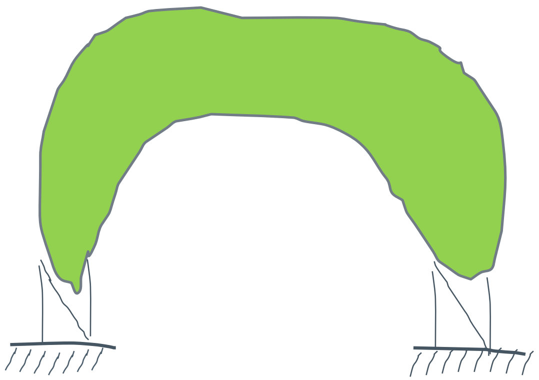
Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych.

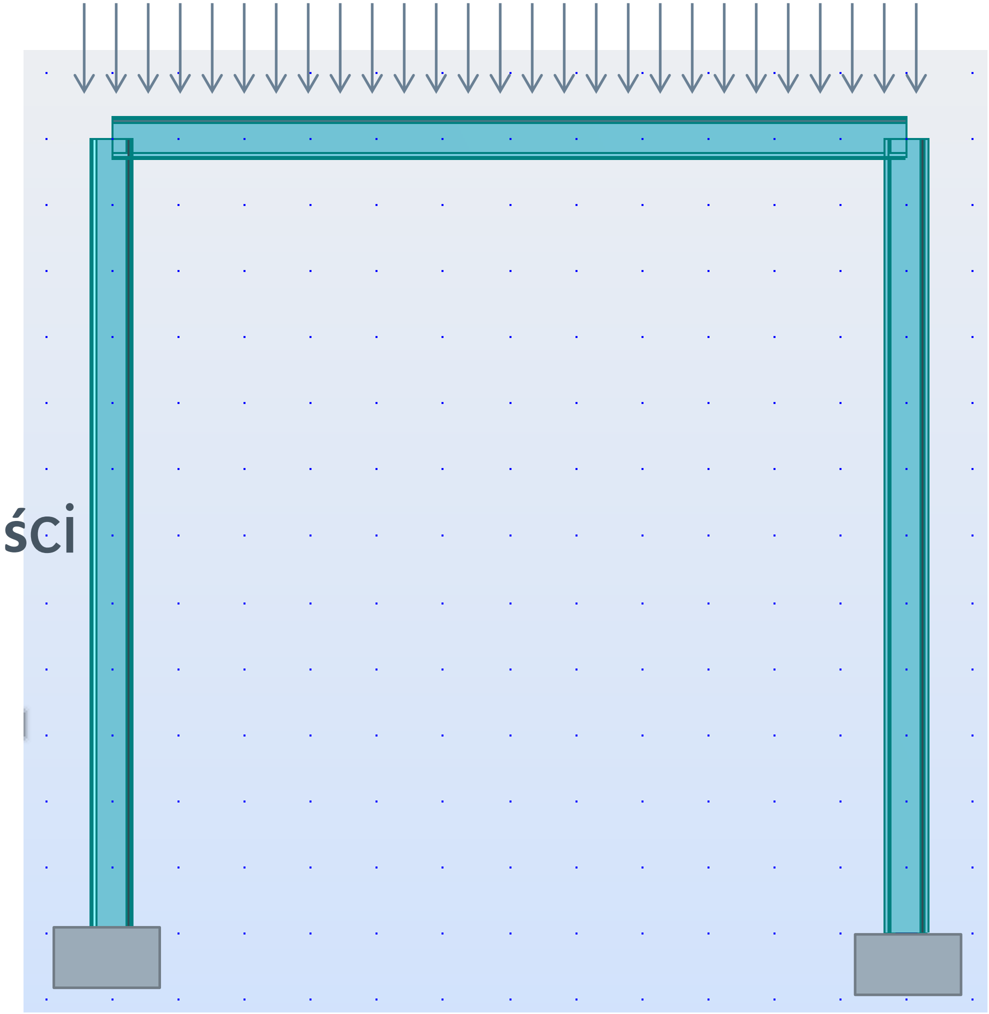
Metoda sił

Układy statycznie niewyznaczalne

obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności ramy

- Liczba tarcz = 1
- Liczba niewiadomych = 6
- Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r - 3t = 6 - 3 = 3$



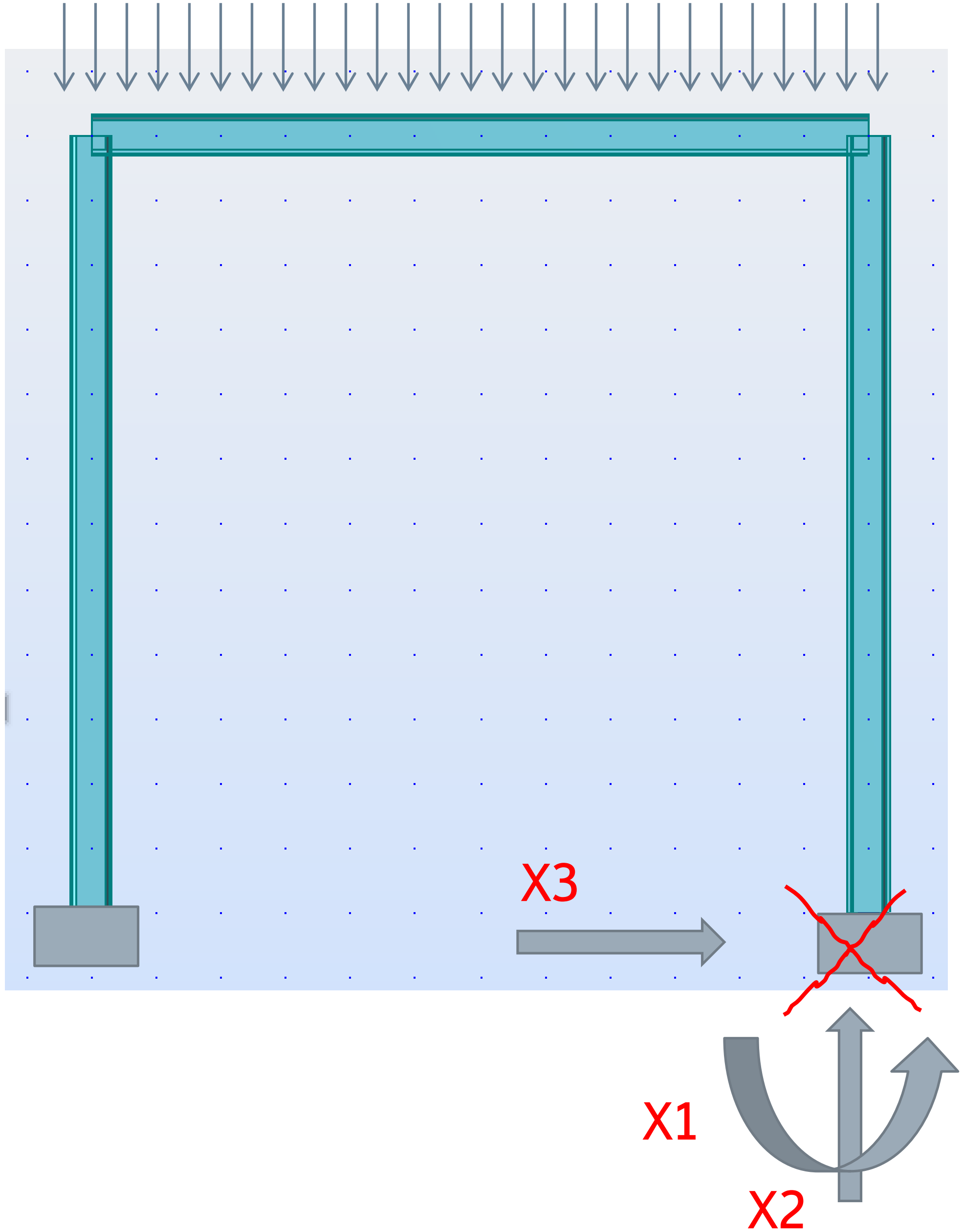


Metoda sił

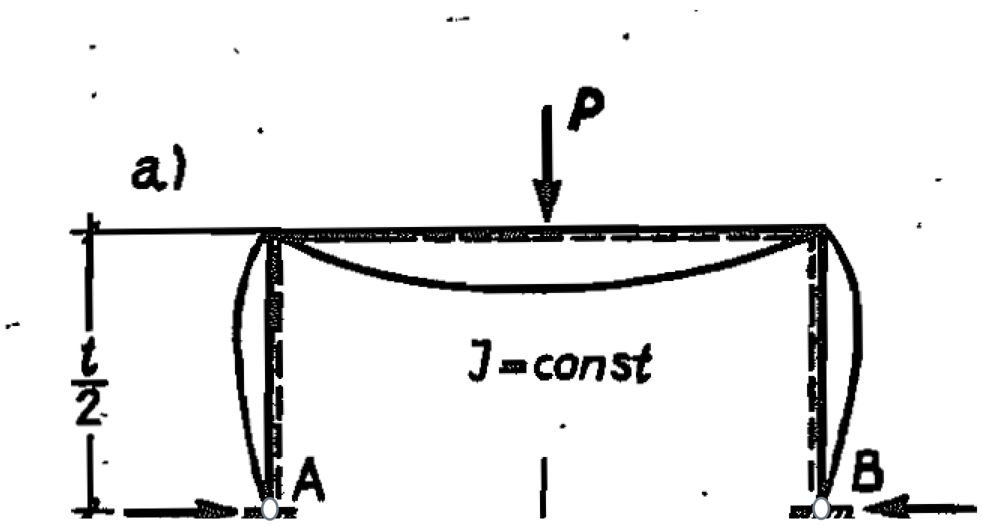
Tworzymy **układ podstawowy**

- układ statycznie wyznaczalny + niewiadome:

x1, x2, x3 zwane nadliczbowymi



Metoda sił – układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny



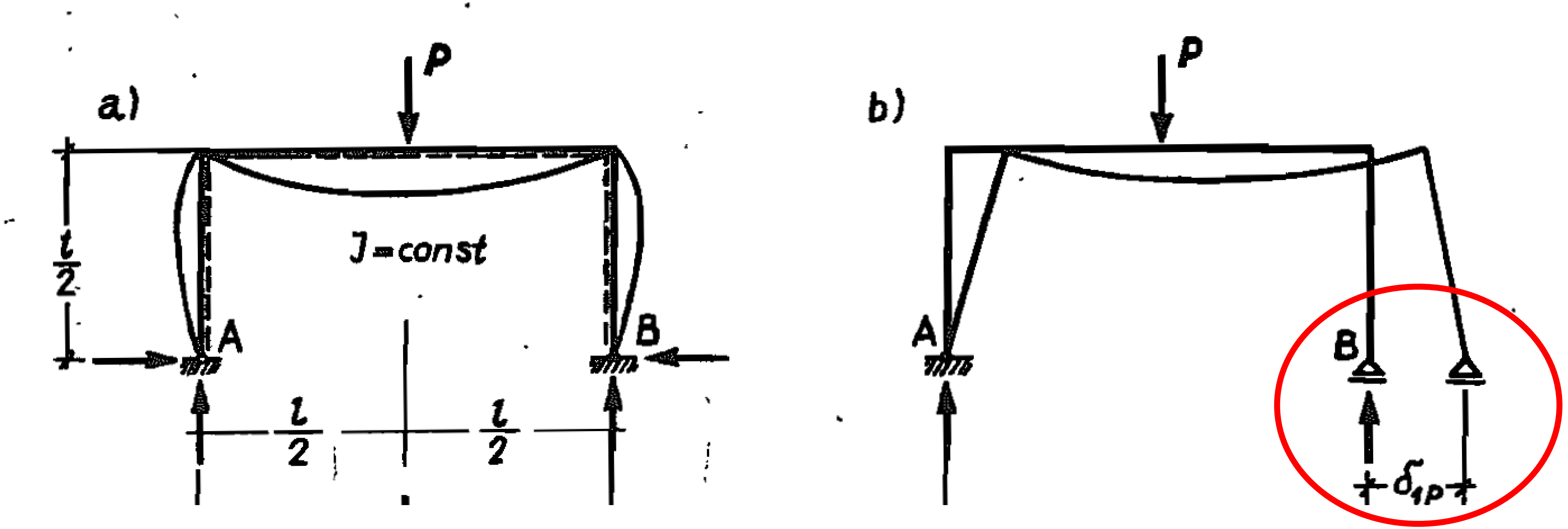
Podpora przegubowa nieprzesuwna
$r = 2$

Podpora przegubowa nieprzesuwna
$r = 2$

Stopień statycznej niewyznaczalności

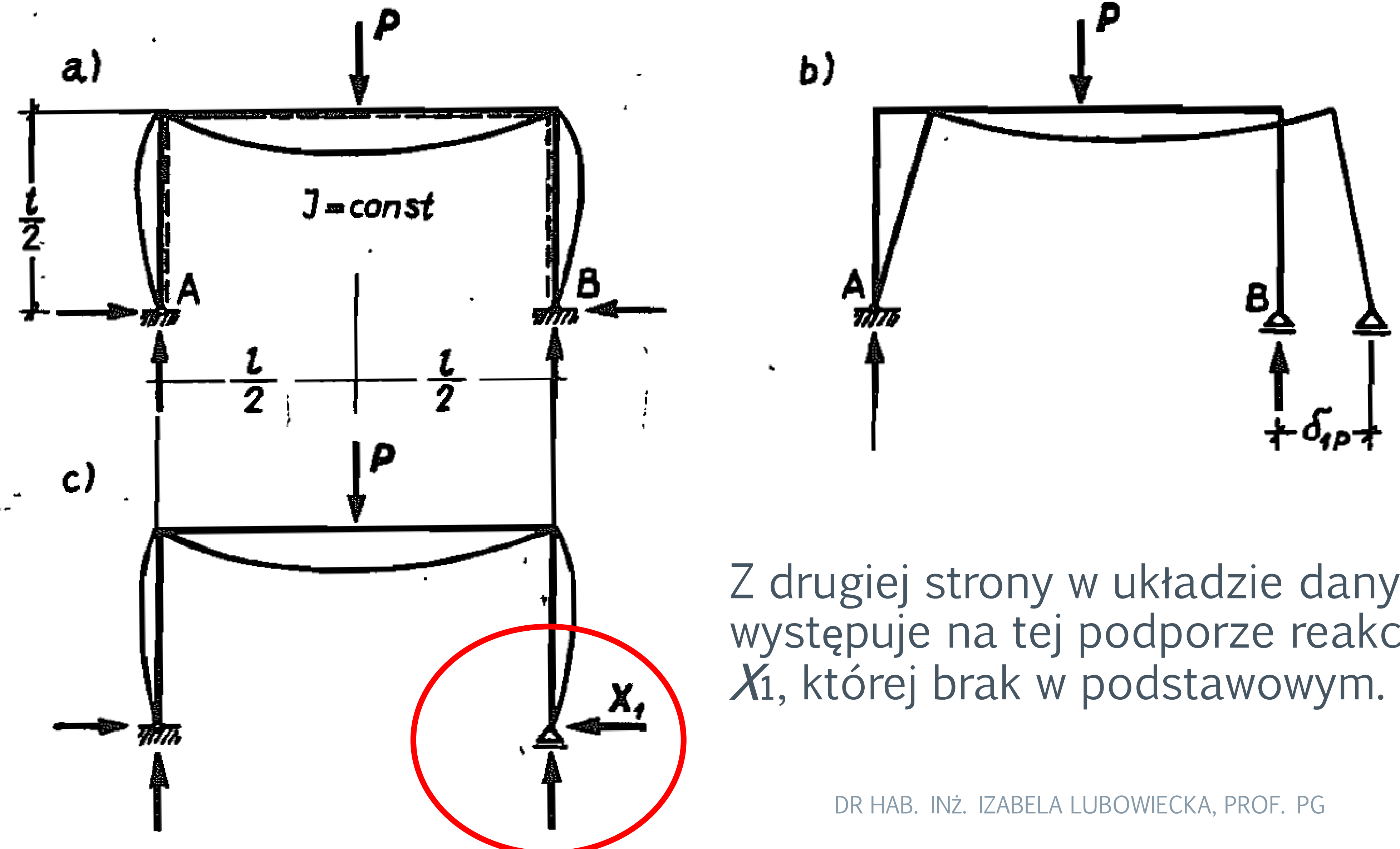
$n = r - 3t = 4-3=1$

Metoda sił – układ podstawowy



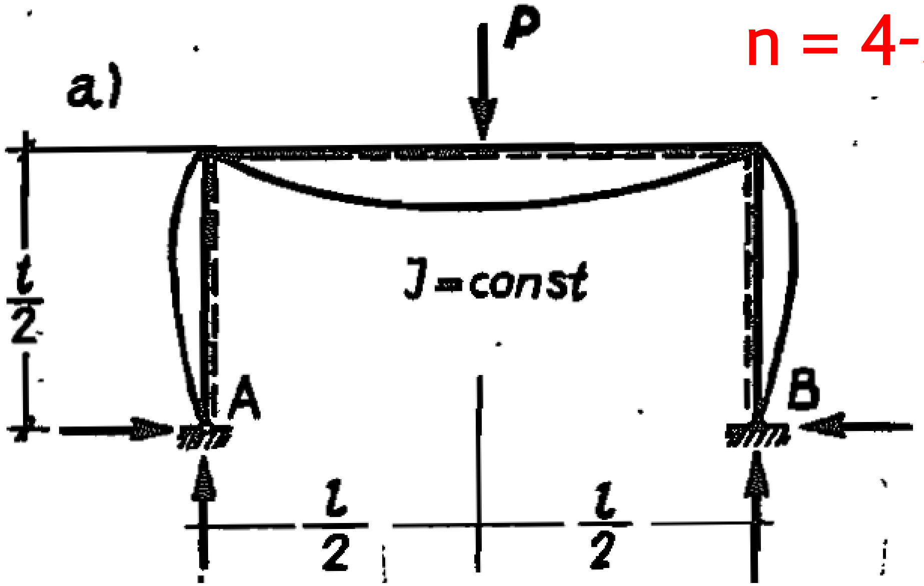
W układzie podstawowym pod wpływem obciążenia może powstać przemieszczenie, δ_{1P} które nie jest możliwe w układzie danym (poziome przemieszczenie prawej podpory).

Metoda sił – układ podstawowy



Z drugiej strony w układzie danym występuje na tej podporze reakcja X_1, której brak w podstawowym.

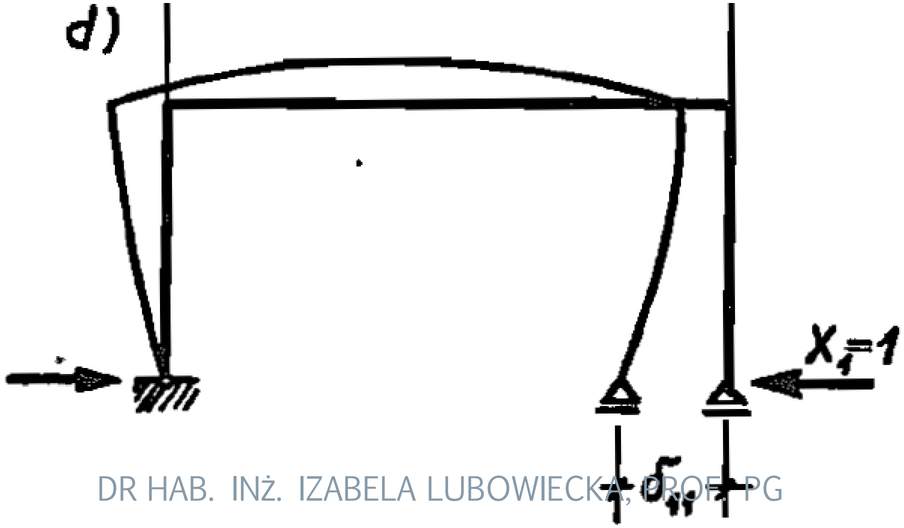
Metoda sił – układ podstawowy



n = 4-3=1

Aby układ podstawowy był pod względem statycznym i kinematycznym identyczny z układem danym, musi być obciążony tą brakującą składową reakcji – niewiadomą X_1.

X_1 – **nadliczbowa**.



Równoważność układów osiągniemy dobierając nadliczbową tak, aby przemieszczenie $\delta_1 = 0$.

Metoda sił

Korzystając z zasady superpozycji przemieszczenie to przedstawiamy jako sumę przemieszczeń wywołanych działaniem dwu obciążeń układu podstawowego

$$\boxed{\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11}}$$

δ_{10} → Przemieszczenie od obciążenia danego

$X_1 \delta_{11}$ → Przemieszczenie od obciążenia nadliczbową

Metoda sił

Przemieszczenie układu danego musi być równe zeru więc mamy do rozwiązania równanie:

$$X_1\delta_{11} + \delta_{10} = 0$$

$$\boxed{X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}}$$

Metoda sił – siły wewnętrzne i reakcje

Znając wielkość nadliczbową możemy siły wewnętrzne korzystając z zasady superpozycji ponownie

$$\begin{cases} M = M_0 + X_1 M_1, \\ N = N_0 + X_1 N_1, \\ T = T_0 + X_1 T_1 \end{cases}$$

Podobnie w przypadku reakcji $R = R_0 + X_1 R_1$

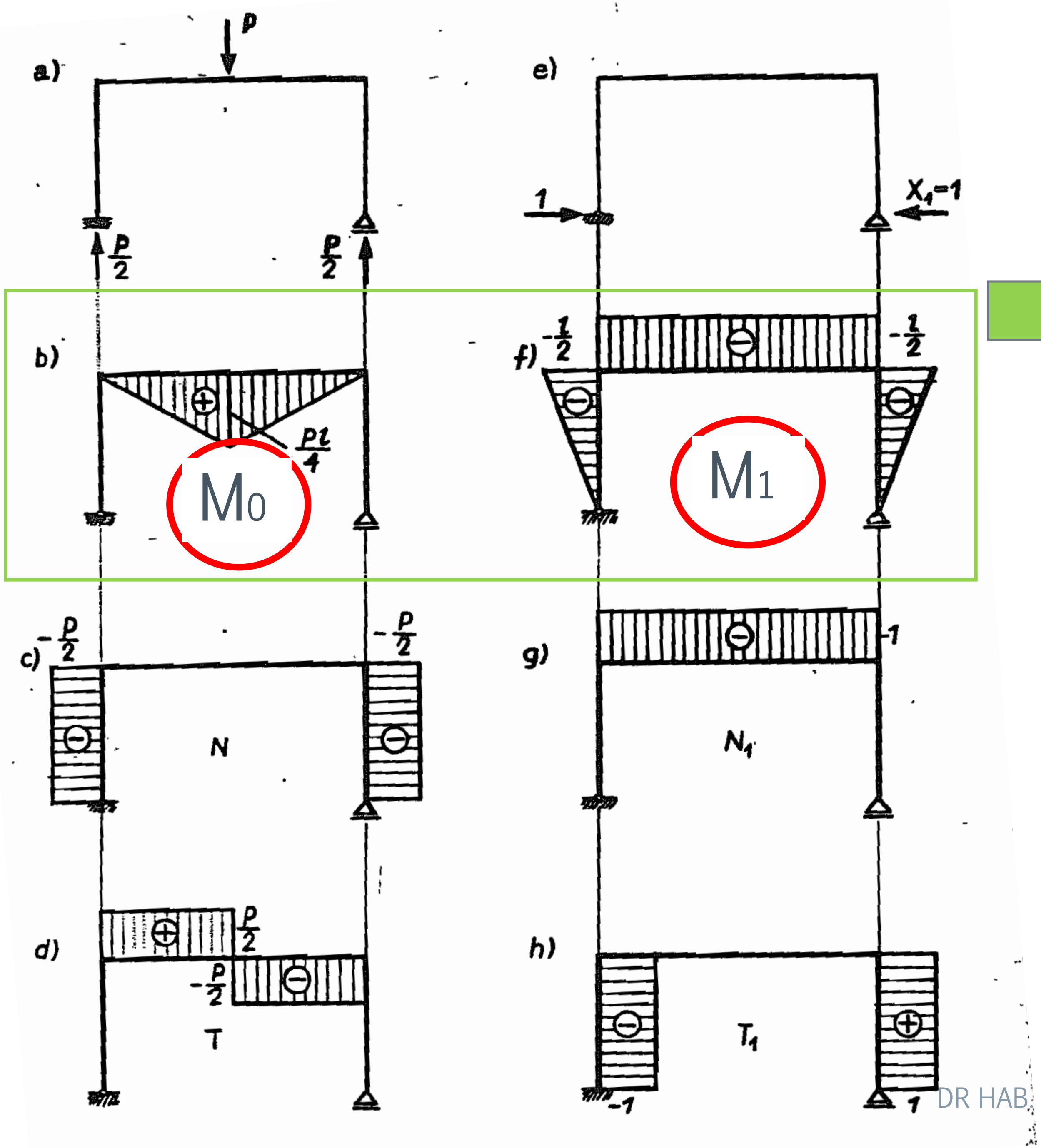
Metoda sił – siły wewnętrzne i reakcje

Aby wyznaczyć nadliczbową, obliczamy przemieszczenia układu danego i układu podstawowego w miejscu nadliczbowej ze wzorów:

$$\delta_{11} = \int_s \left(\frac{M_1 M_1}{EJ} + \cancel{\frac{N_1 N_1}{EA}} + \cancel{\frac{T_1 T_1}{GA}} \right) ds$$

$$\delta_{10} = \int_s \left(\frac{M_1 M_0}{EJ} + \cancel{\frac{N_1 N_0}{EA}} + \cancel{\frac{T_1 T_0}{GA}} \right) ds$$

Pomijamy wpływ sił normalnych i tnących.
Całkujemy graficznie wykresy momentów w układzie danym i podstawowym.



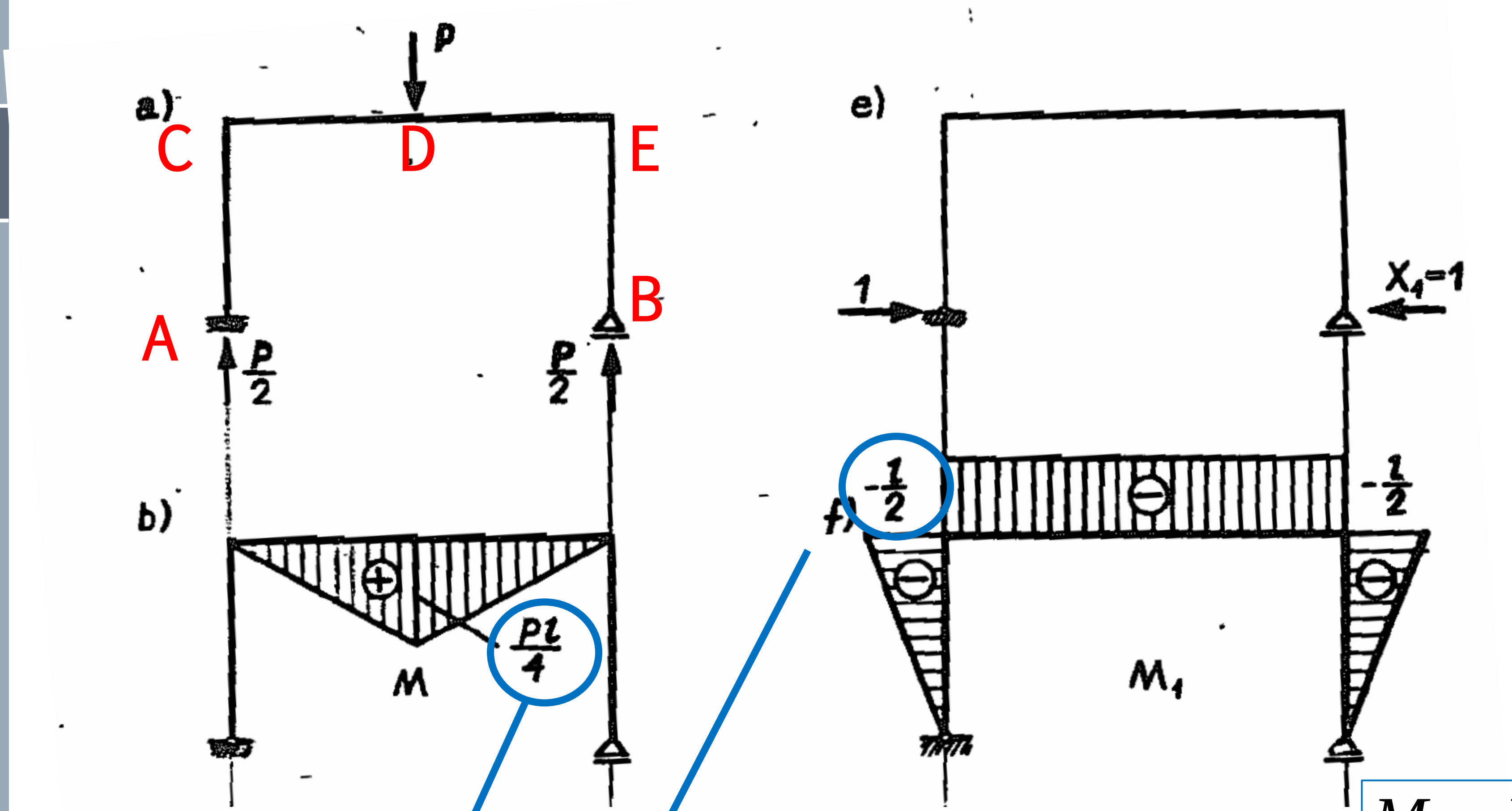
$$\delta_{11} = \int_s \left(\frac{M_1 M_1}{EJ} \right) ds$$

$$\delta_{10} = \int_s \left(\frac{M_1 M_0}{EJ} \right) ds$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ},$$

$$\delta_{10} = -\frac{1}{16} \frac{Pl^3}{EJ}$$

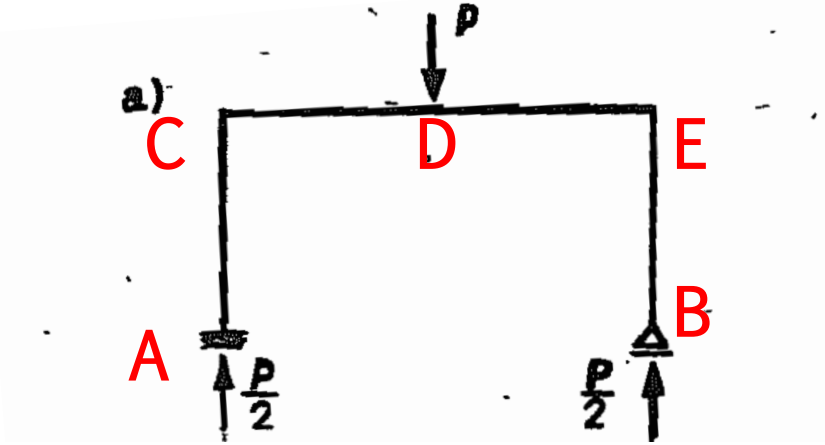
$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{3}{16} P$$

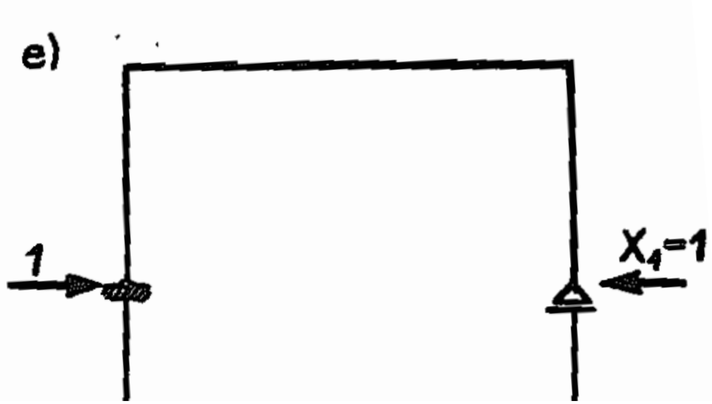


$$M = M_0 + X_1 M_1$$

Obliczenie momentów zginających na podstawie powyższych wykresów:

$$M_D = \frac{1}{4}Pl + \frac{3}{16}P\cdot\left(-\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{32}Pl, \qquad M_C = M_E = 0 + \frac{3}{16}P\cdot\left(-\frac{l}{2}\right) = -\frac{3}{32}Pl$$

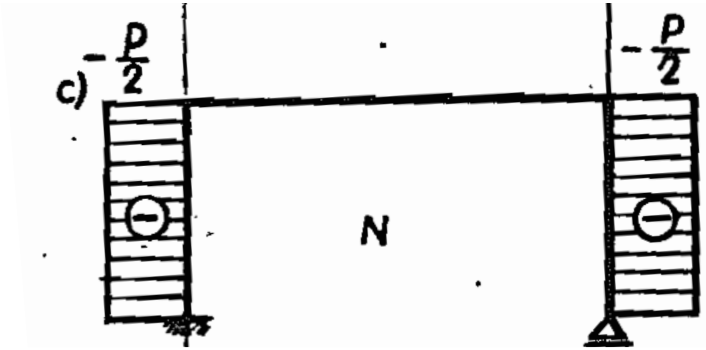


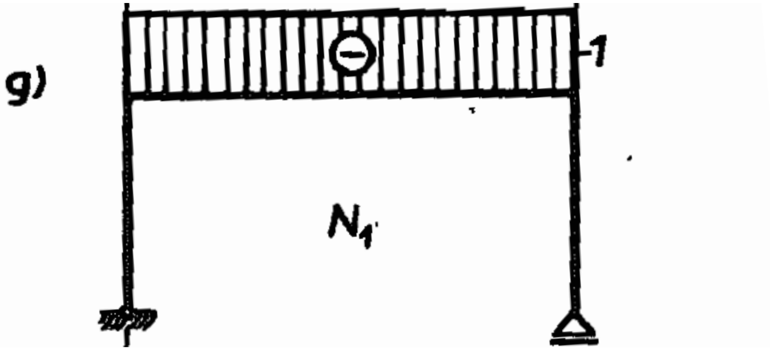


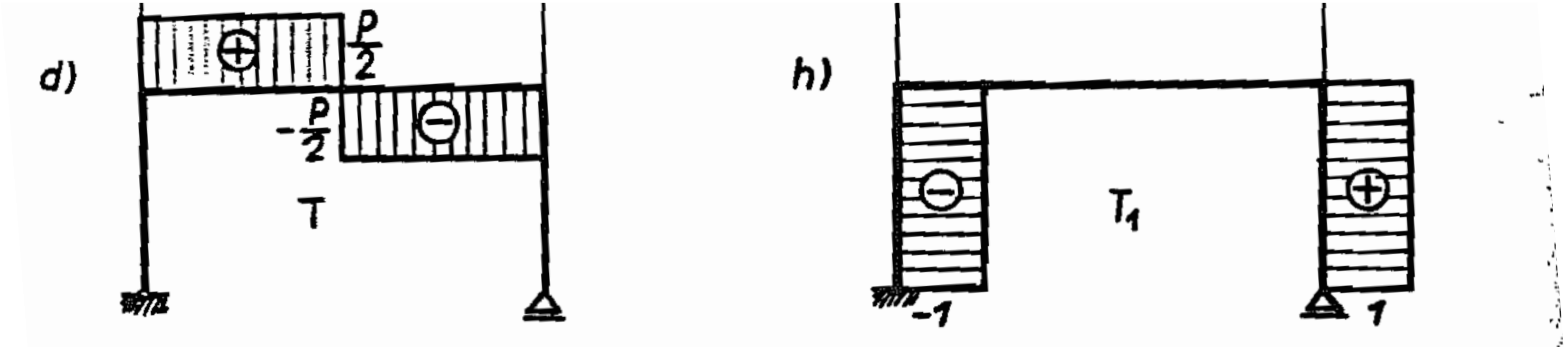
Podobnie obliczamy siły normalne

$$\boxed{N = N_0 + X_1 N_1}$$

$$N_{A-C} = N_{B-E} = -\frac{P}{2} + \frac{3}{16} P \cdot 0 = -\frac{1}{2} P, \quad N_{C-E} = 0 + \frac{3}{16} P \cdot (-1) = -\frac{3}{16} P$$



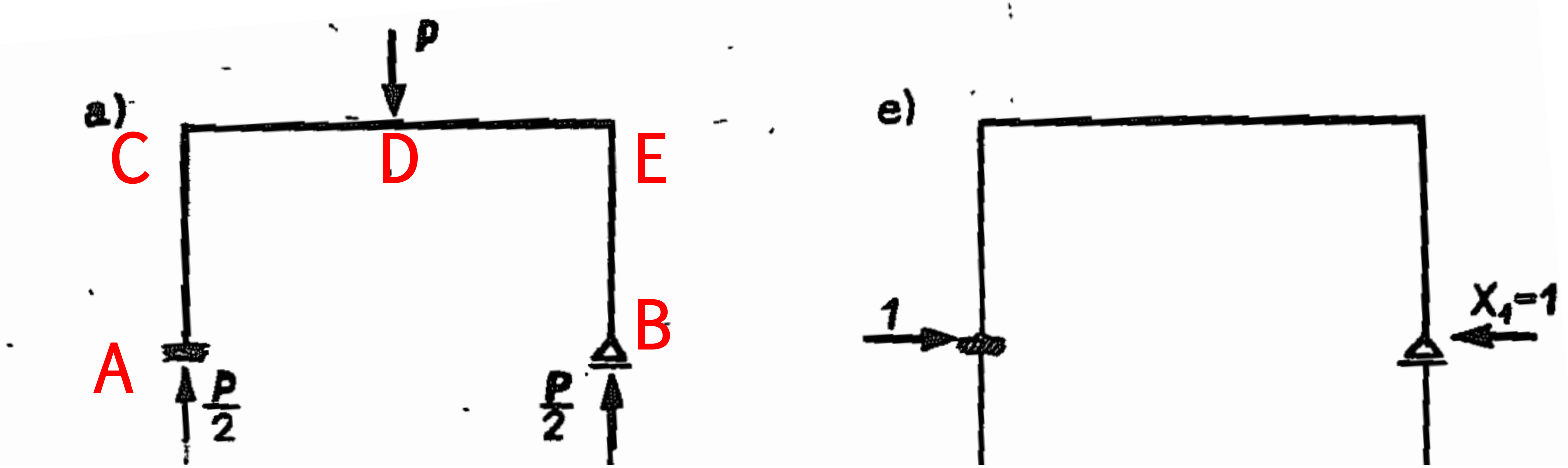




Obliczamy siły tnące $$\boxed{T = T_0 + X_1 T_1}$$

$$T_{C-D} = -T_{D-E} = \frac{P}{2} + \frac{3}{16}P \cdot 0 = \frac{1}{2}P,$$

$$T_{A-C} = -T_{B-E} = 0 + \frac{3}{16}P \cdot (-1) = -\frac{3}{16}P$$

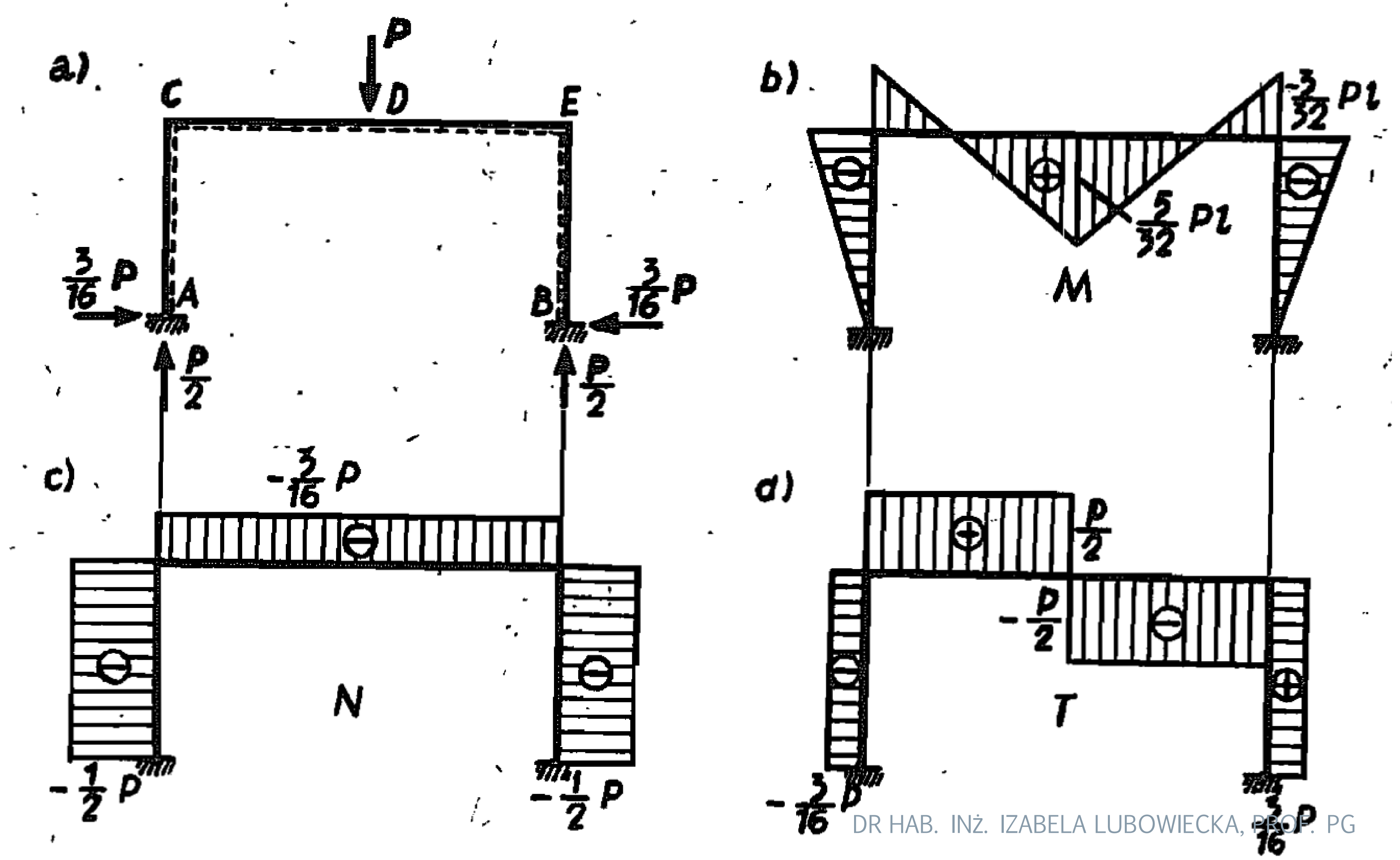


Obliczenie reakcji podporowych ze wzoru $\boxed{R = R_0 + X_1 R_1}$

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} + 0 = \frac{P}{2},$$

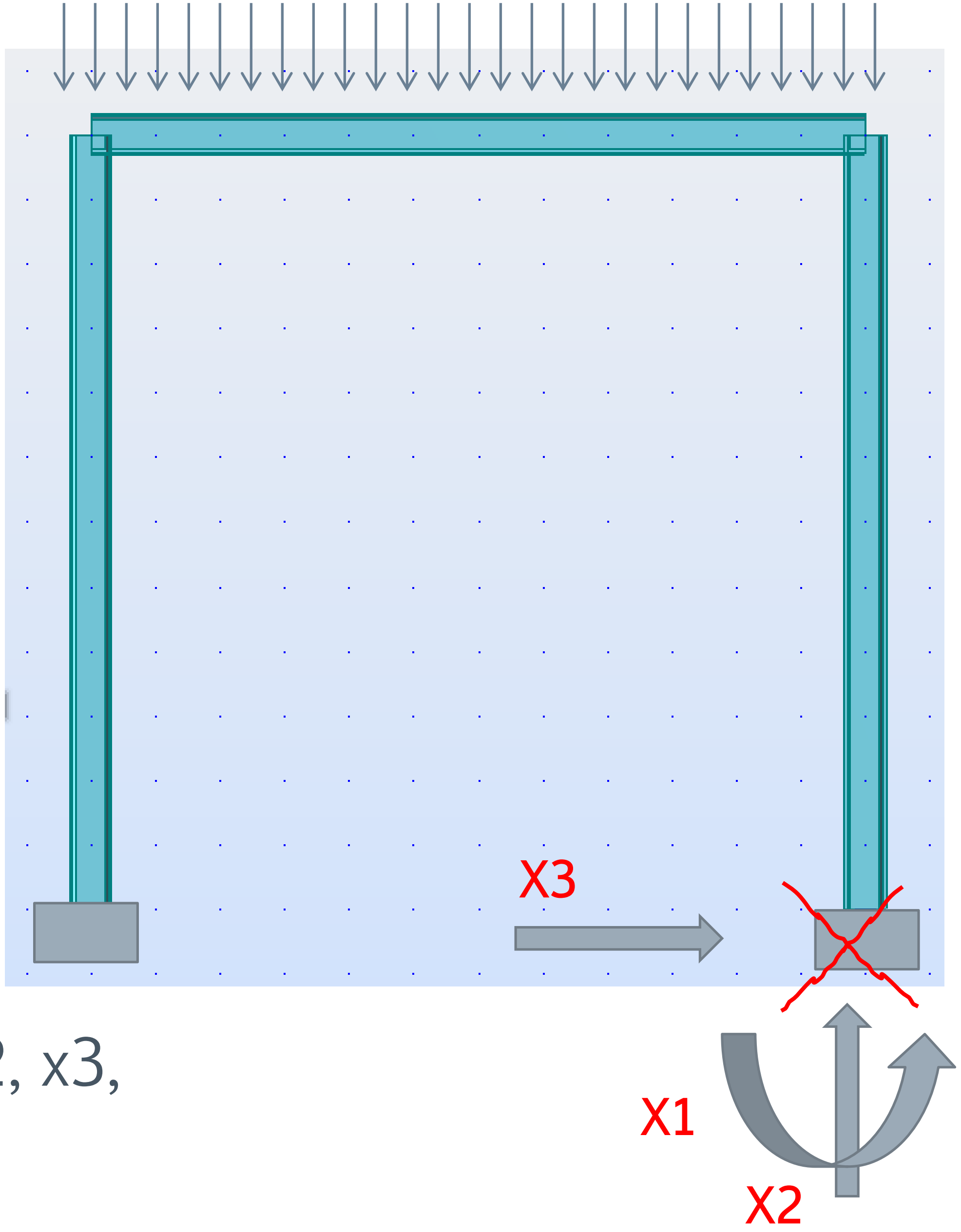
$$H_A = H_B = 0 + \frac{3}{16}P = \frac{3}{16}P$$

Wykresy sił wewnętrznych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Przykład z trzema niewiadomymi

układ podstawowy

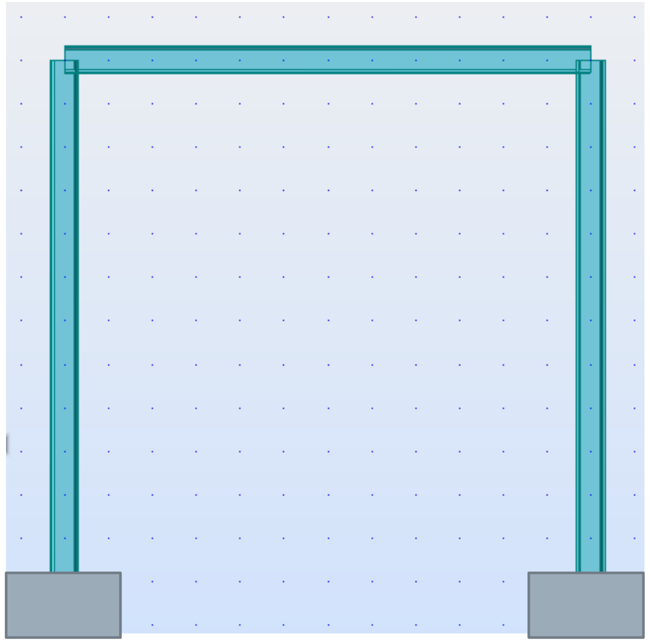


analizujemy niezależne przypadki:

a) X1 =1,
b) X2 =1,
c) X3 =1,
d) obciążenie zewnętrzne

za każdym razem obliczamy przemieszczenia w kierunku: x1, x2, x3, które oznaczamy : δ_{ij}

Metoda sił



obliczamy niewiadome (nadliczbowe) x1, x2, x3

z warunku zgodności przemieszczeń:

Układ 3 równań z 3 niewiadomymi:

$$\delta_1 = \delta_{11} \times X_1 + \delta_{12} \times X_2 + \delta_{13} \times X_3 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_2 = \delta_{21} \times X_1 + \delta_{22} \times X_2 + \delta_{23} \times X_3 + \delta_{20} = 0$$
$$\delta_3 = \delta_{31} \times X_1 + \delta_{32} \times X_2 + \delta_{33} \times X_3 + \delta_{30} = 0$$

Całkujemy graficznie odpowiednie wykresy

Metoda sił

$$\delta_1 = \delta_{11} \times X_1 + \delta_{12} \times X_2 + \delta_{13} \times X_3 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_2 = \delta_{21} \times X_1 + \delta_{22} \times X_2 + \delta_{23} \times X_3 + \delta_{20} = 0$$
$$\delta_3 = \delta_{31} \times X_1 + \delta_{32} \times X_2 + \delta_{33} \times X_3 + \delta_{30} = 0$$

Powyższy kład równań można zapisać w postaci macierzowej, (dla na nadliczbowych macierze rozrastają się do rozmiaru **n**)

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix}}$$

Metoda sił

Obliczamy siły wewnętrzne i reakcje traktując nadliczbowe x1, x2, x3 jako znane obciążenie lub z zależności:

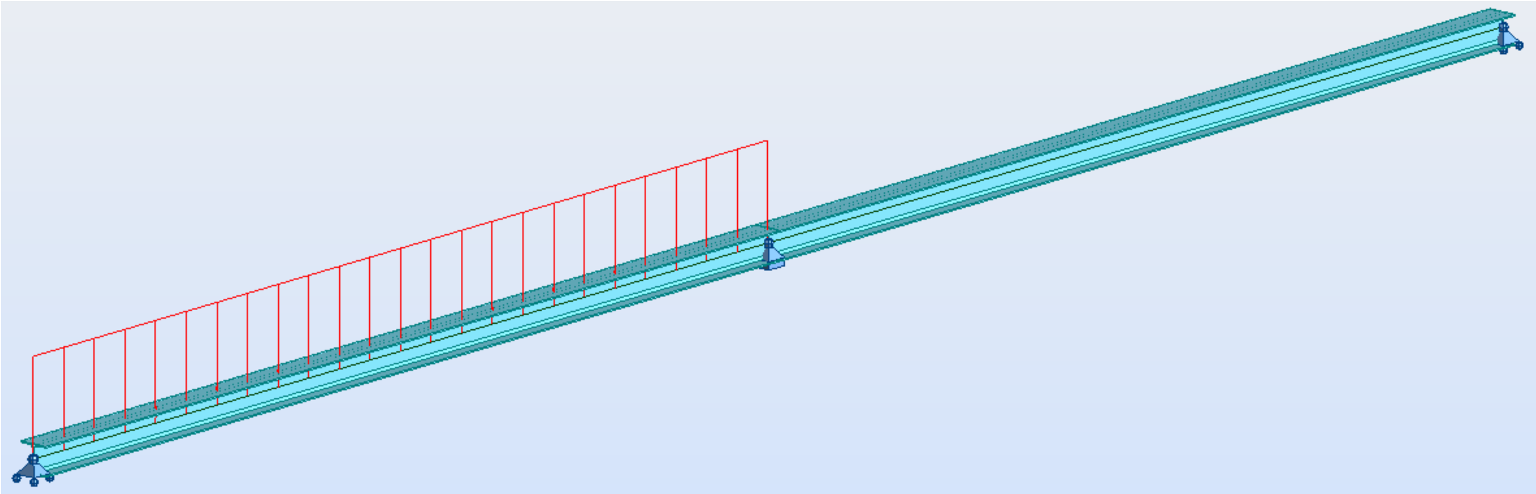
$$N = N_1 \times X_1 + N_2 \times X_2 + N_3 \times X_3 + N_0$$

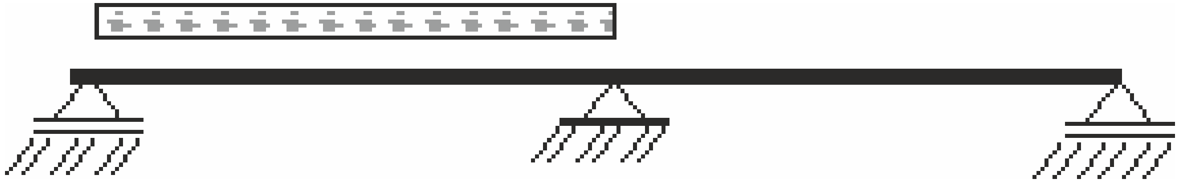
$$T = T_1 \times X_1 + T_2 \times X_2 + T_3 \times X_3 + T_0$$

$$M = M_1 \times X_1 + M_2 \times X_2 + M_3 \times X_3 + M_0$$

Metoda sił – przykład

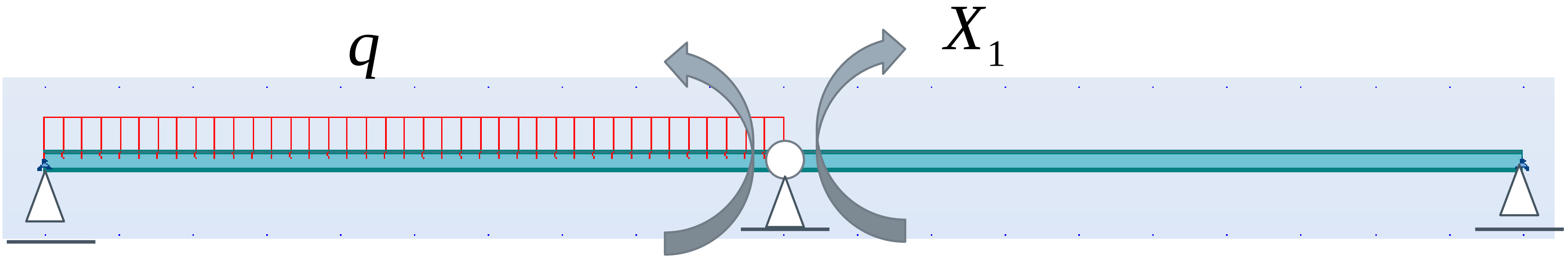
1) **BELKA**: obliczyć wykresy M, T: EJ = const, L = 10m, q = 10kN/m. Stopień niewyznaczalności układu t=1, r = 4; n = 4-3 = 1





Metoda sił – przykład

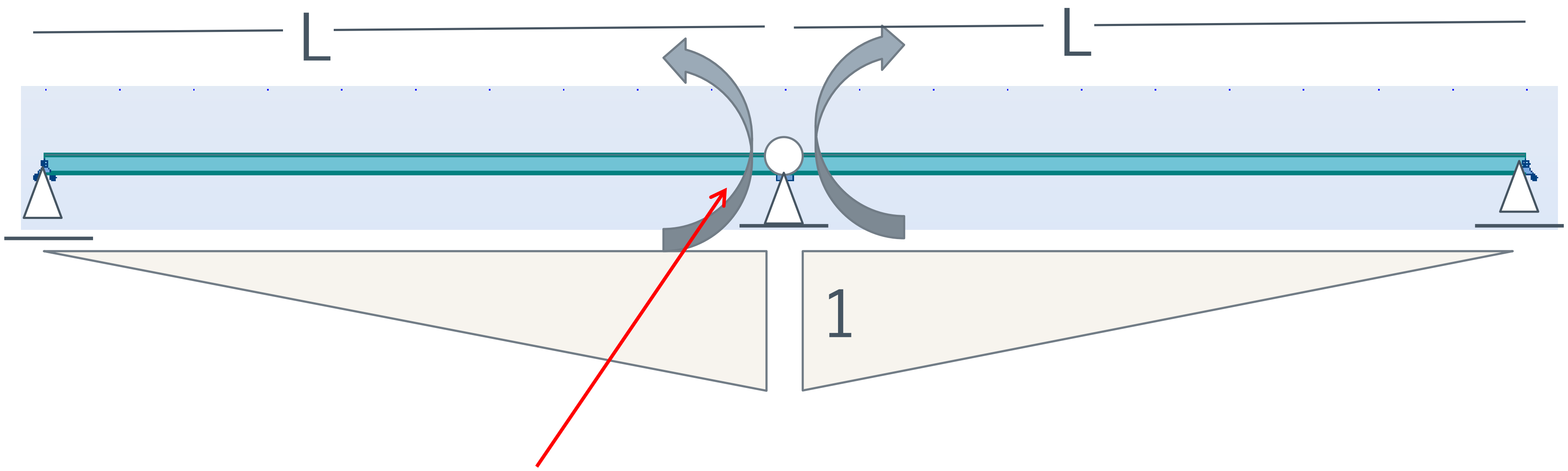
UPMS – układ podstawowy metody sił



Metoda sił – przykład

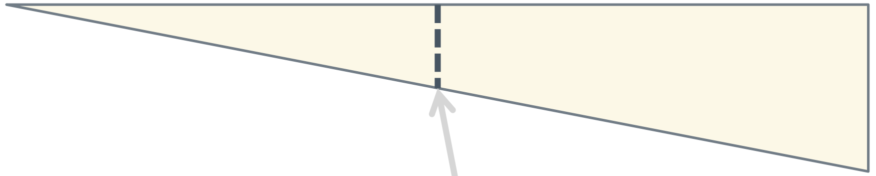
Jednostkowe stany obciążeń (M1):

A) $X_1 = 1$

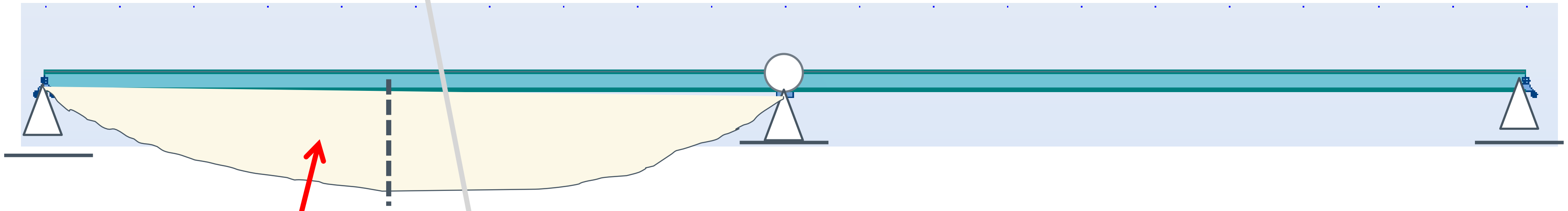


$$\delta_{11} = 1 \cdot L \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot L \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\frac{L}{EJ} + \frac{1}{3}\frac{L}{EJ} = \frac{2}{3}\frac{L}{EJ}$$

Metoda sił – przykład



B) Obciążenie zewnętrzne (Mo)



$$\delta_{10} = \frac{2}{3}\frac{qL^2}{8}L \times \frac{1}{2}\frac{1}{EJ} = \frac{1}{24}\frac{qL^3}{EJ}$$

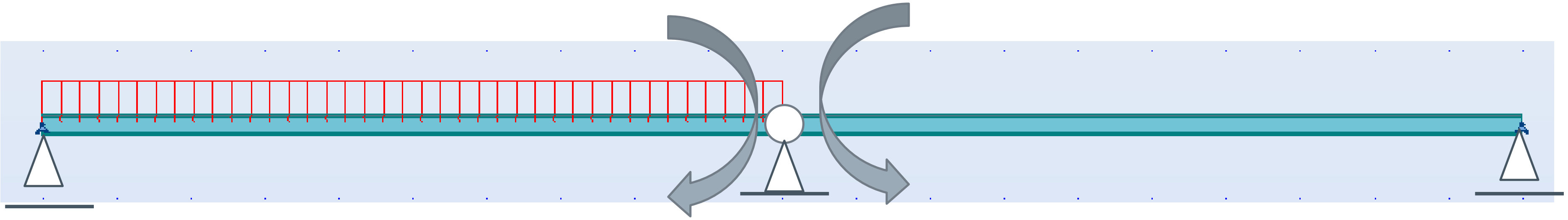
Metoda sił – przykład

Warunek zgodności przemieszczeń $$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

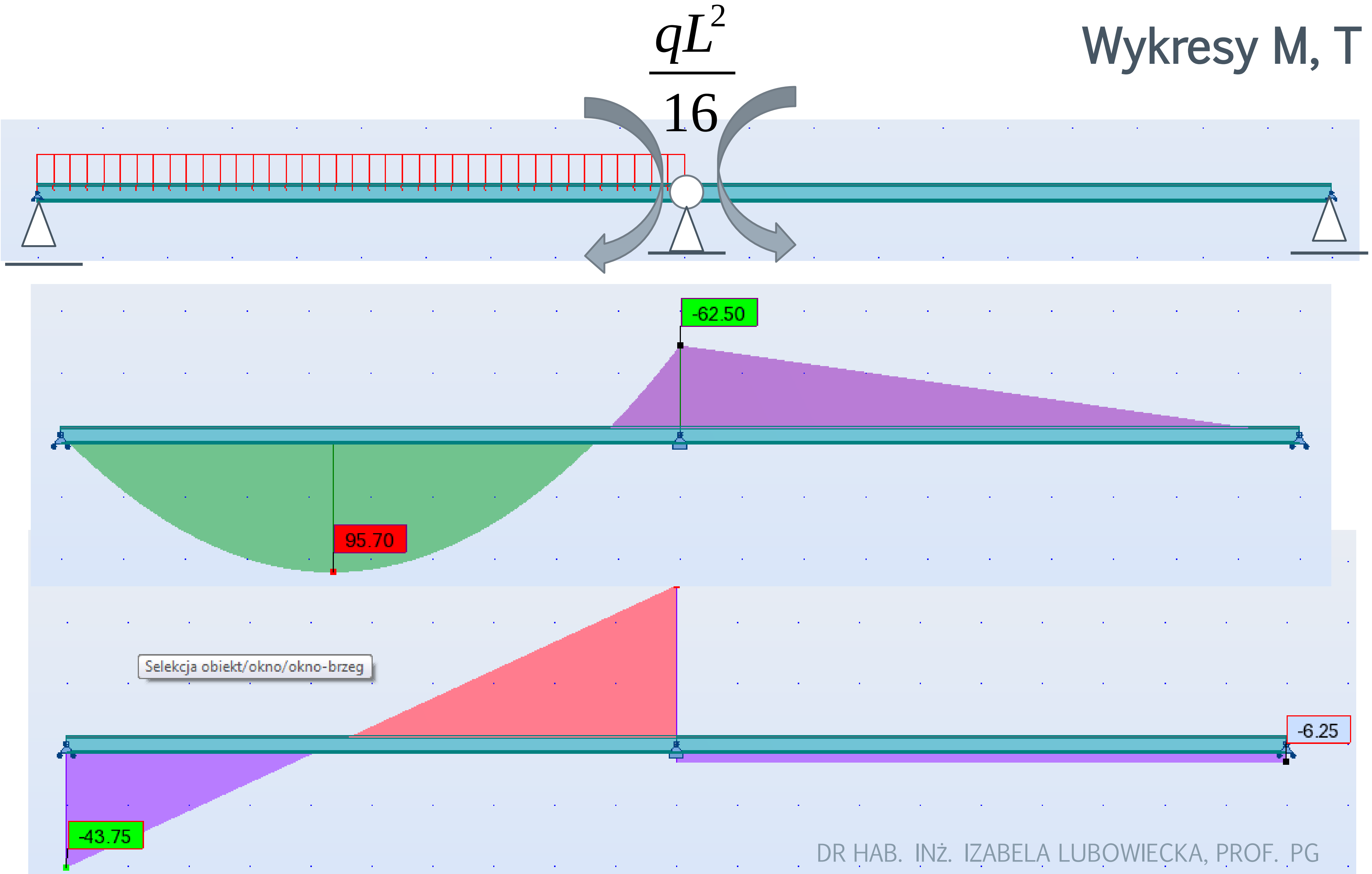
$$X_1 = -\frac{qL^2}{16}$$

$$\frac{qL^2}{16}$$



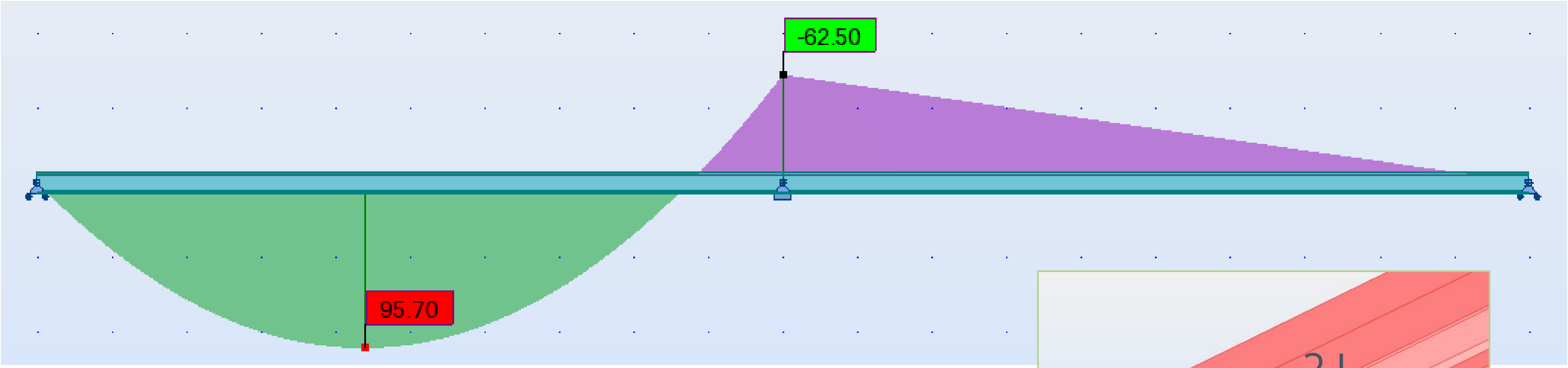
Metoda sił – przykład

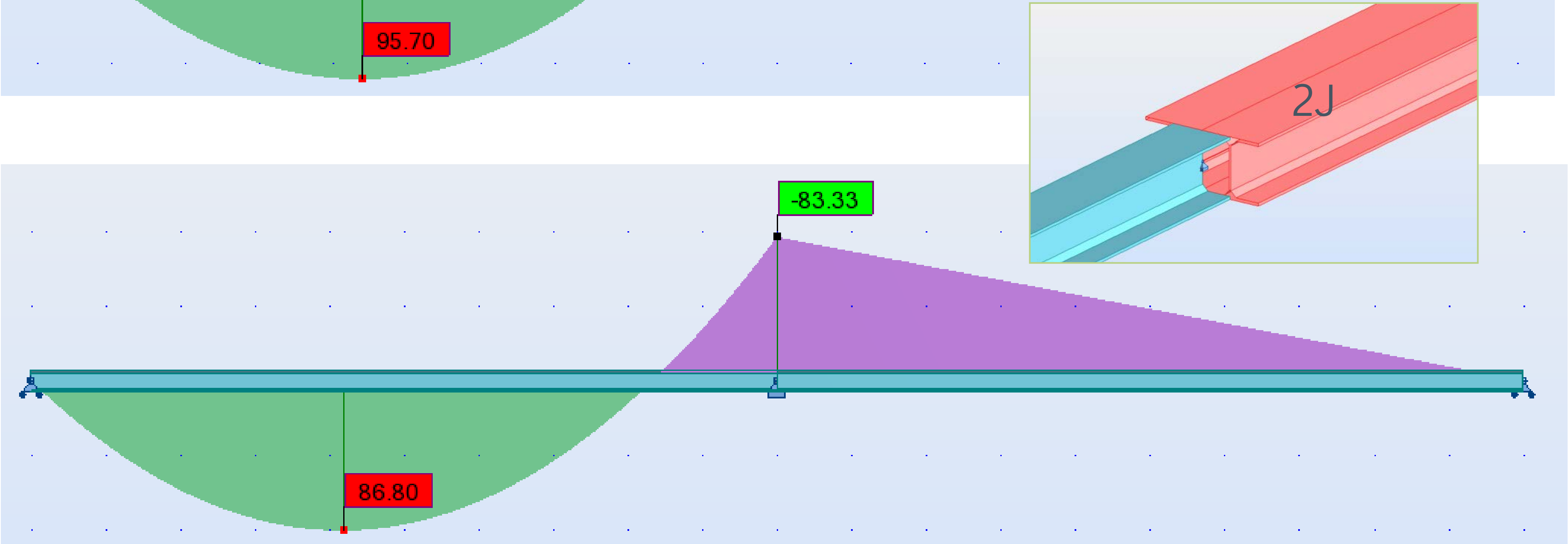
Wykresy M, T



Metoda sił – przykład

Wykresy **M** – wpływ zmian sztywności elementów





Wykresy **M** – wpływ zmian sztywności elementów