

Mechanika budowli

Izabela Lubowiecka
Katedra Mechaniki Budowli WILiŚ

Przemieszczenia wywołane osiadaniem podpór

Osiadanie podpór w układach statycznie wyznaczalnych (jak UMPS) powoduje przemieszczenia w postaci (belki, ramy)

$$\delta_i = -\sum \bar{R}\Delta$$

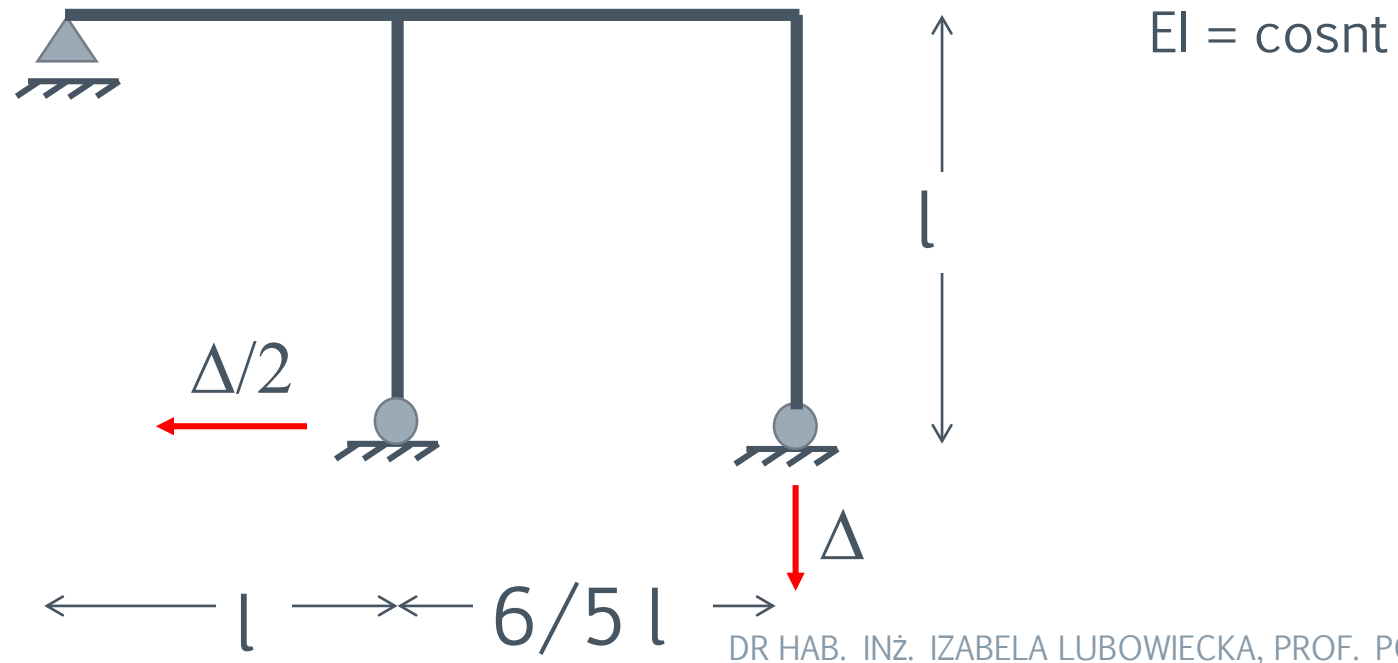
Przemieszczenia wywołane osiadaniem podpór w kratownicach

$$\delta_i = -\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta_i$$

Osiadanie podpór w układach statycznie niewyznaczalnych

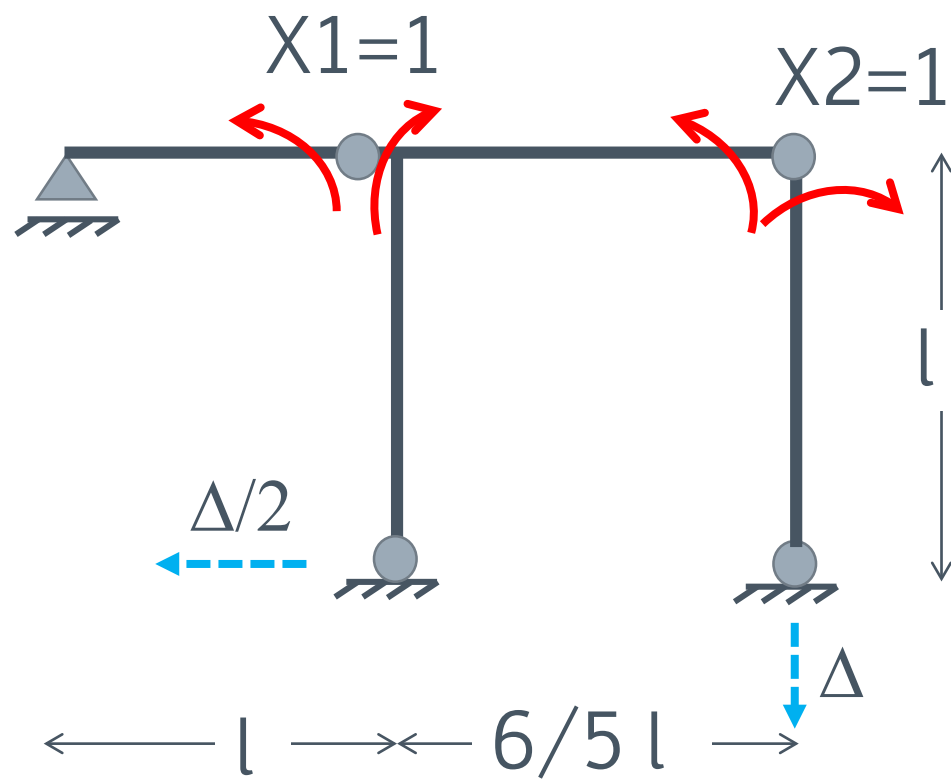
Osiadanie podpór w układach statycznie wyznaczalnych (jak UMPS) powoduje przemieszczenia (belki, rami), w niewyznaczalnych również **siły wewnętrzne**.

Przykład 1



Przykład 1

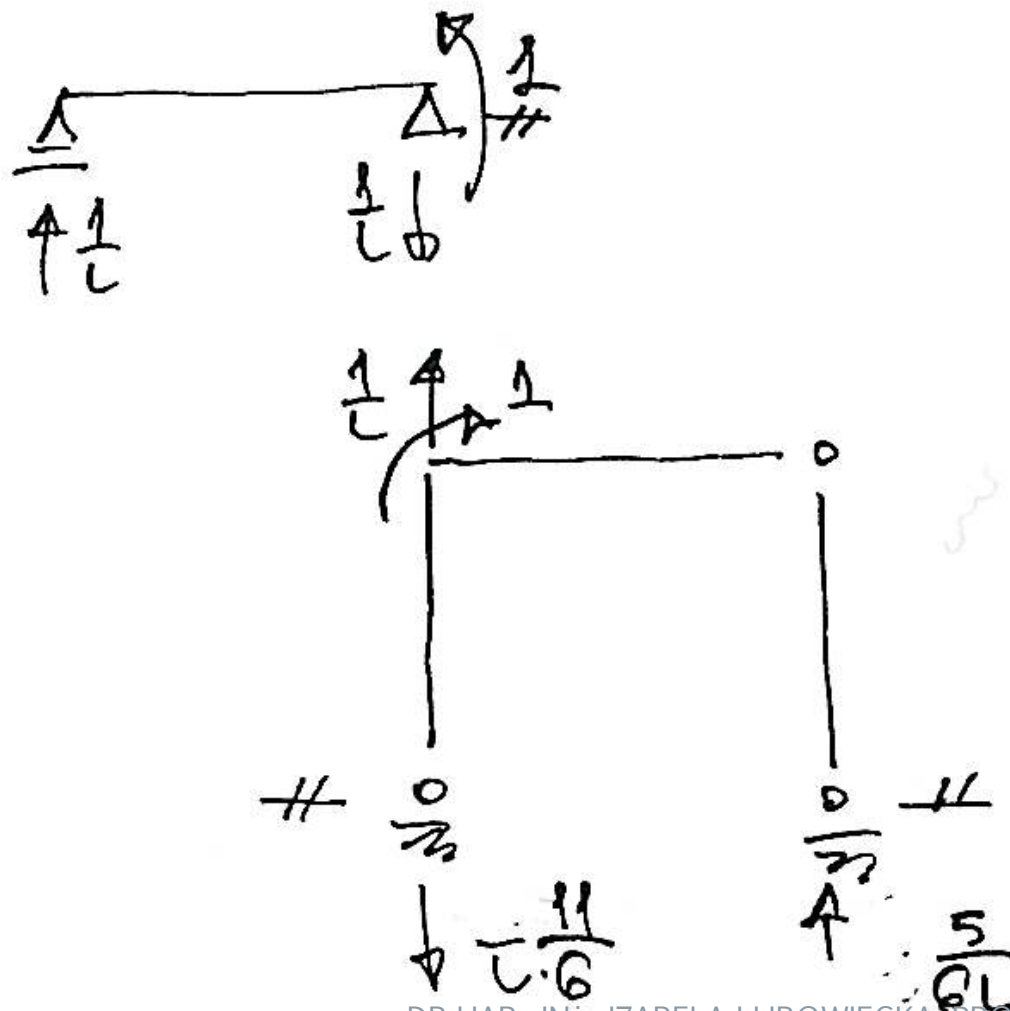
Układ podstawowy



Przykład 1

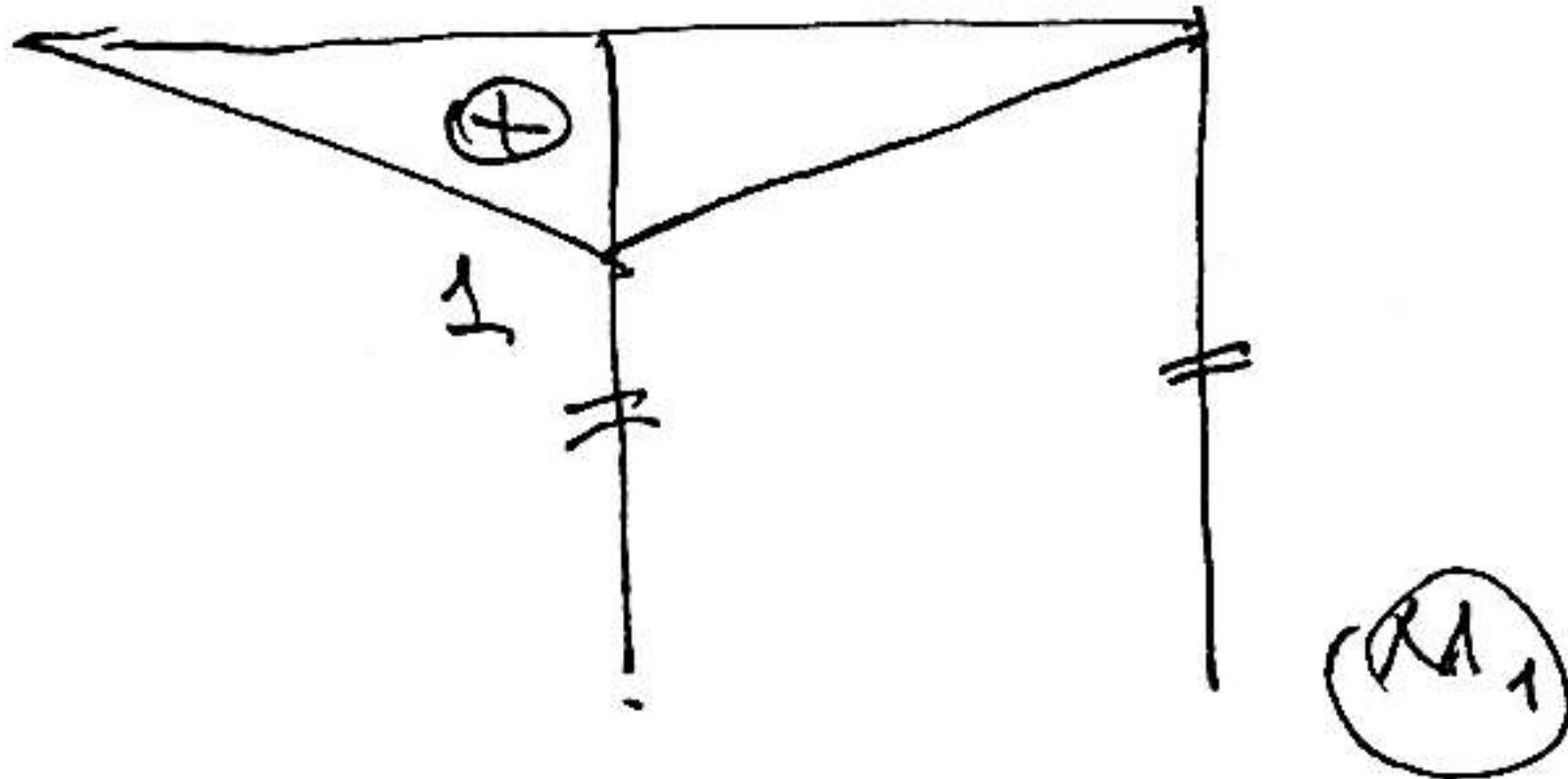
Schemat pracy

$$x_1 = 1$$



Przykład 1

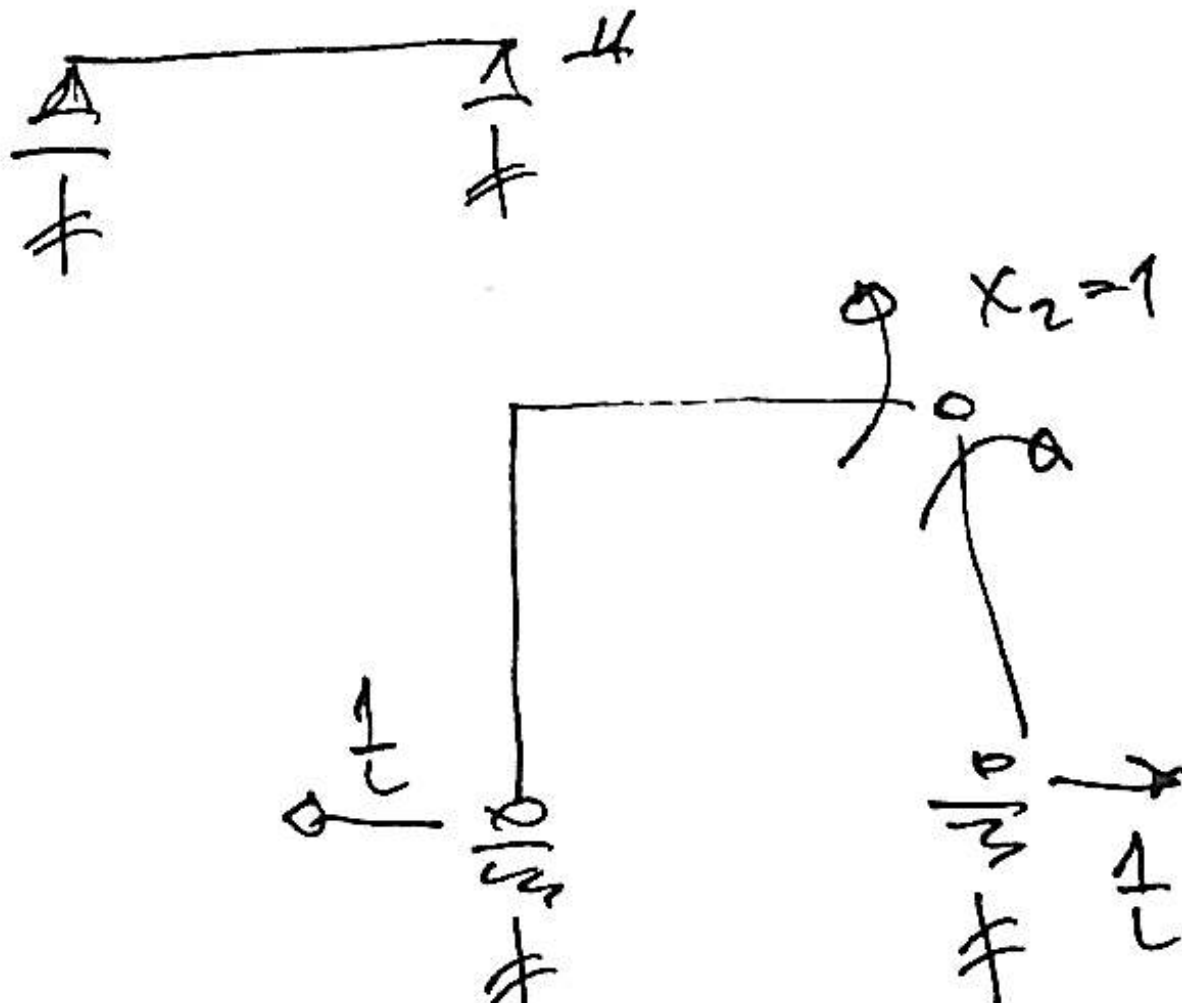
Wykres momentów od niewiadomej $X_1=1$



Przykład 1

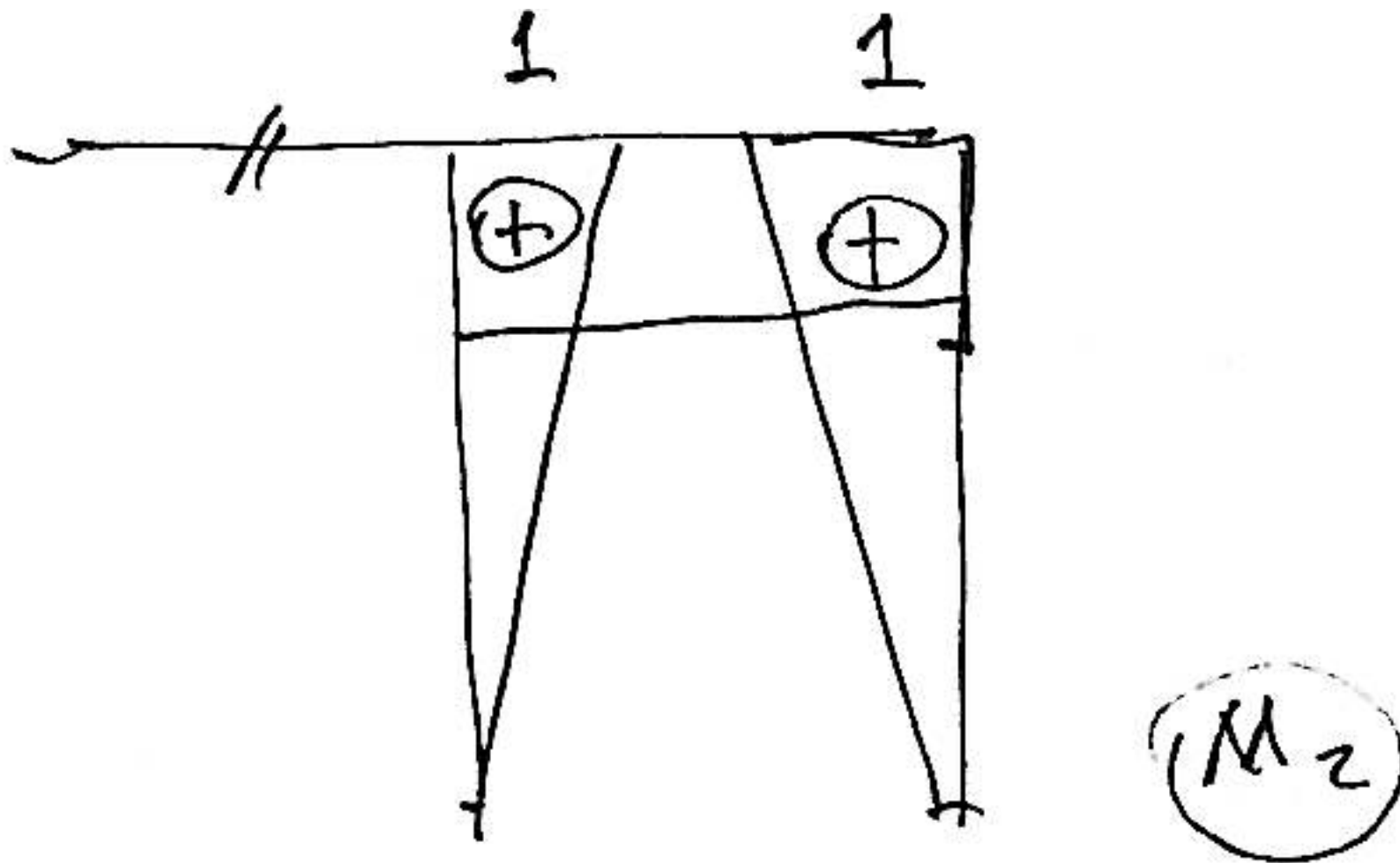
Schemat pracy

$$X_2 = 1$$

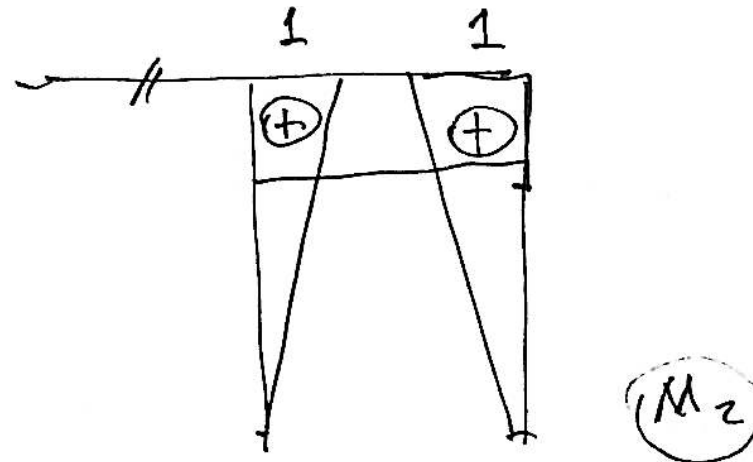
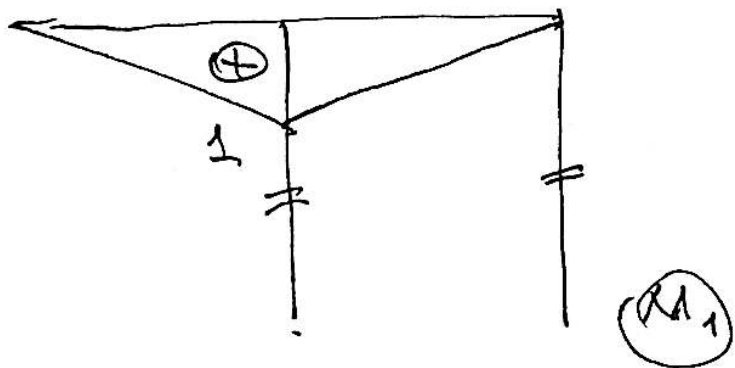


Przykład 1

Wykres momentów od niewiadomej $X_2=1$



Przykład 1 - Obliczenie przemieszczeń



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{6}{5} l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{11l}{15EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} l \cdot 1 \cdot 1 \right] = \frac{3l}{5EI}$$

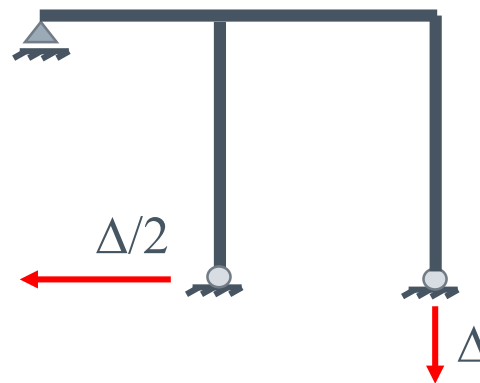
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{6}{5} l \cdot 1 \right] = \frac{28l}{15EI}$$

Przykład 1

Obliczenie przemieszczeń

$$\delta_{10} = \frac{5}{6l} \Delta$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{l} \frac{\Delta}{2} = -\frac{\Delta}{2l}$$



Przykład 1

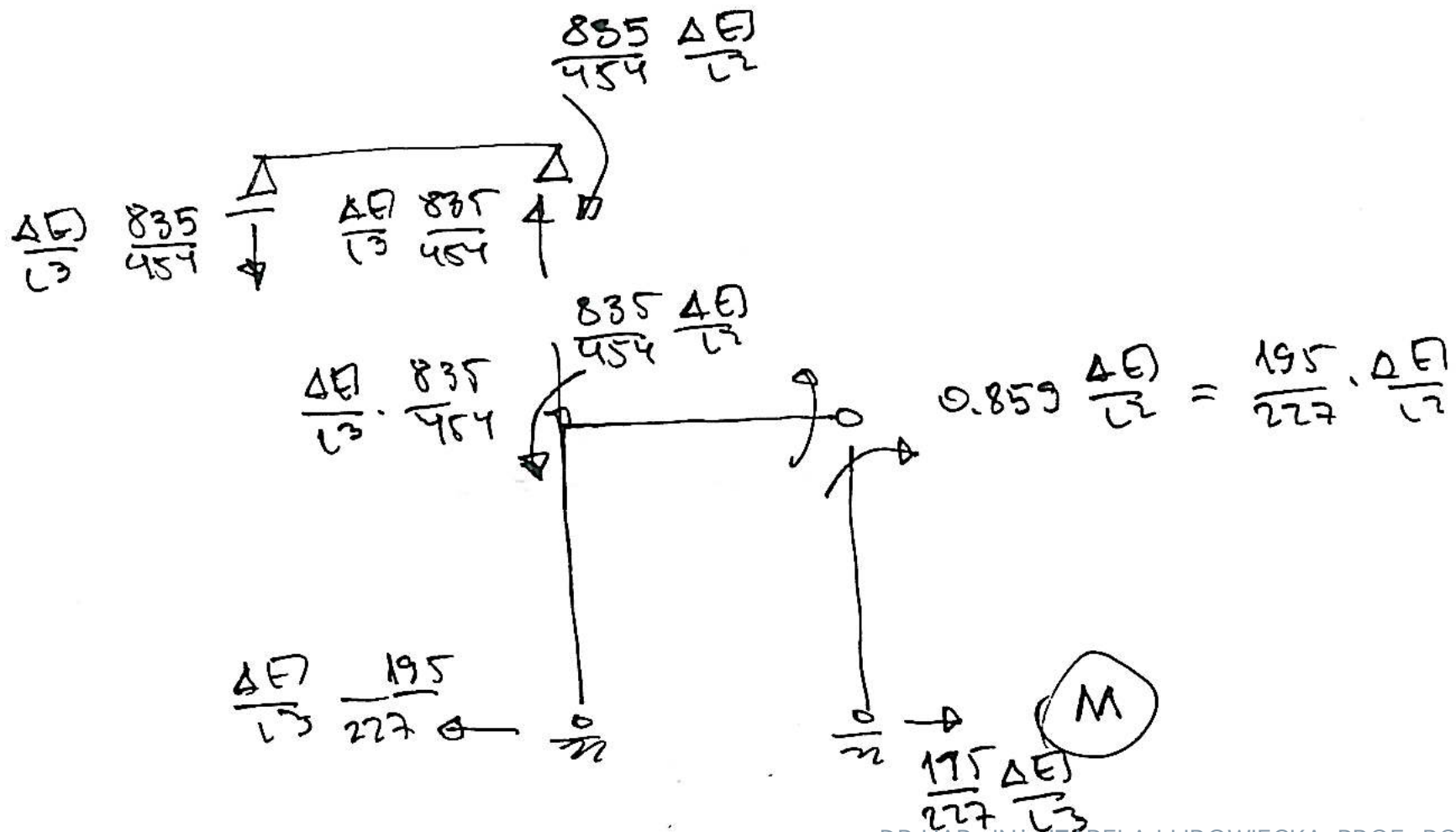
Obliczenie nadliczbowych

$$X_1 = -\frac{835}{454} \frac{\Delta EI}{l^2} = 1.839 \frac{\Delta EI}{l^2}$$

$$X_2 = \frac{195}{227} \frac{\Delta EI}{l^2} = 0.859 \frac{\Delta EI}{l^2}$$

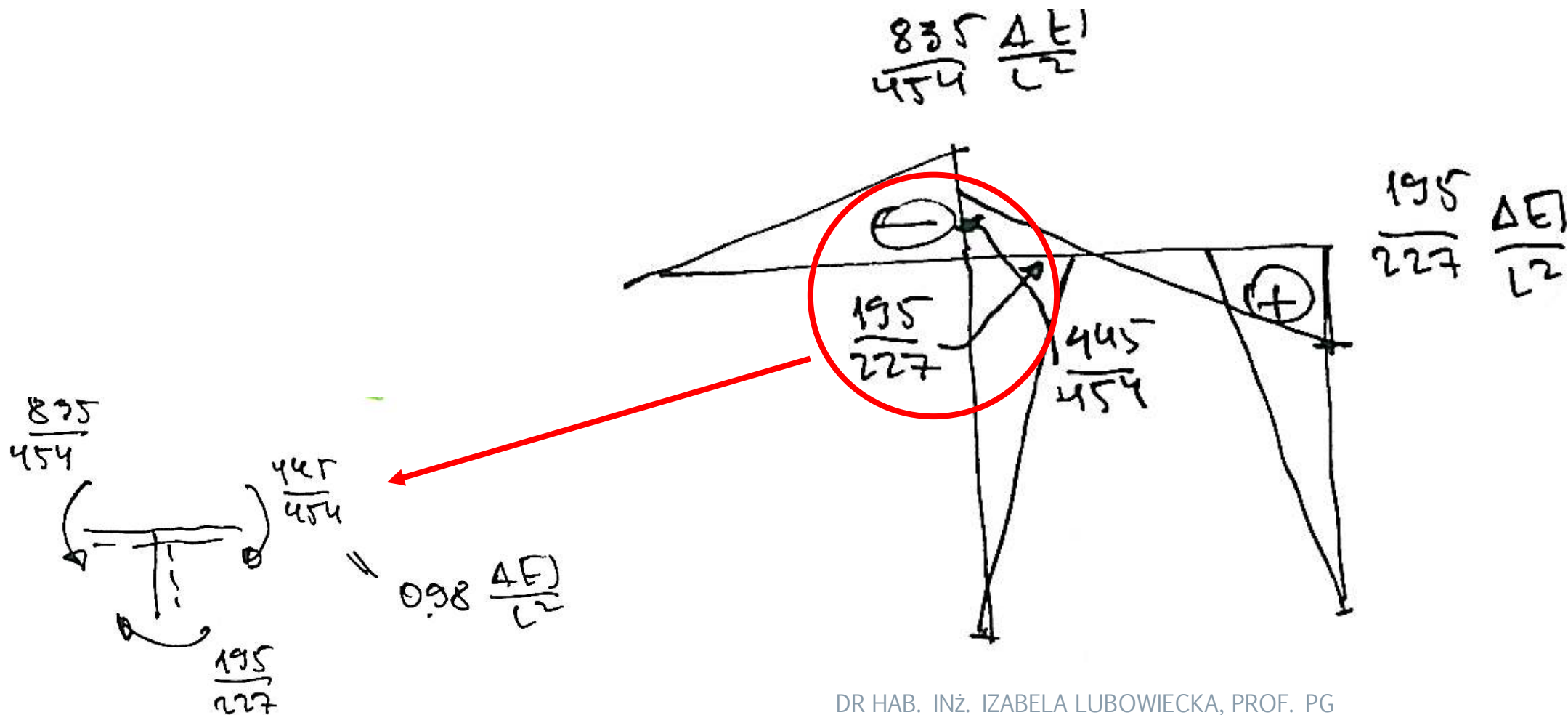
Przykład 1

Obliczenie sił wewnętrznych i reakcji



Przykład 1

Wykres momentów zginających (M) i sprawdzenie równowagi w węźle



Przemieszczenia wywołane temperaturą

Zmiany temperatury w układach statycznie niewyznaczalnych generują **siły wewnętrzne**; w układach statycznie wyznaczalnych (jak UMPS) powodują jedynie przemieszczenia (belki, ramy)

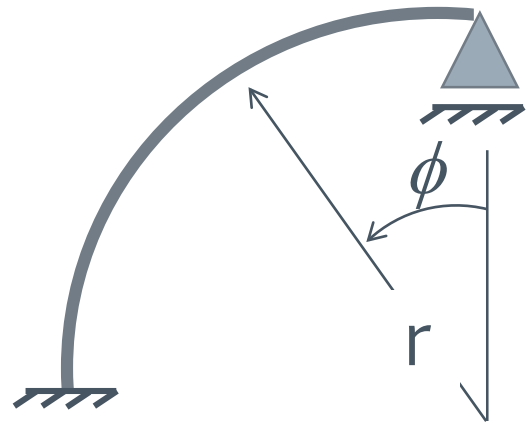
$$\delta_i = \int_s \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \alpha t_0 ds$$

Przemieszczenie wywołane temperaturą w wyznaczalnych kratownicach

$$\delta_i = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \alpha t_0 l_i$$

Obciążenia termiczne w układach statycznie niewyznaczalnych

Przykład 2 – ogrzany łuk kołowy



$$\Delta t = 40^{\circ} C$$

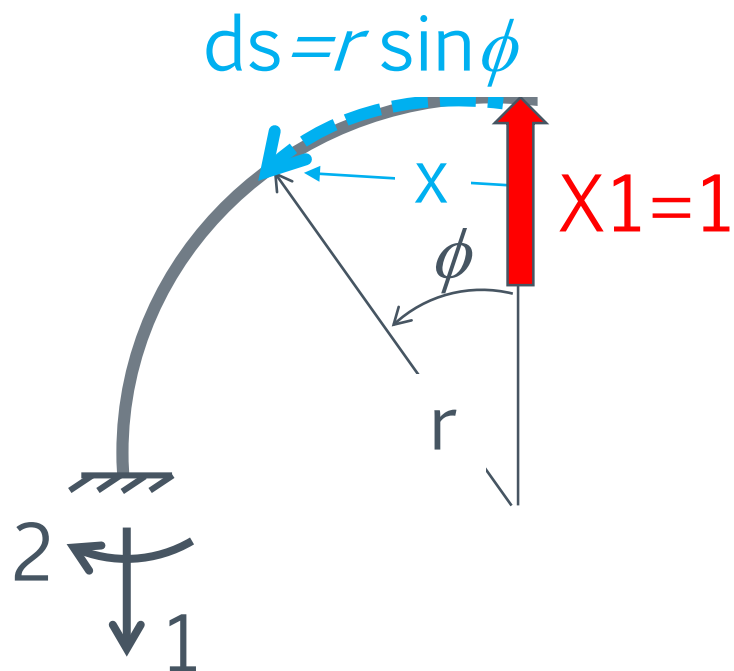
$$\alpha_t = 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}C}$$

$$h = 0.2m$$

$$r = 2m$$

$$EI = 2000\pi \text{ kNm}^2$$

Przykład 2 – ogrzany łuk kołowy



$$ds = r d\phi$$

$$x = r \sin \phi$$

$$M(x) = 1 \cdot x \rightarrow M(\phi) = r \sin \phi$$

Przykład 2 – łuk kołowy

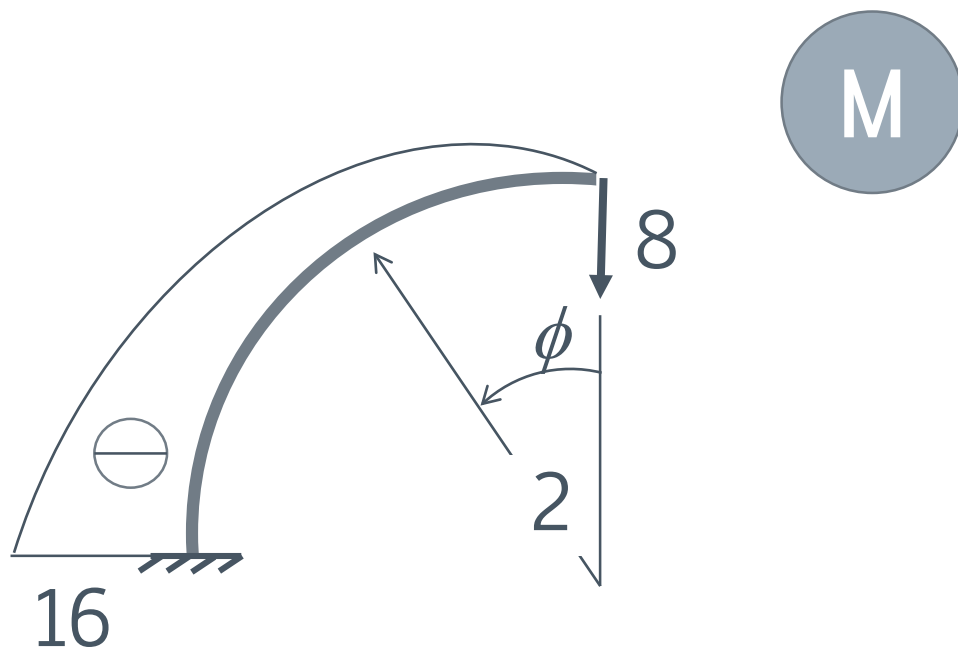
$$\delta_{11} = \int_l \frac{M^2}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} [M(\varphi)]^2 r d\varphi = \frac{r^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{EI} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{4EI} = 10^{-3}$$

$$\delta_{10} = \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \int_l M ds = \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \int_0^{\pi/2} M(\varphi) r d\varphi =$$

$$= \frac{\alpha_t \Delta t}{h} r^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\alpha_t \Delta t}{h} r^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\alpha_t \Delta t}{h} r^2 = 8 \cdot 10^{-3}$$

Po podstawieniu danych liczbowych wyznaczamy $X_1 = -8$
i wykonujemy wykres M.



KRATOWNICE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

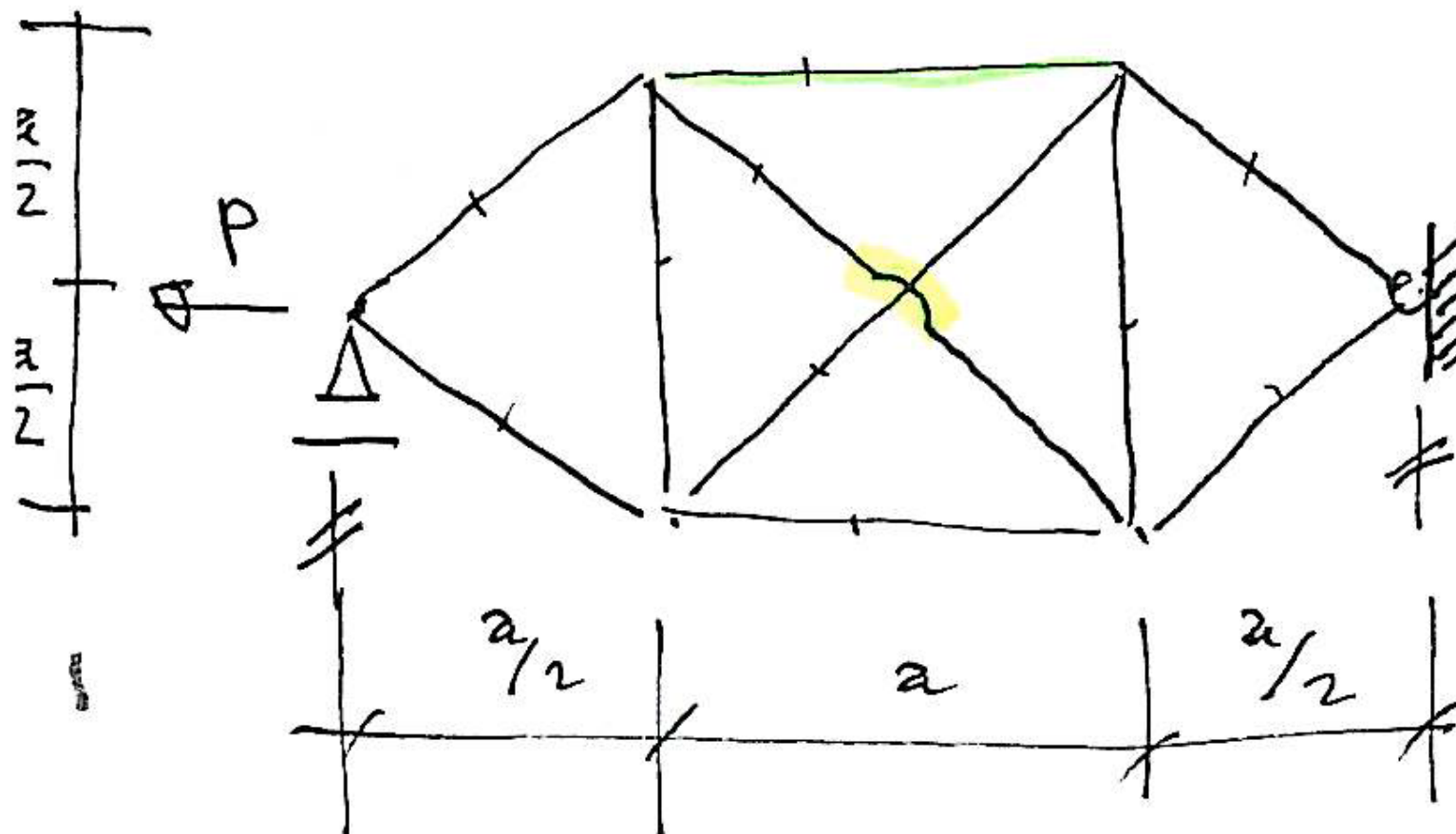
Różne rodzaje statycznej niewyznaczalności:

Wewnętrzny – za dużo prętów (rozcinamy pręt i wstawiamy w niego nadliczbową)

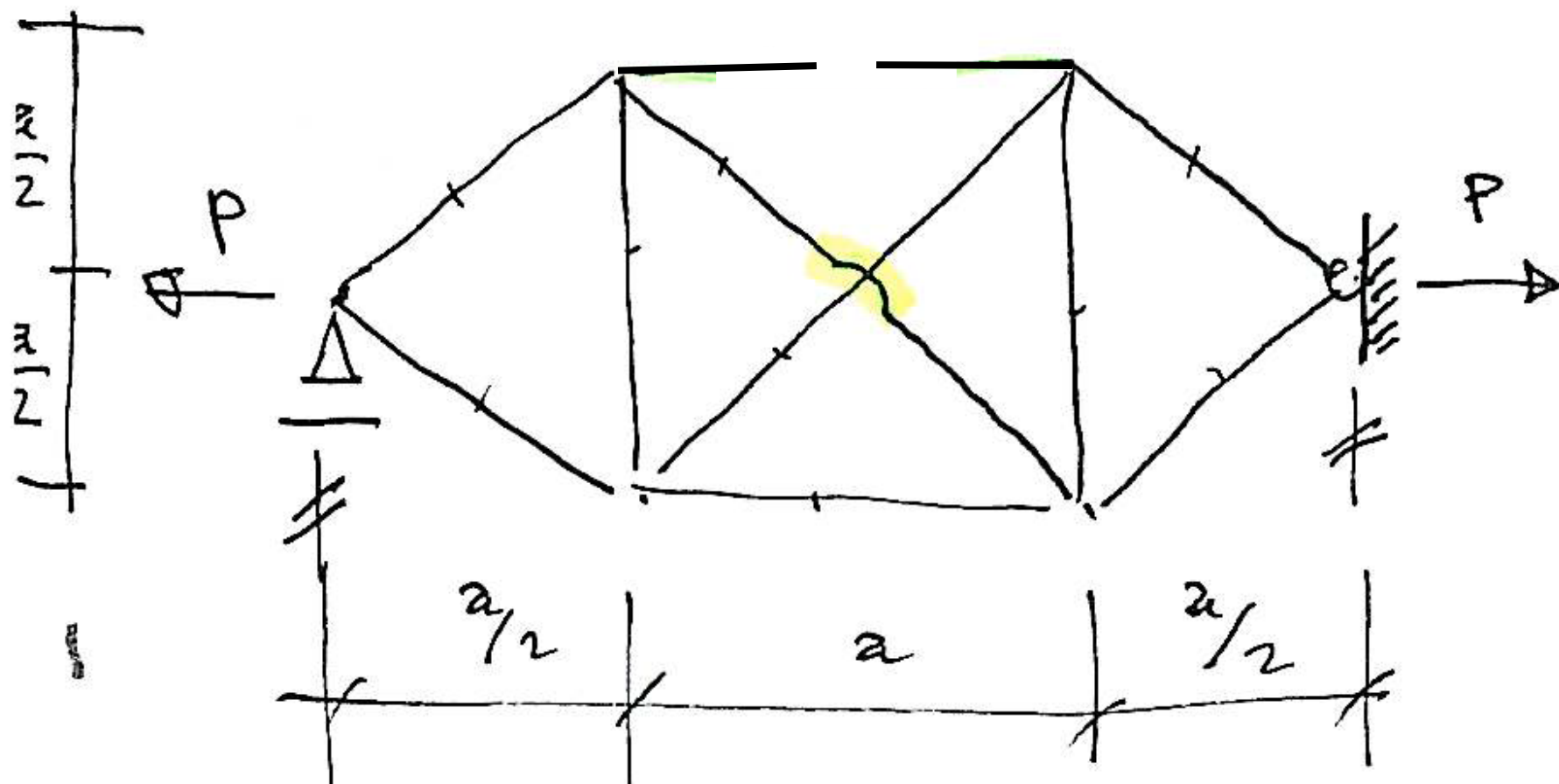
Zewnętrzny – za dużo reakcji podporowych do wyznaczenia (zdejmujemy więz i wstawiamy nadliczbową w postaci reakcji)

Przykład 5 – obliczyć siły w prętach kratownicy.

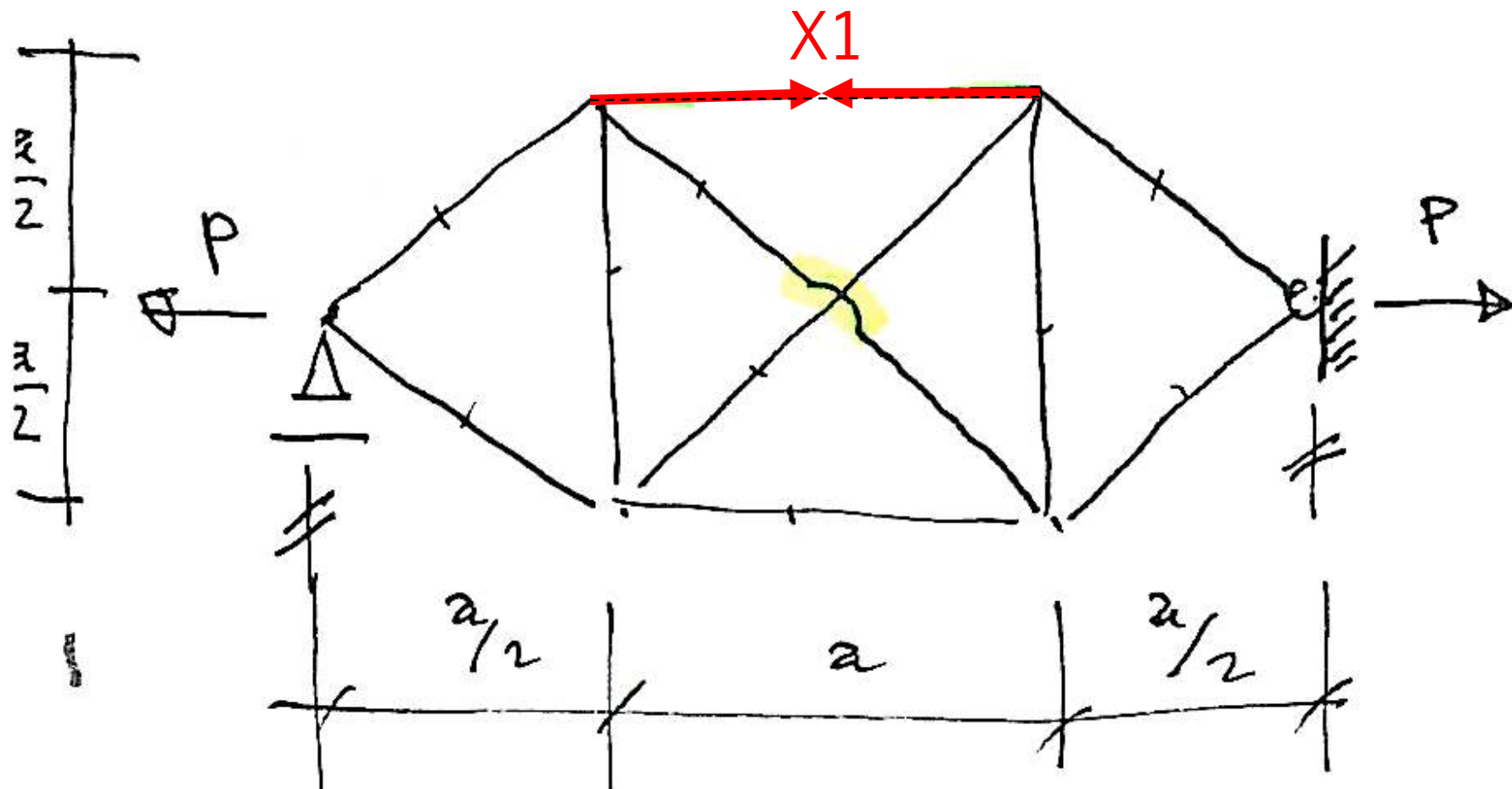
$EA = \text{const.}$



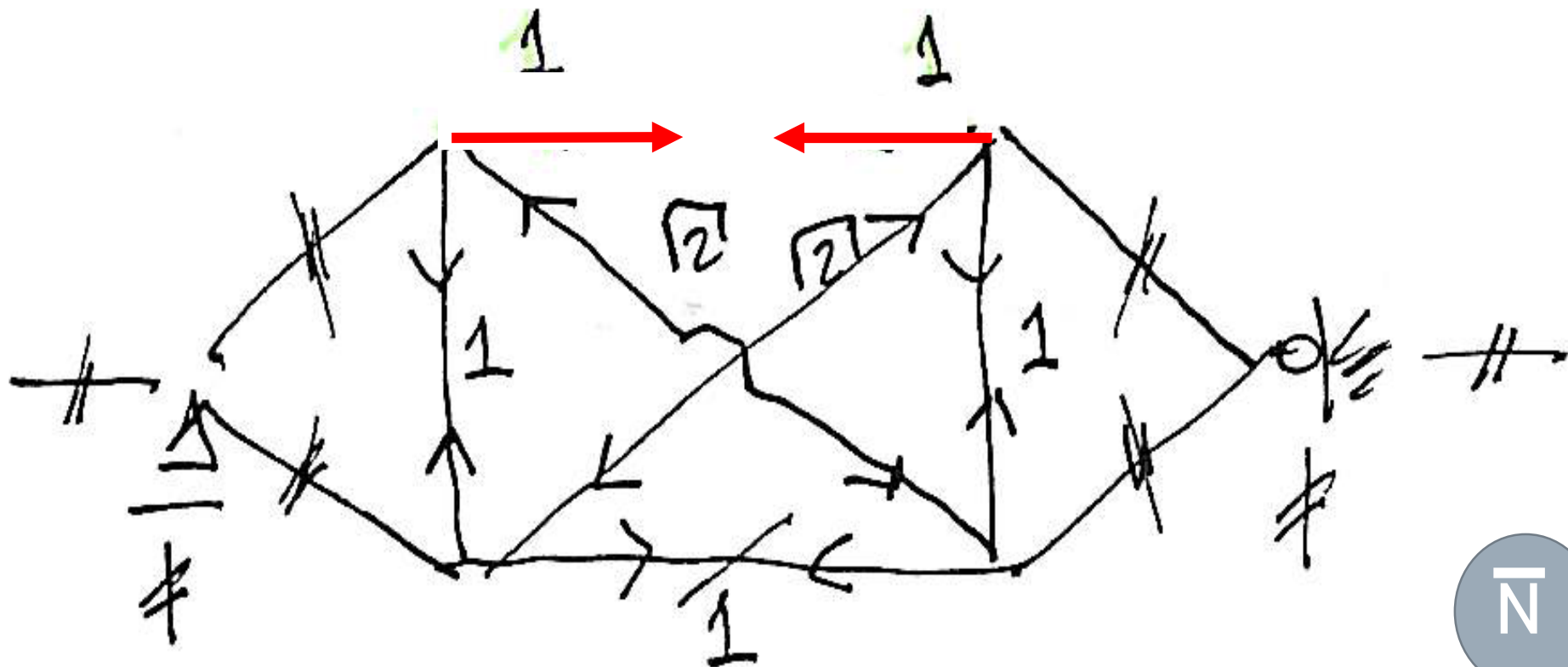
Przykład – układ podstawowy – obciążenie nadliczbową X1



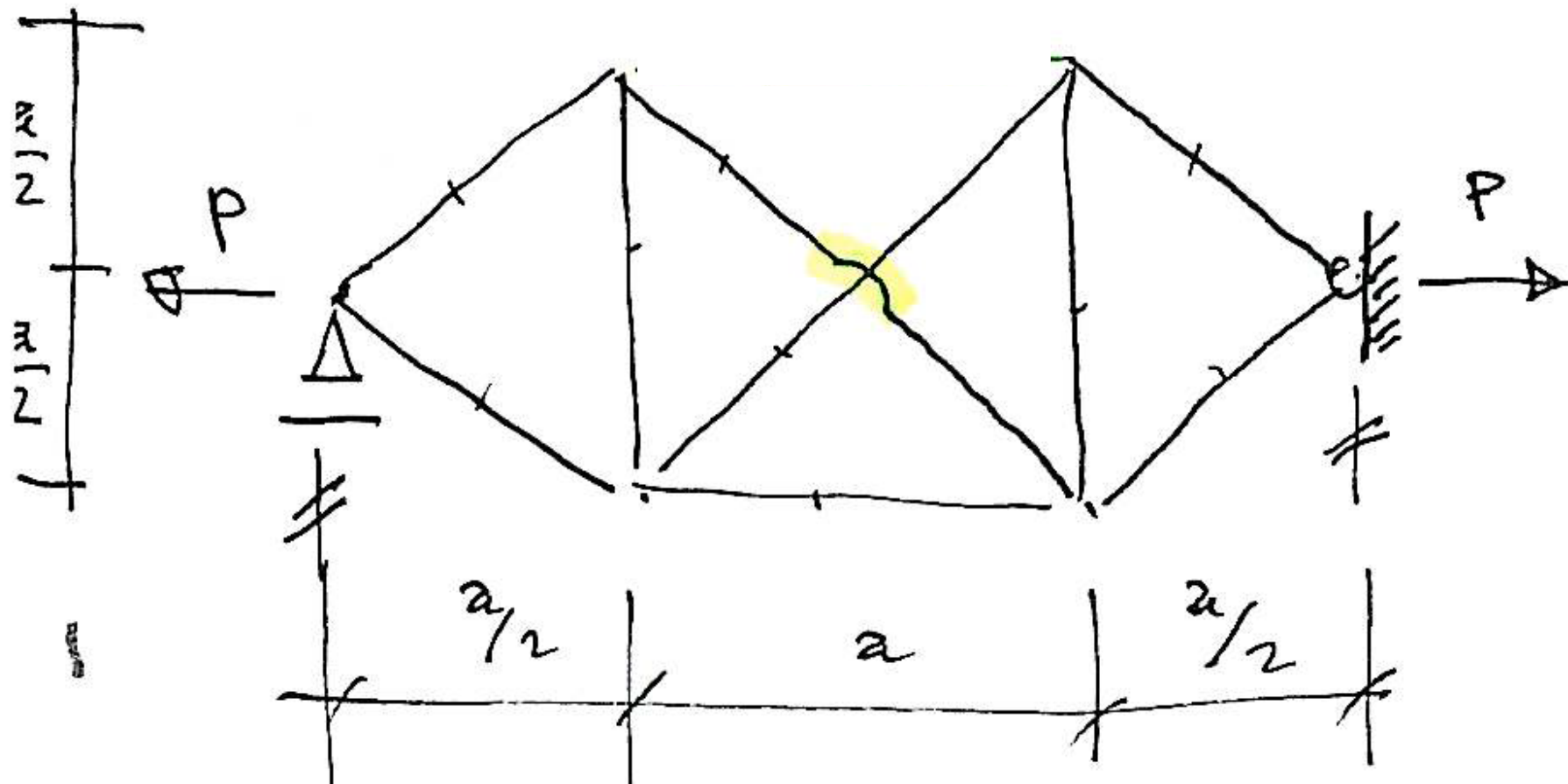
Przykład – układ podstawowy – obciążenie nadliczbową X_1



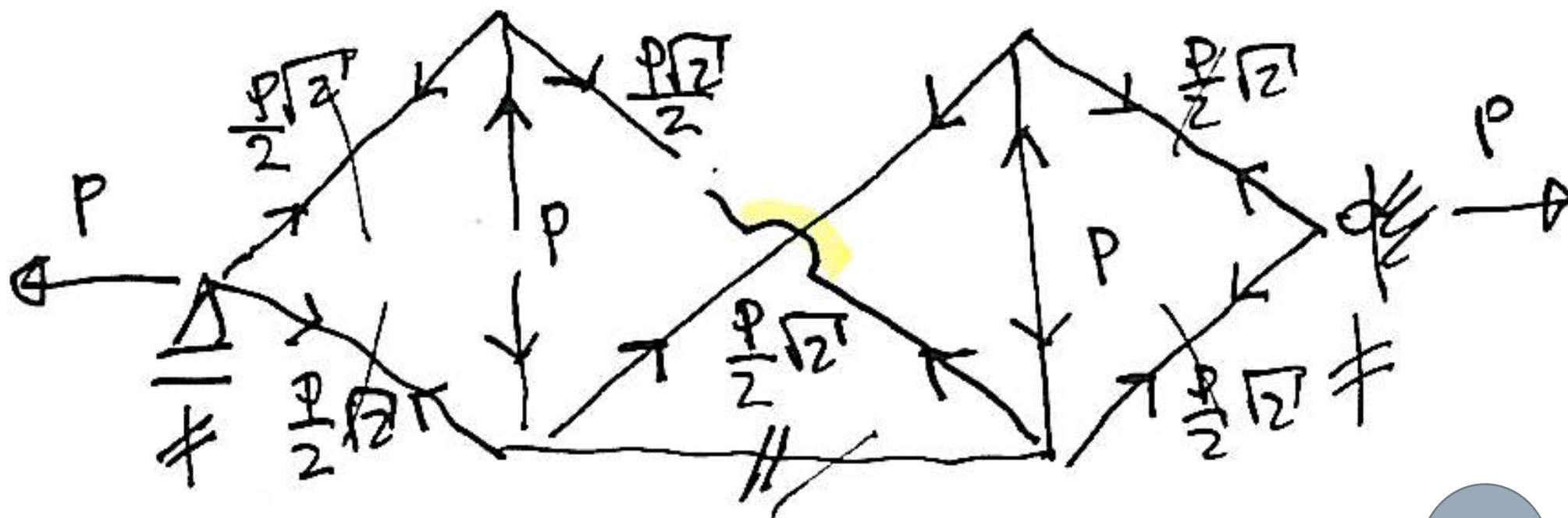
Przykład 5 – siły w prętach kratowych od $X1=1$



Przykład 5 – układ podstawowy – obciążenie zewnętrzne;
rozcięty pręt zamocowany przegubowo zwisa luźno z obu
stron. Rozwiązujemy układ z mniejszą o jeden liczbą prętów.



Przykład 5 – siły w prętach kratowych od obciążenia zewnętrznego



N

Przykład 5 – obliczenie przemieszczeń i nadliczbowej X_1

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^9 \frac{N_i \bar{N}_i}{EA} l_i$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{10} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_i}{EA} l_i$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Przykład 5 – obliczenie przemieszczeń i nadliczbowej X_1

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^9 \frac{N_i \bar{N}_i}{EA} l_i = \frac{1}{EA} \left[-2P \cdot 1 \cdot a - 2 \cdot \frac{P\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \right] = \frac{-2aP}{EA} (1 + \sqrt{2})$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{10} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_i}{EA} l_i = \frac{1}{EA} \left[4 \cdot 1^2 \cdot a + 2 \cdot (\sqrt{2})^2 a\sqrt{2} \right] = \frac{4a}{EA} (1 + \sqrt{2})$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}$$

Przykład 5 – siły wewnętrzne w kratownicy statycznie niewyznaczalnej

