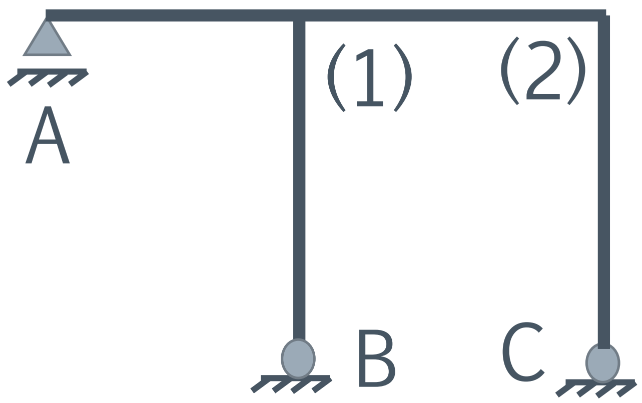
Mechanika budowli

Izabela Lubowiecka
Katedra Mechaniki Budowli WILiś

Metoda przemieszczeń

węzeł, i **pręt**

Każdy układ będziemy rozpatrywać jako połączenie **prętów** i **węzłów**. Pręty są oddzielone od węzłów przekrojami przywęzłowymi.



Metoda przemieszczeń

Węzły:

A, B, C- węzły podporowe; (1), (2) - swobodne

Pręty:

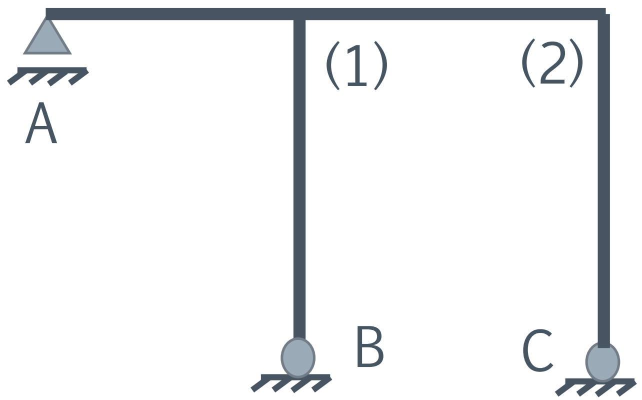
1-2 (lub 2-1),

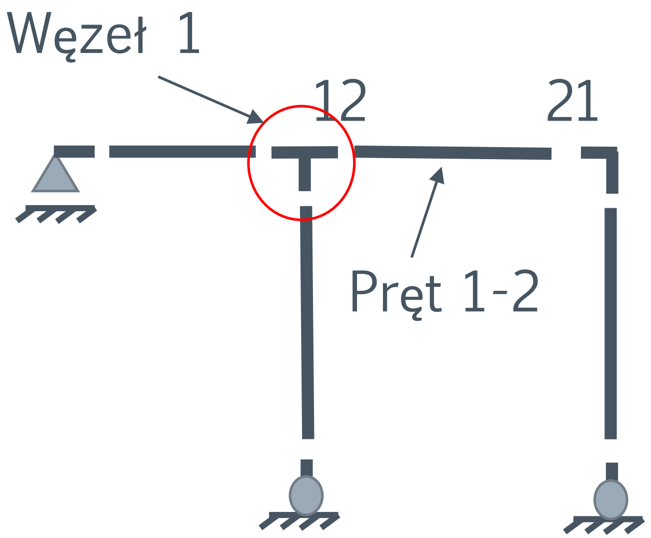
2-C (lub C-2),

A-1 (lub 1-A),

1-B (lub B-1),

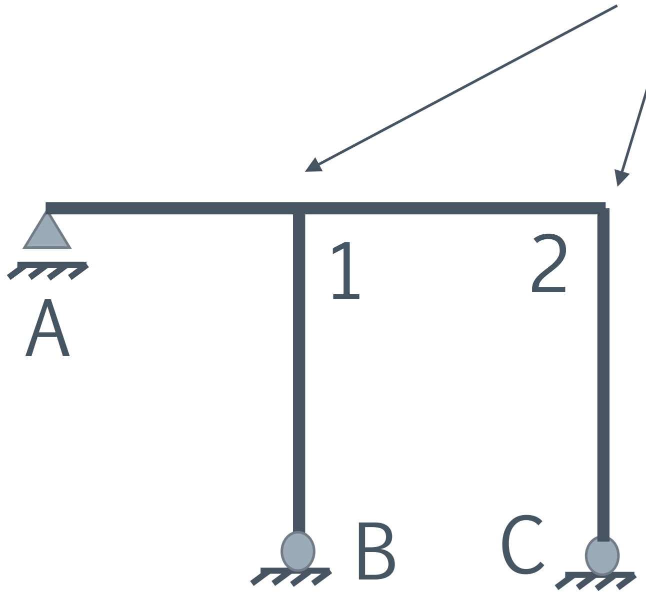
Przekrojе przywęzłowe: 12; 21; 2C; B1; A1





Metoda przemieszczeń

Stan naprężeń i odkształceń układu jest określony przez obciążenie i przesunięcia oraz obroty węzłów swobodnych.



Obciążenie układu jest zawsze dane, natomiast **przemieszczenia** będą niewiadomymi. Będą to niewiadome geometryczne metody przemieszczeń.

Metoda przemieszczeń

Liczba niewiadomych to stopień geometrycznej niewyznaczalności.

Węzeł układu, który nie może doznać przesunięcia nazywamy **nieprzesuwnym** a taki, który może się przesuwać – **przesuwnym**.

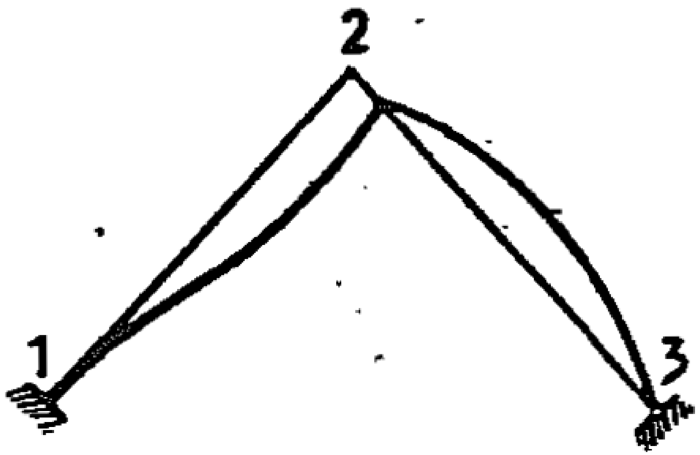
Węzeł nieprzesuwny może doznać tylko obrotu.

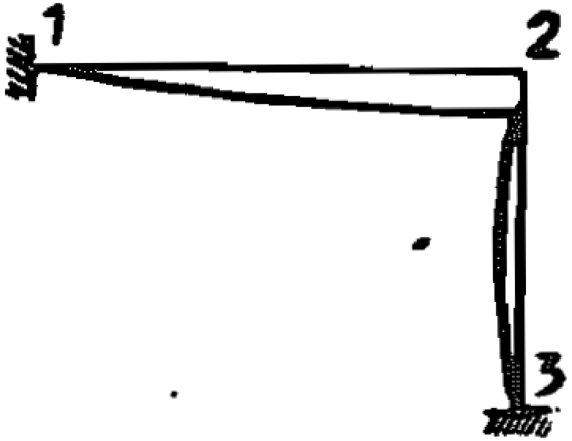
Jeżeli wszystkie węzły układu są nieprzesuwne to taki układ nazywamy nieprzesuwnym, a jeśli choć jeden węzeł jest przesuwny to cały układ nazywamy przesuwnym.

Metoda przemieszczeń

Ma to sens tylko wtedy gdy pomijamy wpływ sił normalnych – czyli odkształcenia osiowe prętów.

Skrócenie pręta 2-3 musi wywołać przesunięcie węzła 2.



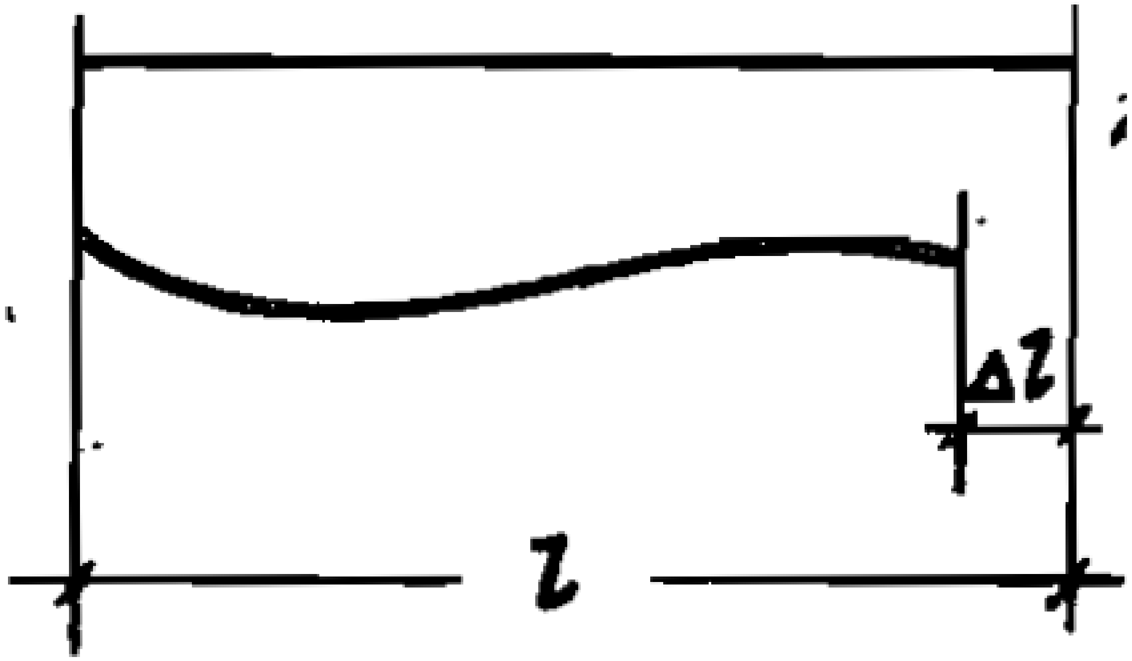


Przy określaniu przesuwności układu pomijać będziemy zmiany odległości między końcami pręta wywołane jego zakrzywieniem.

Metoda przemieszczeń

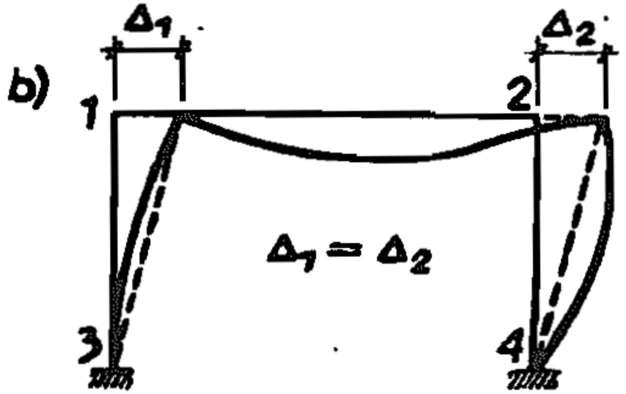
Przy określaniu przesuwności układu pomijać będziemy zmiany odległości między końcami pręta wywołane jego zakrzywieniem.

Tego rodzaju zmiany odległości są zawsze wielkościami bardzo małymi w stosunku do przesunięć prostopadłych do osi pręta.

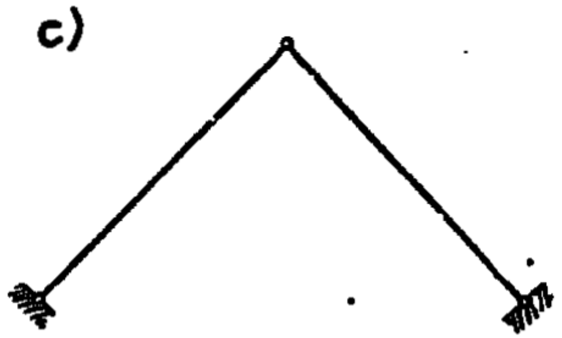


Układ nieprzesuwny

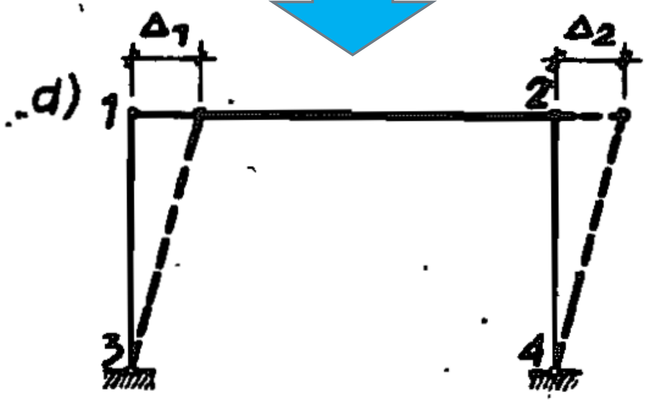
Układ przesuwny



Po zamianie układów na układy przegubowe



Układ geometrycznie niezmienny



Układ chwiejny

Metoda przemieszczeń

Jeżeli układ przegubowy otrzymany z układu danego jest geometrycznie niezmienny, to układ dany jest nieprzesuwny.

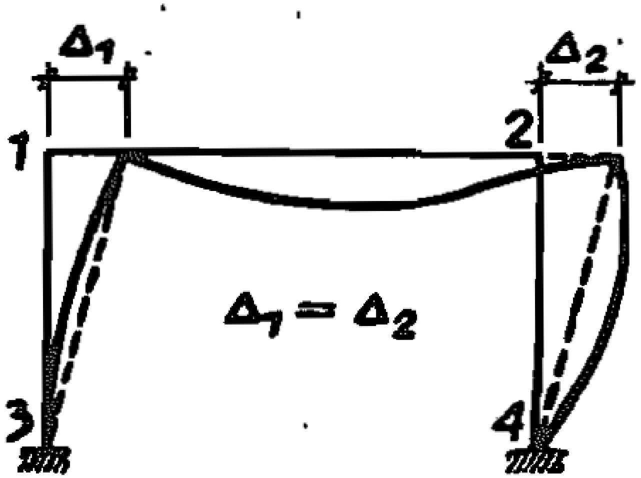
Jeżeli układ przegubowy jest chwiejny lub chwilowo chwiejny, to układ dany jest przesuwny.

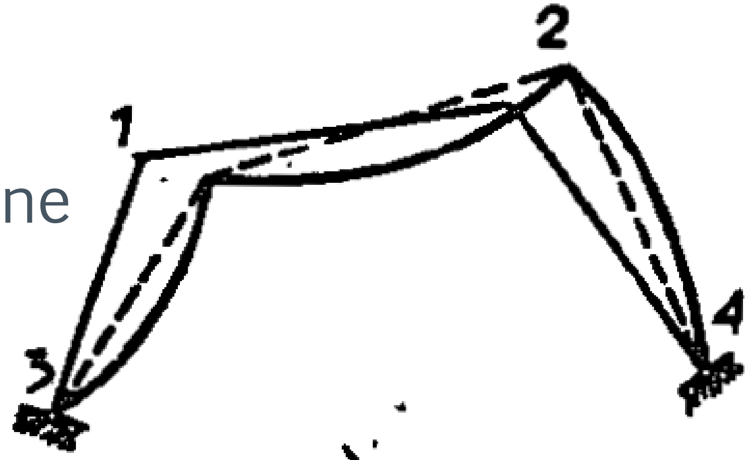
Zależności między przesunięciami węzłów w układzie przesuwnym i w odpowiadającym mu układzie przegubowym są identyczne. Zależności te dla układu przesuwnego można określić rozpatrując kinematykę układu przegubowego.

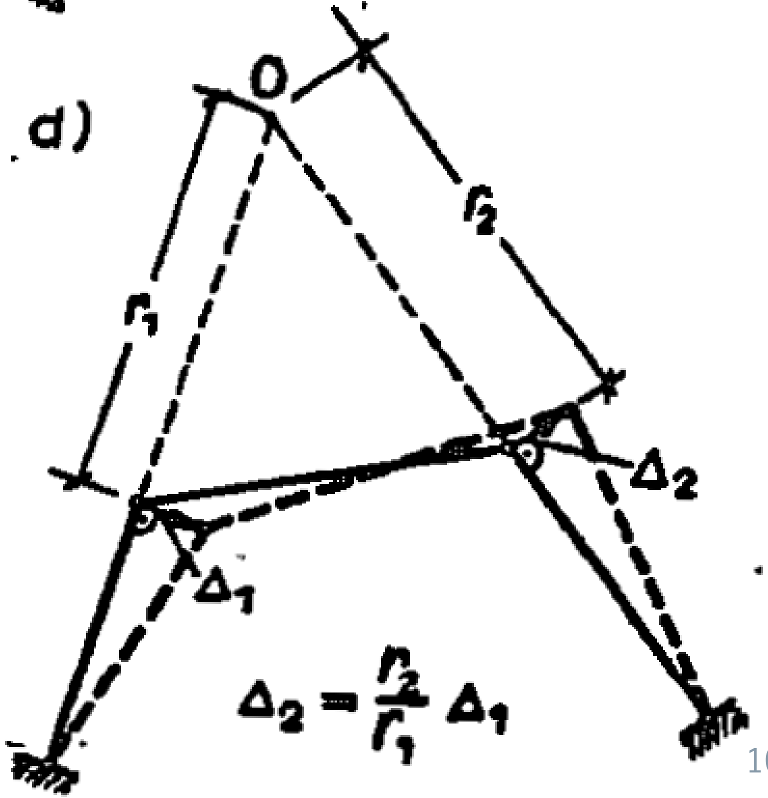
Nie wszystkie przesunięcia węzłów układu przesuwnego są od siebie niezależne. Liczba niezależnych przesunięć to liczba **stopni swobody układu przegubowego.**

Metoda przemieszczeń

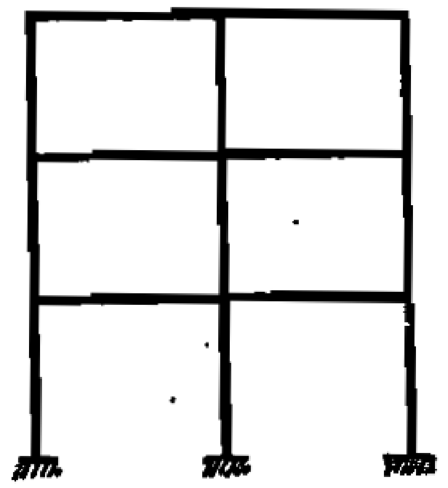
Niektóre przemieszczenia mogą być zależne

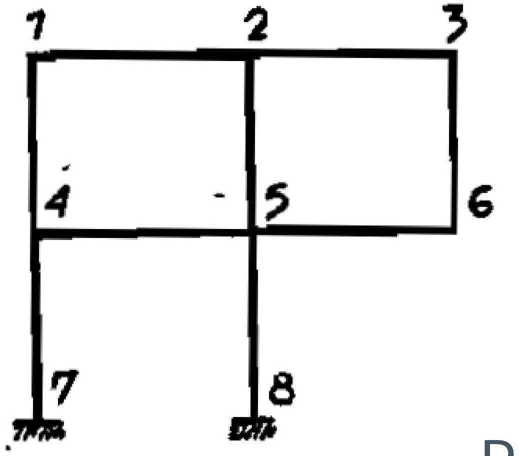




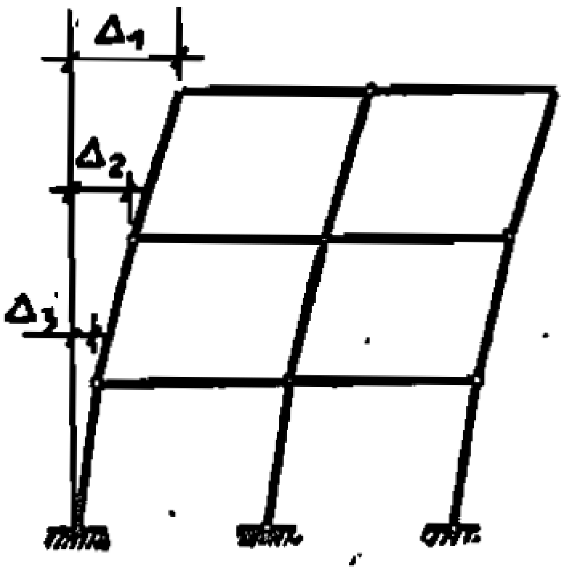


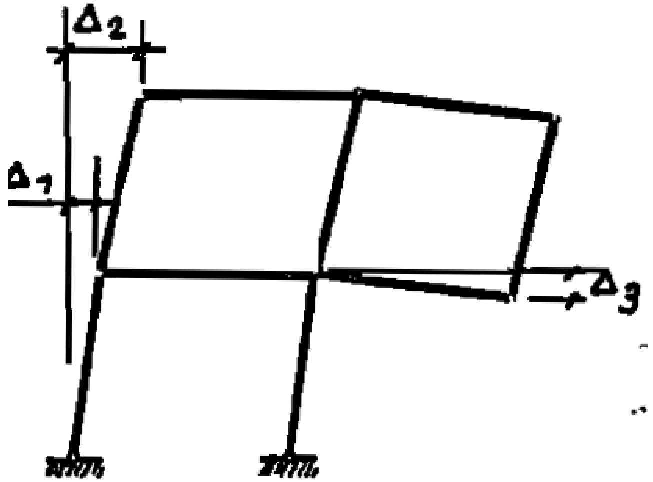
Metoda przemieszczeń





Przemieszczenia niezależne





Metoda przemieszczeń – układ podstawowy

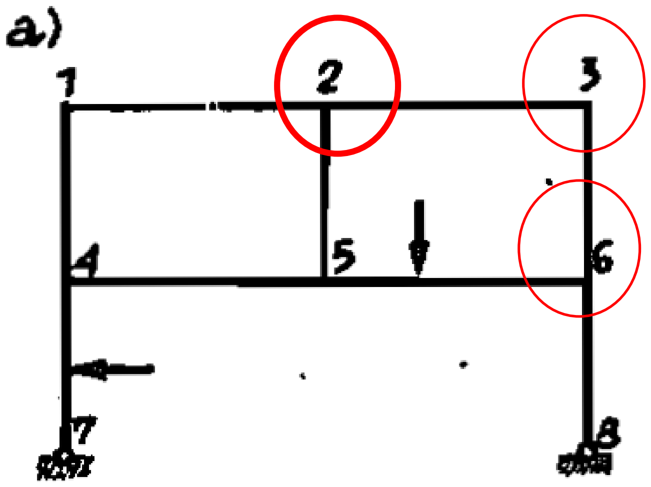
W układzie podstawowym metody sił wszystkie niewiadome (nadliczbowe) były równe zeru.

W układzie podstawowym metody przemieszczeń wszystkie przemieszczenia (przesuwy i obroty) węzłów swobodnych muszą być równe zeru.

Będzie to wymagało nałożenia **dodatkowych więzów**.

Metoda przemieszczeń – układ podstawowy

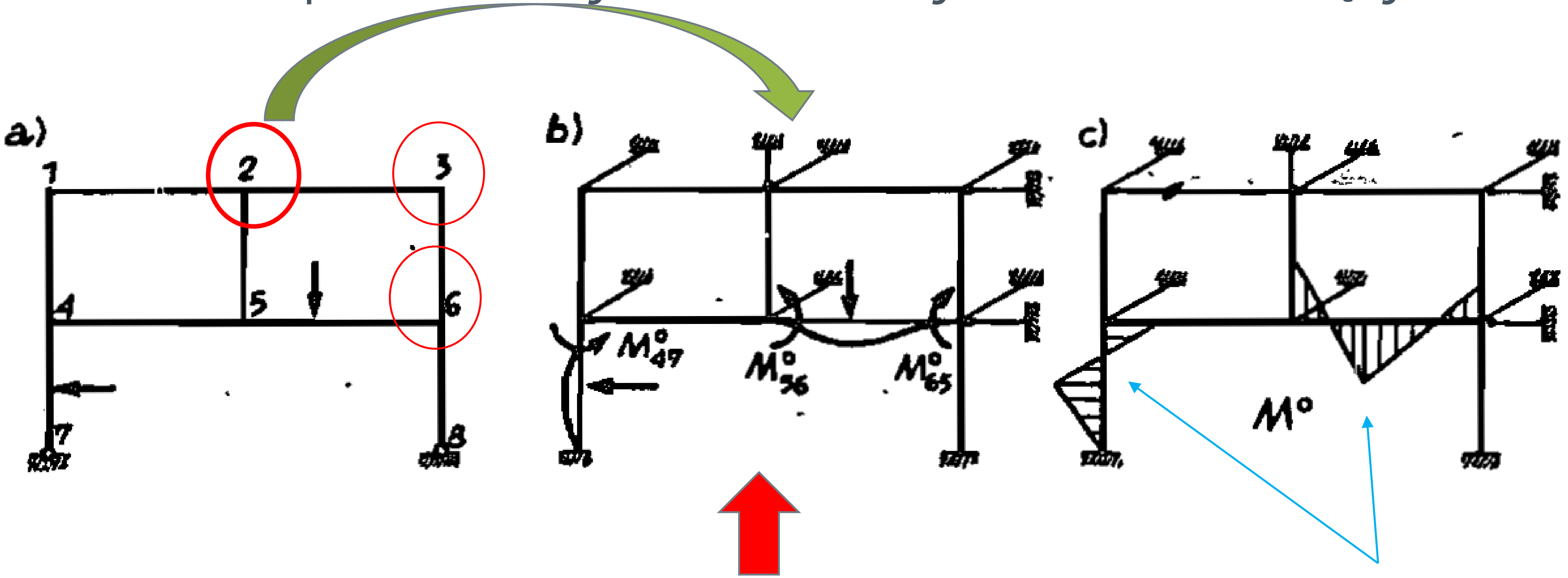
W układzie podstawowym nakładamy dodatkowe więzy



układ dany

Metoda przemieszczeń – układ podstawowy

W układzie podstawowym nakładamy dodatkowe więzy



układ dany

układ podstawowy

momenty wyjściowe

(od obc. zewnętrznego)

Metoda przemieszczeń – istota

Trzeba dobrać kąty obrotu i przesuwy tak, aby reakcje w dodatkowych więzach układu podstawowego były równe zeru.

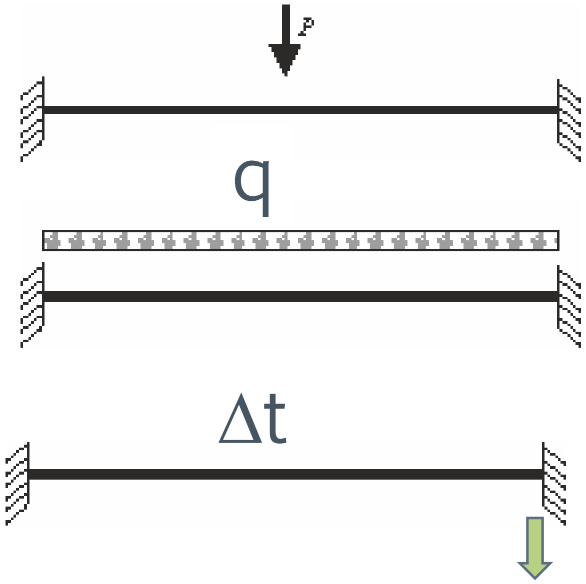
Zatem równania metody przemieszczeń będą równaniami statycznymi typu $M = 0$ dla zamocowań węzłów i $R = 0$ dla dodatkowych podpór.

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

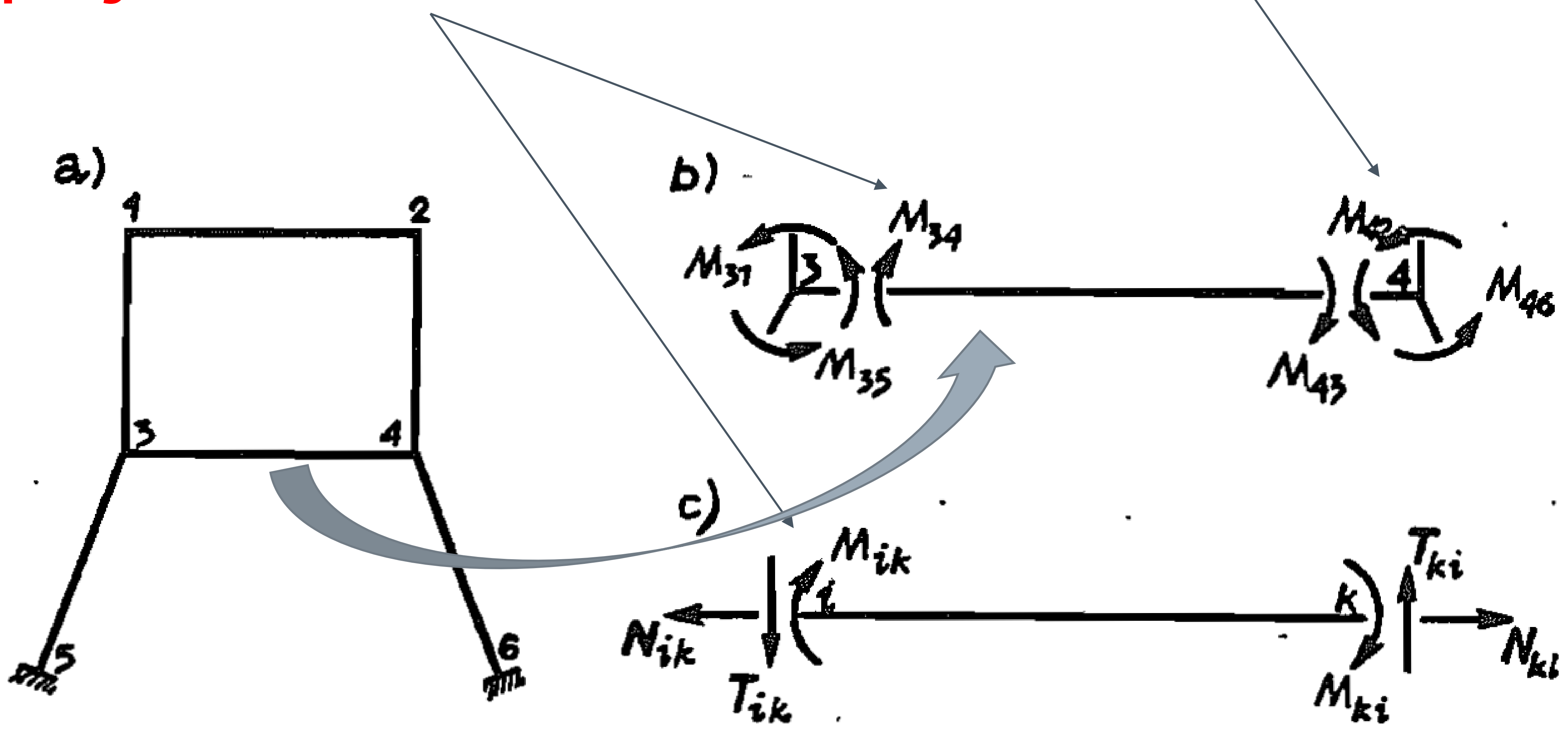
W analizie przemieszczeń bazujemy na rozwiązaniu belek:

od wszystkich rodzajów obciążeń:

- Obciążeń zewnętrznych
- Osiadania podpór
- Obciążeń termicznych



Metoda przemieszczeń – momenty węzłowe i przywęzłowe



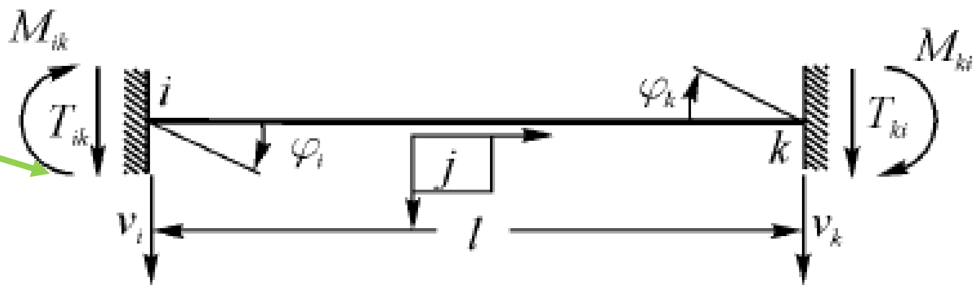
Metoda przemieszczeń wzory transformacyjne

Wzory transformacyjne:

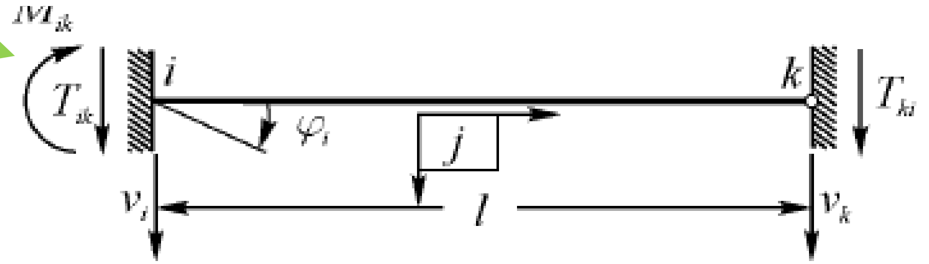
zawierają informację o możliwych momentach podporowych wywołanych osiadaniem podpór lub ich obrotami; można je wyliczyć ze wzoru Eulera lub z metody sił

Uwaga - konwencja znaków

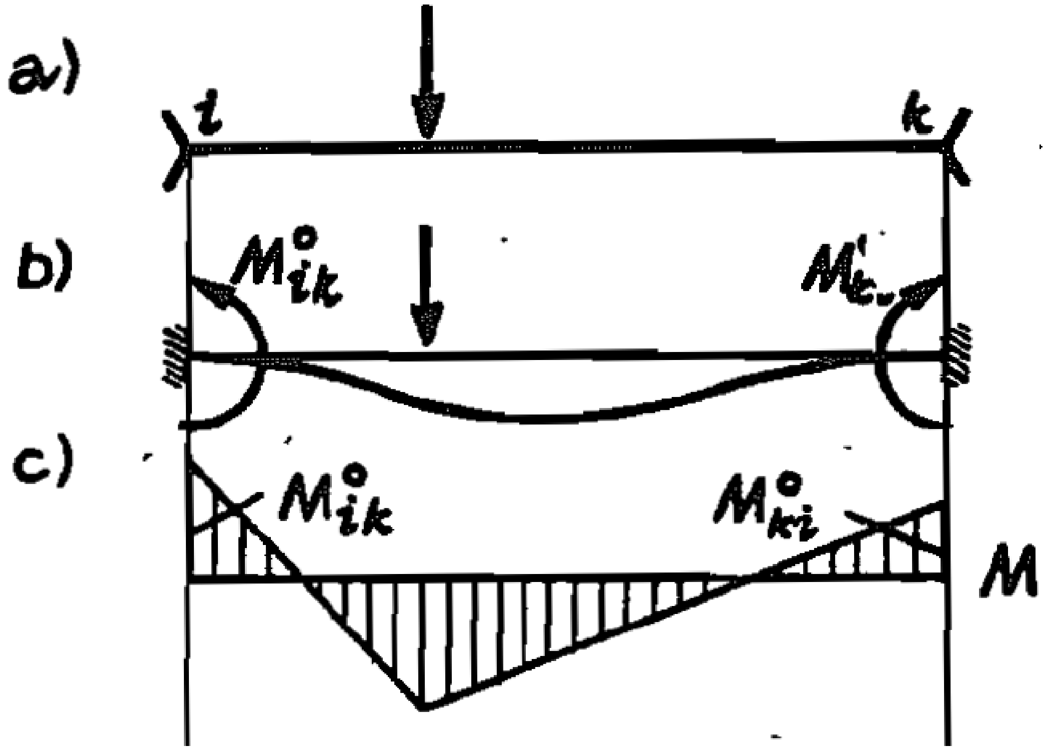
$$M'_{ik} = \frac{2EJ}{l}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}\right)$$



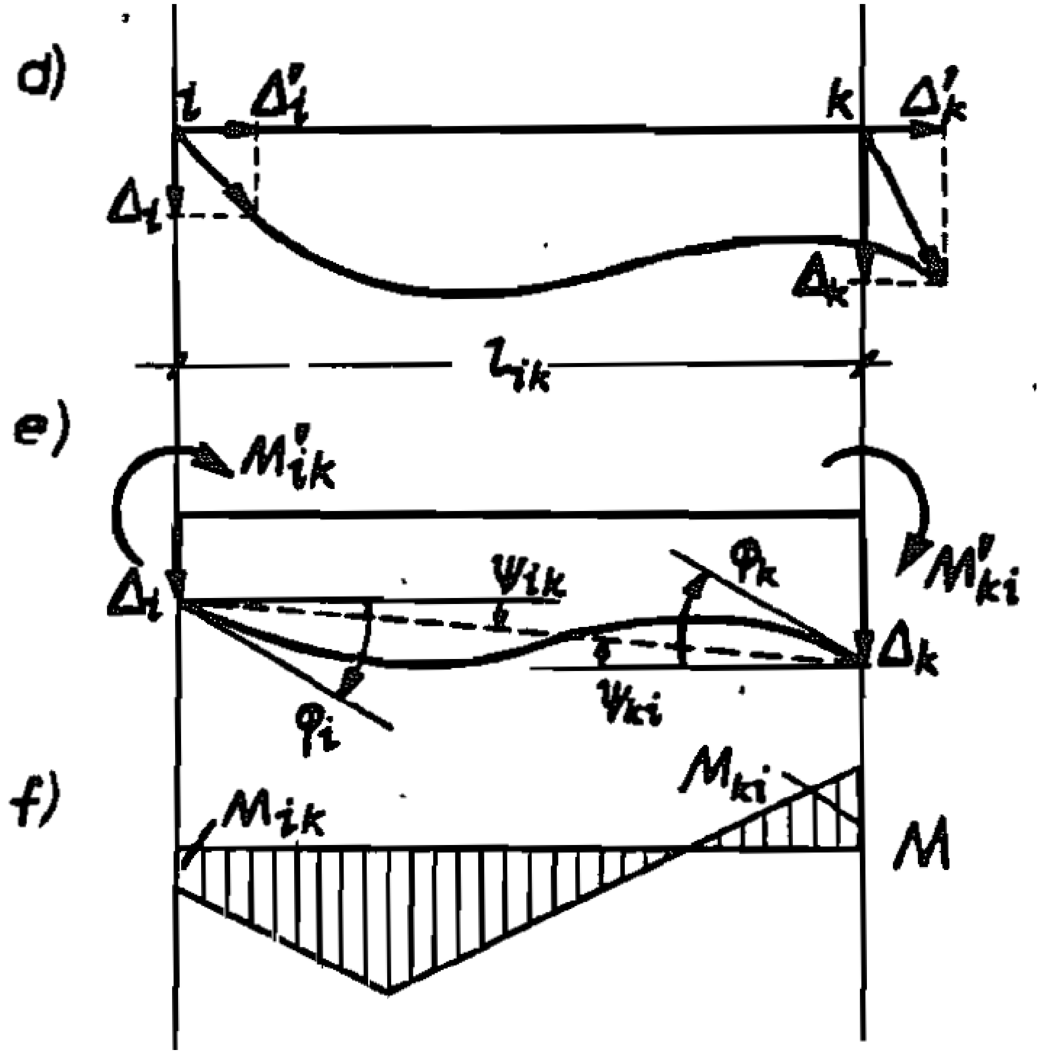
$$M'_{ik} = \frac{3EJ}{l}\left(\varphi_i - \psi_{ik}\right)$$



$$T_{ik} = \frac{M'_{ik} + M'_{ki}}{l}$$



W układzie podstawowym – powstają momenty wyjściowe Mo



W układzie rzeczywistym – powstają przemieszczenia Δ i ϕ, co powoduje powstanie momentów przywęzłowych M_{ki} i M_{ik}

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

W przypadku pręta między dwoma swobodnymi węzłami....

- Składowe przesunięć węzłów równoległe do osi pręta są jednakowe na obydwu końcach i nie powodują sił wewnętrznych, zatem rozważać będziemy tylko składowe prostopadłe do osi pręta

- Kąty obrotu końców pręta to ϕ_i i ϕ_k

Uwaga: dodatni kąt obrotu węzła ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara!

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

Wyznaczmy momenty przywęzłowe M_{ki} i M_{ik} wywołane obrotami i przesunięciami węzłów przyjmując stały moment bezwładności pręta.

W tym celu zapiszmy równanie różniczkowe zginania

$$y^{\mathrm{IV}} = 0$$

Które rozwiążemy sposobem znanym z wytrzymałości materiałów. Otrzymamy całkę ogólną równania:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

Stałe całkowania można wyznaczyć z warunków

dla
$$x = 0: \quad y = \Delta_i, \quad y' = \varphi_i,$$
$$x = l: \quad y = \Delta_k, \quad y' = \varphi_k$$

Siły wewnętrzne obliczymy ze wzorów:

$$M = -EIy'',$$
$$T = EIy'''.$$

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

$$M = -EIy'', \qquad T = EIy'''.$$

Podstawiając do równania momentów zginających $x = 0$ i $x = l$, otrzymamy wzory na momenty przywęzłowe

$$M(0) = M'_{ik} = \frac{2EI}{l_{ik}}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\frac{\Delta_k - \Delta_i}{l_{ik}}\right);$$

$$-M(l) = M'_{ki} = \frac{2EI}{l_{ik}}\left(2\varphi_k + \varphi_i - 3\frac{\Delta_k - \Delta_i}{l_{ik}}\right).$$

$$\boxed{\psi_{ik} = \psi_{ki} = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l_{ik}}}$$

Wyrażenie $\Delta_k - \Delta_i$ przedstawia względne przesunięcie węzłów i, k.

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

Dodatni kąt ψ_{ik} będzie miał zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Dalej, wprowadzając oznaczenie $\mu_{ik} = \mu_{ki} = \dfrac{2EI}{l_{ik}}$ zapiszemy wzory

na momenty przywęzłowe od jednostkowego obrotu w postaci

$$M'_{ik} = \mu_{ik}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}\right),$$

$$M'_{ki} = \mu_{ki}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ki}\right).$$

Pełny moment przywęzłowy dostaniemy dodając do powyższych równań momenty wyjściowe.

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

Pełne momenty przywęzłowe

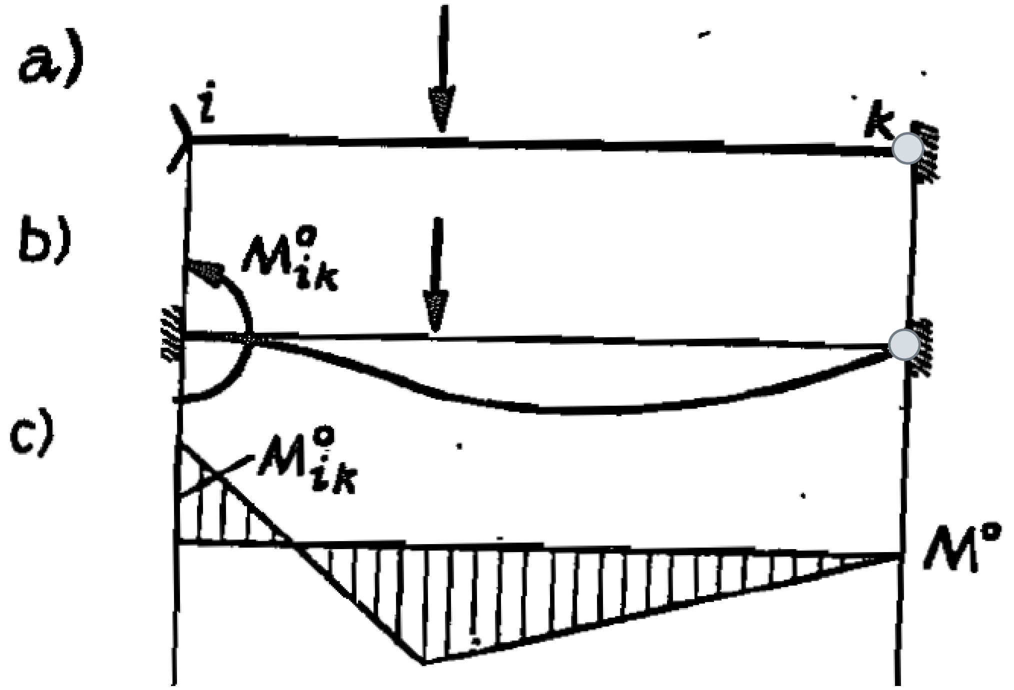
$$M_{ik} = M_{ik}^{0} + \mu_{ik}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}\right),$$

$$M_{ki} = M_{ki}^{0} + \mu_{ki}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ki}\right).$$

Wzory te nazywamy wzorami transformacyjnymi.

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

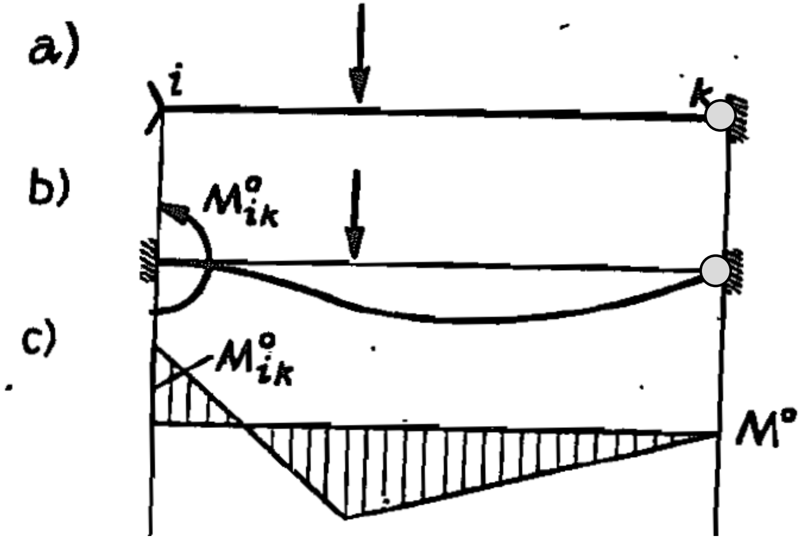
Podobnie można wyprowadzić wzory transformacyjne dla pręta, którego jeden koniec jest podparty przegubowo lub przesuwnie.

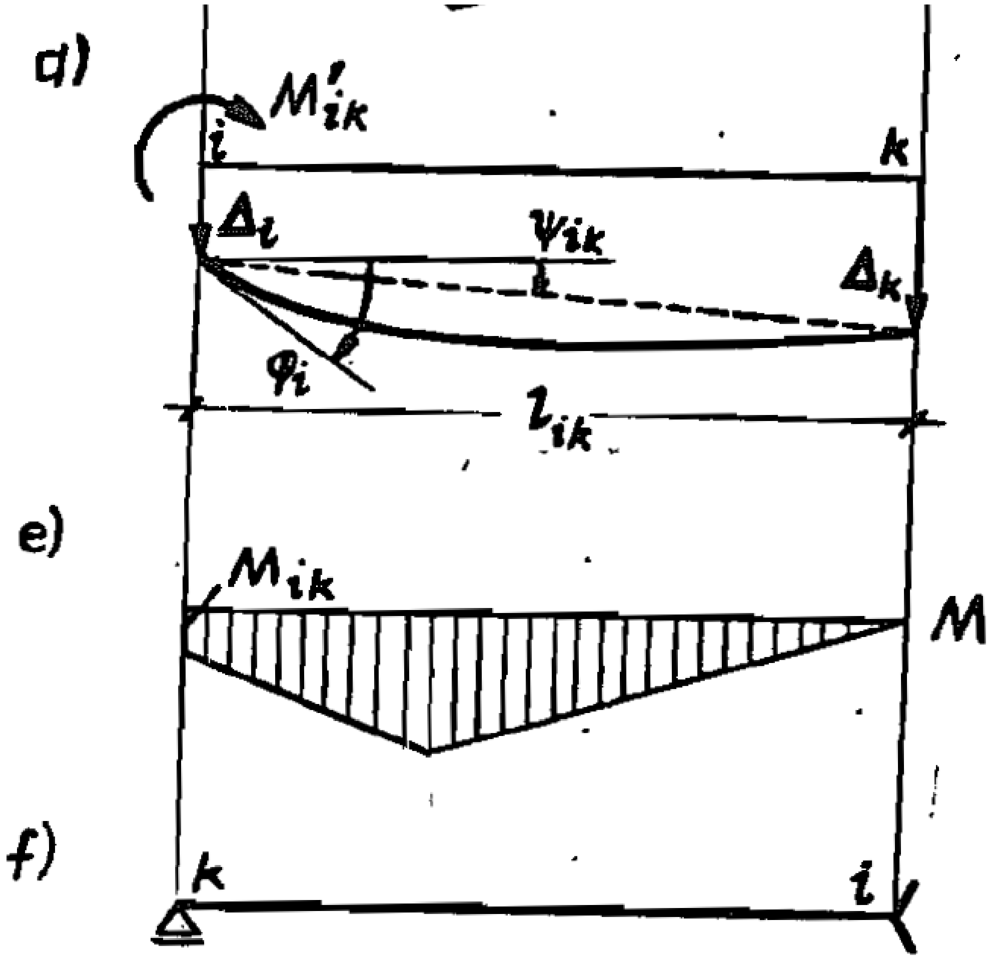


W układzie podstawowym pręt taki zachowuje się jako jednostronnie utwierdzony.

Momenty wyjściowe są jak na rysunku c).

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne

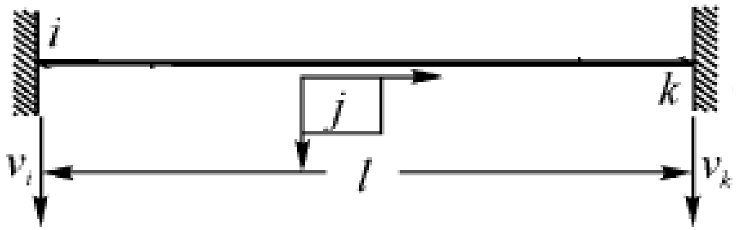




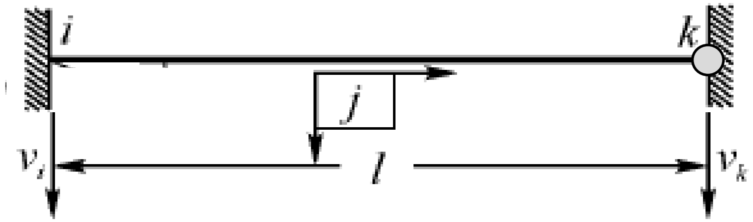
Dla takiego układu wzór transformacyjny jest następujący

$$M_{ik} = M_{ik}^{0} + \frac{3}{2}\mu_{ik}\left(\varphi_i - \psi_{ik}\right), \quad \mu_{ik} = \frac{2EI}{l_{ik}}$$

Metoda przemieszczeń - wzory transformacyjne



$$M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{2EJ}{l}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}\right)$$



$$M_{ik} = M_{ik}^0 + \frac{3EJ}{l}\left(\varphi_i - \psi_{ik}\right)$$

Siła tnąca $$T_{ik} = \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l}$$

Metoda przemieszczeń

Za pomocą wzorów transformacyjnych można obliczyć momenty przywęzłowe jeżeli znane jest obciążenie oraz kąty obrotu i przesunięcia węzłów.

Po znalezieniu momentów przywęzłowych możemy na każdym pręcie wykonać wykres momentów zginających w taki sposób jak to się robi na poszczególnych przęsłach belki ciągłej.

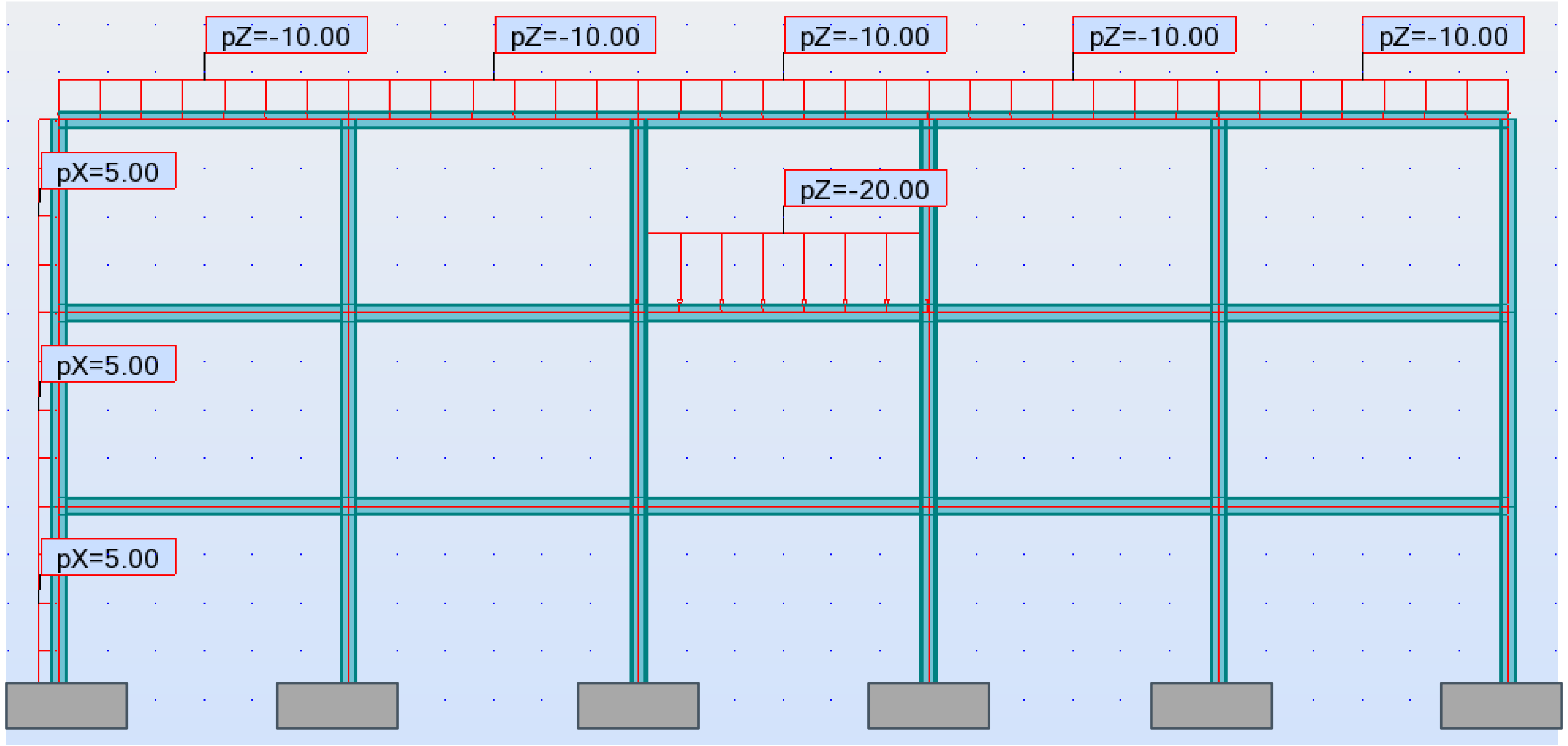
Nie są konieczne znaki na wykresie momentów, a reguła wykonywania wykresów jest następująca:

Rzędne wykresu momentów nanosimy po stronie rozciąganej pręta!

Wykresy sił tnących wykonujemy podobnie jak w przypadku belek ciągłych.

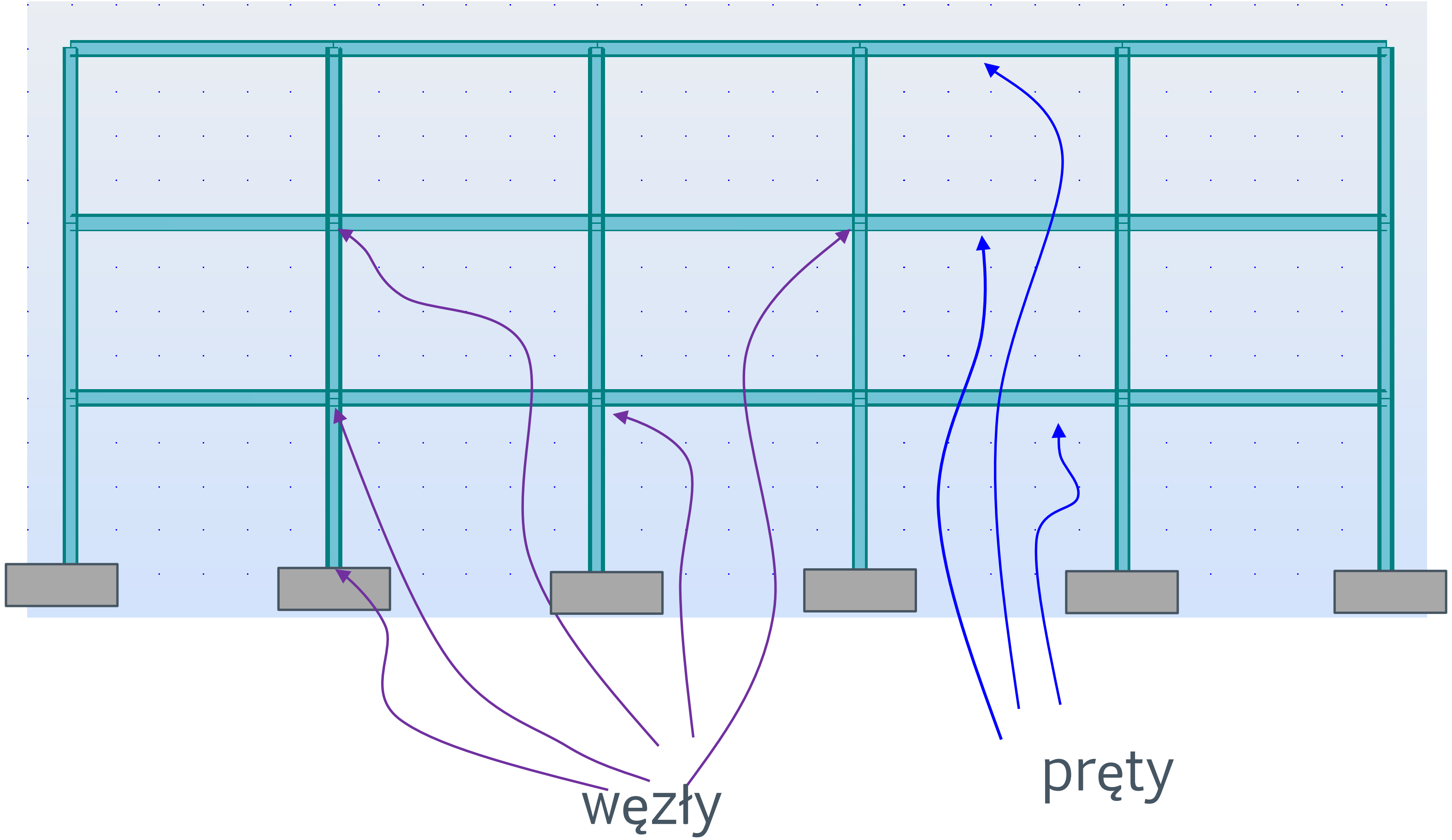
Metoda przemieszczeń - algorytm

Rama płaska



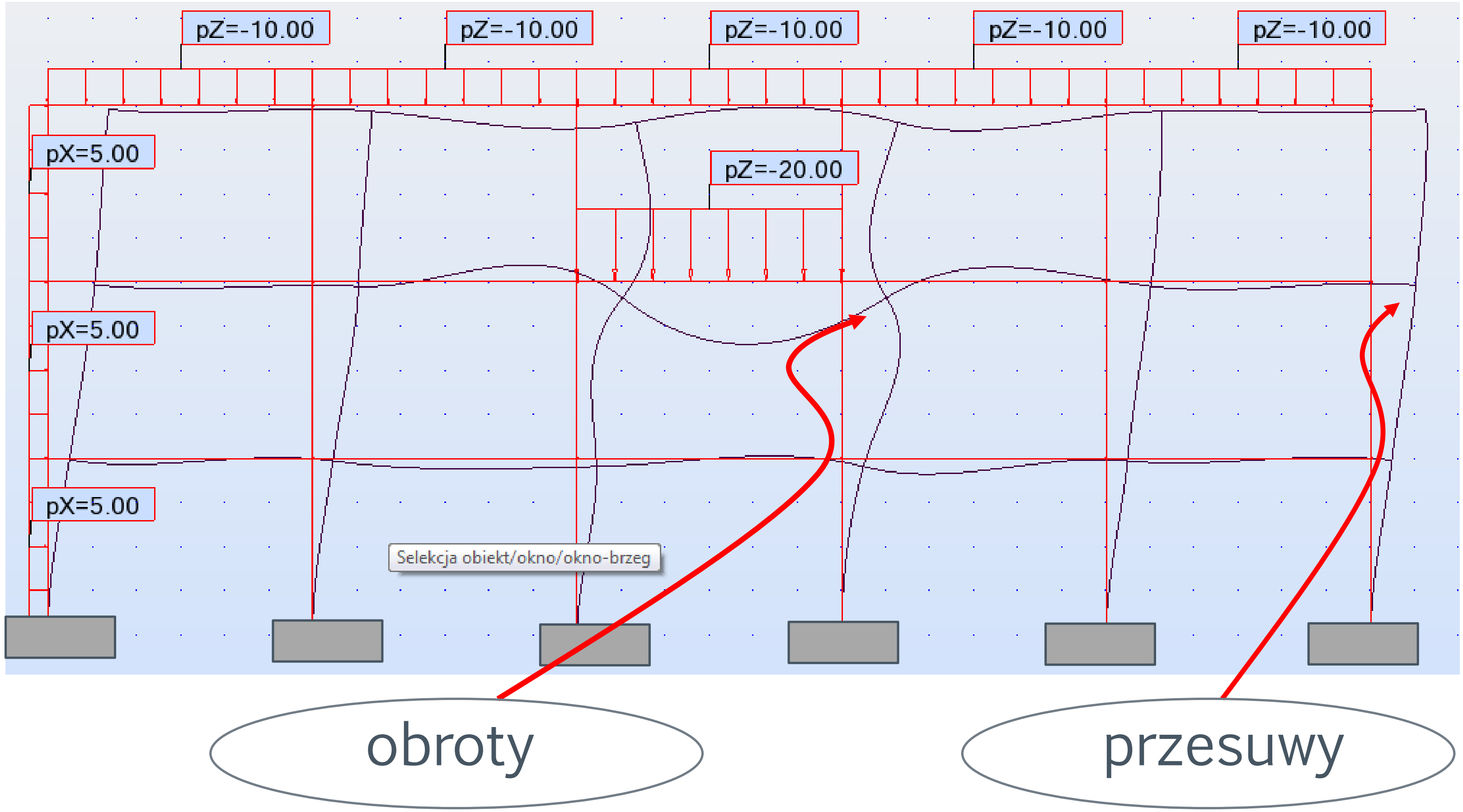
Metoda przemieszczeń - algorytm

1. Podział konstrukcji na węzły i elementy – dyskretyzacja układu



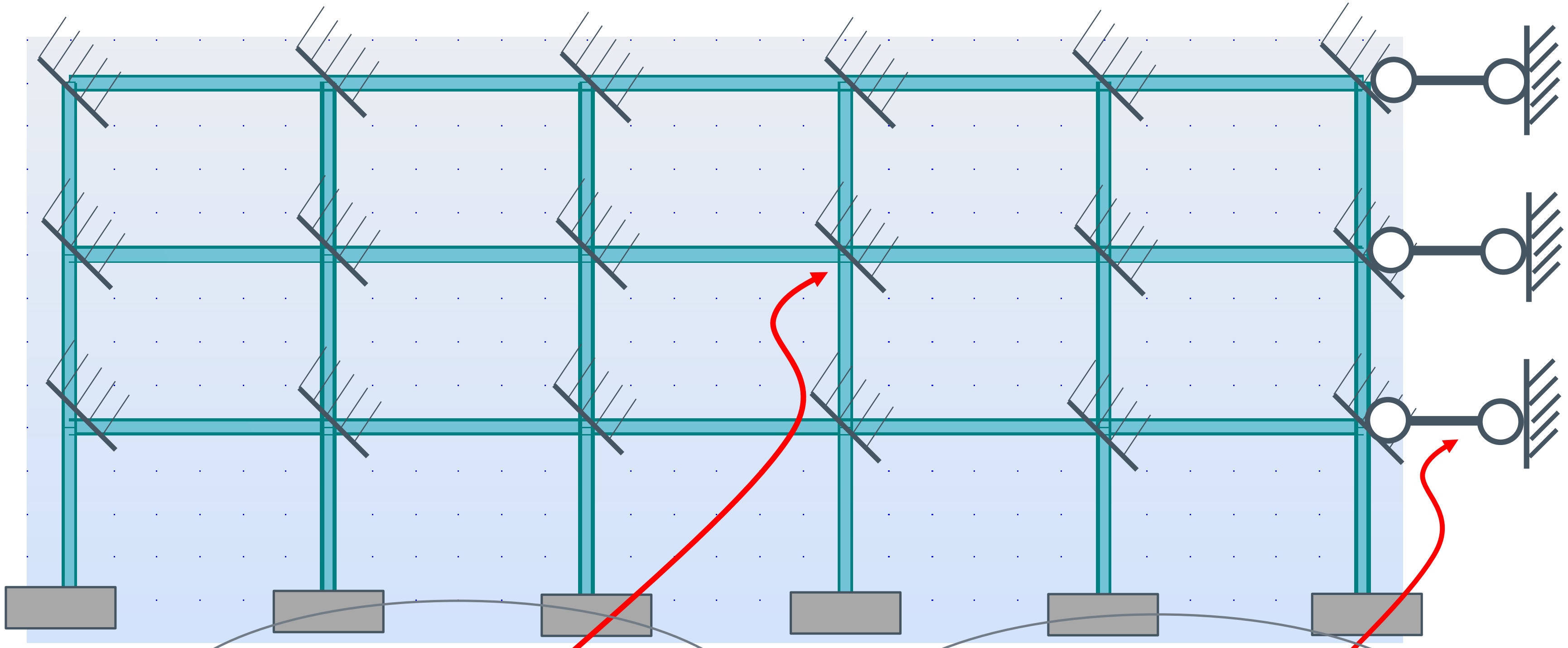
Metoda przemieszczeń - algorytm

2. Określamy niewiadome przemieszczenia w węzłach konstrukcji: obroty i przesuwy



Metoda przemieszczeń - algorytm

3. Tworzymy UPMP – układ podstawowy metody przemieszczeń – fikcyjna blokada niewiadomych – układ geometrycznie wyznaczalny

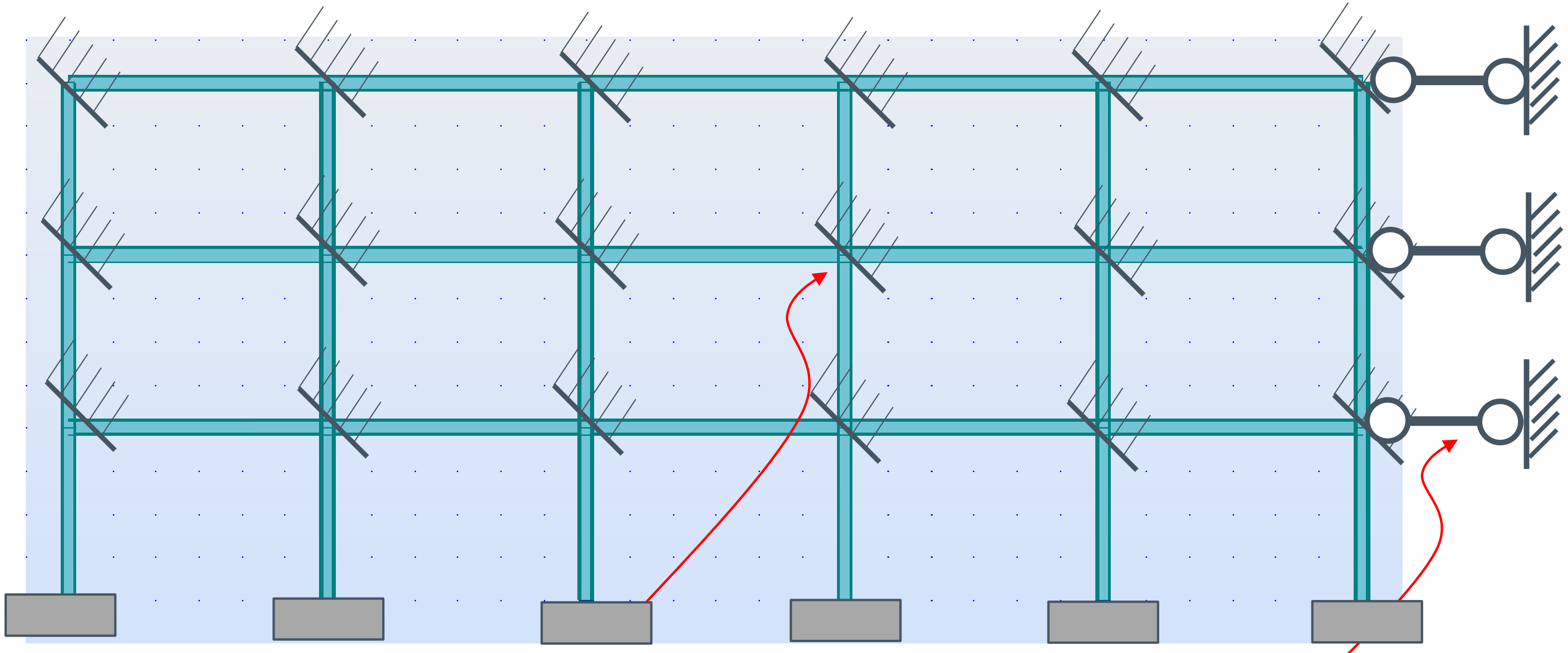


Blokada obrotów w węzłach

Blokada przesuwów

Metoda przemieszczeń - algorytm

4. W UPMP zakładamy wszystkie możliwe stany obciążeń (np. obciążenia zewnętrzne lub obroty lub przemieszczenia – wcześniej zablokowane), za każdym razem wyznaczamy reakcje w fikcyjnych podporach



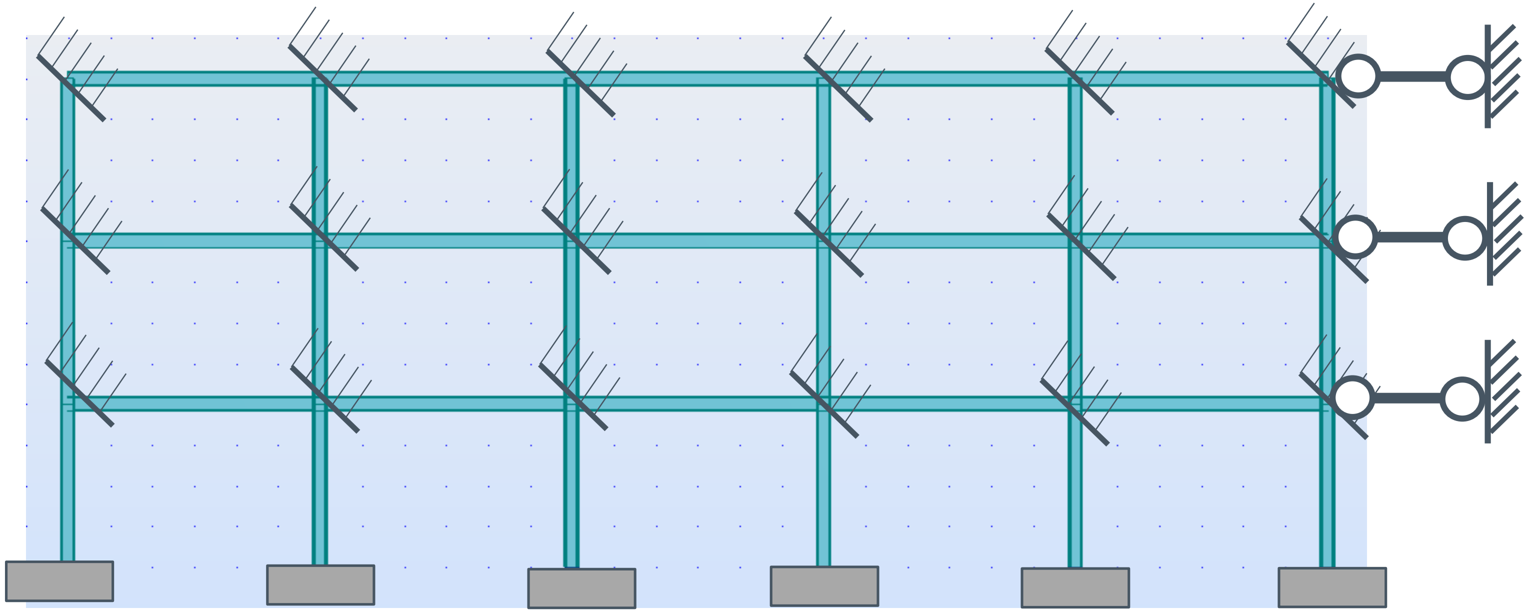
Reakcje – momenty

Reakcje -siły

Metoda przemieszczeń - algorytm

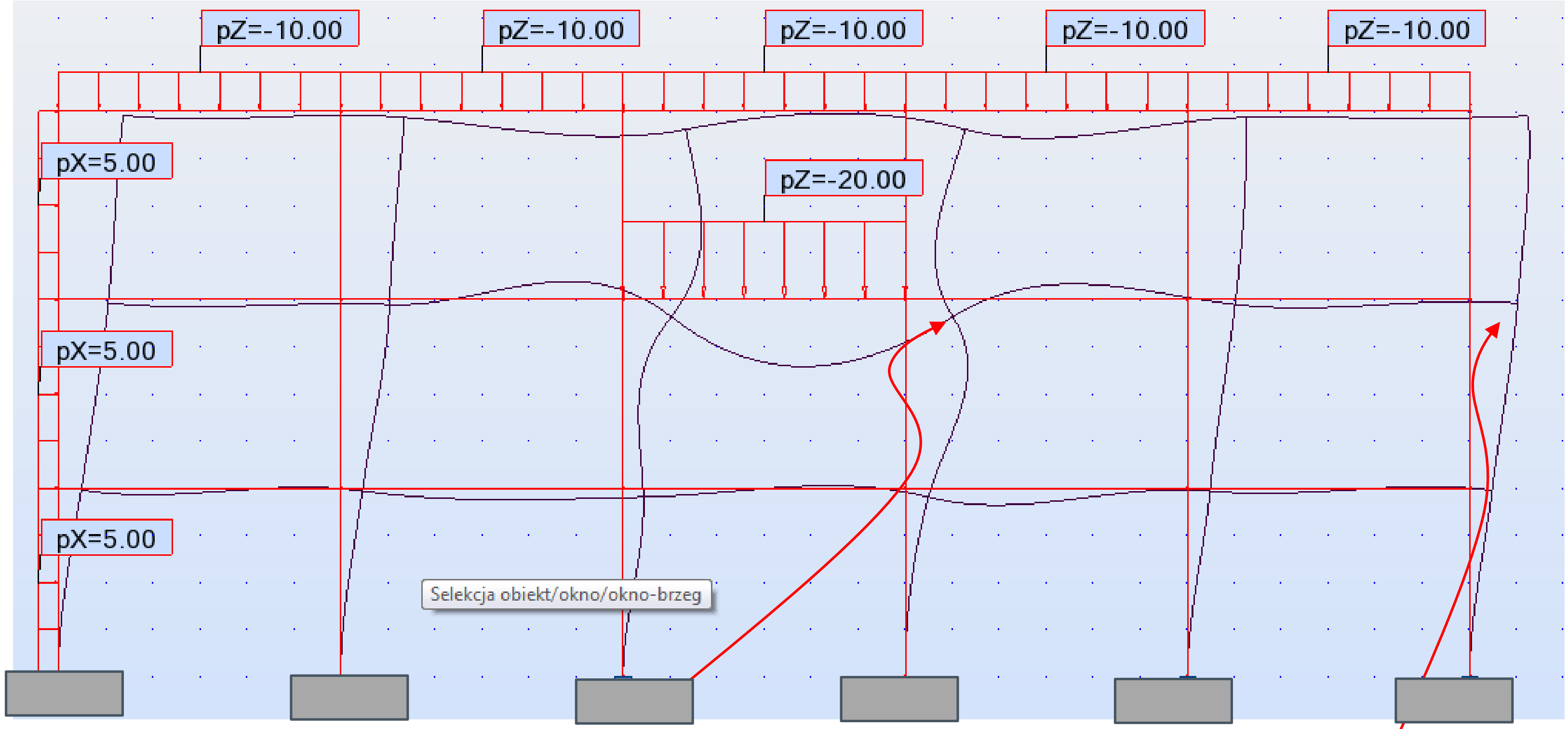
5. Z warunków równowagi sił na fikcyjnych podporach obliczamy niewiadome przemieszczenia

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k_{11} \times q_1 + k_{12} \times q_2 + k_{13} \times q_3 + \ldots + k_{10} = 0 \\
k_2 &= k_{21} \times q_1 + k_{22} \times q_2 + k_{23} \times q_3 + \ldots + k_{20} = 0 \\
k_3 &= k_{31} \times q_1 + k_{32} \times q_2 + k_{33} \times q_3 + \ldots + k_{30} = 0
\end{aligned}
$$



Metoda przemieszczeń - algorytm

Jeżeli znamy przemieszczenia to można obliczyć siły wewnętrzne ze wzorów transformacyjnych



znamy obroty
w węzłach

Znamy przesuwy

Metoda przemieszczeń

Przykład - belka dwuprzęsłowa – 3 warianty przyjęcia niewiadomych
EJ=const

$$a)\quad k_{11} \times \phi_1 + k_{10} = 0$$

$$b)\quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{20} \end{bmatrix}$$

$$c)\quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ k_{30} \end{bmatrix}$$