

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW ALGEBRAICZNYCH RÓWNAŃ LINIOWYCH

1) Wprowadzenie

- Typowy problem pojawiający się w trakcie rozwiązywania wielu zagadnień. Ocenia się, że rozwiązywanie układów równań liniowych występuje w ok. 75% wszystkich zagadnień naukowych i technicznych.
- Częsta konieczność rozwiązywania układów równań liniowych zaowocowała opracowaniem licznych metod, a także wprowadzeniem wielu ich realizacji do bibliotek wykorzystywanych przez komputery.

Rozpatrzmy układ n równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie: a_{ij} – współczynniki układu,
 x_j - niewiadome,
 b_i - wyrazy wolne.

Układ ten wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

gdzie: **A** jest macierzą kwadratową n -tego stopnia, złożoną ze współczynników układu,

X jest wektorem kolumnowym reprezentującym niewiadome,

B jest wektorem prawych stron równań lub kolumną wyrazów wolnych

Założenie:

macierz **A** i wektor **B** są rzeczywiste, a układ równań ma rozwiązanie.

2) Typy macierzy współczynników

- **Macierz przekątniowa** (inaczej **diagonalna**), to taka, która ma niezerowe elementy jedynie na głównej przekątnej

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

- **Macierz jednostkowa $\mathbf{I}$** stopnia n jest szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

tzn.

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij})$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera zdefiniowaną następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

- **Macierz trójkątna** - macierz mająca elementy niezerowe tylko po jednej stronie głównej przekątnej; wyróżniamy:

- macierz trójkątną dolną:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- macierz trójkątną górną:

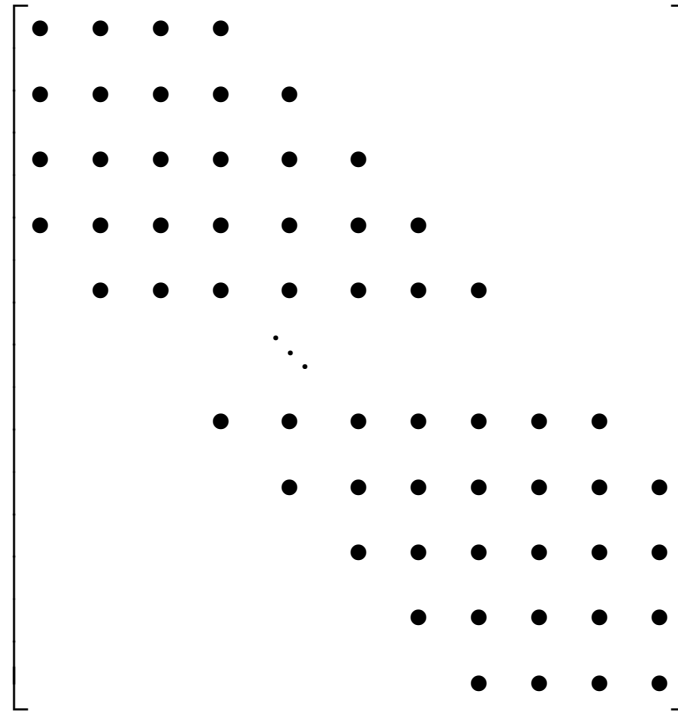
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Macierz rzadka** - macierz mająca dużą liczbę elementów zerowych

■											■
■	■										■
	■	■									■
		■	■								■
			■	■							■
				■	■						■
					■	■					■
						■	■				■
							■	■			■
								■	■		■
									■	■	■
										■	■
									■	■	■

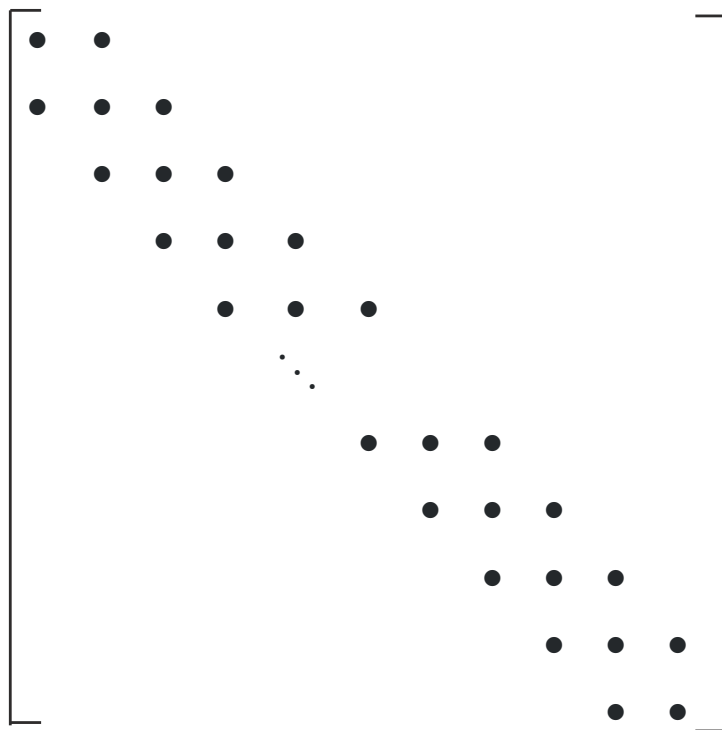
Rys. Przykład macierzy rzadkiej

- **Macierz pasmowa** (lub **wstęgowa**) to macierz mająca elementy niezerowe, zgrupowane w paśmie wokół głównej przekątnej



Rys. Przykład macierzy pasmowej

- **Macierz pasmowa trójdagonalna** to macierz mająca elementy niezerowe, zgrupowane na 3 przekątnych



Rys. Macierz trójdagonalna

3) Metody rozwiązania układów równań algebraicznych:

- 1) metody dokładne (lub bezpośrednie)
- 2) metody iteracyjne

- Metody dokładne są to metody, które przy braku błędów zaokrągleń dają dokładne rozwiązanie po wykonaniu skończonej liczby operacji.
- Metody iteracyjne dają zbieżny ciąg rozwiązań przybliżonych, którego granicą jest rozwiązanie dokładne. Umożliwiają one znalezienie jedynie rozwiązania przybliżonego.

Kryteria oceny skuteczności algorytmów:

- liczba operacji, jaką trzeba wykonać
- dokładność obliczonego rozwiązania

4) Wybór metody

Wybór metody zależy od własności układu równań:

- Jeśli macierz **A** jest pełna i niezbyt wielka, zwykle metody dokładne są skuteczniejsze. Na ogół metody dokładne stosuje się, gdy rozmiar układu nie przekracza ok. 60×60 .
- Ze wzrostem liczby równań liczba operacji arytmetycznych gwałtownie rośnie, a błędy zaokrągleń stają się istotne.
- Jeśli macierz **A** jest rzadka i bardzo duża, skuteczniejsze są metody iteracyjne.

5) Dokładne metody rozwiązywania układów równań liniowych

5.1) Układy z macierzami trójkątnymi

Układ

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

z macierzą trójkątną górną $\mathbf{U}$ ma postać:

$$u_{11} \cdot x_1 + \cdots + u_{1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{1,n} \cdot x_n = b_1,$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{n-1,n} \cdot x_n = b_{n-1},$$

$$u_{n,n} \cdot x_n = b_n.$$

Przy założeniu, że $u_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), niewiadome można obliczyć w kolejności: $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ ze wzorów:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{1,2}x_2 - u_{1,3}x_3 - \dots - u_{1,n-1}x_{n-1} - u_{1,n}x_n}{u_{1,1}}$$

które można zapisać krócej

$$x_n = \frac{b_n}{u_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n u_{i,k} x_k}{u_{i,i}} \quad (i = n-1, \dots, 1)$$

Ponieważ niewiadome wyznacza się w kolejności od ostatniej do pierwszej, algorytm nazywa się **podstawianiem wstecz** lub **postępowaniem odwrotnym**.

Układ równań liniowych

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

z macierzą trójkątną dolną $\mathbf{L}$ można rozwiązać podobnie.

Przyjmując, że $l_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), można wyznaczyć niewiadome metodą **podstawiania w przód**:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} x_k}{l_{i,i}} \quad (i = 2, \dots, n)$$

Z powyższych formuł wynika, że rozwiązanie układu równań wymaga:

- **n** dzielení

oraz

- **$1/2n^2$** dodawań i mnożeń

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \approx \frac{1}{2}n^2$$

5.2) Metoda eliminacji Gaussa

Jest to najważniejsza metoda dokładna rozwiązywania układów równań liniowych. Jej idea polega na zastosowaniu takiego sposobu eliminacji niewiadomych, który prowadzi do układu z macierzą trójkątną górną. Rozwiązanie zaś takiego układu jest szczególnie proste.

Zapiszmy układ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ w postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

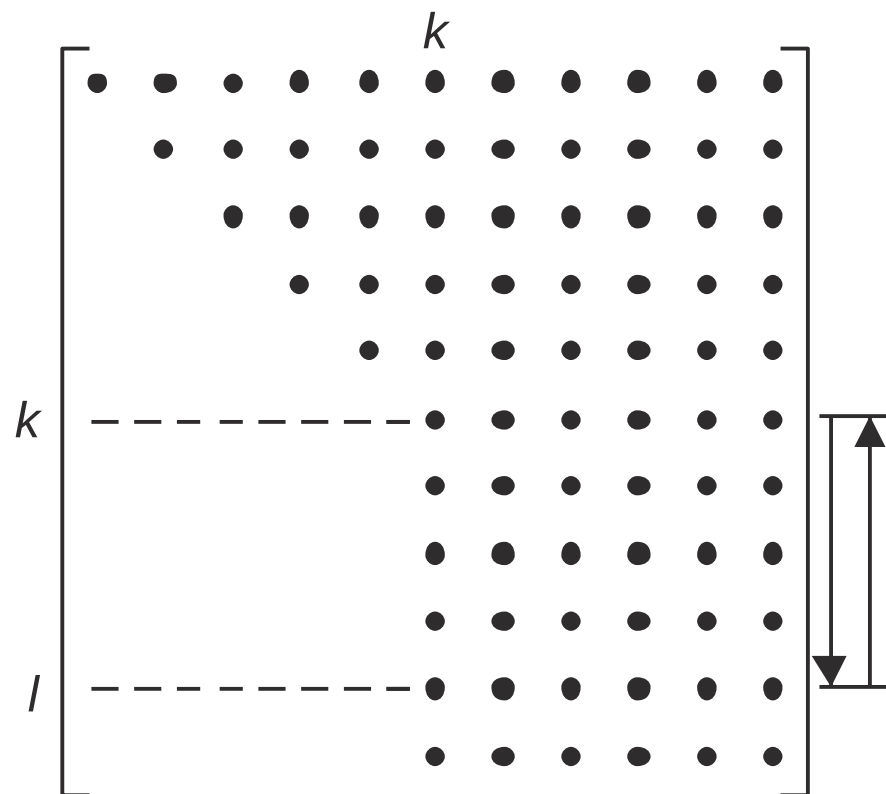
Ponieważ proces przekształcania układu będzie polegał na kolejnych eliminacjach niewiadomych, wprowadźmy indeks eliminacji i nadajmy układowi wyjściowemu indeks jeden:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{31}^{(1)} x_1 + a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)}, \\ \dots \\ a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

Założmy, że macierz układu jest nieosobliwa, zaś

$$a_{11}^{(1)} \neq 0$$

Macierz nieosobliwa – macierz której wyznacznik jest różny od zera



Rys. Macierz współczynników układu po k eliminacjach

Po $n - 1$ krokach otrzymamy ostateczny układ:

$$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)},$$

$$a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)},$$

$$a_{33}^{(3)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)},$$

...

$$a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)}.$$

Jest to układ z macierzą trójkątną górną, który rozwiązuje się metodą podstawiania wstecz.

Współczynniki przy niewiadomych wyznacza się przy użyciu wzorów:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}$$

gdzie: $k = 1, 2, \dots, n-1$

$j = k+1, k+2, \dots, n$

$i = k+1, k+2, \dots, n$

Elementy

$$a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$$

decydujące o procesie eliminacji nazywa się *elementami głównymi*.

5.3) Metoda rozkładu macierzy układu na macierze trójkątne

Rozwiązujemy układ równań zapisany w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Założmy, że możemy rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ układu i przedstawić w postaci iloczynu macierzy trójkątnych – dolnej $\mathbf{L}$ i górnej $\mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Jest to tzw. rozkład trójkątny lub rozkład $\mathbf{LU}$.

W takiej sytuacji układ wyjściowy jest równoważny układowi

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

który możemy z kolei rozłożyć na dwa układy z macierzami trójkątnymi:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

- Wynik eliminacji Gaussa można wykorzystać do przedstawienia macierzy układu w postaci iloczynu **A = L U**.

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{L} \qquad \qquad \qquad \mathbf{U} \\ = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{ccccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & & & \vdots & \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{array} \right] \end{array}$$

- Macierz górnotrójkątna **U** ma postać macierzy układu będącego wynikiem eliminacji, zaś macierz dolnotrójkątną **L** tworzą elementy l_{ik} :

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

dla $i = 2, 3, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, i-1$

oraz $l_{ij} = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

- W ten sposób uzyskujemy algorytm obliczeń bardziej ekonomiczny niż metoda eliminacji Gaussa. Podczas eliminacji macierzy **A** wektor prawych stron **B** pozostaje niezmienny (**L**·**Y** = **B**)

Dzięki temu jeśli układ jest rozwiązywany wiele razy dla różnych wektorów **B**, to wtedy macierz **A** jest przekształcana tylko jeden raz.

Efektywność rozwiązywania układów z macierzami pasmowymi

Często, w trakcie rozwiązywania różnych zagadnień, otrzymuje się układy równań

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

w których macierz $\mathbf{A}$ jest **pasmowa trójdzielna**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}$$

Taki układ równań można rozwiązać bardziej efektywnie wykonując małą liczbę działań arytmetycznych.

Metoda dekompozycji LU zastosowana do macierzy trójdzielnej

W algorytmie rozwiązywania układu wykorzystuje się opisany wcześniej rozkład $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{n-1} & 1 \\ & & & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & \gamma_1 & & & & \\ & u_2 & \gamma_2 & & & \\ & & u_3 & \gamma_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & u_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & & & u_n \end{bmatrix}$$

Dygresja: w celu zwiększenia ekonomii pamięci komputera, elementy l_i oraz u_i można magazynować w miejsce poprzednio zajmowane przez elementy macierzy $\mathbf{A}$, tj. α_i oraz β_i

Elementy $l_2, l_3, \dots, l_n$ oraz $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ oblicza się rekurencyjnie ze wzorów:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \beta_1 \\ l_i &= \frac{\alpha_i}{u_{i-1}} \\ u_i &= \beta_i - l_i \gamma_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, n$$

Aby znaleźć rozwiązanie **X** układu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

należy kolejno rozwiązać dwa układy równań z macierzami trójkątnymi:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Proces ich rozwiązywania przebiega następująco:

- dla układu $\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ y_i &= b_i - l_i \cdot y_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

- oraz dla układu $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$

$$\begin{aligned} x_n &= y_n / u_n, \\ x_i &= (y_i - \gamma_i \cdot x_{i+1}) / u_i \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned}$$

Powyższy algorytm warto stosować, gdy układ rozwiązuje się co najmniej dla dwóch różnych wektorów prawych stron $\mathbf{B}$.

Jeśli układ rozwiązuje się tylko raz, to nie ma potrzeby pamiętać elementów l_i . Tok obliczeń będzie więc jeszcze prostszy:

$$u_1 = \beta_1; \quad \gamma_1 = b_1,$$

$$\left. \begin{array}{l} l = \alpha_i / u_{i-1} \\ u_i = \beta_i - l \cdot \gamma_{i-1} \\ \gamma_i = b_i - l \cdot \gamma_{i-1} \end{array} \right\} \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, n$$

oraz

$$\begin{aligned} x_n &= \gamma_n / u_n, \\ x_i &= (\gamma_i - \gamma_i \cdot x_{i+1}) / u_i \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned}$$

Powyższy algorytm rozwiązywania układu równań z macierzą trójdziagonalną nazywany jest **algorytmem Thomasa** lub **„double sweep”**.

5.4. Metoda odwracania macierzy

Jeśli macierz układu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ można odwrócić, to rozwiązanie układu można otrzymać wprost jako:

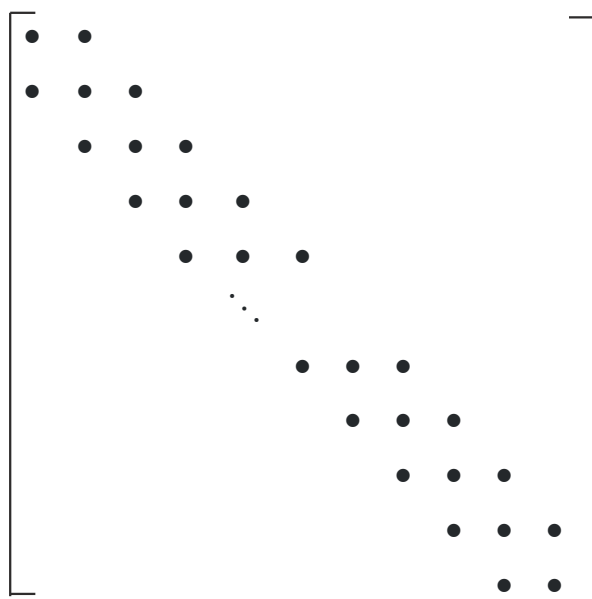
$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

ponieważ

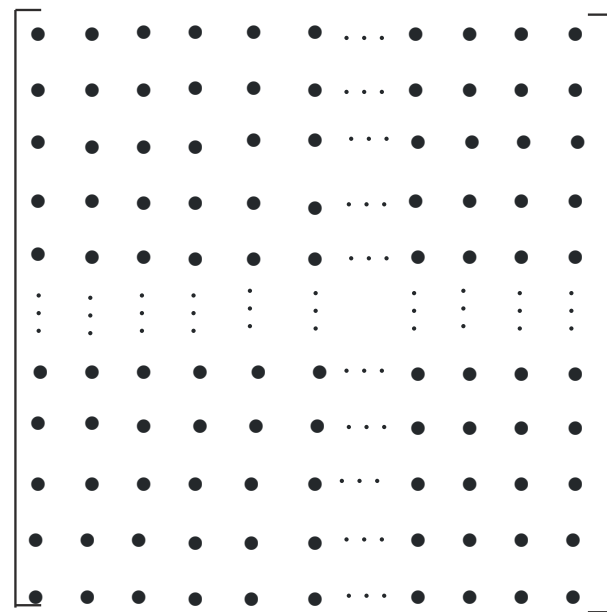
$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \text{zaś} \quad \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Ta metoda jest kosztowna pod każdym względem i raczej nie stosuje się jej w praktyce. Szczególnie należy unikać jej w wypadku układów z macierzami pasmowymi. Wiadomo bowiem, że macierz odwrotna do macierzy pasmowej jest zwykle macierzą pełną.

Zatem w wypadku układu z macierzą trójdziagonalną o wymiarze $n \times n$, zamiast pamiętać $3n$ elementów niezerowych, należałoby pamiętać n^2 elementów macierzy $\mathbf{A}^{-1}$.



A



A⁻¹

6) Iteracyjne metody rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych

Metody iteracyjne startują z początkowego przybliżenia nieznanego rozwiązania, które jest systematycznie aktualizowane w kolejnych iteracjach, aż do momentu kiedy uzyskane rozwiązanie osiągnie odpowiednią dokładność.

Rozpatrzmy układ równań liniowych $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, który ma postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Założmy, że układ został tak uporządkowany, że $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Przekształćmy układ wyznaczając z kolejnych jego równań kolejne niewiadome:

$$\begin{aligned}x_1 &= (-(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n) + b_1) / a_{11}, \\x_2 &= (-(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n) + b_2) / a_{22}, \\x_3 &= (-(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n) + b_3) / a_{33}, \\&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\x_n &= (-(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_{n-1}) + b_n) / a_{nn}.\end{aligned}$$

Otrzymany układ można zapisać krócej:

$$x_i = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j + b_i}{a_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Algorytmy metod iteracyjnych

Najprostsza metoda iteracyjna polega na utworzeniu ciągu przybliżeń według wzoru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie k jest indeksem iteracji.

Metoda ta nazywa się **metodą Jacobiego** lub **metodą iteracji prostej**

Jeśli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}$$

to $\mathbf{X}$ jest rozwiązaniem układu wyjściowego $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

W metodzie Jacobiego nowe wartości elementów wektora $\mathbf{X}$ w iteracji $k + 1$ oblicza się na podstawie ich wartości w iteracji k .

Łatwo można zauważyć, że obliczając nowe przybliżenie elementu i -tego, czyli $x_i^{(k+1)}$, znamy już nowe przybliżenie elementów od 1 do $i - 1$ włącznie.

Powyższy fakt można uwzględnić w formule iteracyjnej otrzymując:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Jest to metoda ***metoda Gaussa-Seidela***.

Jak wykazują doświadczenia metoda ta jest około dwukrotnie szybciej zbieżna niż metoda Jacobiego.

Modyfikując metodę Gaussa-Seidela można znacznie przyspieszyć jej zbieżność.

Wzór iteracyjny metody Gaussa - Seidela można napisać w postaci:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{r}^{(k)}$$

gdzie:

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(k)}$$

jest wektorem residualnym w k -tej iteracji.

Residuum i -tego równania określa wzór:

$$r_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Metodę iteracyjną o postaci:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot r_i^{(k)}$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$

nazywa się **metodą nadrelaksacji** lub w skrócie **metodą SOR** (skrót od angielskich słów: *Successive Over Relaxation*).

Parametr ω jest tzw. współczynnikiem relaksacji. Jego wartość należy tak dobrać, aby zbieżność procesu iteracyjnego była jak najszybsza.

Parametr ten przyjmuje wartości z przedziału $(0, 2)$.

Dla $\omega = 1$ metoda nadrelaksacji staje się metodą Gaussa-Seidela,

Dla $\omega = 2$ proces iteracyjny staje się niezbieżny.

Zbieżność metod iteracyjnych

Podstawowym problemem związanym ze stosowaniem iteracyjnych metod rozwiązywania liniowych układów równań jest **zbieżność procesu iteracyjnego**.

Istnieje udowodnione twierdzenie, które mówi, że proces iteracyjny jest zbieżny, jeśli macierz układu równań **A** jest macierzą z dominującą diagonalą, tzn. gdy:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Twierdzenie to dotyczy wszystkich trzech metod iteracyjnych, przy czym w metodzie nadrelaksacji o zbieżności dodatkowo decyduje parametr ω .

W wypadku dowolnego układu równań algebraicznych jest trudno oszacować taką wartość ω , przy której zapewniona jest najszybsza zbieżność procesu iteracyjnego. W szczególnych wypadkach istnieją oszacowania optymalnych wartości tego parametru.

Z rozwiązywaniem układów równań metodami iteracyjnymi wiąże się dodatkowe następujące problemy:

- 1) określenie początkowego przybliżenia poszukiwanego rozwiązania, czyli $\mathbf{X}^{(k=0)}$
- 2) przerwanie procesu iteracyjnego

Jeśli jest spełniony warunek zbieżności, to wszystkie omówione metody są zbieżne dla dowolnego przybliżenia początkowego $\mathbf{X}^{(k=0)}$.

Chociaż początkowe przybliżenie może być dowolne, to najczęściej wybiera się wektor zerowy, czyli $\mathbf{X}^{(k=0)} = \mathbf{0}$.

W celu przerwania obliczeń wykorzystuje się tzw. test końca procesu iteracyjnego. Test ten polega na **oszacowaniu błędu rozwiązania w iteracji $k + 1$** .

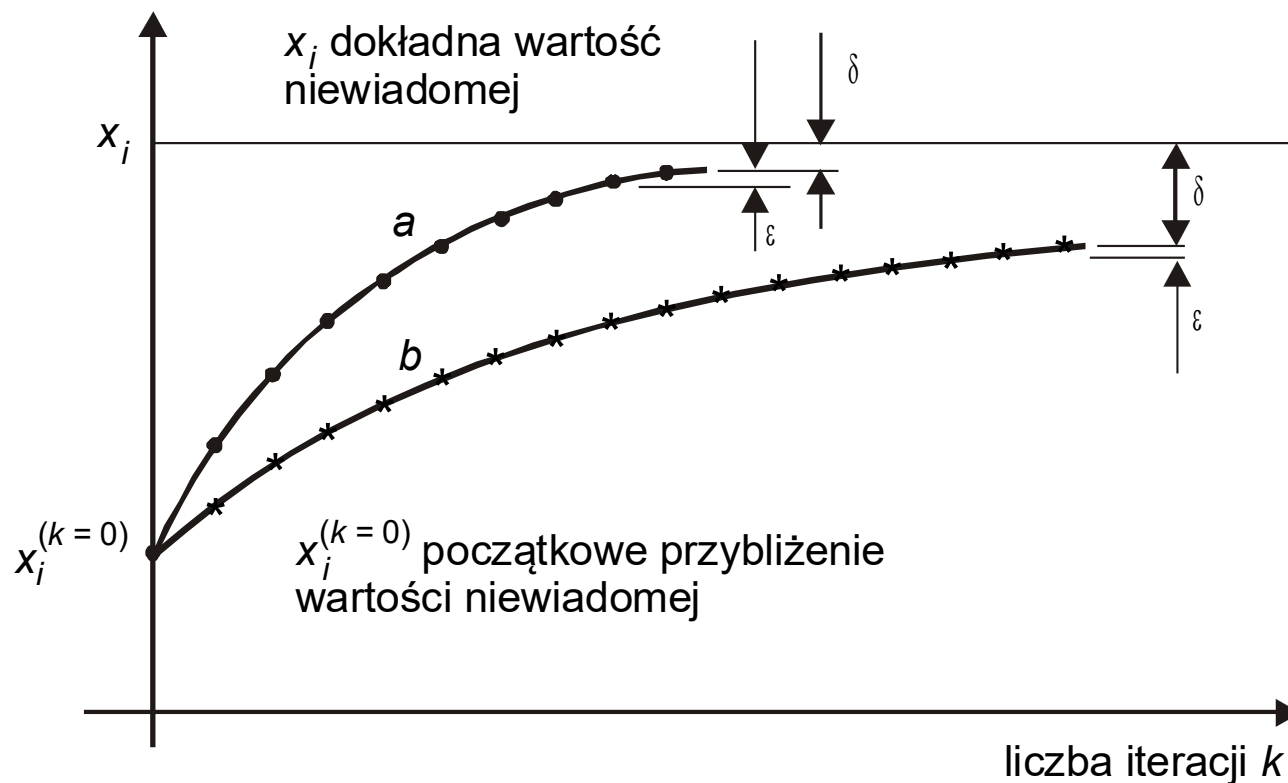
W szczególnych wypadkach o błędzie można wnioskować, porównując dwa kolejne przybliżenia rozwiązania. Obliczenia kończy się, gdy:

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie: k – indeks iteracji,
 ε – dodatnia liczba określająca dokładność.

Powyższy test daje dobre wyniki, gdy proces iteracyjny jest względnie szybkozbieżny.

Jeśli proces iteracyjny jest wolnozbieżny, to pomimo niewielkiej różnicy rozwiązań w dwóch kolejnych iteracjach błąd rozwiązania δ powstały wskutek przzerwania procesu może być duży



Rys. Błąd rozwiązania przy:
a) szybkozbieżnym procesie iteracyjnym,
b) wolnozbieżnym procesie iteracyjnym

Inny test zakończenia procesu iteracyjnego polega na badaniu tzw. normy euklidesowej wektora residualnego w iteracji k -tej:

$$\left\| \mathbf{r}^{(k)} \right\| \leq \varepsilon'$$

gdzie: $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(k)}$

wektor residualny

$$\left\| \mathbf{r} \right\| = \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2 \right)^{1/2}$$

norma euklidesowa

$$\varepsilon' > 0$$

dokładność

7) Układy dobrze i źle uwarunkowane

Rozpatrzmy układ równań:

$$\begin{cases} x + 6y = 4, \\ x + 6,00001y = 4,00001, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para liczb **$x = -2$, $y = 1$** .

Rozpatrzmy następnie nieco zmieniony układ:

$$\begin{cases} x + 6y = 4, \\ x + 5,99999y = 4,00002, \end{cases}$$

mający rozwiązanie: **$x = +16$, $y = -2$** .

Widać, że zmiana współczynnika a_{22} o **$-0,00002$** i zmiana b_2 o **$0,00001$** spowodowała drastyczną zmianę rozwiązania.

Właściwość taka jest charakterystyczna dla **układów równań źle uwarunkowanych**. Kwestia ta jest istotna wtedy gdy na przykład współczynniki macierzy lub wektora prawych stron są wynikiem eksperymentów z natury obciążonych błędami pomiarowymi.

O uwarunkowaniu układu wnioskujemy badając macierz odwrotną do macierzy **A**.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{D} & -\frac{a_{12}}{D} \\ -\frac{a_{12}}{D} & \frac{a_{11}}{D} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie:} \quad D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Jeżeli unormowana macierz **A** (o wartościach współczynników rzędu 1) po odwróceniu ma elementy tego samego rzędu to mówimy, że jest ona **dobrze uwarunkowana**.
- Jeśli **A**⁻¹ ma elementy o kilka rzędów większe to oznacza **źle uwarunkowanie** macierzy **A**.

W rozpatrywanym układzie elementami macierzy współczynników są liczby rzędu 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6,00001 \end{bmatrix}$$

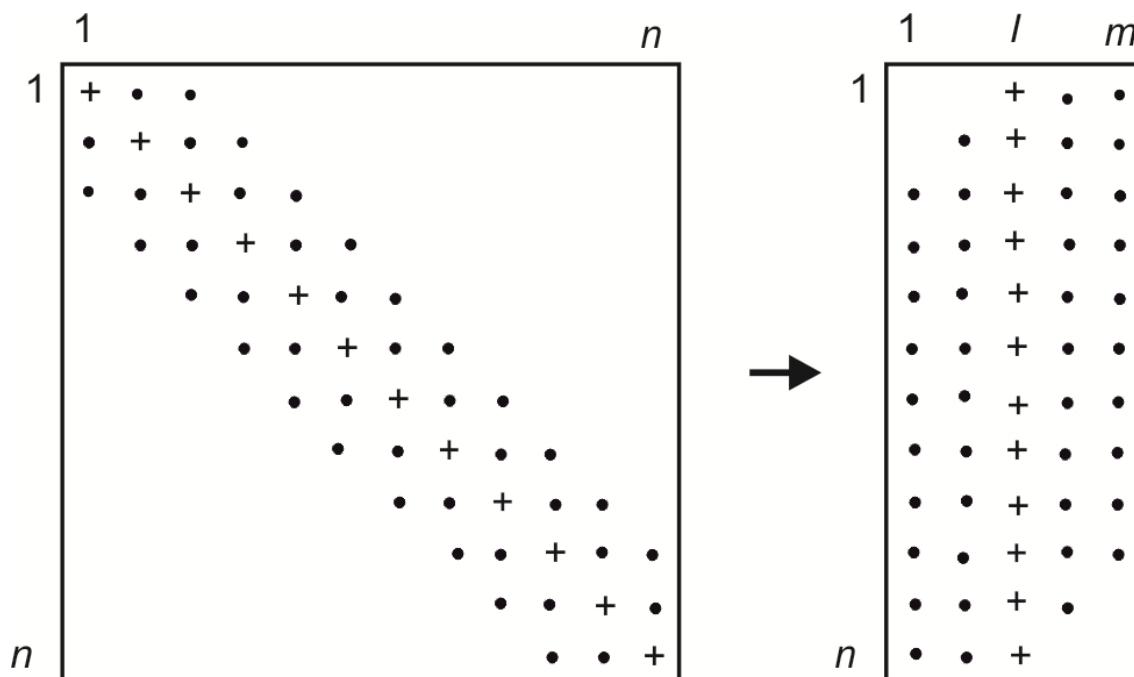
natomiast macierz odwrotna ma postać następującą:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6,00001}{0,00001} & \frac{6}{0,00001} \\ \frac{1}{0,00001} & \frac{1}{0,00001} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600001 & -600000 \\ -100000 & 100000 \end{bmatrix}$$

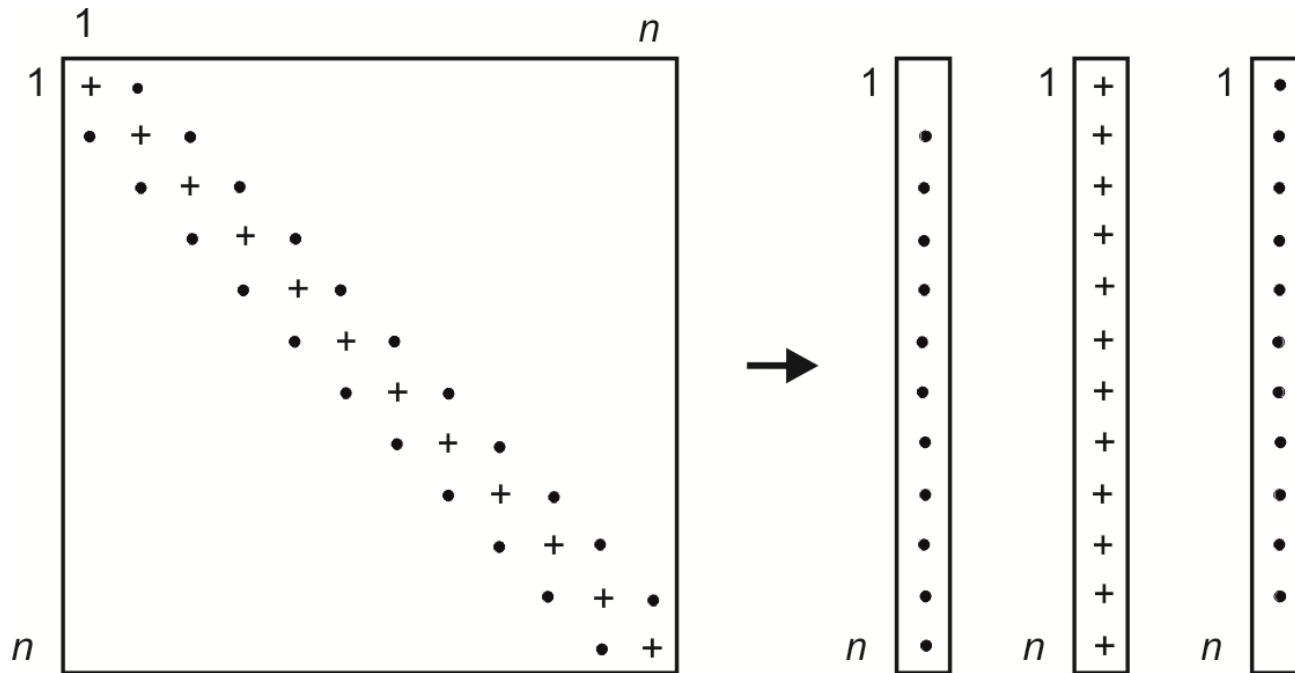
Elementy macierzy odwrotnej są rzędu 10^5 , co wskazuje na złe uwarunkowanie macierzy $\mathbf{A}$.

8) Reprezentacja macierzy rzadkiej

- Jeśli macierz współczynników jest rzadka, to algorytm rozwiązywania układu równań powinien ten fakt uwzględniać.
- Operacje powinny być wykonywane tylko na niezerowych elementach.
- Macierz rzadka zwykle jest zapisywana w postaci skompaktowanej, to znaczy tylko jej niezerowe elementy i ich adresy są zapamiętywane.



Jedną z możliwych form zapamiętywania macierzy trójdzielnej jest zapis z wykorzystaniem 3 mniejszych tablic jednowymiarowych zawierających elementy należące do dolnej, głównej oraz górnej diagonal



ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW NIELINIOWYCH RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Rozpatrzmy układ równań $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, który po rozpisaniu ma postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Jeśli współczynniki a_{ij} są stałe to układ jest układem równań liniowych.

Jeśli natomiast **współczynniki a_{ij} zależą od rozwiązania to układ jest nieliniowy.**

Układy równań nieliniowych mogą:

- nie mieć rozwiązań,
- mogą mieć jedno rozwiązanie,
- mogą mieć skończoną liczbę rozwiązań,
- mogą mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania, ściśle związane z konkretnymi przypadkami, są badane indywidualnie. Wskazówki ogólne są przeważnie trudne do wykorzystania praktycznego.

Wszystkie metody numeryczne rozwiązywania układów równań nieliniowych są metodami iteracyjnymi.

Układy równań nieliniowych mogą:

- nie mieć rozwiązań,
- mogą mieć jedno rozwiązanie,
- mogą mieć skończoną liczbę rozwiązań,
- mogą mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania, ściśle związane z konkretnymi przypadkami, są badane indywidualnie. Wskazówki ogólne są przeważnie trudne do wykorzystania praktycznego.

Wszystkie metody numeryczne rozwiązywania układów równań nieliniowych są metodami iteracyjnymi.

Układ równań nieliniowych w ogólnej postaci wektorowej:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0},$$

gdzie: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X}))^T,$$

T – symbol transpozycji,

n – wymiar układu.

po rozpisaniu ma postać: $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$,

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Rozwiązanie układu polega na znalezieniu wektora $\mathbf{X}$ spełniającego ten układ.

Geneza układów równań nieliniowych:

- układy wynikają z zastosowania obowiązujących praw fizycznych do analizy problemu inżynierskiego

przykład: przepływy ustalone w sieci wodociągowej;

- układy pojawiają się jako jeden z etapów rozwiązywanego technicznego

przykład: numeryczne rozwiązywanie nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych lub układu równań różniczkowych zwyczajnych;

1) Metoda iteracji prostej (Picarda)

Z kolejnych równań układu wyznaczamy kolejne niewiadome otrzymując równoważny układ:

$$x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

...

...

$$x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

który można zapisać krócej w postaci macierzowej:

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{X}).$$

Mając początkową wartość wektora $\mathbf{X}^{(0)}$, tworzymy ciąg określony zależnością

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{X}^{(k)}),$$

gdzie: k – indeks iteracji.

Jeśli powyższy ciąg dąży do granicy $\mathbf{X}$, gdy $k \rightarrow \infty$, to $\mathbf{X}$ jest rozwiązaniem układu $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$.

- Ogólne warunki zbieżności tego ciągu przybliżeń są mało przydatne w praktycznych zastosowaniach.
- Skuteczność metody określa się na podstawie eksperymentów numerycznych.
- Z doświadczenia wynika, że metoda iteracji prostej jest metodą wolnozbieżną.

Metodę Picarda można zastosować bezpośrednio do rozwiązywania układu równań zapisanego w postaci **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$** .

Ponieważ macierz **$\mathbf{A}$** zależy od rozwiązania **$\mathbf{X}$** , iteracje Picarda zapisujemy w postaci:

$$\mathbf{A}^{(k)} \cdot \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{B}$$

gdzie: k – indeks iteracji.

2) Metoda Newtona

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$\mathbf{X}^{(k)}$ – przybliżenie rozwiązania układu w iteracji k -tej,
 $\Delta^{(k)}$ – wektor odchyłek - różnic w iteracji k -tej pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym układu.

Pomiędzy tymi wektorami a rozwiązaniem dokładnym układu zachodzi związek:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta^{(k)}.$$

Założenie:

funkcje f_i tworzące układ są określone, ciągłe i różniczkowalne względem wektora $\mathbf{X}$.

Ponieważ z definicji wiadomo, że $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$, rozwijając $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ w szereg Taylora względem wektora $\mathbf{X}$ i zanedbując w szeregu człony z pochodnymi rzędu wyższego niż 1, można napisać:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)} + \Delta^{(k)}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial \mathbf{X}} \Delta^{(k)} \approx 0$$

Wektor odchyłek określamy następująco:

$$\Delta^{(k)} = \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)},$$

gdź przybliżeniem $\mathbf{X}$ będzie $\mathbf{X}^{(k+1)}$.

Zatem można napisać, że:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$$

gdzie:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

jest **jakobianem** układu.

Metodę Newtona można ostatecznie zapisać w postaci:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - (\mathbf{J}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$$

Metoda tak zapisana jest zarówno pracochłonna, jak i wymaga znacznej pamięci komputera. W każdej iteracji należy obliczyć jacobian układu o wymiarach $n \times n$, a następnie dokonać jego odwrócenia.

W obliczeniach praktycznych zwykle metodę Newtona zapisuje się w następującej postaci:

$$\mathbf{J}^{(k)} \Delta^{(k)} = -\mathbf{F}^{(k)}$$

Zamiast odwracania macierzy $\mathbf{J}$, rozwiązujemy układ równań liniowych względem **wektora odchyłek**, skąd następnie obliczamy nowe przybliżenie wektora niewiadomych:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta^{(k)}$$

Ten sposób jest bardziej ekonomiczny, szczególnie wtedy, gdy $\mathbf{J}$ jest macierzą pasmową.

Innym zabiegiem stosowanym w celu poprawienia ekonomiczności metody Newtona jest stosowanie stałego jakobianu. Zamiast obliczać jakobian w każdej iteracji, wykorzystuje się jego wartość z iteracji $k = 0$. Formuła iteracyjna jest następująca:

$$\mathbf{J}^{(0)} \Delta^{(k)} = -\mathbf{F}^{(k)}$$

Tak określony proces jest wolniej zbieżny, lecz nie wymaga ciągłego obliczania $\mathbf{J}$, co jest kłopotliwe szczególnie wtedy, gdy pochodne trzeba liczyć numerycznie.

Przykład: sieć wodociągowa

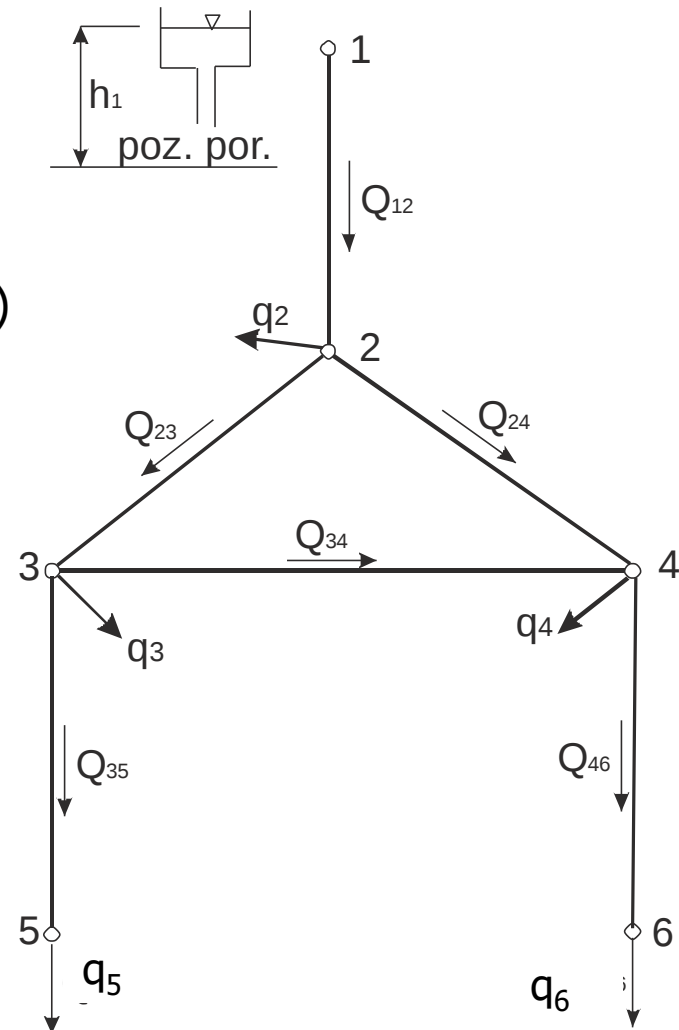
Rozwiązanie sieci polega na obliczeniu natężenia przepływu w jej przewodach oraz ciśnień w węzłach

Q_{ij} – dopływ/odpływ do/z węzła

q_i – dopływ/odpływ zewnętrzny (pobór wody)

i – indeks węzła początkowego

j – indeks węzła końcowego

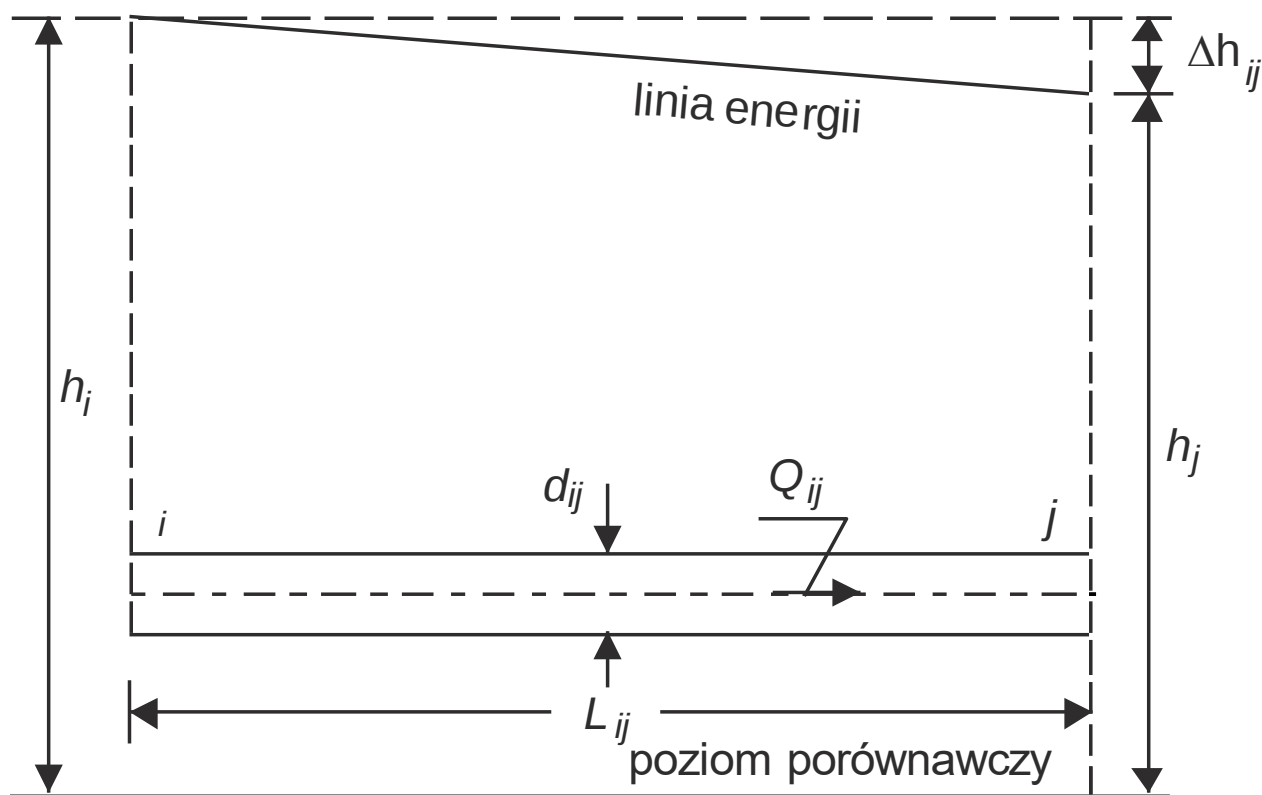


Rys. Schemat sieci wodociągowej

Równania

- Uprozczone równanie energii

$$\Delta h_{ij} = Q_{ij}^2 s_{ij}$$



Rys. Schemat odcinka sieci wodociągowej

Uproszczone równanie energii:

$$\Delta h_{ij} = Q_{ij}^2 s_{ij}$$

Strata ciśnienia w przewodzie:

$$\Delta h_{ij} = h_i - h_j$$

Opór hydrauliczny przewodu (strata energii w przewodzie):

$$s_{ij} = \frac{L_{ij}}{K_{ij}^2}$$

gdzie: K_{ij} – charakterystyka przewodu $K_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} R_{ij}^{2/3} \cdot A_{ij}$

n – współczynnik szorstkości wg Manninga

A_{ij} – pole przekroju czynnego

R_{ij} – promień hydrauliczny

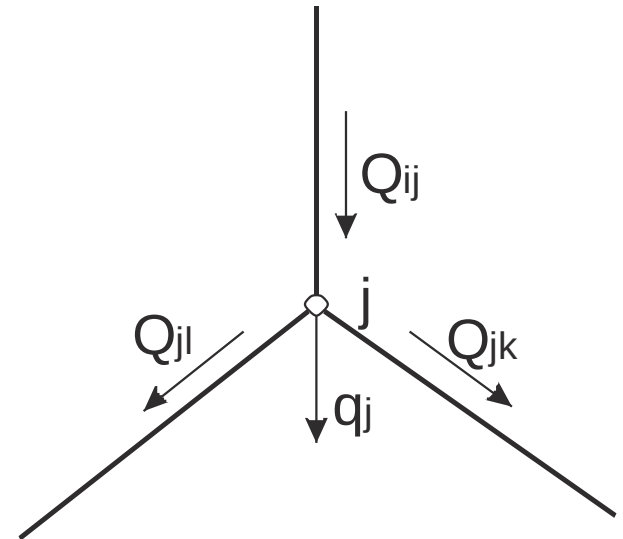
- Równanie ciągłości:

suma przepływów w węźle jest równa zero

$$\sum Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{ij} - Q_{jk} - Q_{jl} - q_j = 0$$

Przyjęta konwencja: dopływ do węzła: +

odpływ z węzła: -



Rys. Schemat węzła

Układ równań dla przyjętej sieci

- Równania energii:

$$2) \quad h_1 - h_2 = s_{12} \cdot Q_{12}^2$$

$$3) \quad h_2 - h_3 = s_{23} \cdot Q_{23}^2$$

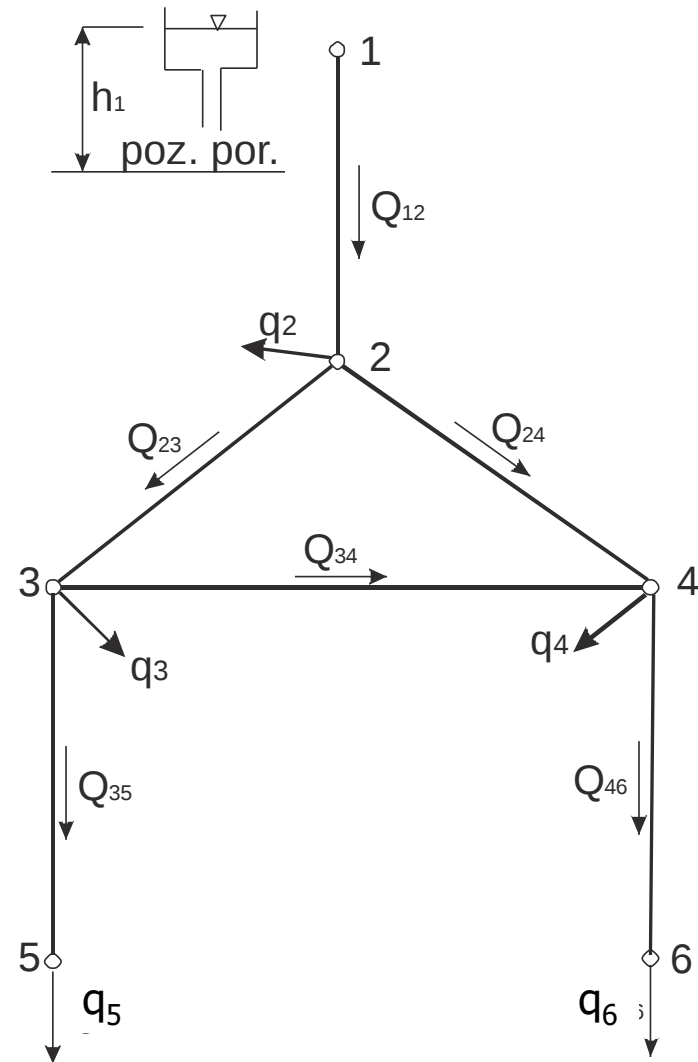
$$4) \quad h_2 - h_4 = s_{24} \cdot Q_{24}^2$$

$$5) \quad h_3 - h_4 = s_{34} \cdot Q_{34}^2$$

$$6) \quad h_3 - h_5 = s_{35} \cdot Q_{35}^2$$

$$7) \quad h_4 - h_6 = s_{46} \cdot Q_{46}^2$$

$\Sigma=6$ równań



- Równania ciągłości:

$$8) \quad Q_{12} - Q_{23} - Q_{24} = q_2$$

$$9) \quad Q_{23} - Q_{34} - Q_{35} = q_3 \quad \sum = 3 \quad \text{równania}$$

$$10) \quad Q_{24} + Q_{34} - Q_{46} = q_4$$

- Bilans równań:

– liczba równań: $6 + 3 = 9$

– liczba niewiadomych: $6 + 6 = 12$

Wniosek:

należy dodać 3 równania wynikające z przyjętych danych

- Równania dodatkowe:

$$1) \quad h_1 = H_1$$

$$11) \quad Q_{35} = q_5$$

$$12) \quad Q_{46} = q_6$$

$\Sigma = 3$ równania

- Wymiar układu równań: 12×12 .

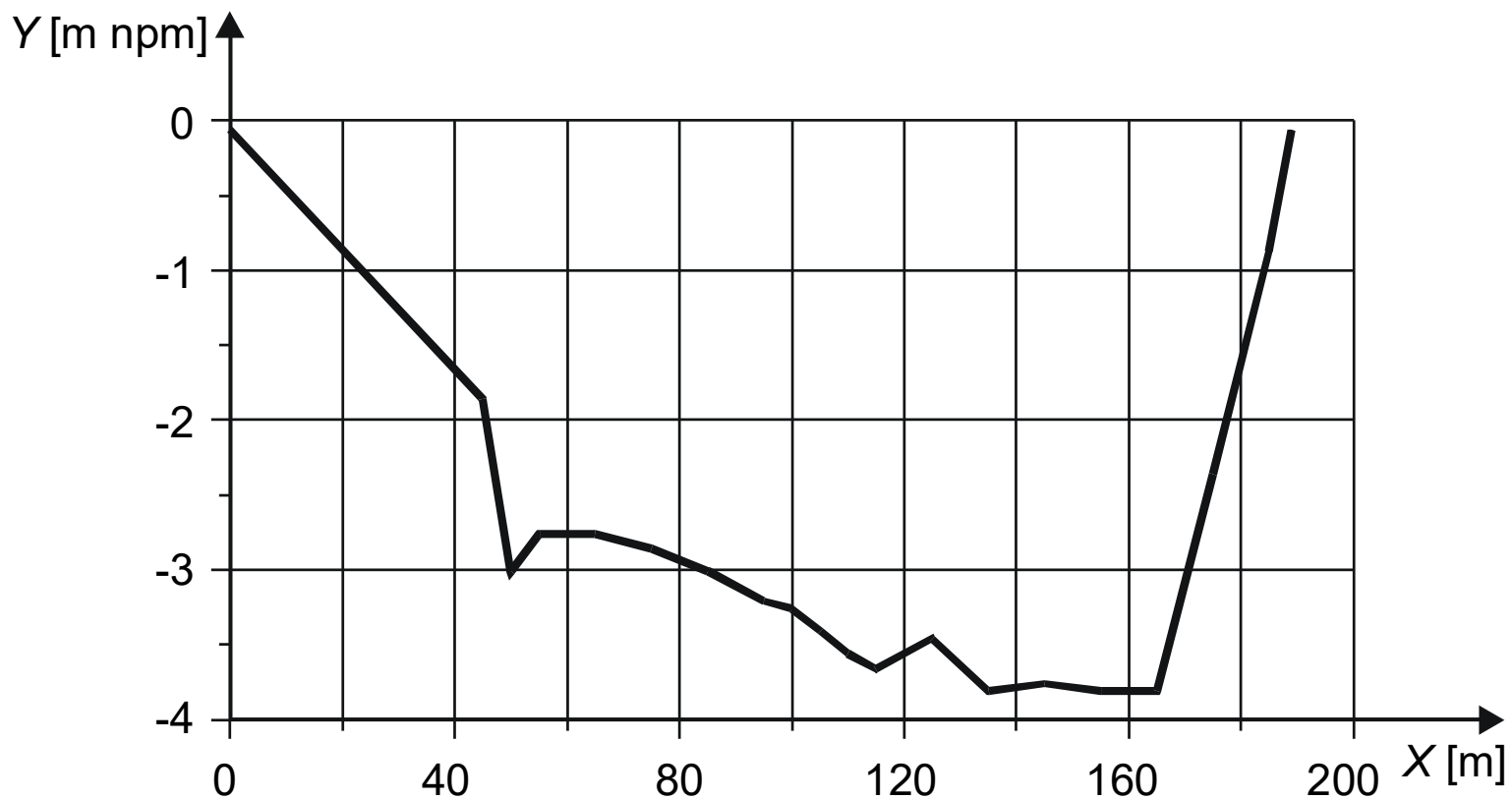
Przykład: schematyzacja przekrojów kanału naturalnego

Aby poprawić efektywność obliczeń z zakresu hydrauliki rzek często korzystna jest tzw. schematyzacja kanału.

Polega ona na zastąpieniu przekroju naturalnego przekrojem regularnym. Zwykle jest to trapez równoramienny lub jego szczególne przypadki – prostokąt albo trójkąt.

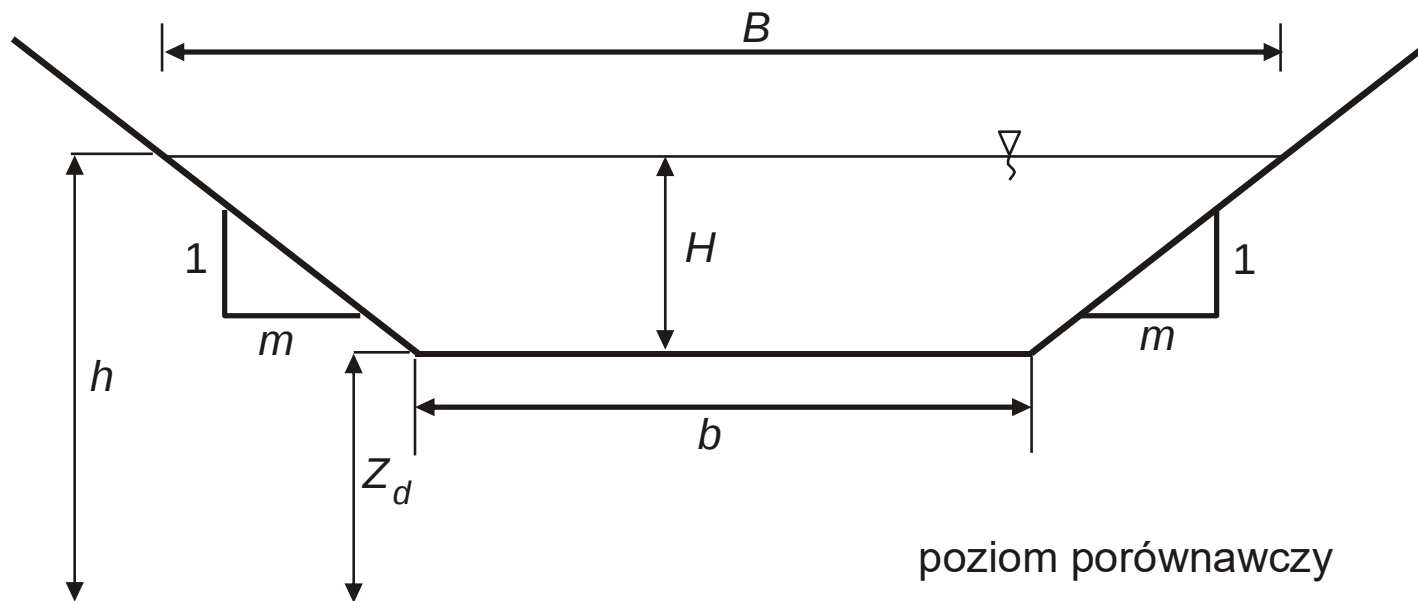
Przykład: schematyzacja przekroju poprzecznego Nogatu.

Celem postępowania jest zastąpienie przekroju naturalnego, opisanego tabelarycznie przez 20 punktów, przekrojem trapezowym.



Rys. Przekrój rzeki Nogat położony w kilometrze 52,380.

Przekrój o kształcie trapezu równoramiennego



charakteryzują następujące parametry:

- szerokość podstawy (dna) b ,
- nachylenie skarp kanału m
- głębokość kanału H .

Na ich podstawie oblicza się:

- pole przekroju czynnego

$$A = b \cdot H + m \cdot H^2$$

- obwód zwilżony

$$P = b + 2H \sqrt{1 + m^2}$$

- szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody

$$B = b + 2m \cdot H$$

Przybliżenie przekroju naturalnego przekrojem trapezowym wykonujemy, przyjmując następujące założenia:

- na poziomie przyjętego napełnienia kanału, które określa rzędna zwierciadła wody h , szerokość kanału trapezowego B jest równa szerokości kanału naturalnego B_n ,
- powierzchnia przekroju czynnego A jest równa powierzchni przekroju naturalnego A_n ;
- parametry kanału trapezowego: m , H oraz b należy tak dobrać, aby przy przyjętym napełnieniu wydatek był równy wydatkowi w kanale naturalnym.

Korzystając z równania Manninga trzeci postulat możemy wyrazić równością:

$$\frac{A_n^{5/3}}{P_n^{2/3}} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}$$

gdzie: A_n – pole powierzchni przekroju naturalnego,
 P_n – obwód zwilżony przekroju naturalnego,
 A – pole powierzchni przekroju trapezowego,
 P – obwód zwilżony przekroju trapezowego.

Wobec założenia o równości powierzchni przekrojów, zależność ta implikuje równość obwodu zwilżonego kanału naturalnego i aproksymującego go przekroju trapezowego:

$$P_n^{2/3} = P^{2/3}$$

W tej sytuacji, poszukiwane wartości parametrów charakteryzujących przekrój trapezowy otrzymamy rozwiązując układ utworzony przez równania:

$$b \cdot H + m \cdot H^2 = A_n$$

$$b + 2m \cdot H = B_n$$

$$b + 2H\sqrt{1+m^2} = P_n$$

Jest to układ trzech nieliniowych równań algebraicznych o niewiadomych b , m oraz H .

Do jego rozwiązania należy użyć metody iteracyjnej, na przykład metody Newtona.

Układ zapisany w notacji macierzowej:

$$\begin{bmatrix} H & H^2 & 0 \\ 1 & 2H & 0 \\ 1 & 0 & 2\sqrt{1+m^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b \\ m \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ P_n \end{bmatrix}$$

przekształcamy do postaci standardowej:

$$f_1 = b \cdot H + m \cdot H^2 - A_n = 0$$

$$f_2 = b + 2m \cdot H - B_n = 0$$

$$f_3 = b + 2H\sqrt{1+m^2} - P_n = 0$$

Iteracyjna formuła Newtona ma postać:

$$\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{X}^{(k+1)} = -\mathbf{f}^{(k)}$$

gdzie: $\Delta \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} H & H^2 & b + 2mH \\ 1 & 2H & 2m \\ 1 & \frac{2Hm}{\sqrt{1+m^2}} & 2\sqrt{1+m^2} \end{bmatrix} \quad (\text{jakobian})$$

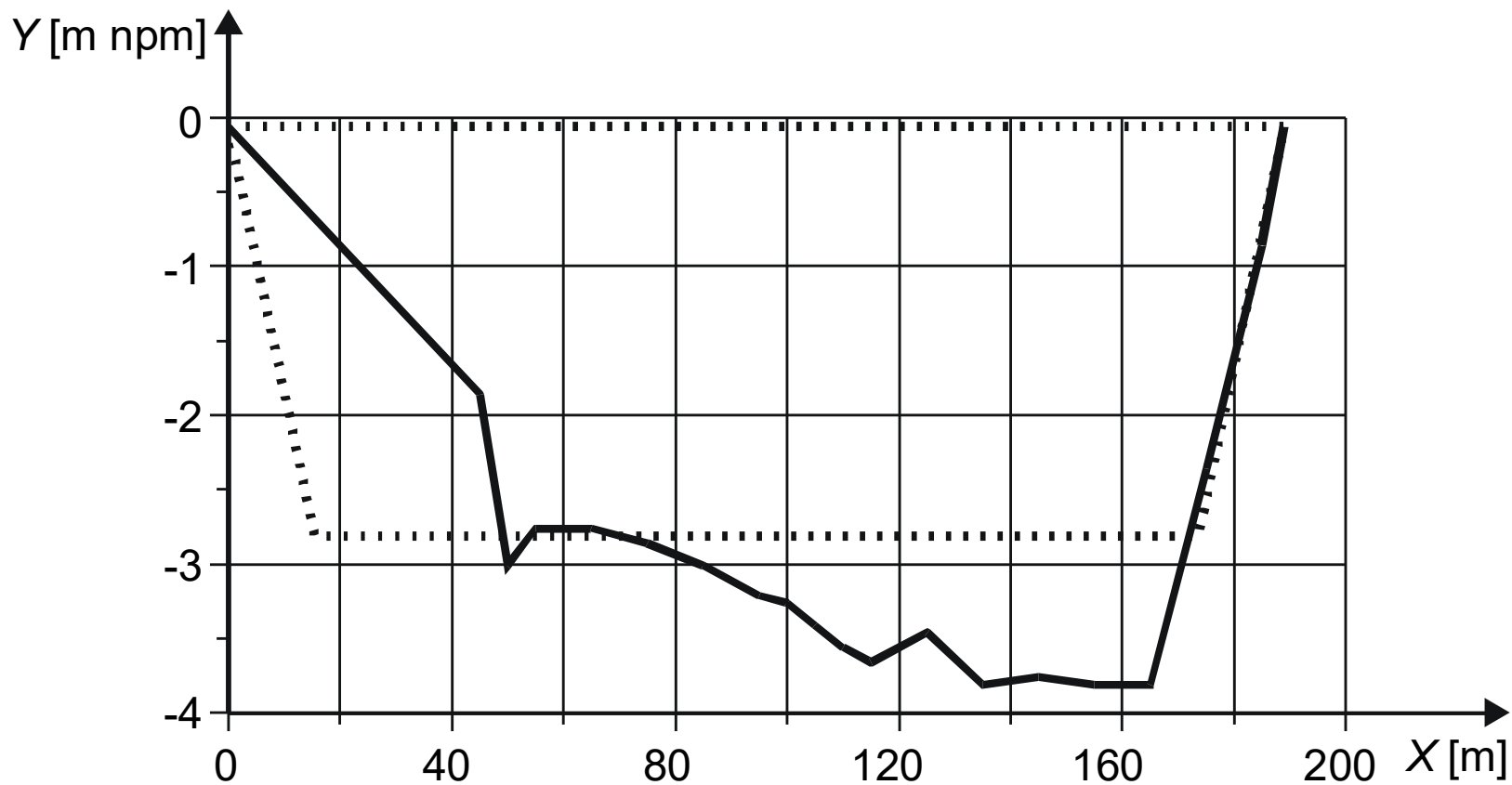
k – indeks iteracji

Dla rozpatrywanego przekroju Nogatu, przy rzędnej zwierciadła wody $h = -0,06$ m nrm, parametry przekroju naturalnego wynoszą:

$$A_n = 477.5 \text{ m}^2, \quad B_n = 189.0 \text{ m}, \quad P_n = 189.49 \text{ m}.$$

W wyniku rozwiązania układu równań otrzymano następujące wartości parametrów równoważnego przekroju trapezowego:

$$m = 5.61, \quad b = 158.11 \text{ m}, \quad H = 2.75 \text{ m}, \quad Z_d = -2.81 \text{ m nrm}.$$



Rys. Porównanie przekroju naturalnego z zastępczym przekrojem trapezowym