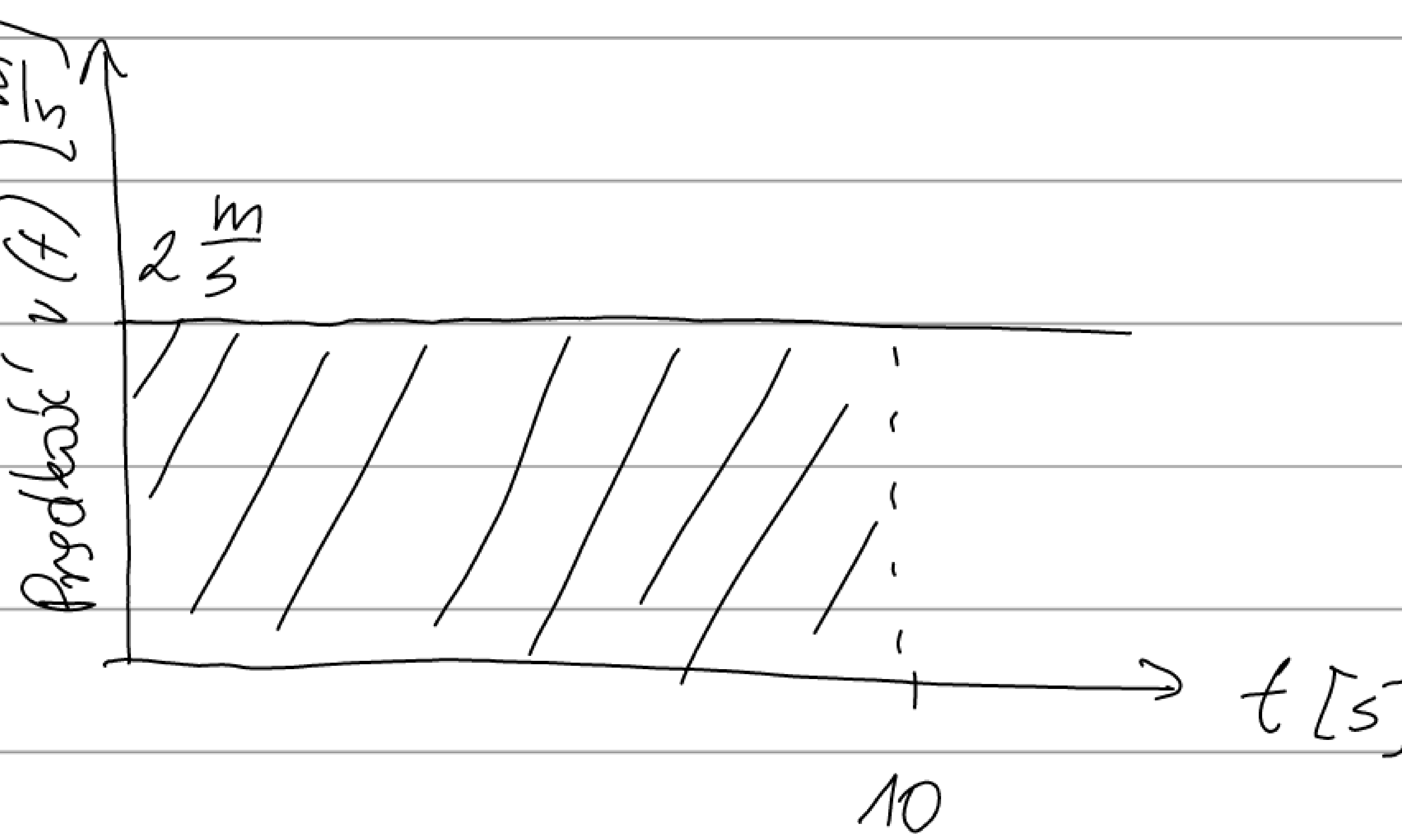
Całkowanie numeryczne:

Na przykładzie fizyki:

droga = prędkość · czas $\quad s = v \cdot t$

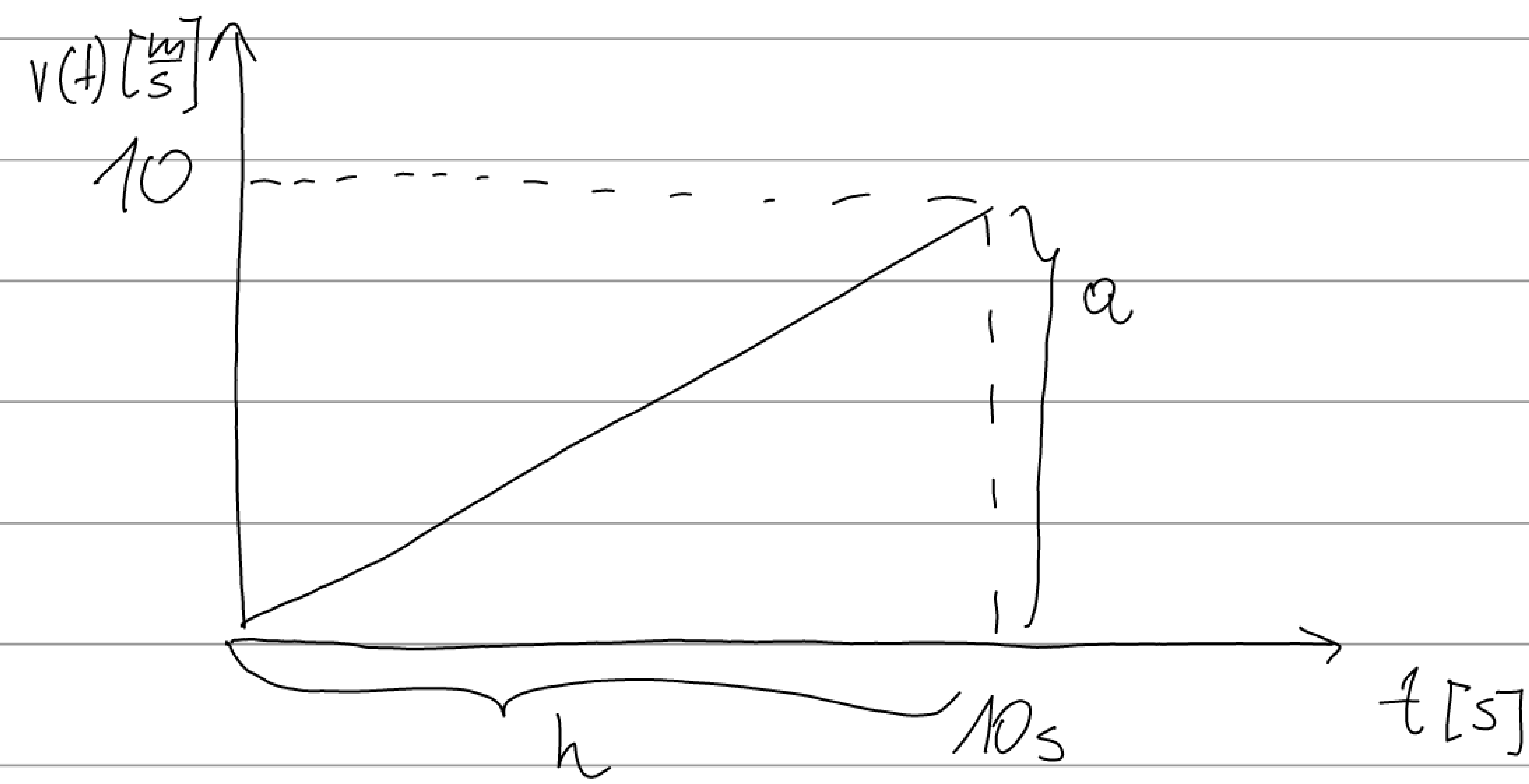


Jeżeli będziemy się poruszać z prędkością $v = 2\frac{m}{s}$ to po czasie t przebędziemy drogę $s = v \cdot t$ $\quad s = 2\frac{m}{s} \cdot 10s = 20\,m$

co jest równe polu pod wykresem, czyli całce $\int_0^{10} v(t) \cdot dt = \int_0^{10} 2 \cdot dt = 2 \cdot t \Big|_0^{10}$

$= 2 \cdot (10-0) = 2 \cdot 10 = 20$

Ale jeśli prędkość będzie się zmieniać w czasie ...



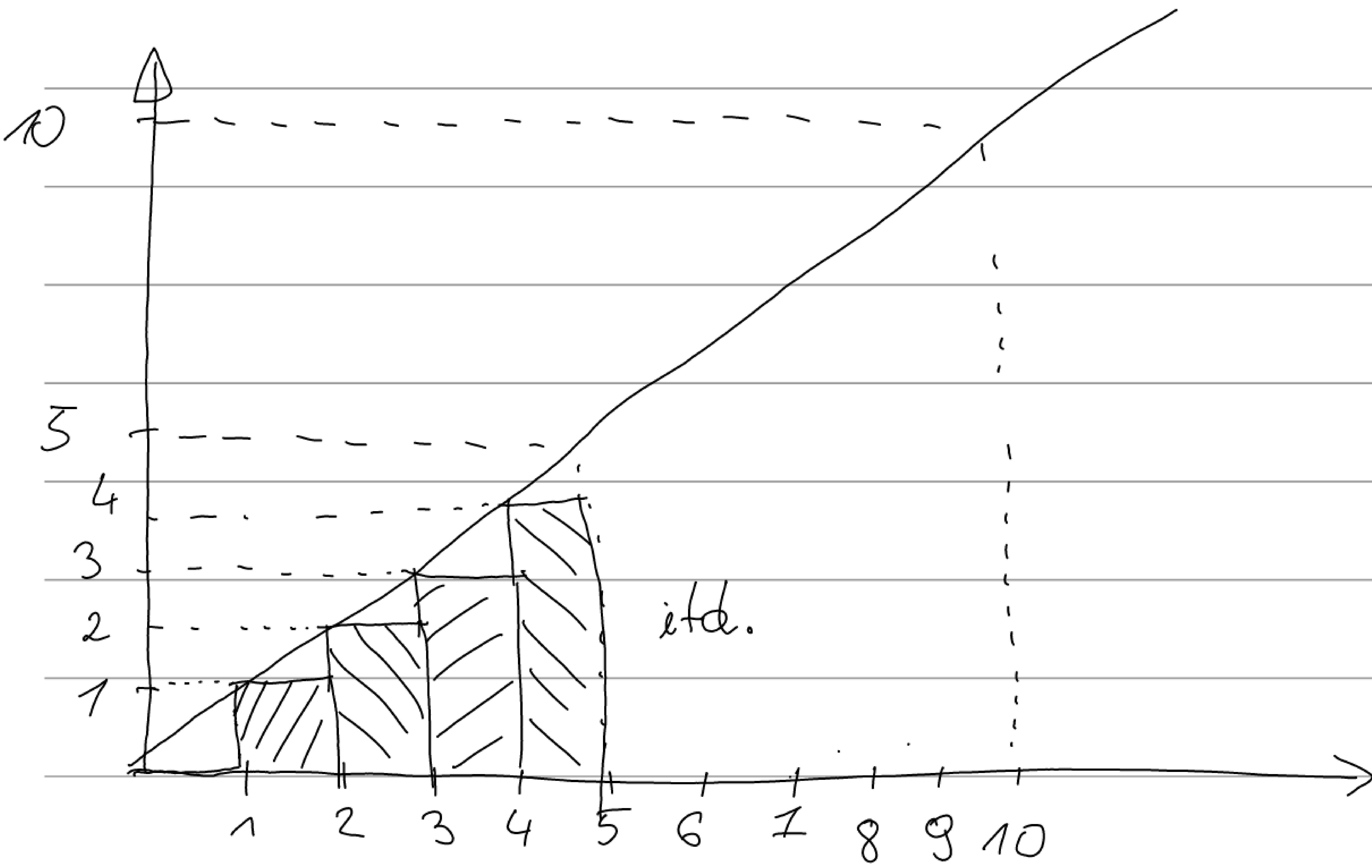
$v(t) = t$

$s = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} t\,dt$ $\left\{ \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right\}$

$= \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^{10} = \frac{1}{2} \left(10^2\right)$

pole trójkąta $= \frac{1}{2} a \cdot h$

Jak policzyć taką całkę numerycznie?



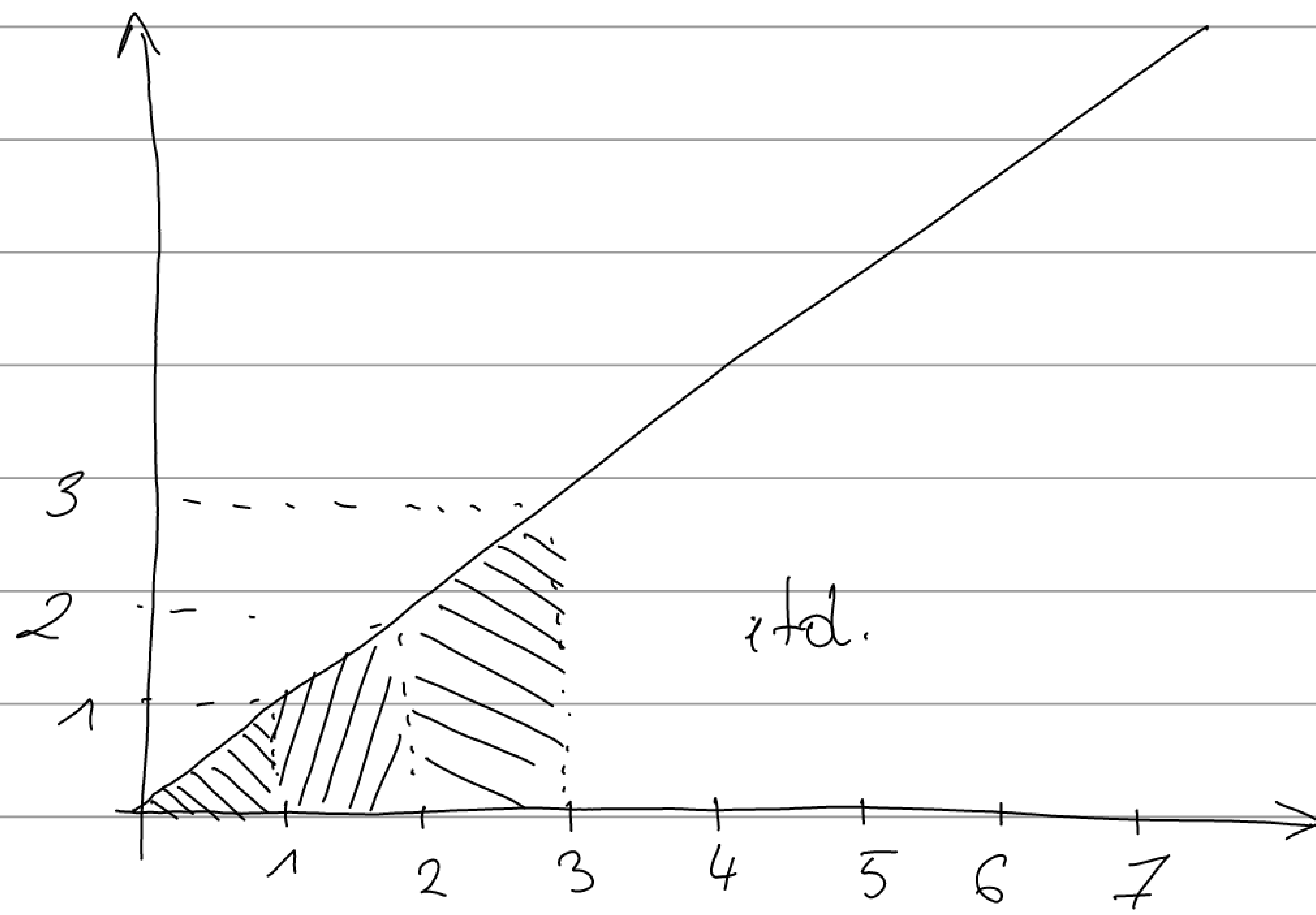
Na przykład jako sumę prostokątów:

$$\sum_{1}^{10} P_{\square i} = P_{\square 1} + P_{\square 2} + P_{\square 3} + \dots P_{\square i} + \dots P_{\square 9} + P_{\square 10}$$

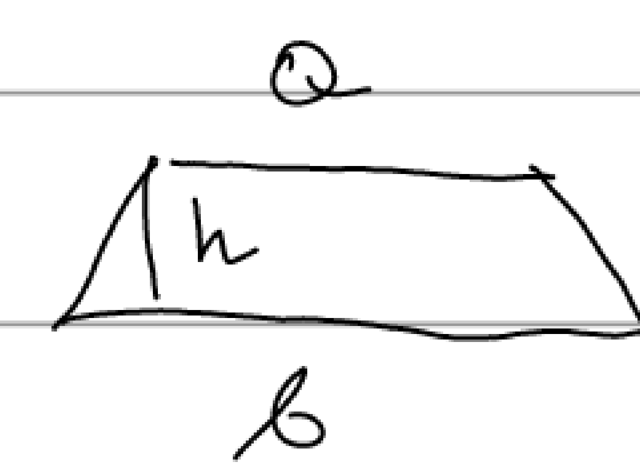
$$\sum_{1}^{10} P_{\square i} = 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + 2 \cdot (3-2) + \dots$$

$$\dots + 8 \cdot (9-8) + 9 \cdot (10-9)$$

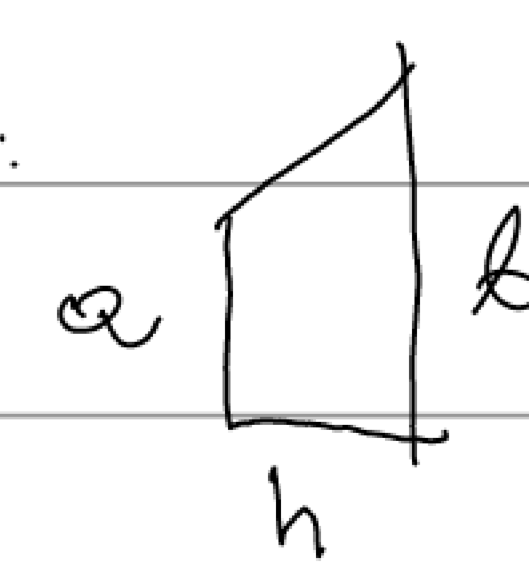
Albo sumę trapezów



Pole trapezu $= \frac{a+b}{2}\cdot h$



Nasz trapez wygląda tak:



Stąd pole pod wykresem

$$\sum_{1}^{10} P_{i} = P_{1} + P_{2} + P_{3} + P_{i} + P_{10}$$

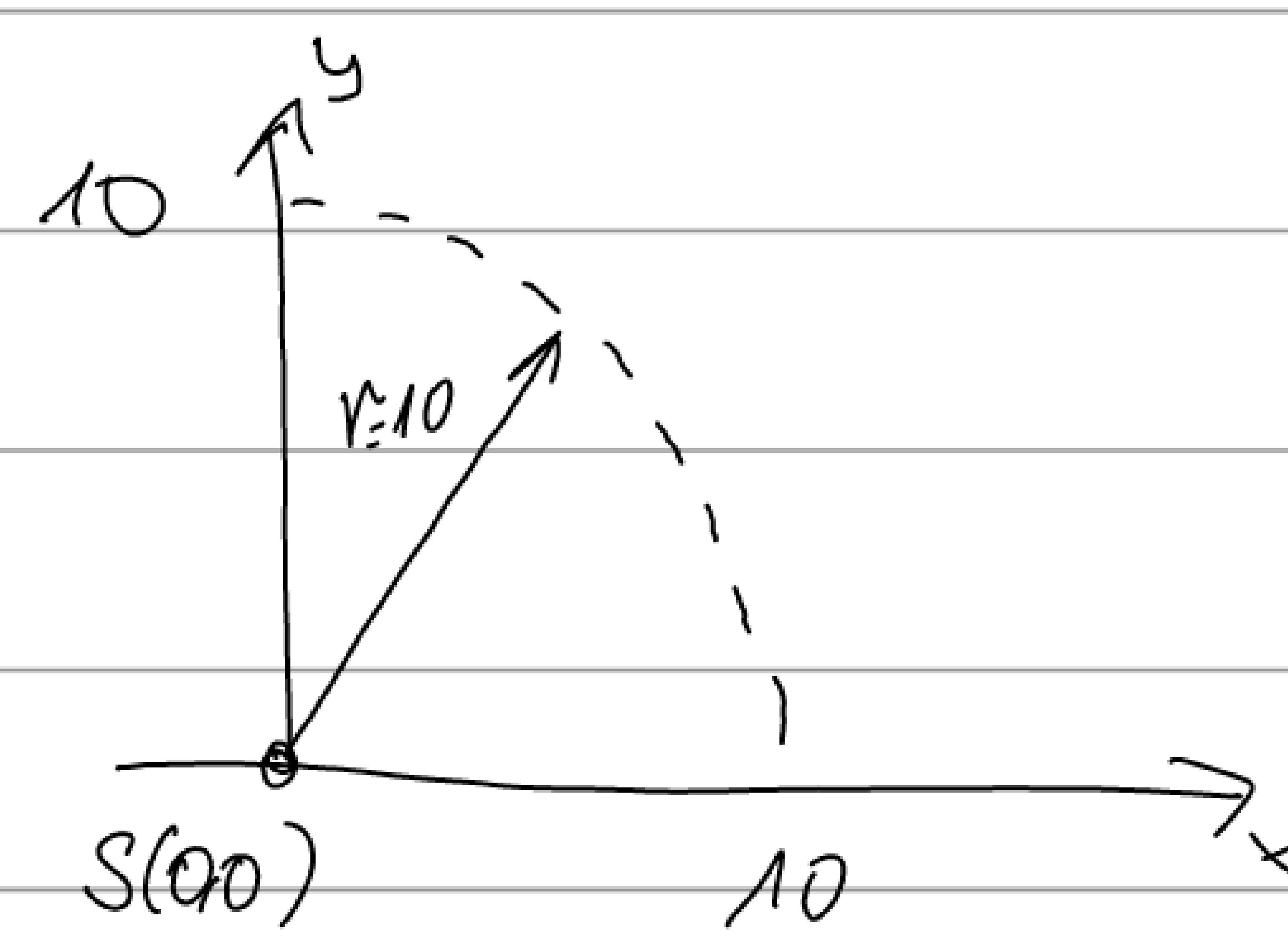
$$\sum_{1}^{10} P_{i} = \frac{0+1}{2}\cdot(1-0) + \frac{1+2}{2}(2-1) + \frac{2+3}{2}(3-2) + \dots$$

A jakby to było w przypadku okręgu?

Wzór na okrąg o środku $S(a,b)$
i promieniu r

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Weźmy ćwiartkę okręgu



$P_{\bigcirc}=\pi r^2 \quad P_{\triangle}=\frac{1}{4}\pi r^2$

$S(0,0) \quad r=10$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=10^2$$

$$x^2+y^2=10^2 \Rightarrow y^2=10^2-x^2 \quad y(x)=\sqrt{100-x^2}$$

Proszę policzyć metodą prostokątów i trapezów, porównać analitycznie i zagęścić krok