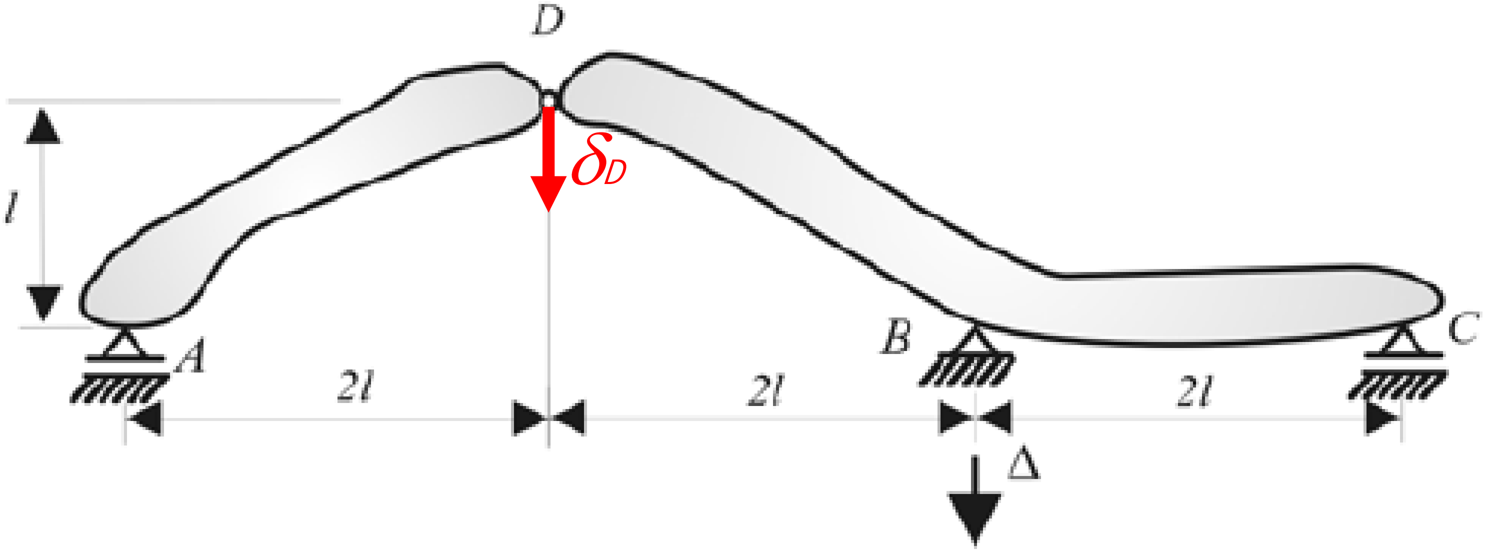
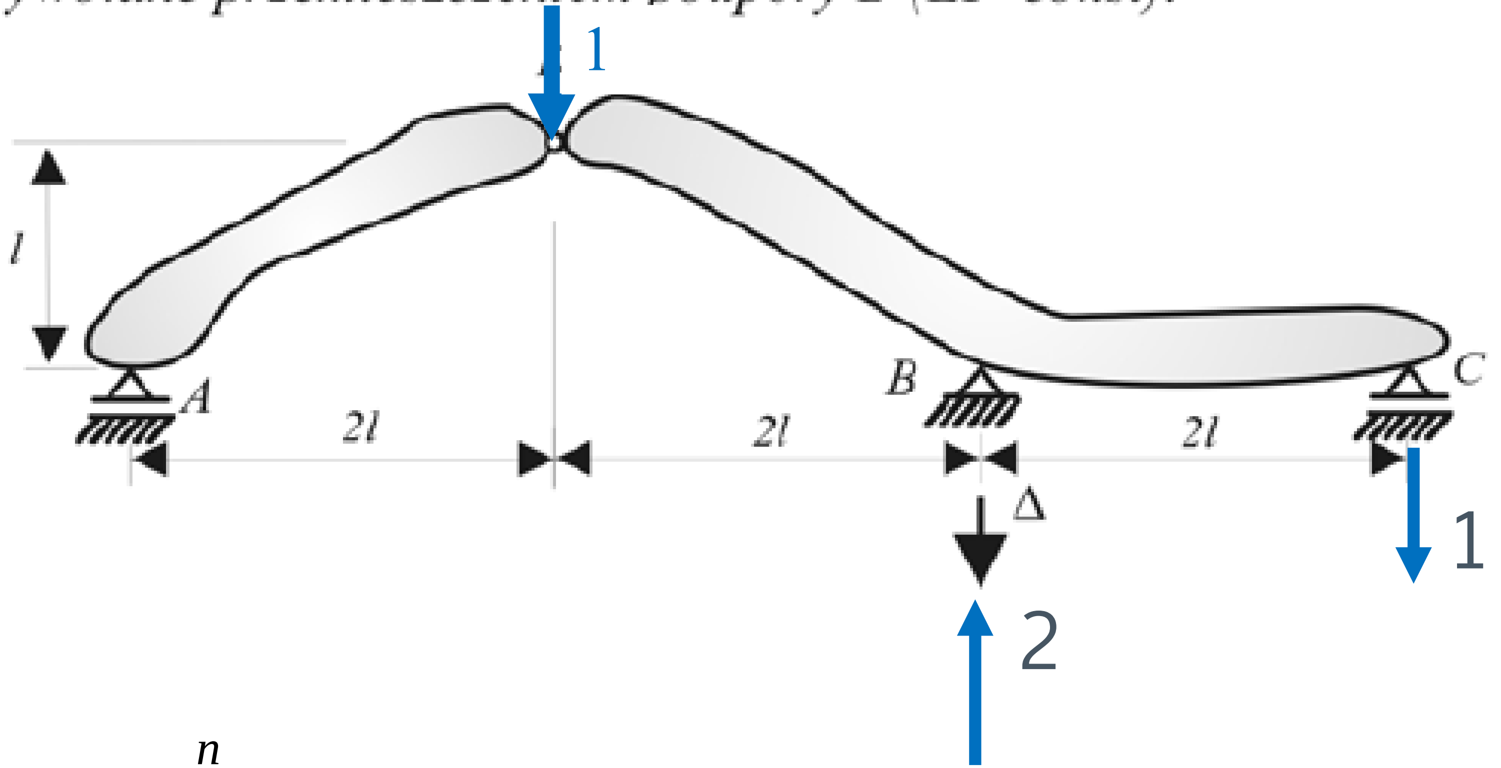
Obliczanie przemieszczeń z zasady pracy wirtualnej dla ciała sztywnego

Dla podanego układu wyznaczyć przemieszczenie pkt.D wywołane przemieszczeniem podpory B (EI=const).



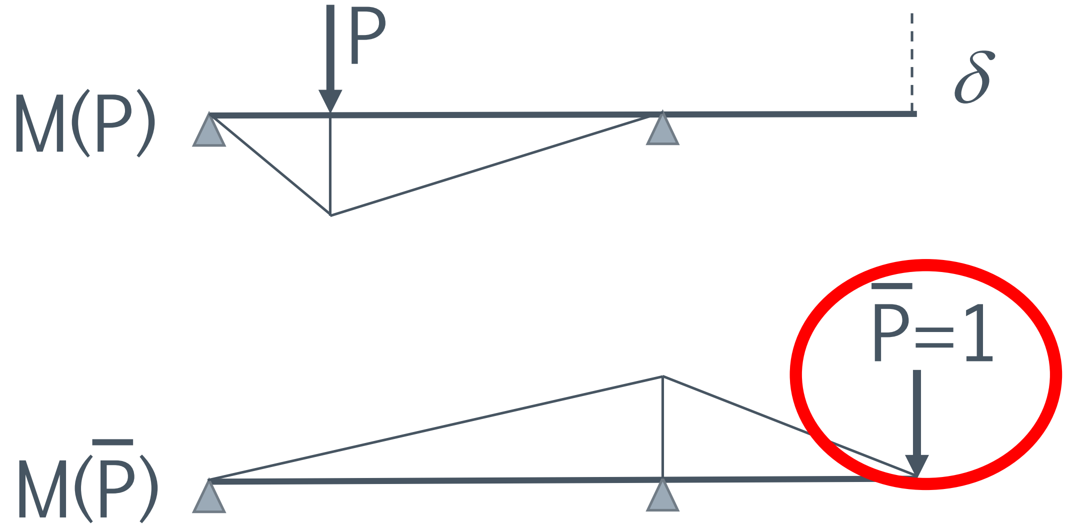
Obliczanie przemieszczeń

Dla podanego układu wyznaczyć przemieszczenie pkt.D wywołane przemieszczeniem podpory B (EI=const).



$$L_z = \sum_{i=1}^{n} P_i \bar{\delta}_i = 0, \quad 1 \times \delta_D + \Delta \times (-2) = 0, \quad \delta_D = 2\Delta$$

Aby obliczyć dowolne przemieszczenia z twierdzenia Castigliano należy wstawić jednostkową siłę wirtualną w kierunku szukanego przemieszczenia



$$\delta = \frac{\partial E_P}{\partial \bar{P}} = \frac{\partial}{\partial \bar{P}} \frac{1}{2} \int \frac{\left[M(P) + M(\bar{P}) \right]^2}{EJ} dx = \int \frac{M(P) M(\bar{P}=1)}{EJ} dx$$

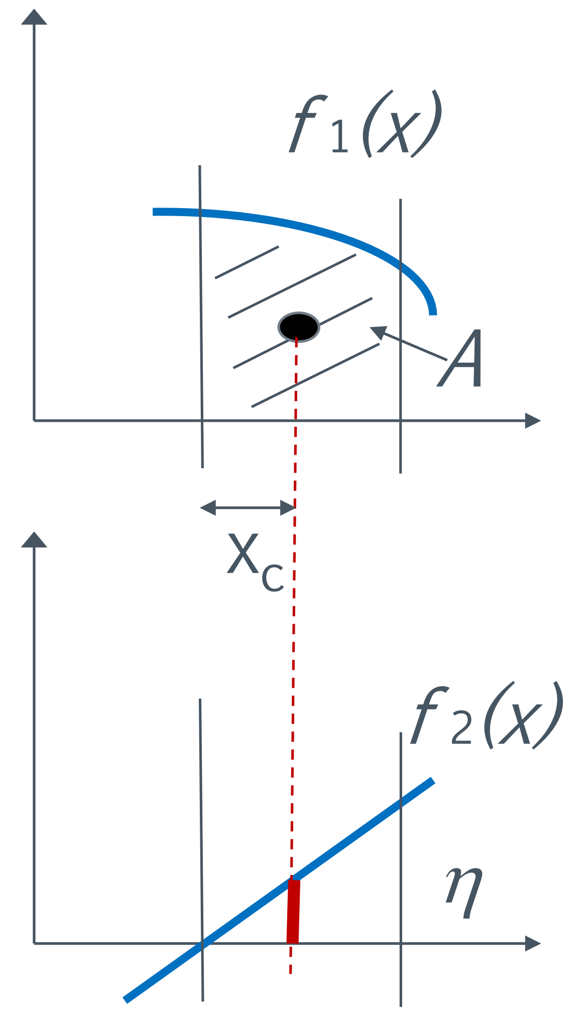
Obliczamy całkę

stosujemy całkowanie graficzne

$$\delta = \int \frac{M(P) M(\bar{P}=1)}{EJ} dx$$

Całkowanie graficzne

Całkując graficznie dwa wykresy mnożymy pole pierwszego wykresu *A* przez rzędną z drugiego wykresu η, na wysokości środka ciężkości pierwszego



$$\int f_1(x)\, f_2(x) = A \cdot \eta$$

Całkowanie graficzne

$$\int f_1(x)\, f_2(x) = A \cdot \eta$$

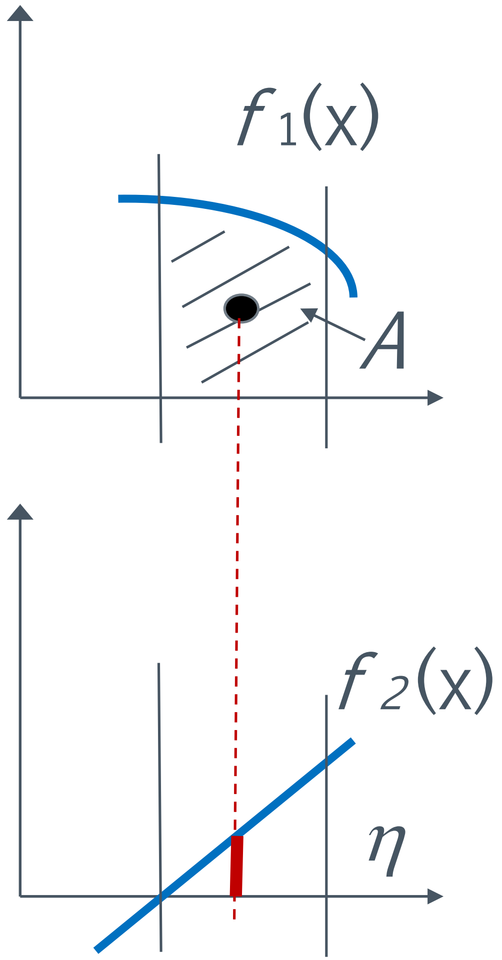
Założenia:

- stała sztywność,

- wykres prostoliniowy zapisany jednym równaniem,

- całkując parabolę z wykresem prostoliniowym, zawsze bierzemy pole paraboli i rzędną wykresu liniowego,

- jeżeli wykresy są po tej samej stronie to wynik całkowania jest <u>dodatni</u>, jeżeli po przeciwnych to <u>ujemny</u>



Całkowanie graficzne

$$\int M \times \bar{M} dx =$$

$$= \int M \times (ax + b) dx =$$

$$= \int Maxdx + \int Mbdx =$$

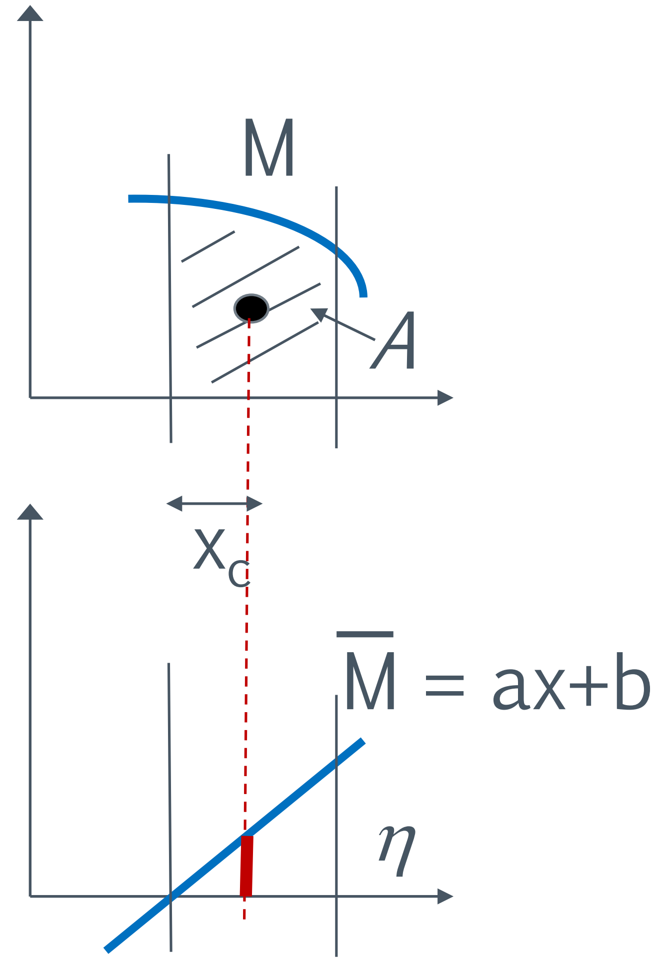
$$= a \int Mxdx + b \int M dx =$$

moment statyczny

pole A

$$= aAx_c + bA = A(ax_c + b) = A\eta_c$$

$$\int M\bar{M} = A \cdot \eta$$



Związki sił wewnętrznych ze składowymi odkształceń znane z wytrzymałości materiałów

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds, \quad \Delta ds = \frac{N}{EA} ds, \quad \Delta dh = k \frac{T}{GJ} ds$$

k – współczynnik zależny od kształtu przekroju

$$k = \frac{A}{J^2} \int \frac{S^2}{b^2} dA$$

J – moment bezwładności wgl. osi głównej, przekroju
S – moment statyczny wgl. osi głównej,
b – szerokość przekroju w odległości od osi głównej

Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego

Przemieszczenie wirtualne powoduje wzrost składowych odkształceń o wartości:

$$\overline{\Delta d\varphi}, \quad \overline{\Delta ds}, \quad \overline{\Delta dh}$$

Nazywamy je odkształceniami wirtualnymi

Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego

Praca obciążeń zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych jest równa pracy sił wewnętrznych na odkształceniach wirtualnych układu.

$$\sum P\overline{\delta} = \int \left(M\overline{\Delta d}\varphi + N\overline{\Delta ds} + T\overline{\Delta dh} \right)$$

Praca momentu na wirtualnej zmianie kąta

Praca sił tnących na wirtualnych odkształceniach

Praca sił normalnych na wydłużeniach wirtualnych

Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego

Praca obciążeń wirtualnych na przemieszczeniach rzeczywistych jest równa pracy sił wewnętrznych na odkształceniach rzeczywistych układu.

$$\sum \overline{P}\delta = \int (\overline{M}\Delta d\varphi + \overline{N}\Delta ds + \overline{T}\Delta dh)$$

W poniższych równaniach <u>nie występują</u> charakterystyki fizyczne materiału.

$$\sum P\overline{\delta} = \int (M\overline{\Delta d\varphi} + N\overline{\Delta ds} + T\overline{\Delta dh})$$

$$\sum \overline{P}\delta = \int (\overline{M}\Delta d\varphi + \overline{N}\Delta ds + \overline{T}\Delta dh)$$

Zasada pracy wirtualnej jest słuszna niezależnie czy materiał jest **sprężysty** czy **niesprężysty**.
Wynika ona tylko z założenia równowagi układu i ciągłości odkształceń a zapis wynika z założenia płaskich przekrojów.

Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego →dla ciała sztywnego

$$\sum P\overline{\delta} = \int (M\Delta d\overline{\varphi} + N\Delta\overline{ds} + T\Delta\overline{dh})$$

$$\sum \overline{P}\delta = \int (\overline{M}\Delta d\varphi + \overline{N}\Delta ds + \overline{T}\Delta dh)$$

Jeżeli w obydwu równaniach przyjmiemy , że $\Delta d\varphi = \Delta ds = \Delta dh = 0$

co odpowiada założeniu o nieodkształcalności,
to otrzymamy zasadę pracy wirtualnej dla **ciała sztywnego**:

$$\sum P\overline{\delta} = 0, \qquad \sum \overline{P}\delta = 0$$

Zasada pracy wirtualnej dla ciała odkształcalnego – tylko zginanie

Przy małym wpływie sił normalnych i tnących możemy przyjąć

$$\sum \overline{P}\delta = \int \overline{M}\Delta d\varphi$$

$$\sum P\overline{\delta} = \int M\Delta \overline{d\varphi}$$

Przemieszczenia w układach prętowych

Pod wpływem obciążenia układu powstaną siły wewnętrzne powodujące **odkształcenia** dane wzorami

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds, \quad \Delta ds = \frac{N}{EA} ds, \quad \Delta dh = k \frac{T}{GJ} ds$$

Odkształcenia te określają rzeczywisty stan przemieszczeń. Wtedy szukane przemieszczenie o składowej δ_i jest wyrażone równaniem

$$\overline{1} \cdot \delta_i = \int_s M \overline{\Delta d\varphi} + N \overline{\Delta ds} + T \overline{\Delta dh})$$

Przemieszczenia w układach prętowych

Odpowiednie przyjęcie obciążenia wirtualnego daje wzór na poszukiwane przemieszczenie

$$\delta_i = \int_s \left(\frac{\bar{M}M}{EJ} + \frac{\bar{N}N}{EA} + \frac{\bar{T}T}{GA} \right) ds$$

(po podstawieniu wyrażeń na odkształcenia z poprzedniego slajdu)

Wzór słuszny dla układów statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych!!

Przemieszczenia w układach prętowych – zestawienie wzorów

Belki zginane

$$\delta_i = \int_s \frac{\bar{M}M}{EJ} ds,$$

Kratownice

$$\delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{N}N}{EA} l,$$

Układy ramowo-kratowe

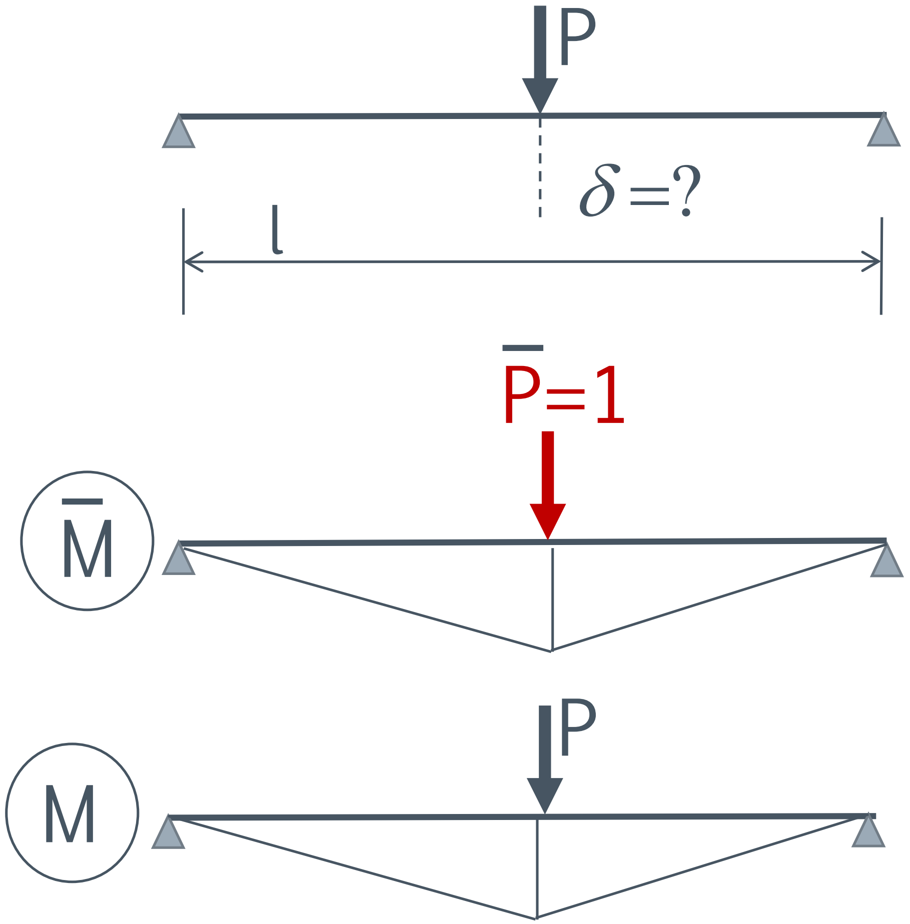
$$\delta_i = \int_s \frac{\bar{M}M}{EJ} ds + \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{N}N}{EA} l,$$

Dźwigary załamane w planie

$$\delta_i = \int_s \frac{\bar{M}M}{EJ} ds + \int_s \frac{\bar{M}_s M_s}{GJ_o} ds,$$

Przemieszczenia w układach wyznaczalnych

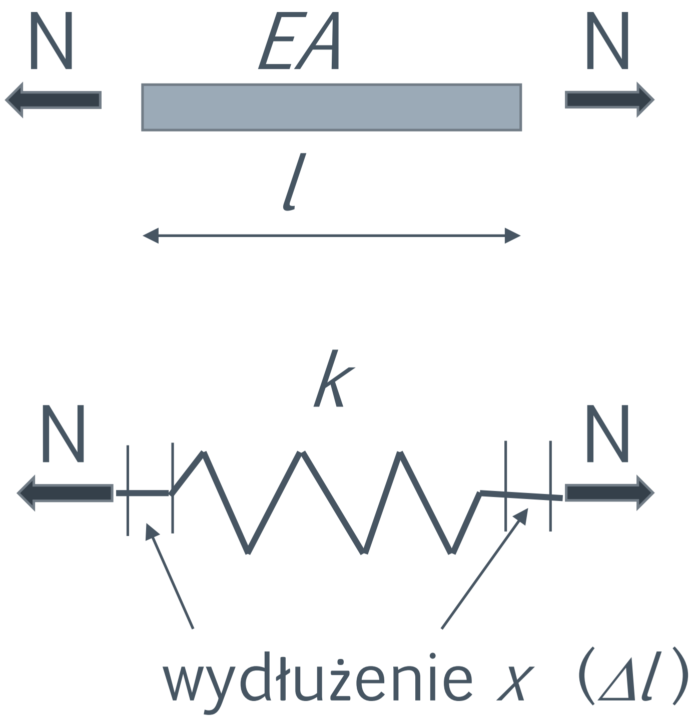
Obliczyć przemieszczenie w środku belki



$$\delta_i = \int_s \frac{\bar{M}M}{EJ} ds$$

Wpływ podpory sprężystej.

Sztywność podpory sprężystej *k*



$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$ (z prawa Hooke'a)

$$N = \frac{EA}{l}\Delta l$$

$$N = k\,x$$

$$k = \frac{EA}{l}$$

Wpływ podpory sprężystej na szukane przemieszczenie można znaleźć modyfikując wzór na obliczanie przemieszczeń dla kratownic:

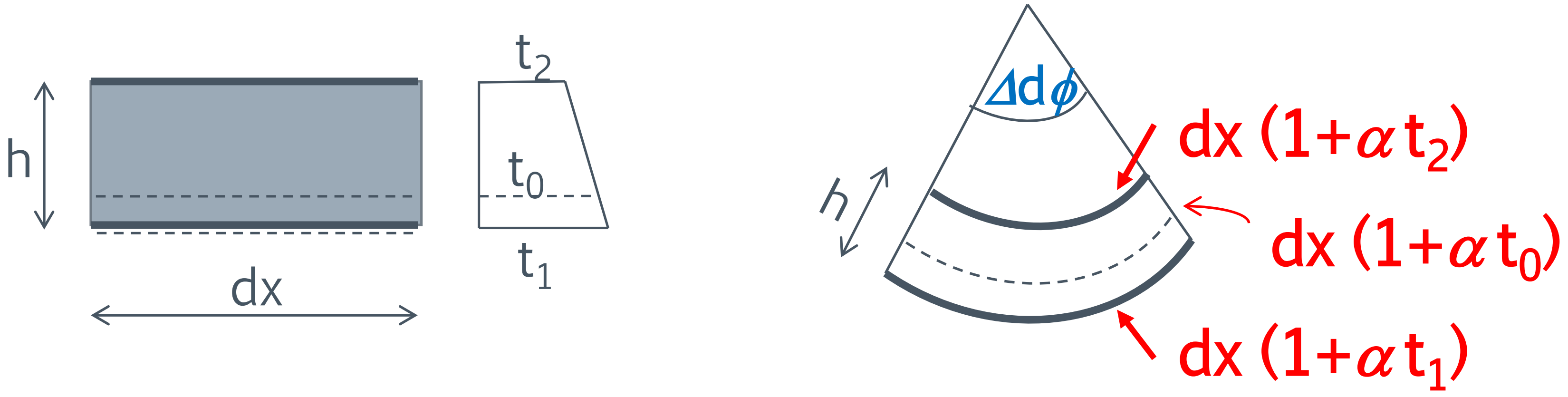
$$\overline{1}\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \overline{N}_i}{EA_i} l_i \Rightarrow \overline{1}\delta = \frac{N\overline{N}}{k}$$

kratownice

podpory sprężyste

Wpływ temperatury

Zakładamy liniową zmianę temperatury w przekroju pręta



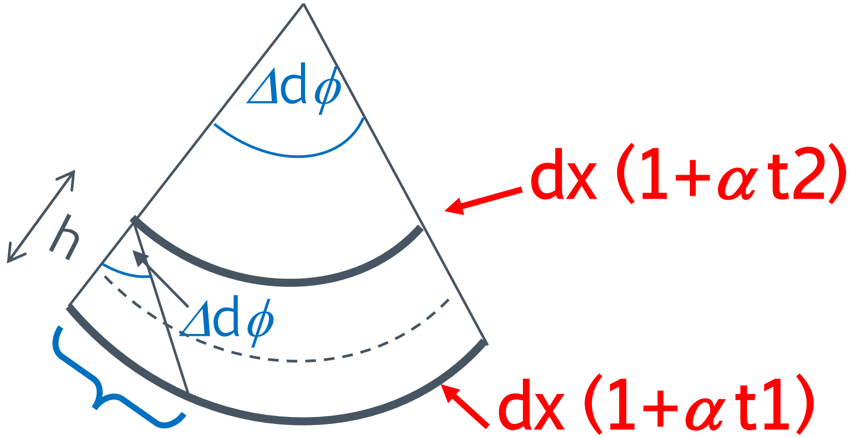
Na skutek nagrzania włókna pręta wydłużą się wprost proporcjonalnie do temperatury na danym poziomie.

Przekrój pręta po nagrzaniu pozostanie płaski ale pręt zakrzywi się.

- długość skrajnych włókien górnych dx $(1+\alpha t_2)$,
- długość włókien dolnych dx $(1+\alpha t_1)$.

α – **wspł. rozszerzalności cieplnej** (dla betonu i stali = 10^{-5} 1/°C)

Wpływ temperatury



$$\Delta d\varphi = \frac{dx(1+\alpha t_1) - dx(1+\alpha t_2)}{h} = \frac{\alpha\overbrace{(t_1 - t_2)}^{\Delta t}}{h}dx$$

$$\Delta d\varphi = \frac{\alpha \Delta t}{h}dx,$$

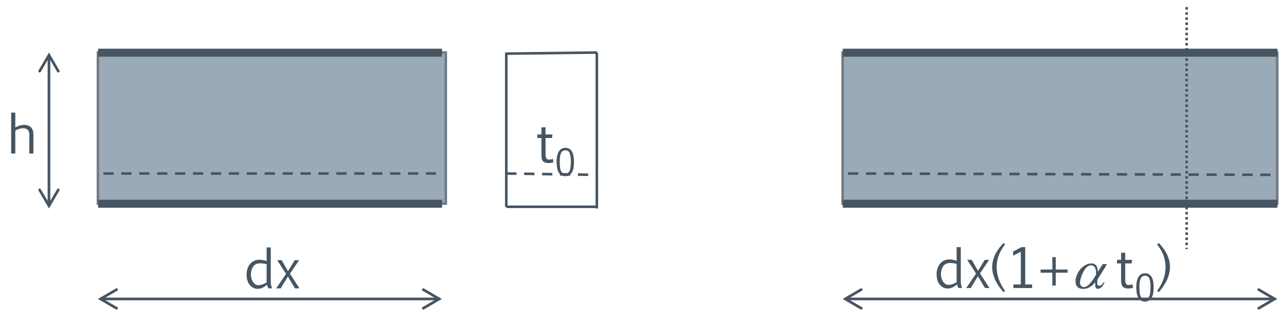
pręty prostoliniowe

$$\Delta d\varphi = \frac{\alpha \Delta t}{h}ds$$

pręty zakrzywione

Wpływ temperatury

Jeżeli t1 = t2 = t0, to pręt nie doznaje zakrzywienia (**ogrzanie równomierne**), tylko wydłuża się.



$$\Delta ds = \alpha t_0 ds$$

Wpływ temperatury

Jeżeli wrócimy do równania na przemieszczenie

$$\overline{1}\cdot\delta_i=\int_s M\Delta d\varphi+N\Delta ds+T\Delta dh$$

i w miejsce odkształceń podstawimy wyrażenia

$$\Delta d\varphi=\frac{\alpha\Delta t}{h}\frac{M_t}{EJ}ds,\quad \Delta ds=\alpha t_0\frac{N_t}{EA}ds,\quad \Delta dh=k\frac{T_t}{GJ}ds$$

otrzymamy

$$\delta_i=\int_s\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}ds+\int_s\overline{N}\alpha t_0 ds+\int_s\left(\frac{\overline{M}M_t}{EJ}+\frac{\overline{N}N_t}{EA}+\frac{\overline{T}T_t}{GA}\right)ds$$

Wpływ temperatury

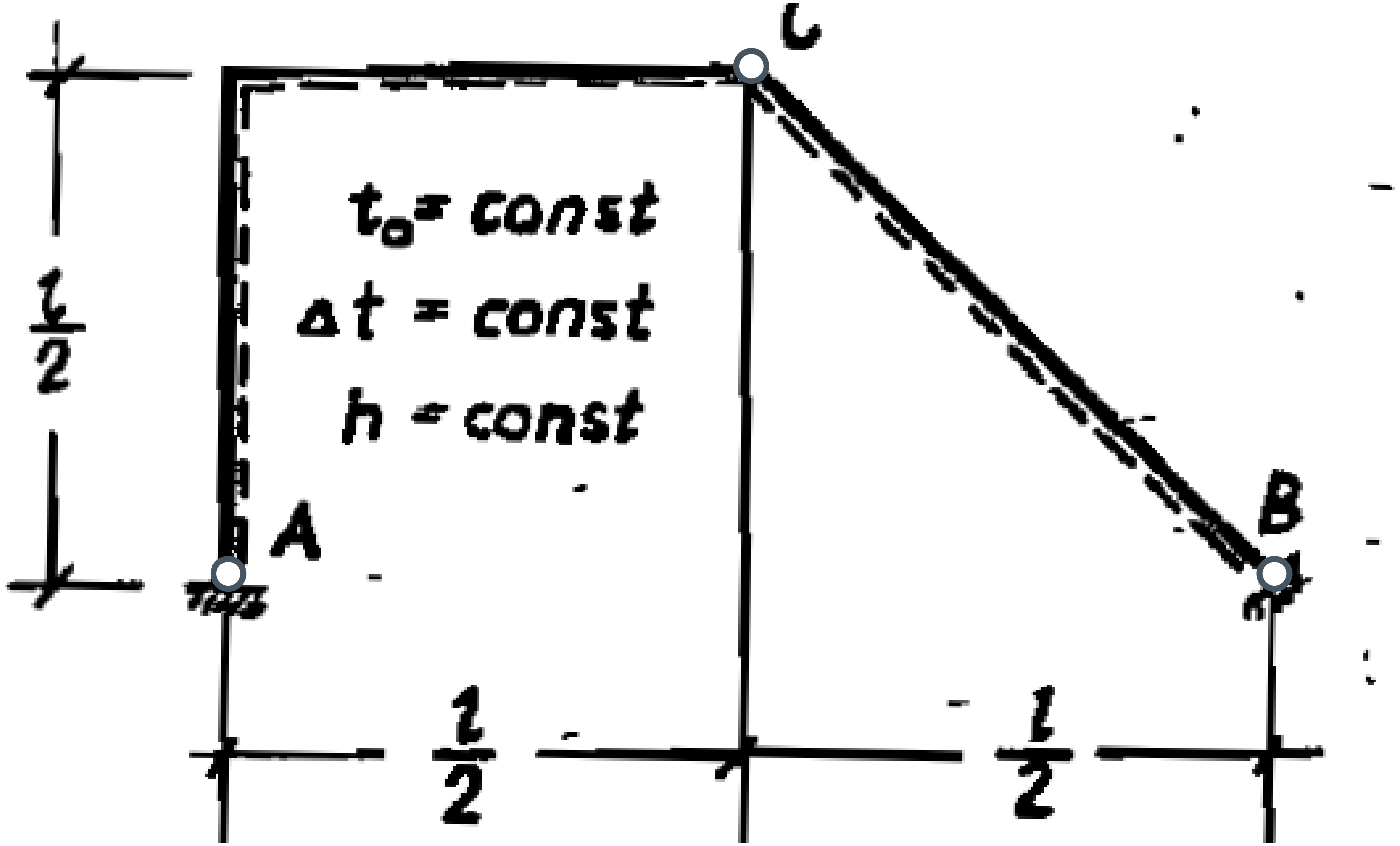
Wiemy, że w układach statycznie wyznaczalnych zmiany temperatury nie powodują sił wewnętrznych, zatem trzecia całka znika.

$$\delta_i = \int_s \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \alpha t_0 ds + \cancel{\int_s \left(\frac{\bar{M} M_t}{EJ} + \frac{\bar{N} N_t}{EA} + \frac{\bar{T} T_t}{GA} \right) ds}$$

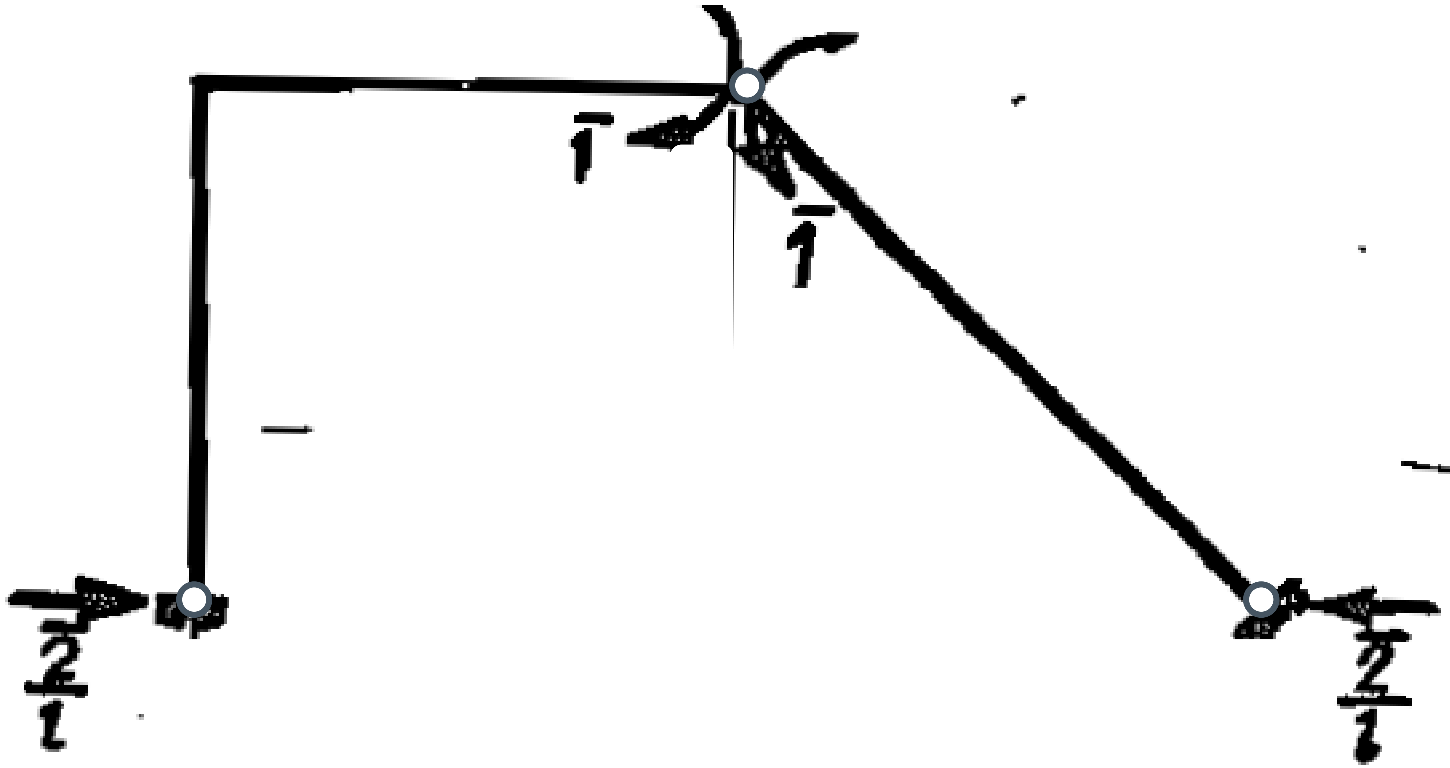
Ale powodują **przemieszczenia:**

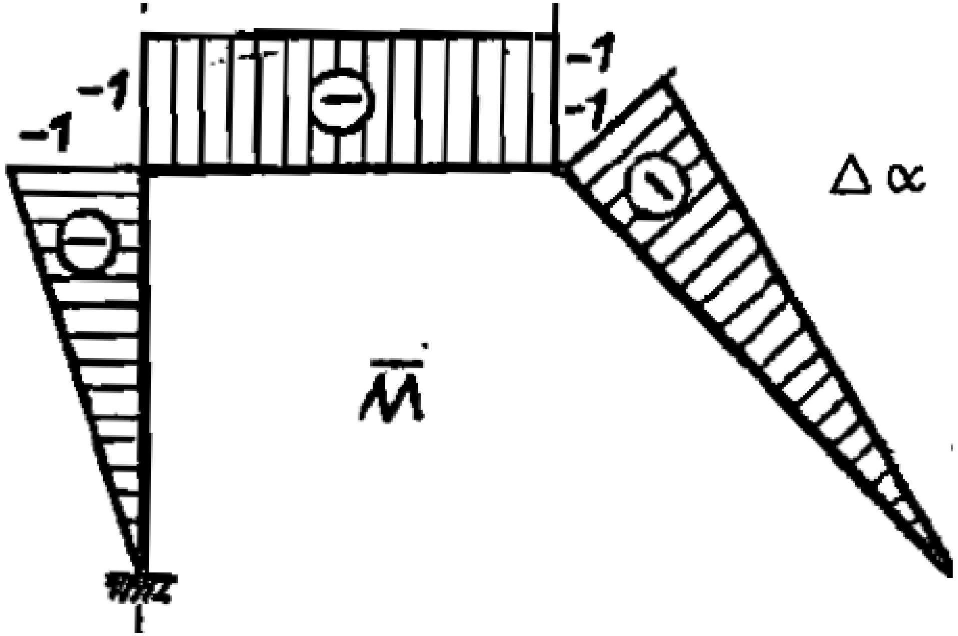
$$\delta_i = \int_s \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \alpha t_0 ds$$

Przykład – obliczyć zmianę kąta między prętami w przegubie C

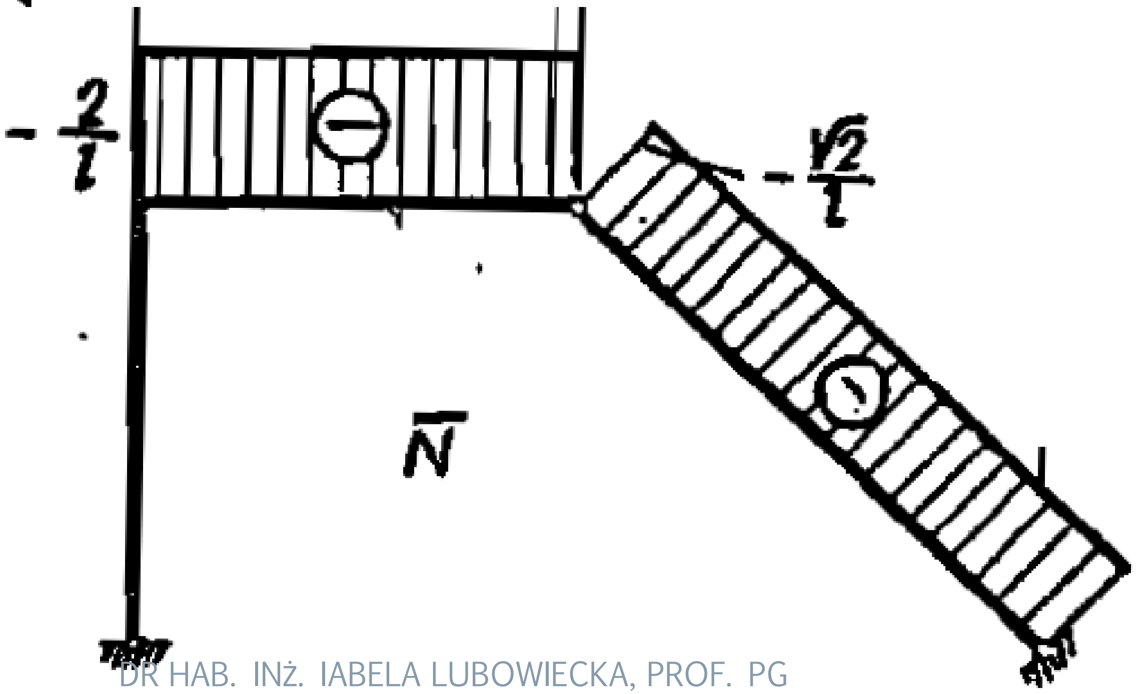


$$\Delta\alpha = \int_s \bar{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}\,ds + \int_s \bar{N}\alpha t_o\,ds$$





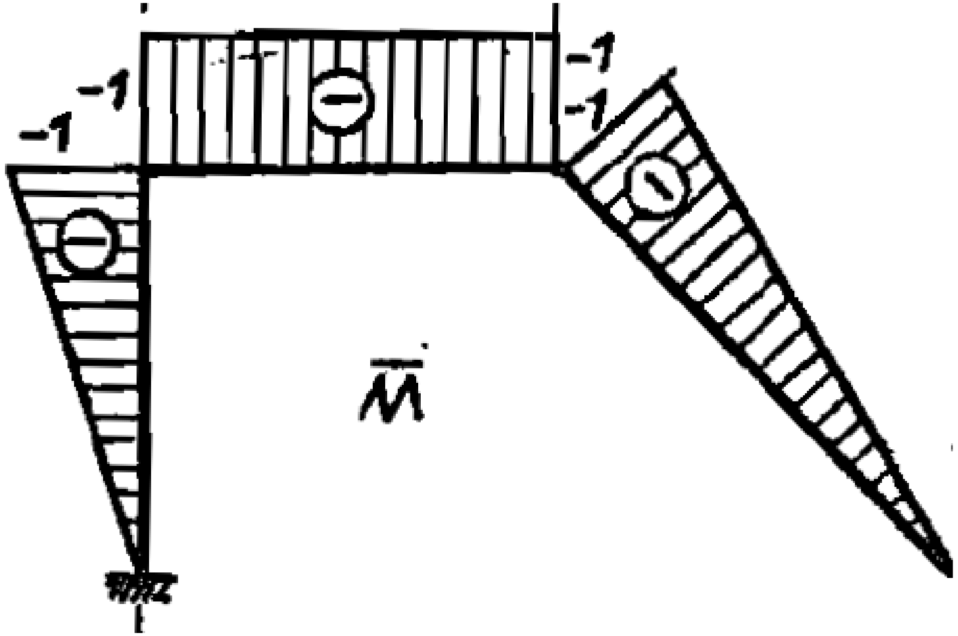
$$\Delta\alpha = \int_s \overline{M}\,\frac{\alpha\Delta t}{h}\,ds + \int_s \overline{N}\alpha t_o\,ds$$



$$\Delta\alpha = \frac{\alpha\Delta t}{h}\int_s \overline{M}ds + \alpha t_o \int_s \overline{N}ds$$

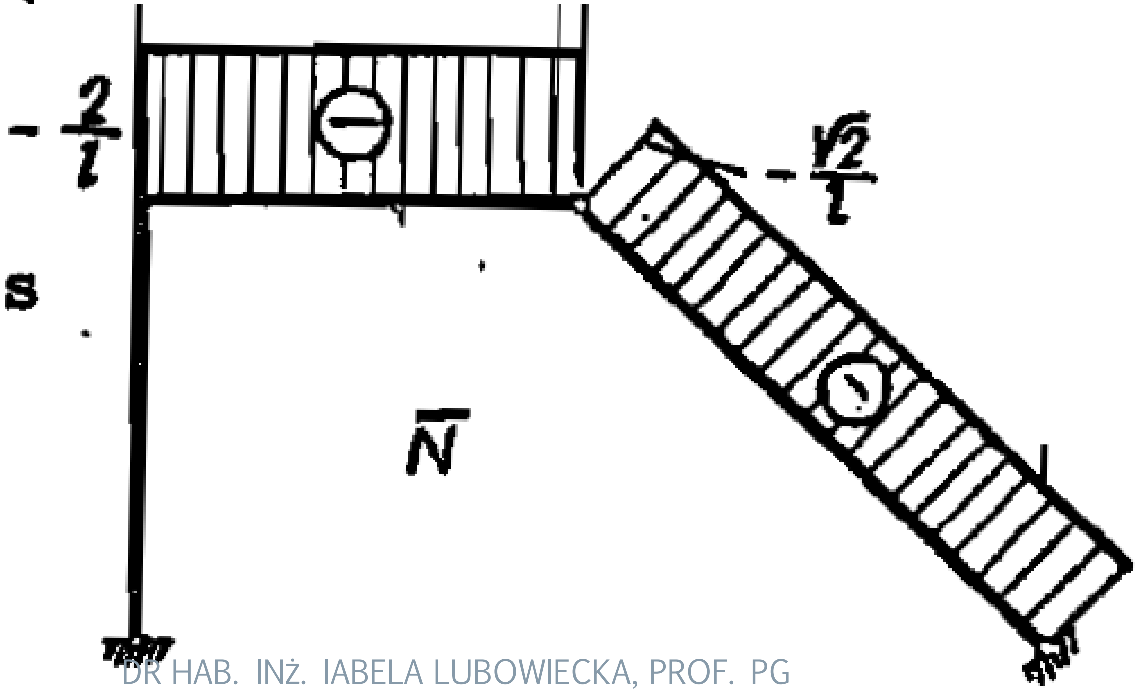
Pole pod wykresem M

Pole pod wykresem N



$$\Delta\alpha = \frac{\alpha\Delta t}{h}\int_S \overline{M}ds + \alpha t_o \int_S \overline{N}ds$$

$$\Delta\alpha = -\frac{3+\sqrt{2}}{4}\frac{\alpha\Delta t l}{h} - 2\alpha t_o$$



Wpływ przemieszczenia podpór

Przez $M_\triangle$, $N_\triangle$, $T_\triangle$ oznaczmy siły wewnętrzne wywołane przemieszczeniem podpór. Rzeczywisty stan odkształceń będzie wtedy opisany składowymi

$$\Delta d\varphi = \frac{M_\Delta}{EJ} ds, \quad \Delta ds = \frac{N_\Delta}{EA} ds, \quad \Delta dh = k \frac{T_\Delta}{GJ} ds$$

Po wstawieniu wirtualnej siły jednostkowej w miejscu przemieszczonej podpory i zapisaniu równania pracy wirtualnej mamy

$$\overline{1} \cdot \delta_i + \sum \overline{R}\Delta = \int_s \overline{M}\Delta d\varphi + \overline{N}\Delta ds + \overline{T}\Delta dh)$$

I dalej

$$\delta_i = -\sum \overline{R}\Delta + \int_s \left(\frac{\overline{M}M_\Delta}{EJ} + \frac{\overline{N}N_\Delta}{EA} + \frac{\overline{T}T_\Delta}{GA} \right) ds$$

Wpływ przemieszczenia podpór

Jeżeli układ jest statycznie wyznaczalny, to przemieszczenia podpór nie wywołują w nim sił wewnętrznych, czyli

$$\delta_i = -\sum \overline{R}\Delta + \xcancel{\int_s \left(\frac{\overline{M}M_\Delta}{EJ} + \frac{\overline{N}N_\Delta}{EA} + \frac{\overline{T}T_\Delta}{GA} \right) ds}$$

ale powodują przemieszczenia wyrażone wzorem

$$\delta_i = -\sum \overline{R}\Delta$$

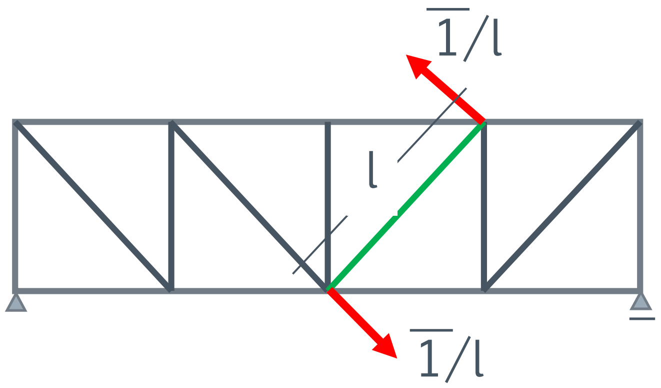
Przemieszczenia w kratownicach - translacja

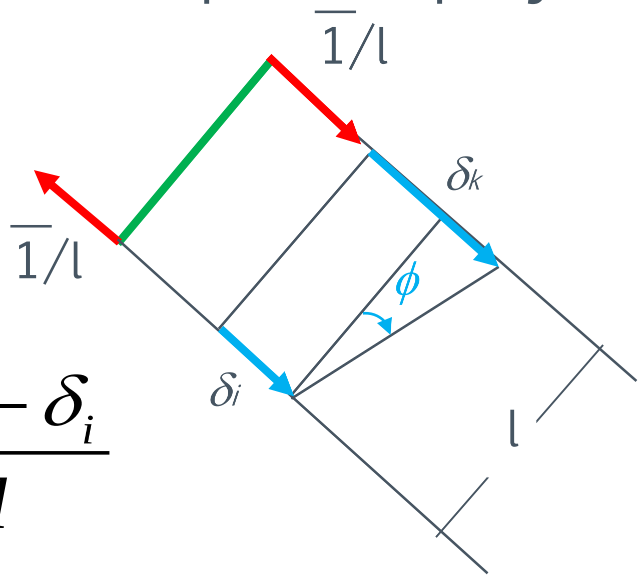
Przemieszczenie w kratownicach obciążonych węzłowo

$$\delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{N}N}{E_i A_i} l$$

Przemieszczenia w kratownicach - obrót

Kąt obrotu pręta kratownicy – moment w postaci pary sił





$$\varphi = \frac{\delta_k - \delta_i}{l}$$

Równanie pracy wirtualnej :

$$-\frac{\overline{1}}{l}\delta_i + \frac{\overline{1}}{l}\delta_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{N}N}{E_i A_i} l, \qquad \frac{\delta_k - \delta_i}{l} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{N}N}{E_i A_i} l = \varphi}$$

Przemieszczenia w kratownicach – temperatura

Wpływ temperatury – wzór ogólny (*temperatura w pręcie stała*)

$$\delta_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \alpha\, t_0 l_i + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{N}_i N_{ti}}{E_i A_i} l_i}$$

Kratownice statycznie wyznaczalne

$$\delta_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \alpha\, t_0 l_i$$

Przemieszczenia w kratownicach – przemieszczenia podpór

Wpływ przemieszczenia podpór - ogólny

$$\delta_i = -\sum_{i=1}^{n} \bar{R}\Delta + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{N}_i N_{\Delta i}}{E_i A_i} l_i}$$

przemieszczenie podpór – kratownice statycznie wyznaczalne

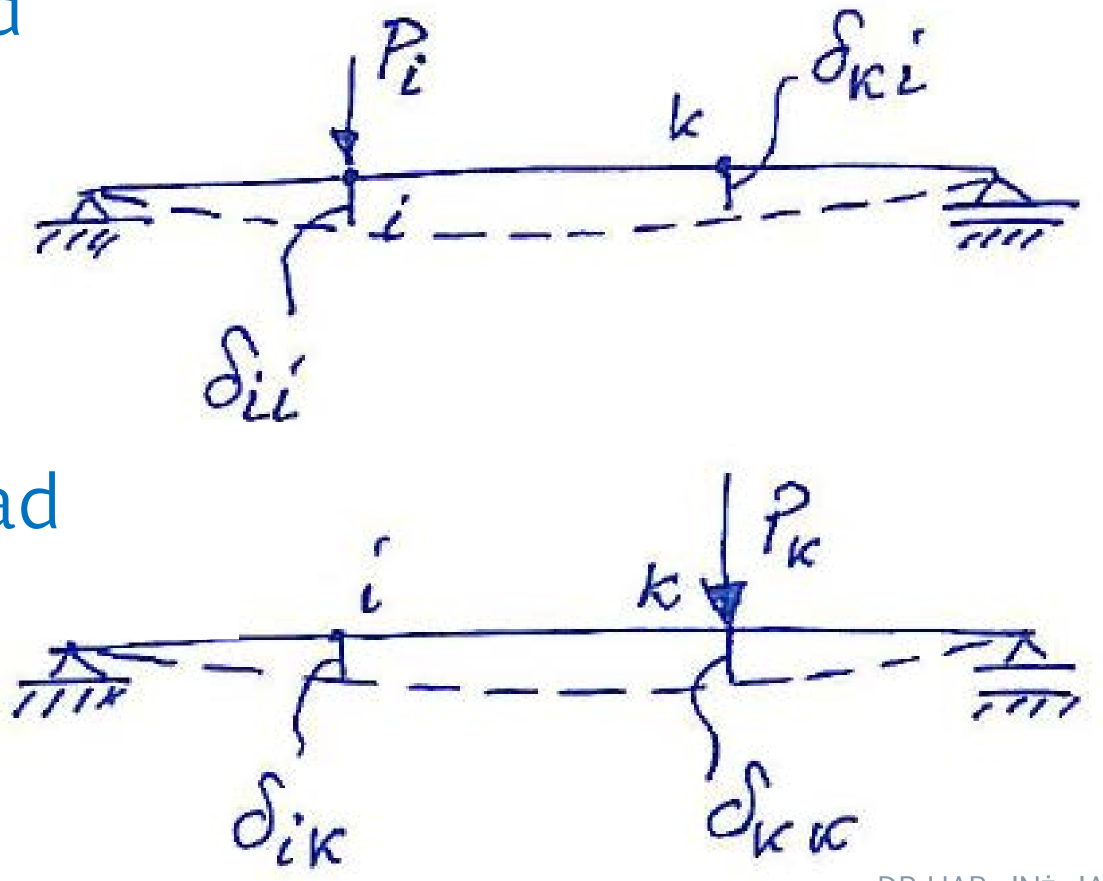
$$\delta_i = -\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \Delta$$

Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)

Dwa układy statyczne

I układ

II układ



δ_{ik}

przyczyna

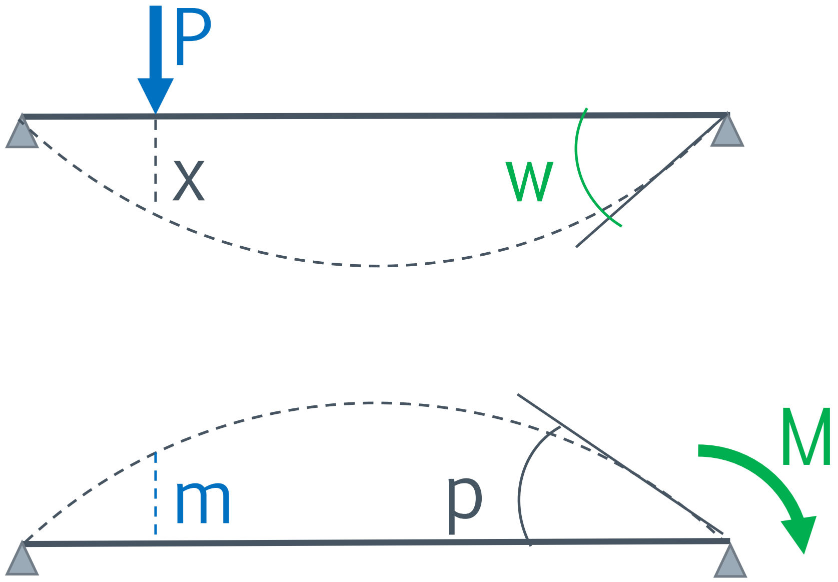
miejsce

Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)

Praca siły P_i na przemieszczeniu wywołanym siłą P_k jest równa pracy siły P_k na przemieszczeniu wywołanym siłą P_i.

$$\boxed{P_i \delta_{ik} = P_k \delta_{ki}}$$

Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)
(dla sił uogólnionych – moment i siła skupiona)

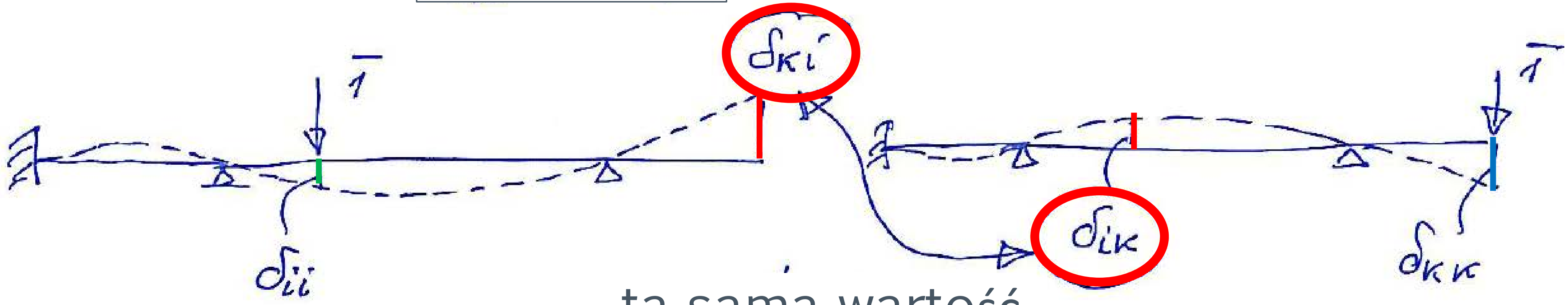


$$\boxed{P*m = M*w}$$

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń Betti-Maxwella

Jeżeli założymy we wzorze Bettiego $P_i = P_k = 1$

$$\boxed{\delta_{ik} = \delta_{ki}}$$



ta sama wartość
przemieszczeń

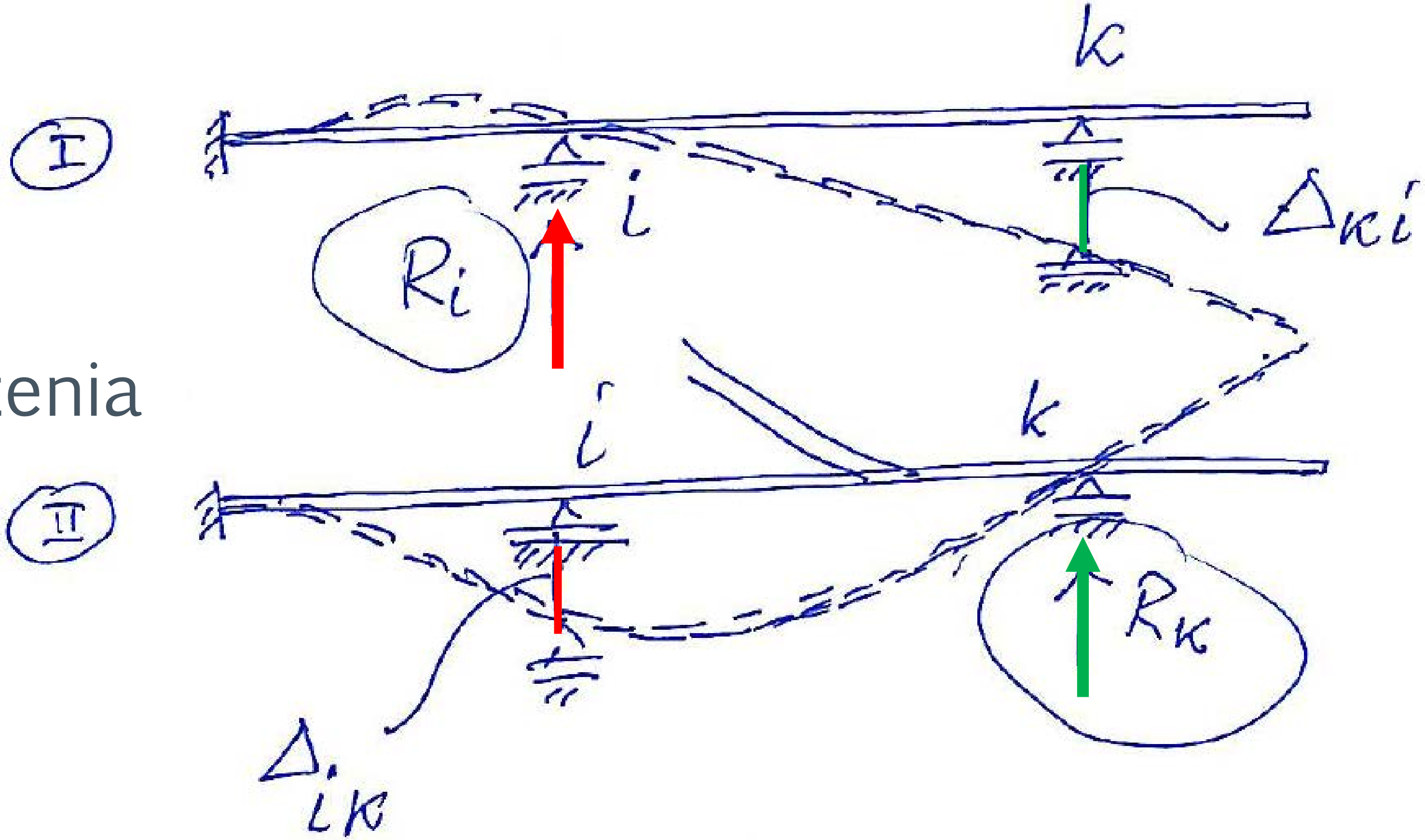
Twierdzenie o wzajemności reakcji Rayleigh'a

$$P_i \delta_{ik} = P_k \delta_{ki}$$

$$\underline{R_i \Delta_{ik}} = \underline{R_k \Delta_{ki}}$$

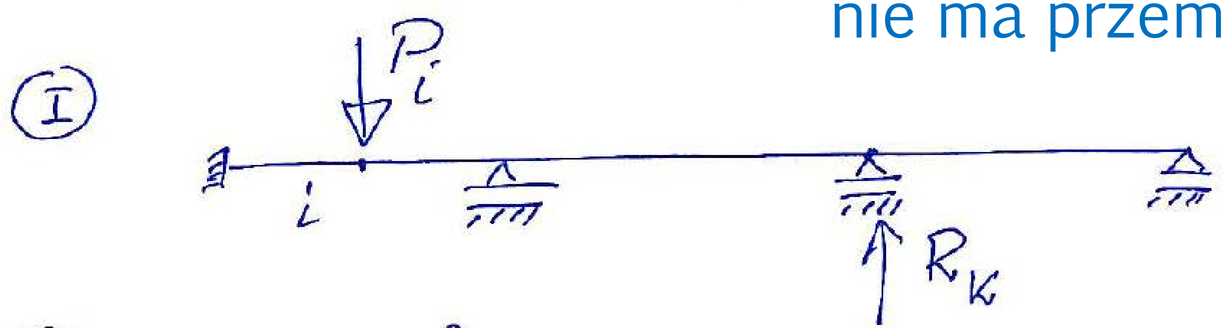
Jeżeli przemieszczenia podpór = 1, to

$$\boxed{R_i = R_k}$$



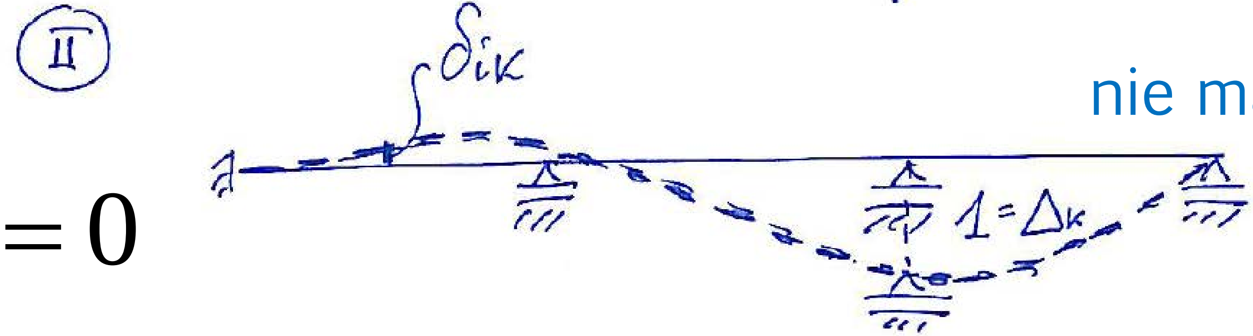
Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń Mueller'a-Breslaua

nie ma przemieszczeń podpór .



$$\sum P_i \delta_{ik} = 0,$$

nie ma sił



$$P_i \delta_{ik} + R_k \Delta_k = 0$$

$$\boxed{R_k = -\delta_{ik}}$$

Można stosować do wyznaczania linii wpływowych

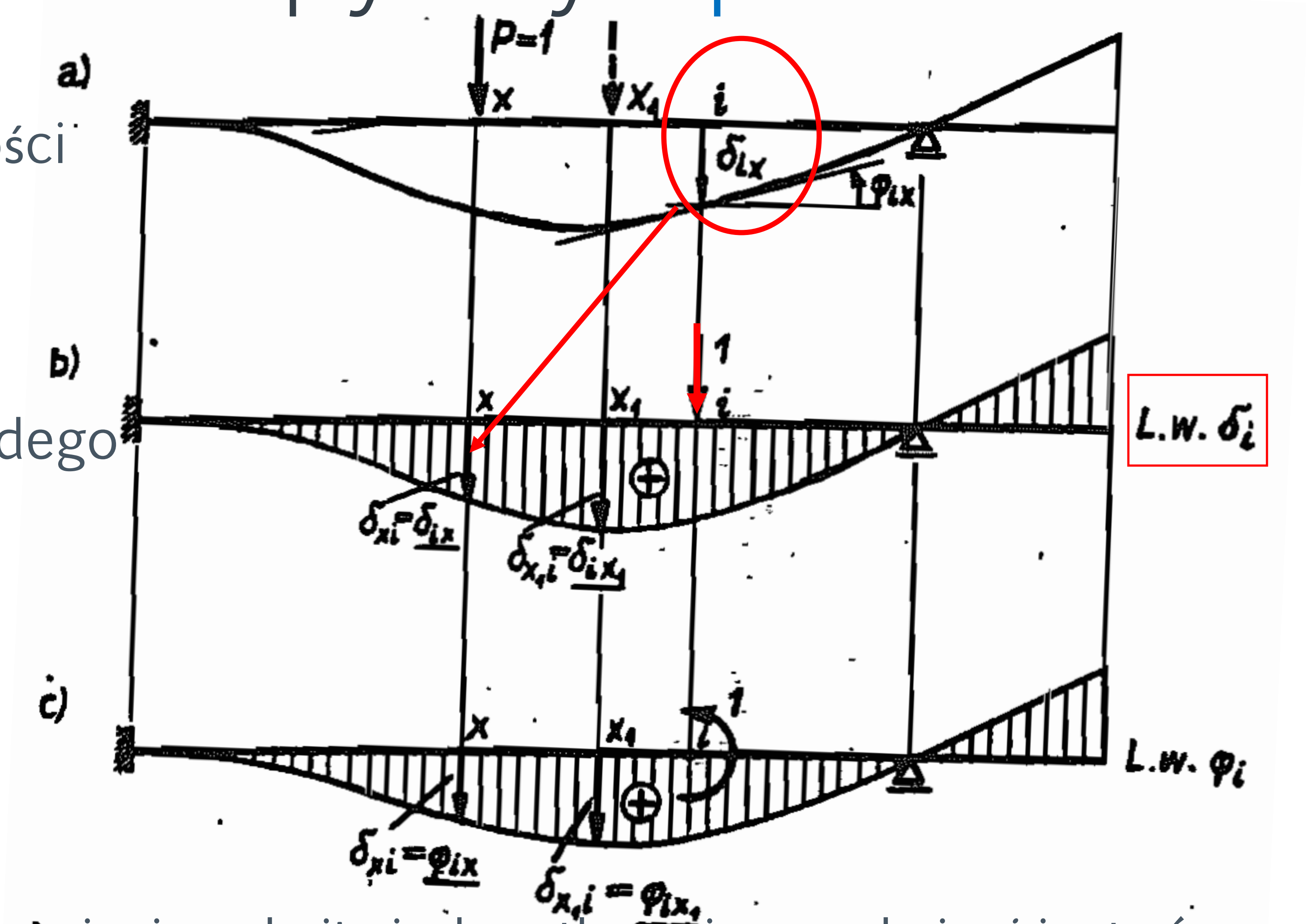
Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń

Z tw. o wzajemności przemieszczeń:

$$\delta_{xi} = \delta_{ix}$$

podobnie dla każdego położenia siły

$$\delta_{x_1 i} = \delta_{i x_1}$$



Każda rzędna linii ugięcia od siły jednostkowej w punkcie *i* jest równa ugięciu δ_i, jakie wywołuje siła znajdująca się nad tą właśnie rzędną linii ugięcia.

Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń

Każda rzędna linii ugięcia od siły jednostkowej w punkcie *i* jest równa ugięciu δ_i, jakie wywołuje siła znajdująca się nad tą właśnie rzędną linii ugięcia.

Oznacza to, że **linia ugięcia od siły jednostkowej** zaczepionej w punkcie *i* jest linią wpływu ugięcia w tym punkcie dla poruszającej się siły pionowej.

Podobnie z tw. Maxwella w postaci $\delta_{ik} = \phi_{ki}$ możemy stwierdzić, że linia wpływu kąta obrotu w punkcie *i* jest identyczna **z linią ugięcia od obciążenia momentem** jednostkowym zaczepionym w tym punkcie.