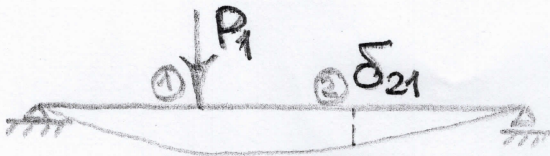


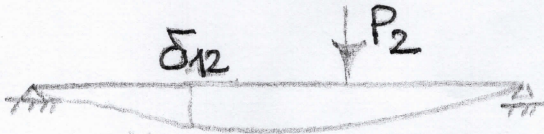
TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCI - ilustracja 1

- o wzajemności prac - najbardziej ogólne

* stan ①



stan ②

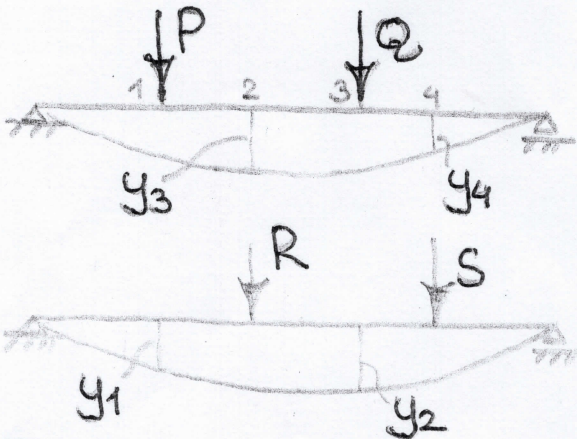


$$P_1 \cdot \delta_{12} = P_2 \cdot \delta_{21}$$

Praca sił z jednego stanu na przemieszczeniach ze stanu drugiego równa jest pracy sił ze stanu drugiego na przemieszczeniach ze stanu pierwszego

Dotyczy także układu sił

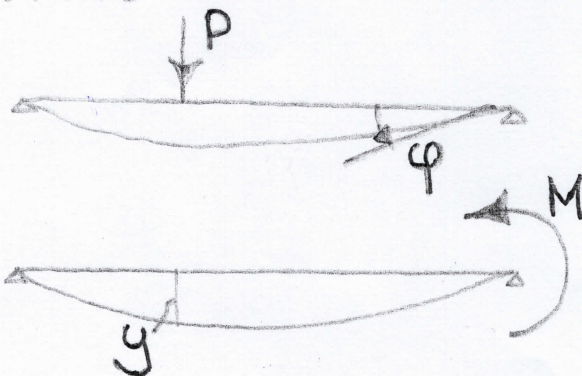
*



$$P \cdot y_1 + Q \cdot y_2 = R \cdot y_3 + S \cdot y_4$$

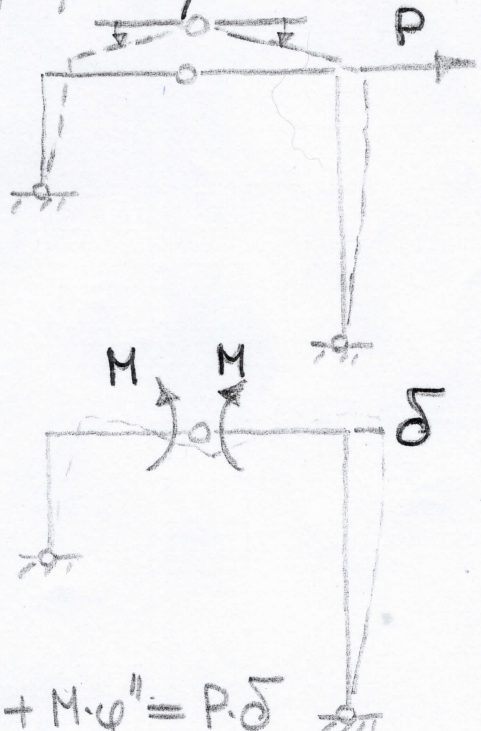
Uogólnienie:

*



$$P \cdot y = M \cdot \varphi$$

$$* \varphi' + \varphi'' = \Delta \varphi$$



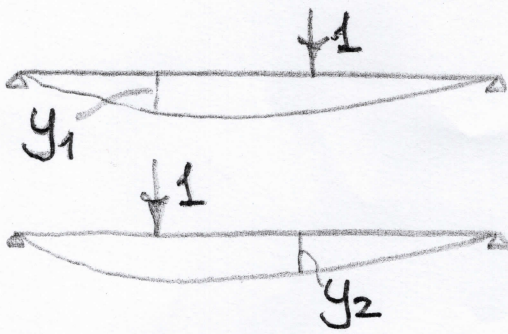
$$M \cdot \varphi' + M \cdot \varphi'' = P \cdot \delta$$

$$M \cdot \Delta \varphi = P \cdot \delta$$

Gdy w obu stanach działają siły $P=1$

- tw. o wzajemności przemieszczeń

*

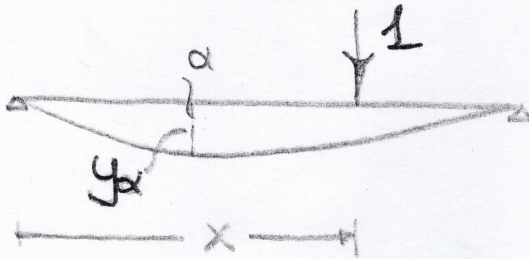


$$1 \cdot y_1 = 1 \cdot y_2$$

$$\underline{y_1 = y_2}$$

Szczególne zastosowanie

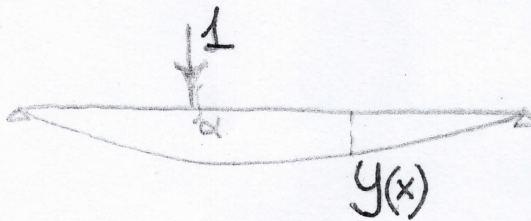
①



siła $P=1$ w punkcie o wsp. x -
w wybranym przekroju α
ugięcie y_α , zależne od
położenia siły - $y_\alpha = y_\alpha(x)$

Jest to rzędną tzw. linii wpływowej
przemieszczenia y_α

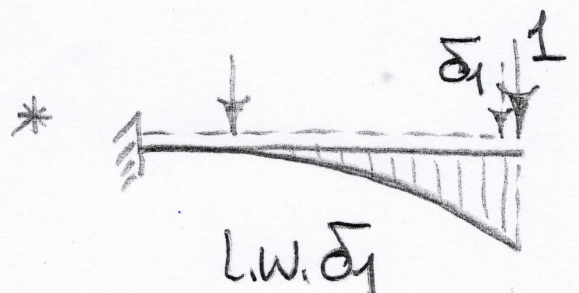
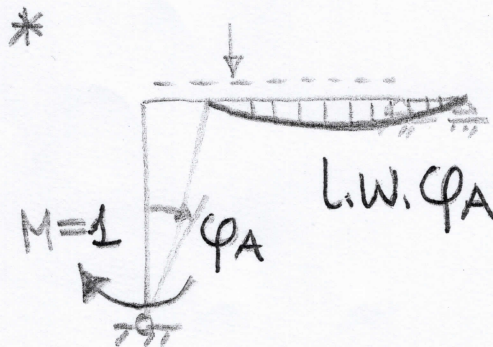
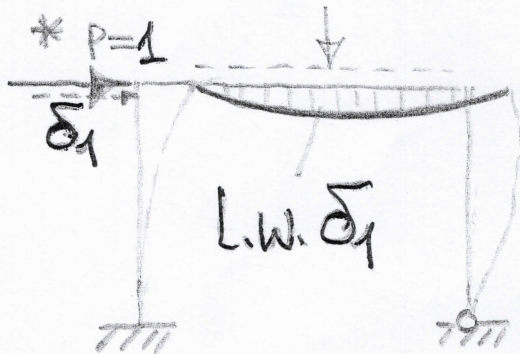
②



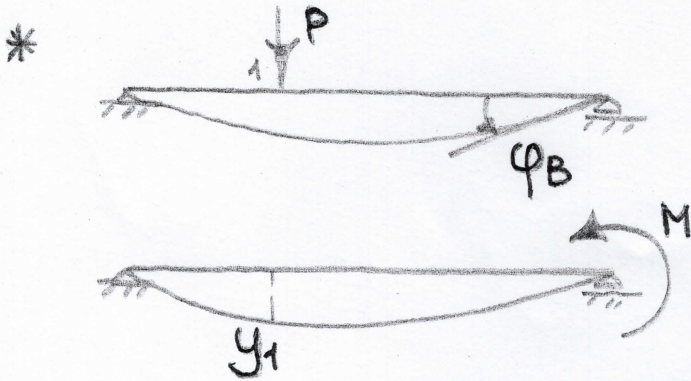
siła $P=1$ w przekroju α -
punkt o współrzędnej x doznaje
ugięcia $y(x)$

$$1 \cdot y_\alpha(x) = 1 \cdot y(x) \Rightarrow \underline{y_\alpha(x) = y(x)}$$

Linia wpływowa przemieszczenia y_α jest linią ugięcia danego elementu od siły $P=1$ przyłożonej w przekroju α .



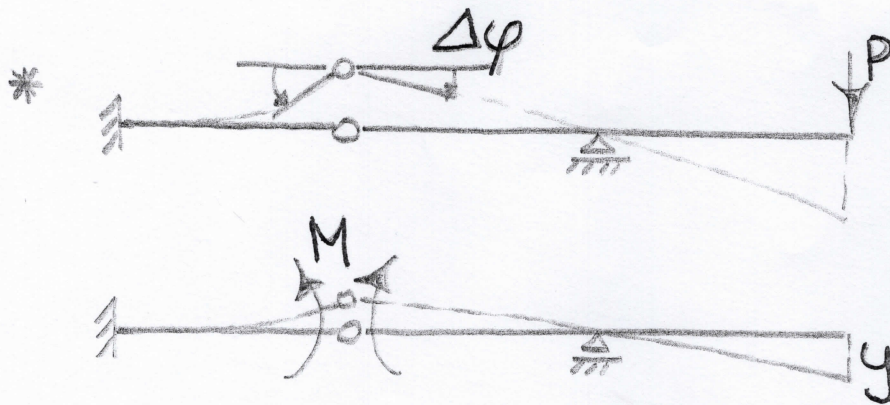
Wielkości uogólnione:



$$P \cdot y_1 = M \cdot \varphi_B$$

gdy $P=1$
i $M=1$

$$\underline{y_1 = \varphi_B}$$

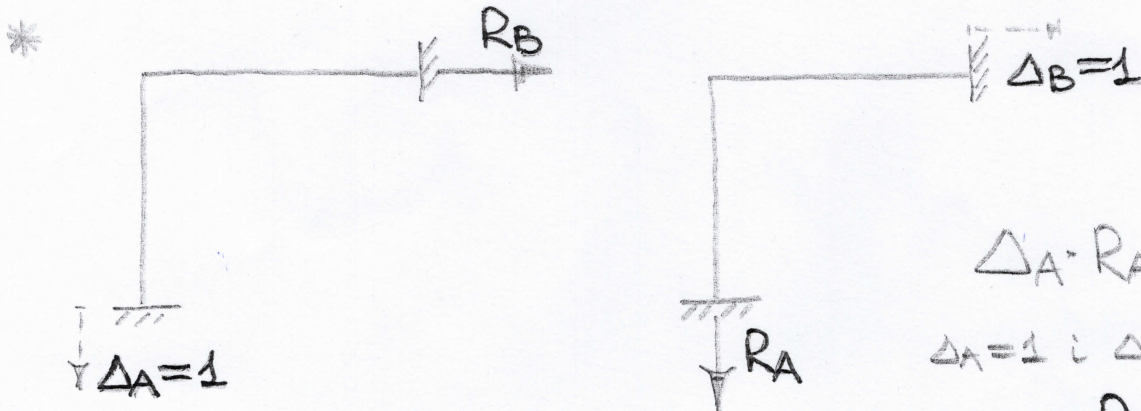


$$M \cdot \Delta \varphi = P \cdot y$$

gdy $P=1$
i $M=1$

$$\underline{\Delta \varphi = y}$$

- tw. o wzajemności reakcji

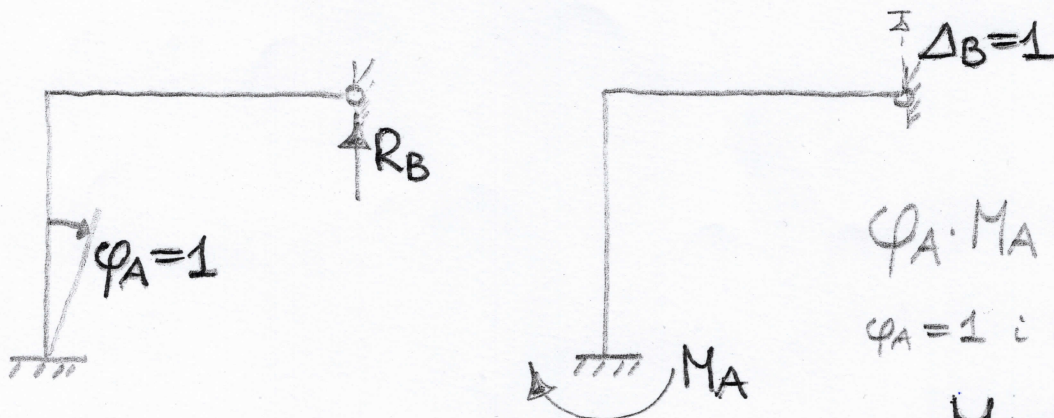


$$\Delta_A \cdot R_A = \Delta_B \cdot R_B$$

$\Delta_A = 1$ i $\Delta_B = 1 \Rightarrow$

$$\underline{R_A = R_B}$$

Również wielkości uogólnione



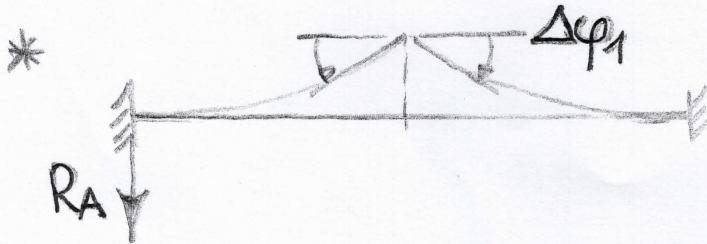
$$\varphi_A \cdot M_A = \Delta_B \cdot R_B$$

$\varphi_A = 1$ i $\Delta_B = 1 \Rightarrow$

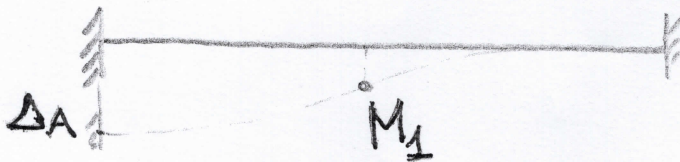
$$\underline{M_A = R_B}$$

Wzajemność reakcji i uogólnionych sił

wewnętrznych



W p.1
Wymuszenie kinematyczne
wewnętrzne (w danym przekroju) -
odpowiednik błędu montażowego,
w stanie tym powstaje reakcja R_A

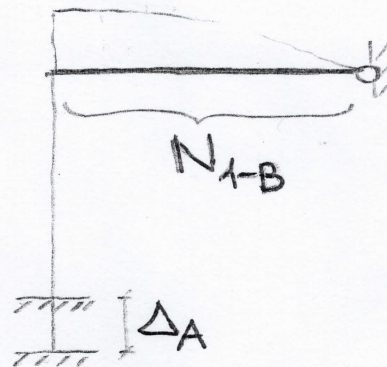
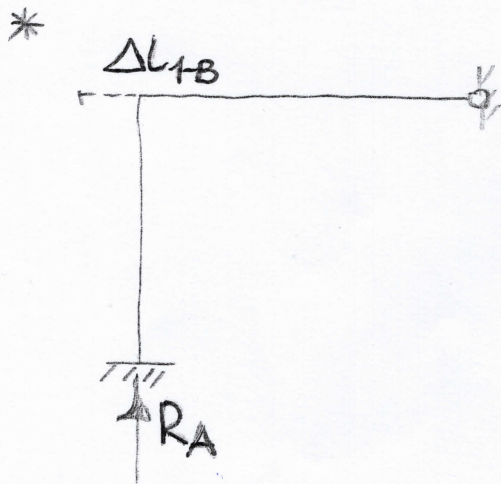


wymuszenie kinematyczne Δ_A -
w p.1 moment zginający
o wartości M_1

gdy $\Delta\varphi_1=1$ i $\Delta_1=1$

$$R_A \cdot \Delta_A = M_1 \cdot \Delta\varphi_1$$

$$\underline{R_A = M_1}$$



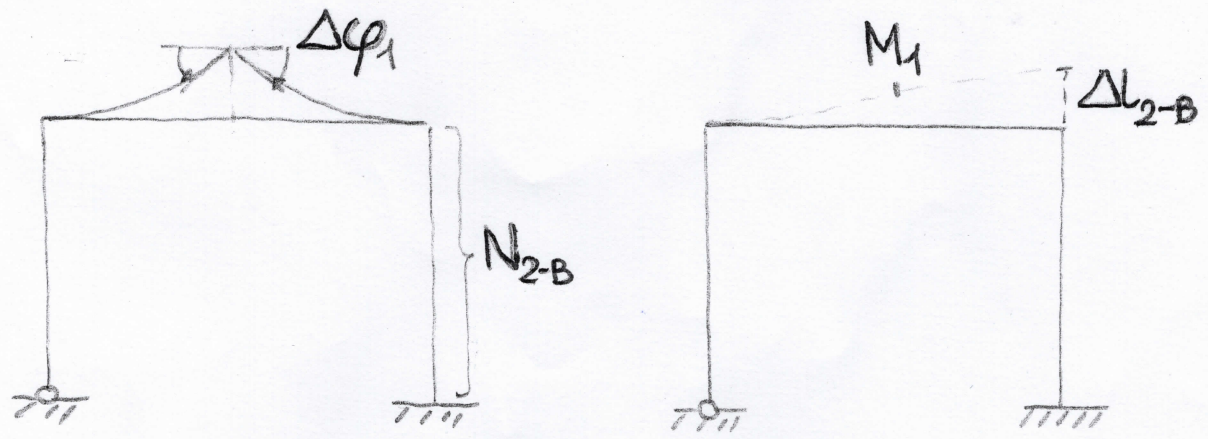
gdy $\Delta L_{1-B}=1$ i $\Delta_A=1$

$$R_A \cdot \Delta_A = N_{1-B} \cdot \Delta L_{1-B}$$

$$\underline{R_A = N_{1-B}}$$

- wzajemność uogólnionych sił wewnętrznych

*

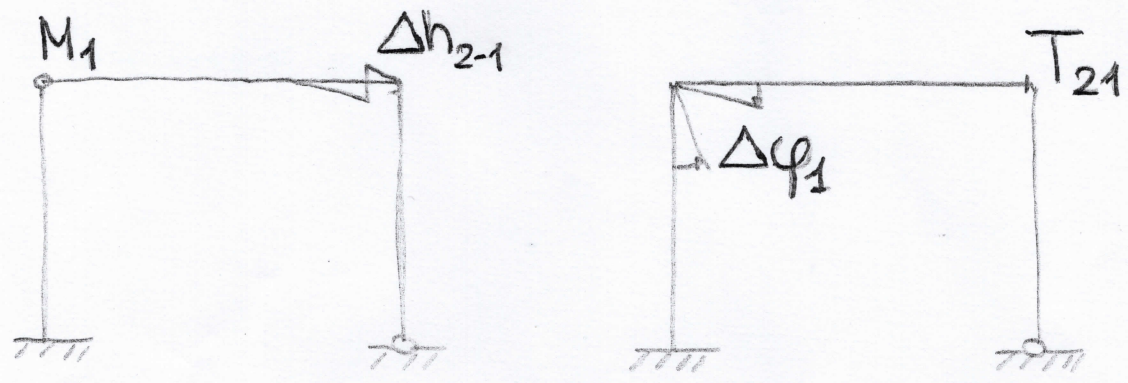


$$\Delta\varphi_1 \cdot M_1 = N_{2-B} \cdot \Delta l_{2-B}$$

gdy $\Delta\varphi_1 = 1$ i $\Delta l_{2-B} = 1$

$$\underline{M_1 = N_{2-B}}$$

*



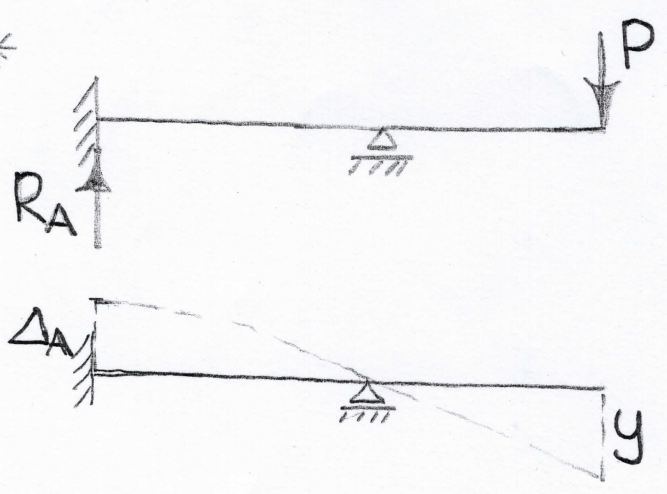
$$M_1 \cdot \Delta\varphi_1 = T_{2-1} \cdot \Delta h_{2-1}$$

gdy $\Delta h_{2-1} = 1$ i $\Delta\varphi_1 = 1$

$$\underline{M_1 = T_{2-1}}$$

- tw. o wzajemności reakcji i przemieszczeń

*

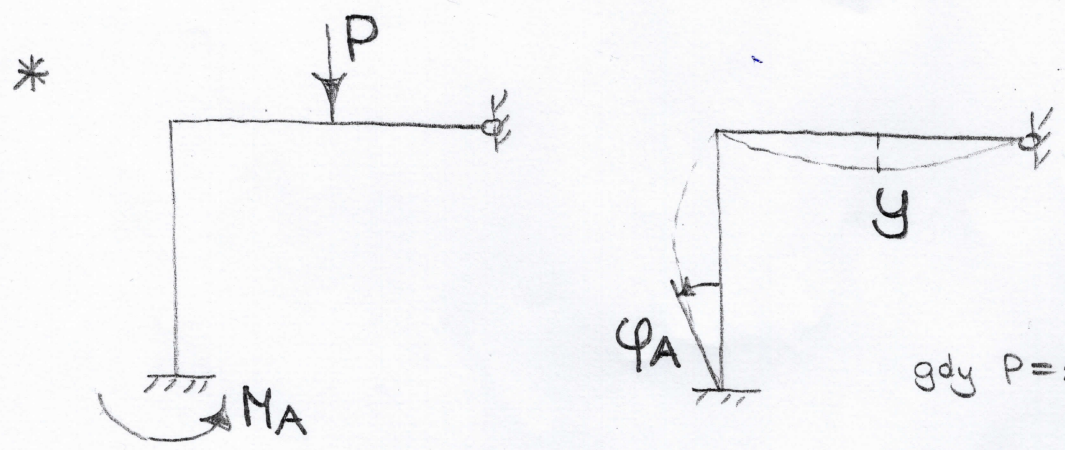


$$P \cdot y + R_A \cdot \Delta A = 0$$

prawa strona równa zero - reakcje ze stanu drugiego nie wykonują pracy na nieistniejących przemieszczeniach podpor w stanie pierwszym

gdy $P = 1$ i $\Delta A = 1$

$$\underline{R_A = -y}$$

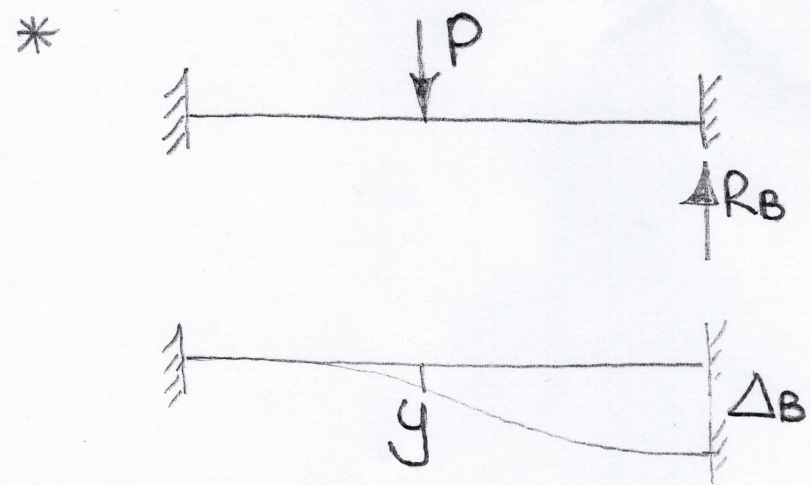


$$P \cdot y + M_A \cdot \varphi_A = 0$$

gdy $P=1$ i $\varphi_A=1$

$$\underline{M_A = -y}$$

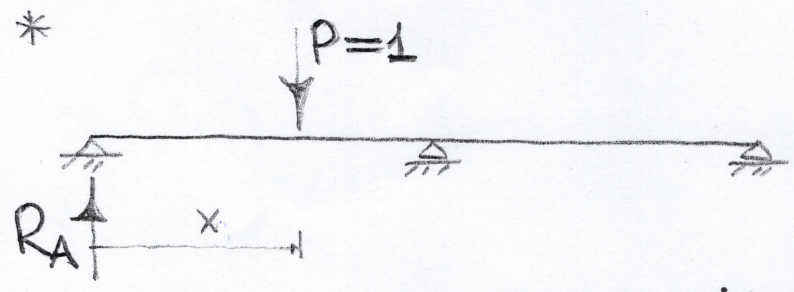
Założenie: wymuszenie kinematyczne będziemy zakładać przeciwnie do dodatniego zwrotu reakcji podporowej



$$P \cdot y + R_B \cdot (-\Delta_B) = 0$$

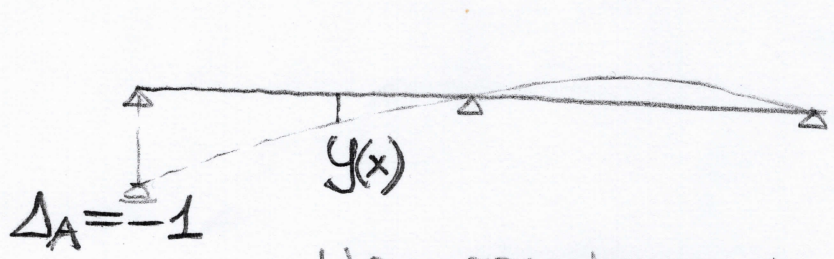
gdy $P=1$
i $\Delta_B=1$

$$\underline{R_B = y}$$



Siła $P=1$ w punkcie o wsp. x - reakcje R_A zależy od położenia siły

Wielkość $R_A = R_A(x)$ jest rzędną linii wpływowej reakcji R_A w punkcie x .



Jednostkowe wymuszenie kinematyczne podp. A o zwrocie przeciwnym do reakcji R_A ($\Delta_A = -1$)

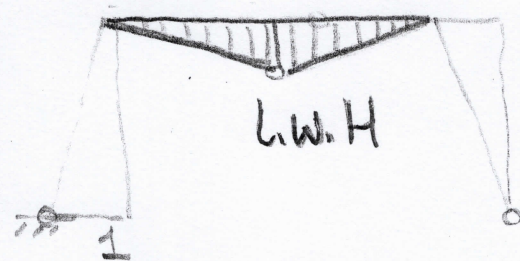
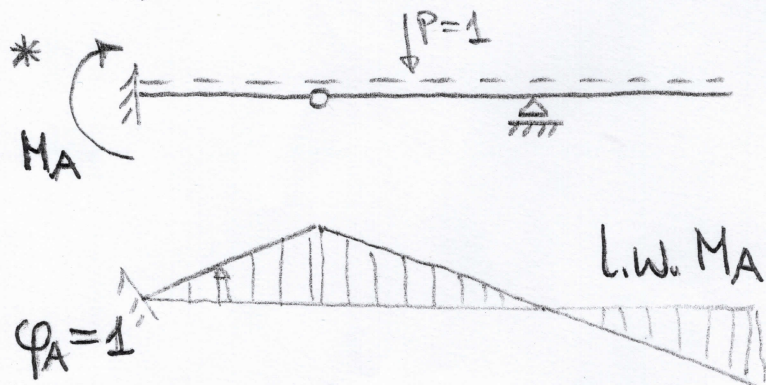
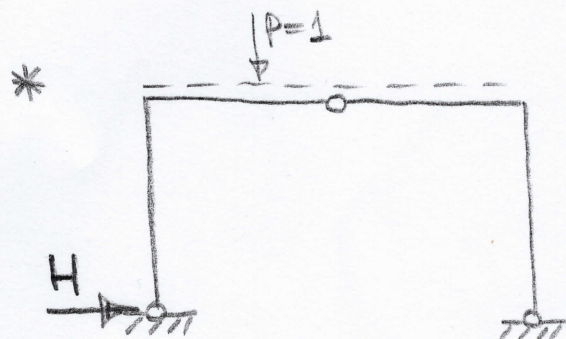
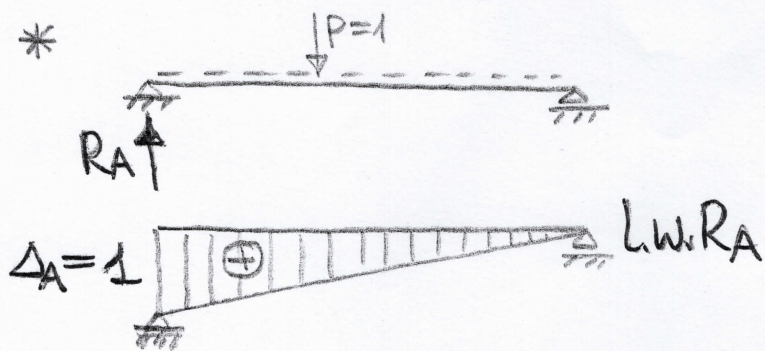
W p. x przemieszczenie $y = y(x)$ jest rzędną linii ugięcia dla danego stanu

$$P \cdot y(x) + R_A(x) \cdot \Delta_A = 0$$

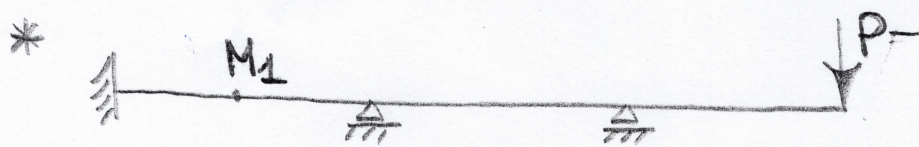
$$\Rightarrow R_A(x) = y(x)$$

$P=1$
 $\Delta_A=-1$

Linia wplykowa reakcji podporowej jest linia ugięcia danego elementu (drogi poruszającej się siły $P=1$) wywołanej [7] odpowiednim wymuszeniem kinematycznym (przem. podpory) o wartości równej (-1) .



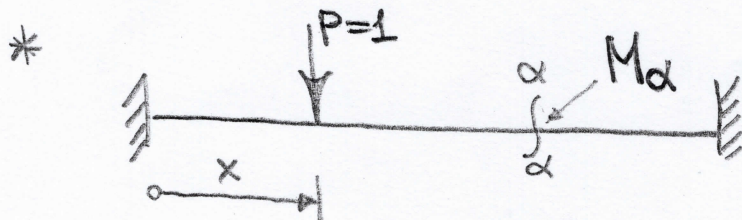
wzajemność uogólnionych sił przekrojowych i przemieszczeń



$$M_1 \Delta \varphi_1 + P \cdot y = 0$$

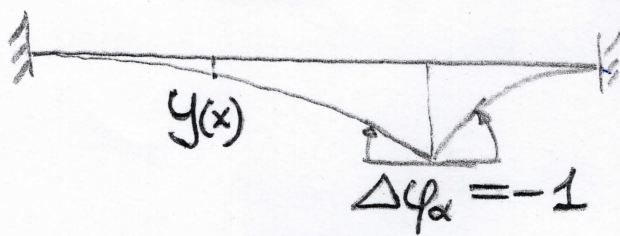


gdy $P=1$
 $\Delta \varphi = -1$ $M_1 = y$



Siła $P=1$ w punkcie o wsp. x wywołuje w przekroju α moment zginający M_α , którego wartość zależy od położenia siły.

Wielkość $M_\alpha = M_\alpha(x)$ jest równą linią wplykowej momentu M_α



Wymuszenie kinematyczne w przekroju (odpowiednik błędu montażu) o wartości równej (-1) - w punkcie o wsp. x wystąpi ugięcie $y(x)$ będące negatyw odpowiedzią linii ugięcia

$$P \cdot y(x) + M_\alpha(x) \cdot \Delta\varphi = 0$$

gdy $P=1$
i $\Delta\varphi_\alpha = -1$

$$M_\alpha(x) = -y(x)$$

Linia wpływa siły wewnętrznej w ustalonym przekroju jest linią ugięcia powstałą pod wpływem zadanego w tym przekroju odpowiedniego wymuszenia kinematycznego o wartości równej (-1).

