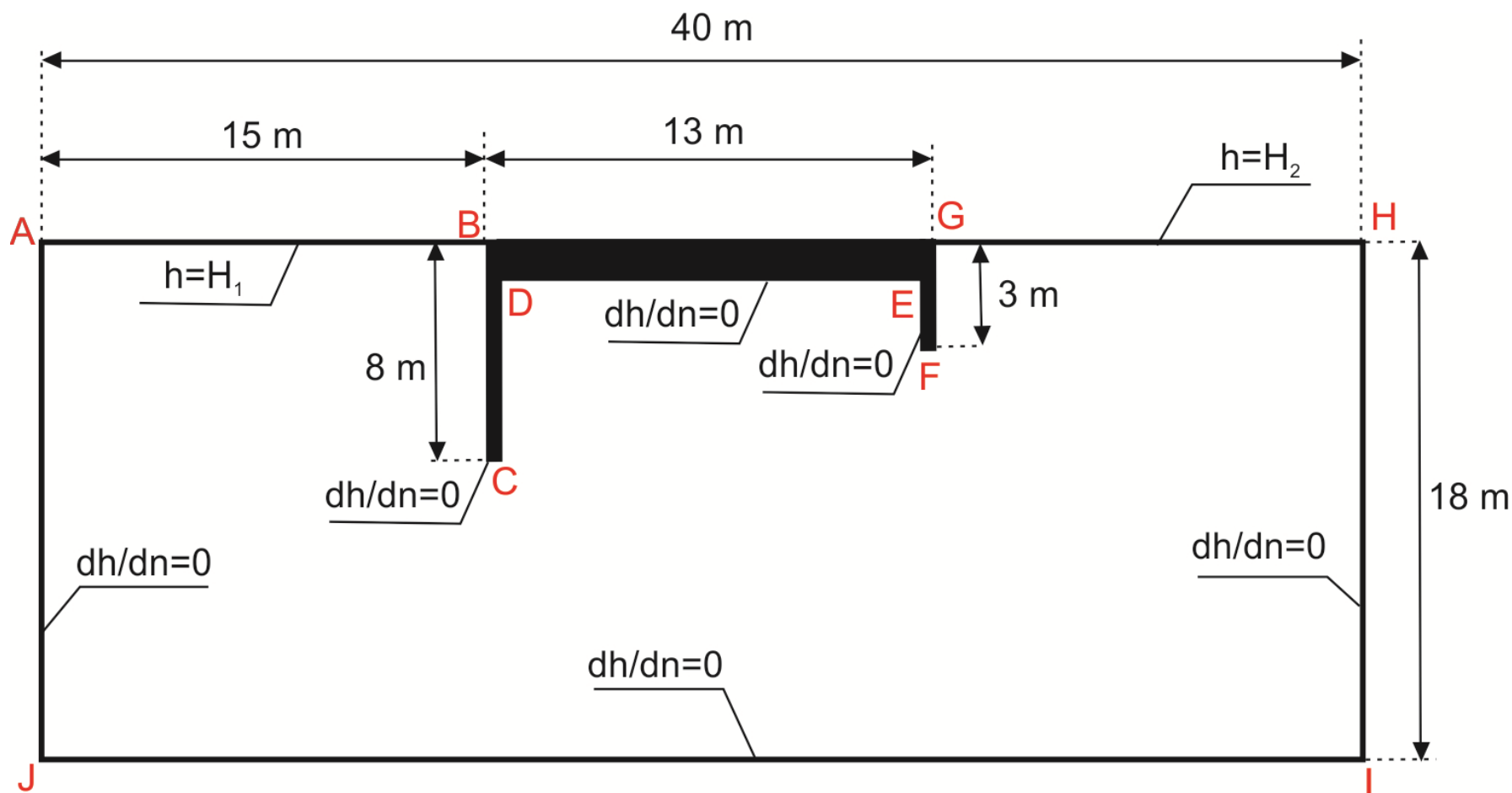
- Do układu należy wprowadzić, przyjęte na etapie formułowania problemu rozwiązania, warunki brzegowe typu Dirichleta.
- Warunek typu Dirichleta oznacza, że w węzłach leżących na brzegu obszaru znane są wartości funkcji  $h$ . Oznacza to, że w wektorze  $\mathbf{h}$  znane są te jego składowe, które odpowiadają węzłom brzegowym. Zatem z układu należy wyeliminować wymienione składowe, jak i odpowiadające im równania.
- Postępowanie takie jest kłopotliwe, gdyż zmienia strukturę układu równań. Z tego powodu wygodniej jest zastosować inny sposób uwzględnienia warunków brzegowych, niewymagający zmiany macierzy  $\mathbf{A}$  i wektora  $\mathbf{h}$  (Zienkiewicz, 1972).

## **Wybór metody rozwiązania układu równań algebraicznych:**

- ze względu na zwykle duże rozmiary układu oraz dużą szerokość pasma jego macierzy współczynników, do rozwiązania stosuje się metody iteracyjne.
- metody dokładne mogą być również bardzo efektywne pod warunkiem uwzględnienia symetrii macierzy współczynników oraz zastosowania takiego algorytmu rozwiązania, który będzie operował jedynie niezerowymi elementami macierzy.

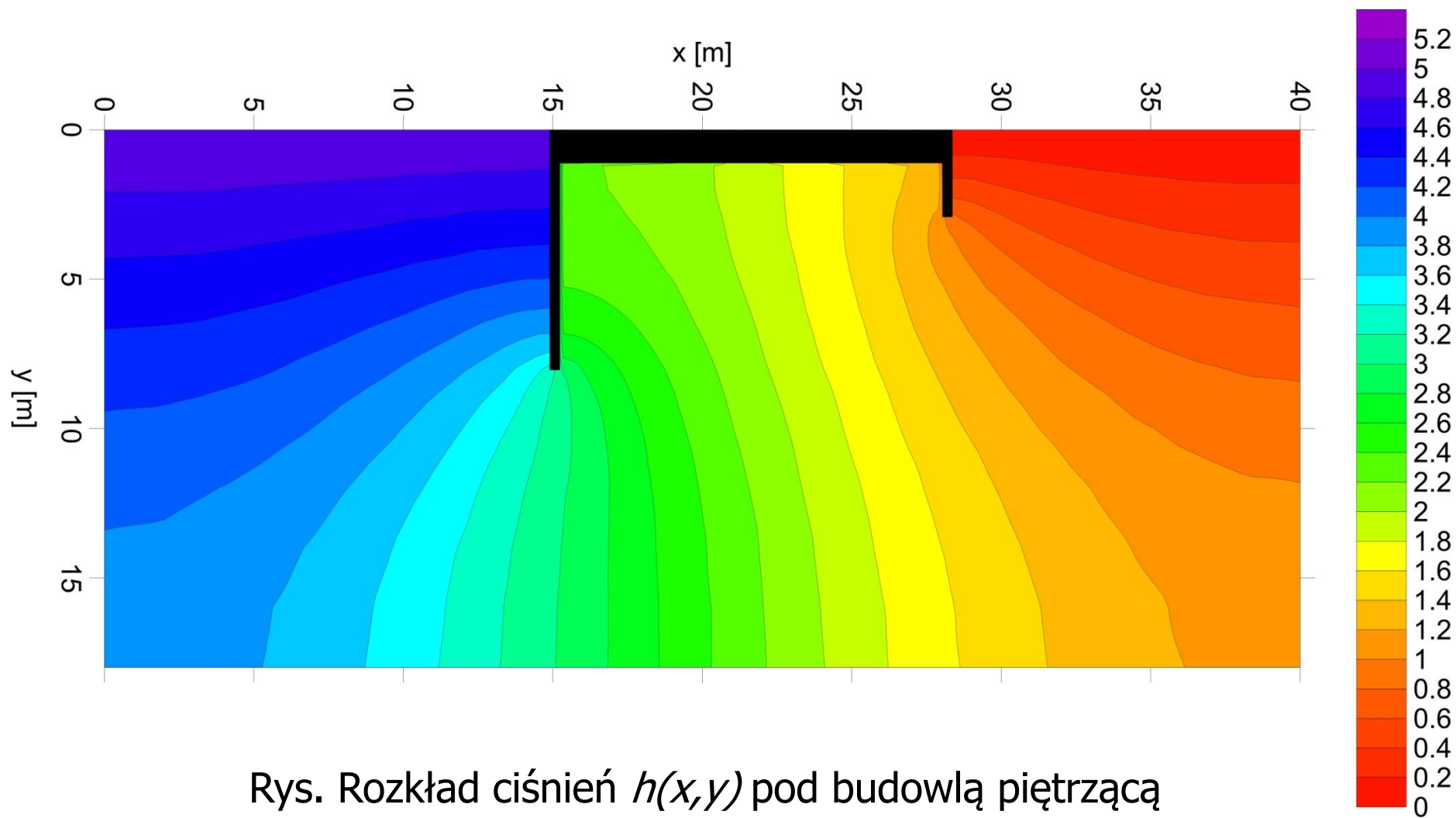
## Przykład obliczeń

Przepływ filtracji ustalonej pod budowlą piętrzącą z dwoma ściankami szczelnymi – wyznaczenie **rozkładu ciśnień**.



Rys. Obszar rozwiązywania równania Laplace'a i przyjęte warunki brzegowe

- Przepływ ustalony pod jazem z dwoma ściankami szczelnymi,
- Wysokość nadciśnienia od strony wody górnej  $H_1=5$  m, od strony wody dolnej  $H_2=0$  m,
- Grunt jednorodny, współczynnik filtracji  $k=k_x=k_y=0.0001$  cm/s,
- Wymiar obszaru 18 m x 40 m, fundament zagłębiony na 1.0 m, ścianki o grubości 0.25 m zagłębione na 8 m oraz 3 m.



Równanie Laplace'a można także wykorzystać do wyznaczenia rozkładu funkcji prądu:

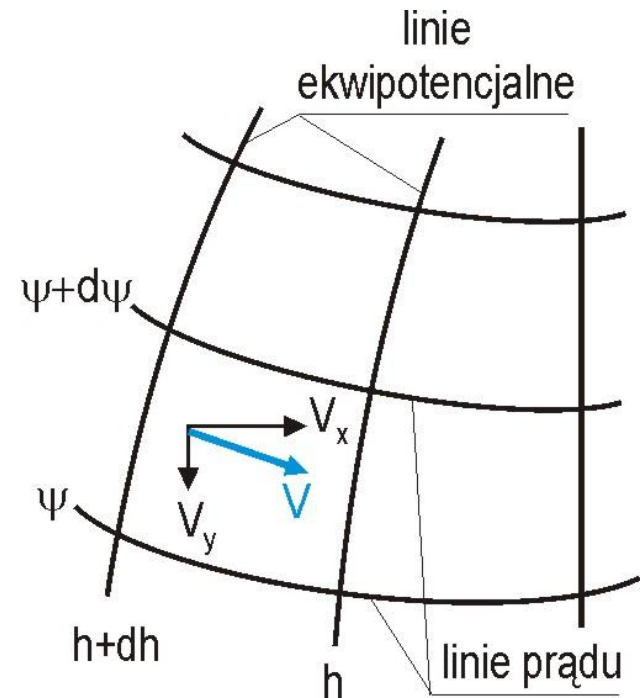
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

gdzie:  $x, y$  – współrzędne przestrzenne,  
 $\psi$  – funkcja prądu.

Sformułowanie problemu:

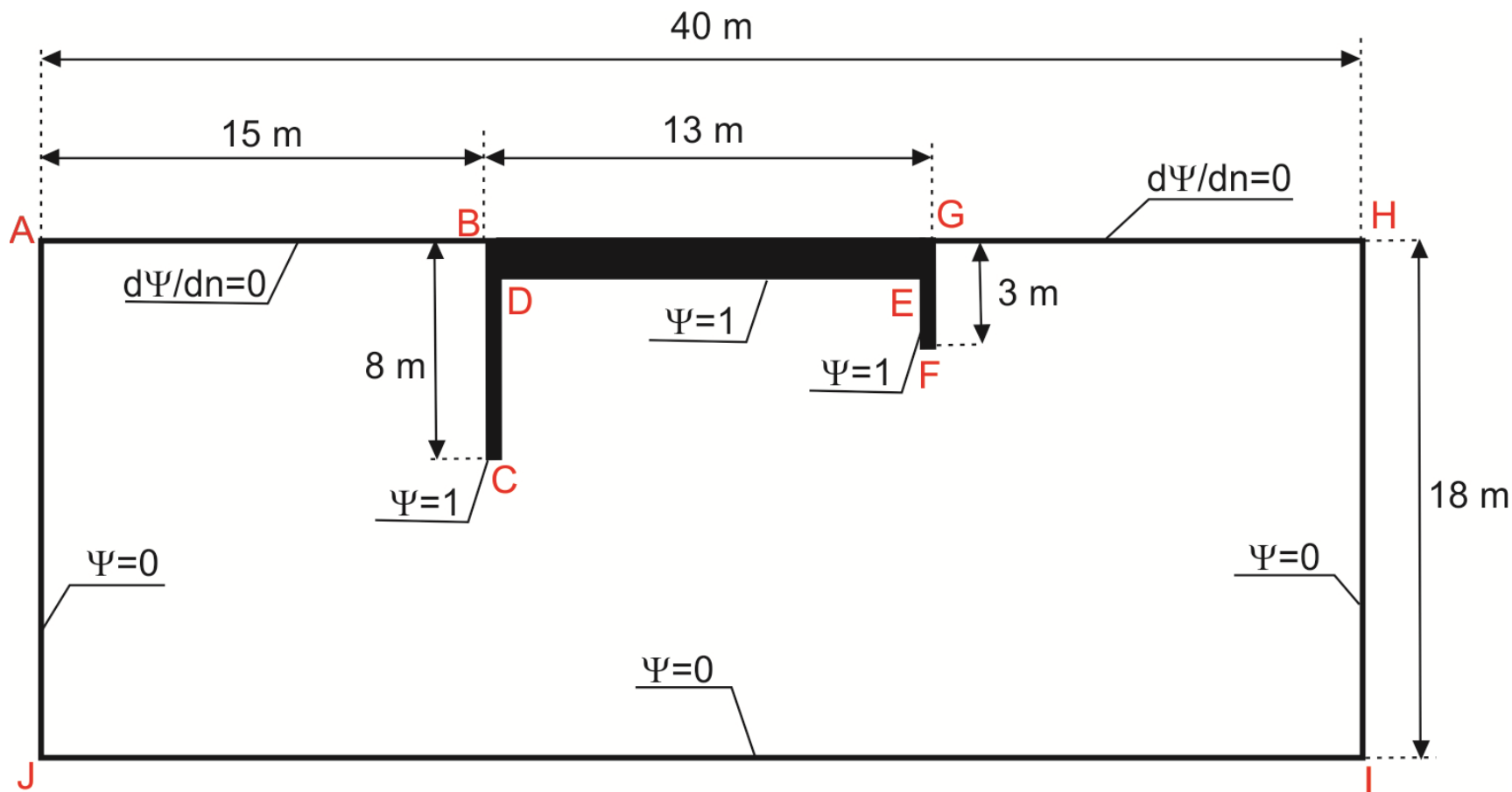
Znaleźć funkcję  $\psi(x, y)$  spełniającą w obszarze rozwiązania równanie Laplace'a, a na jego brzegach następujące warunki brzegowe:

- odcinek brzegu A÷B, G÷H:  $\partial \psi / \partial n = 0$ ,
- odcinek brzegu B÷C, C÷D, E÷F, F÷G:  $\psi = 1$ ,
- odcinki brzegu H÷I, I÷J, A÷J:  $\psi = 0$ .

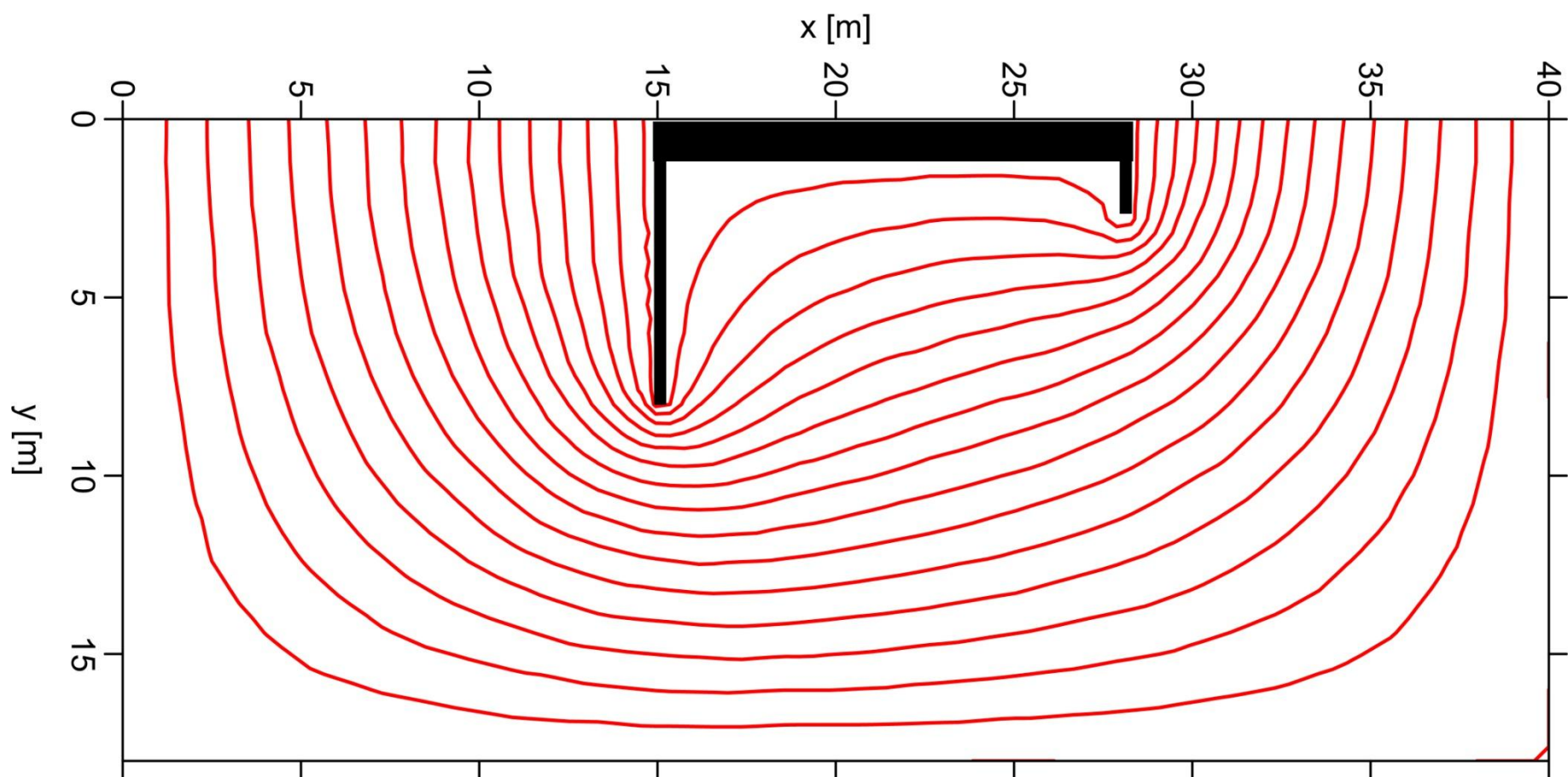


## Przykład obliczeń

Przepływ filtracji ustalonej pod budowlą piętrzącą z dwoma ściankami szczelnymi – wyznaczenie rozkładu **funkcji prądu**  $\psi$ .



Rys. Obszar rozwiązywania równania Laplace'a i przyjęte warunki brzegowe



Rys. Rozkład funkcji prądu  $\psi(x, y)$  pod budowlą piętrzącą