

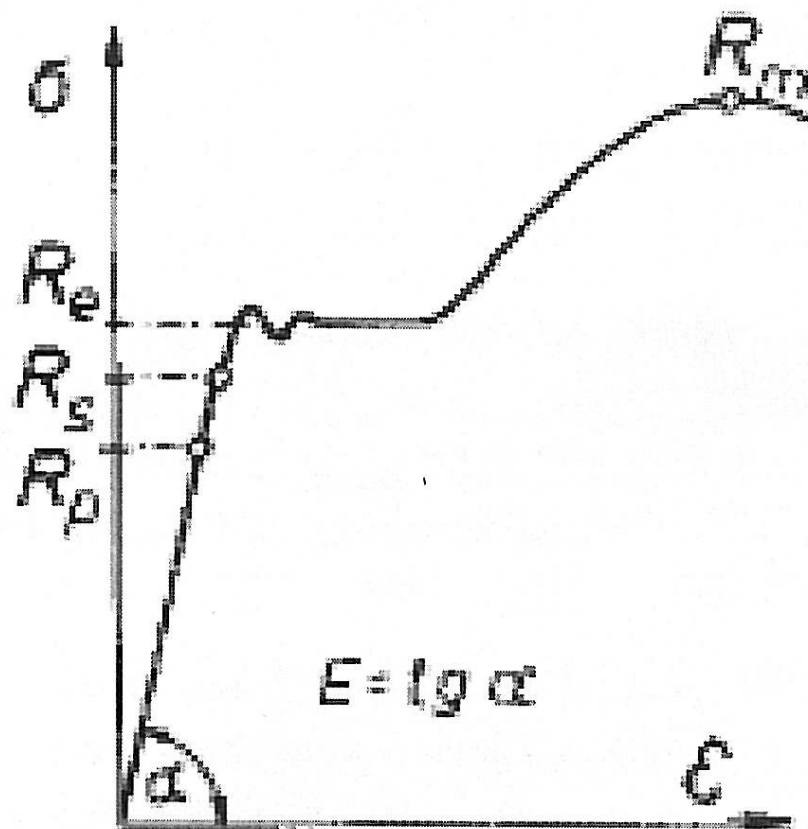
Mechanika budowli

Izabela Lubowiecka
Katedra Mechaniki Budowli WILiŚ

Nośność graniczna belek i ram płaskich

Założenia i modele materiałowe

W jednoosiowej próbie rozciągania stali otrzymujemy następujący wykres zależności naprężeń od odkształceń.

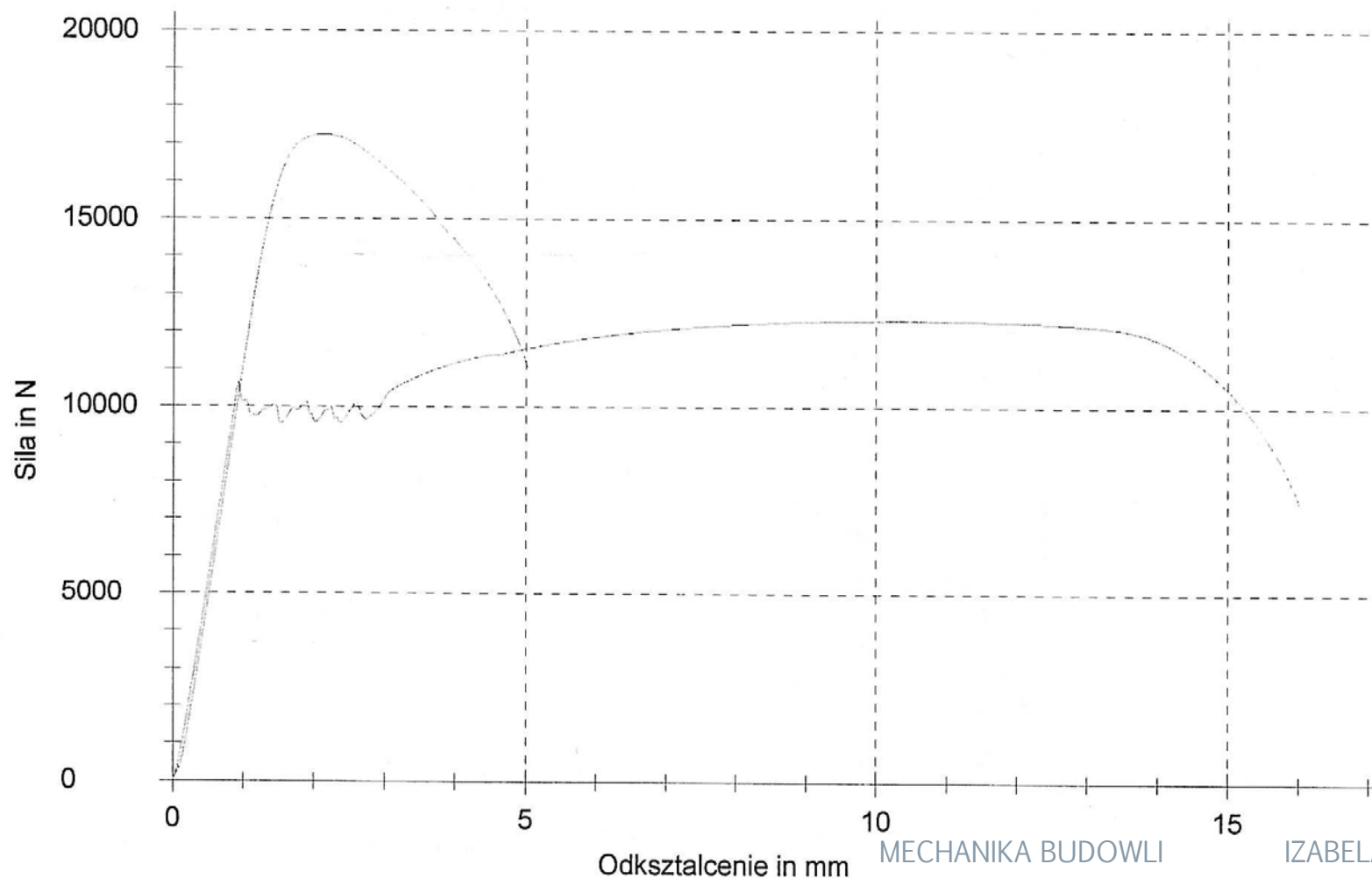


Na wykresie możemy wyróżnić:

- część sprężystą dla której po zdjęciu obciążenia próbka wraca do swoich początkowych wymiarów,
- część plastyczną dla której występują odkształcenia bez przyrostu naprężeń a po zdjęciu obciążenia próbka nie powraca już do swoich początkowych wymiarów,

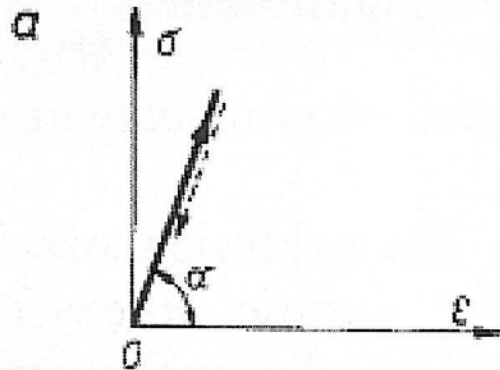
Nośność graniczna belek i ram płaskich

- wzmocnienie materiału po przekroczeniu fazy plastycznej dalszemu przyrostowi odkształceń towarzyszy wzrost naprężeń.

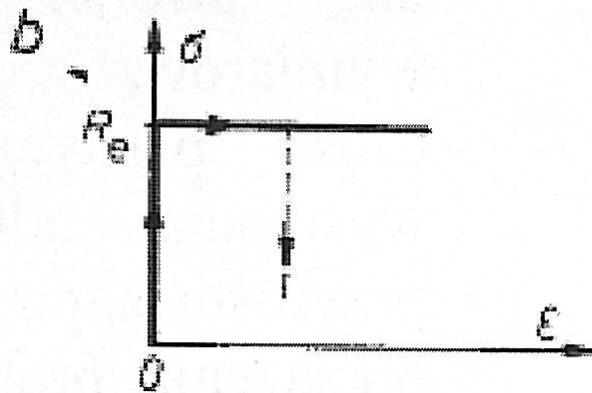
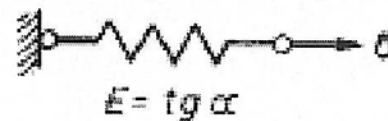


Nośność graniczna belek i ram płaskich – modele materiałowe

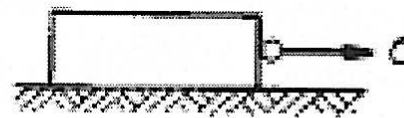
Na podstawie zależności naprężeń i odkształceń przyjmuje się różne modele materiału. W analizie granicznej belek i ram najczęściej przyjmuje się modele sztywno-plastyczne (b) lub sprężysto-plastyczne (d).



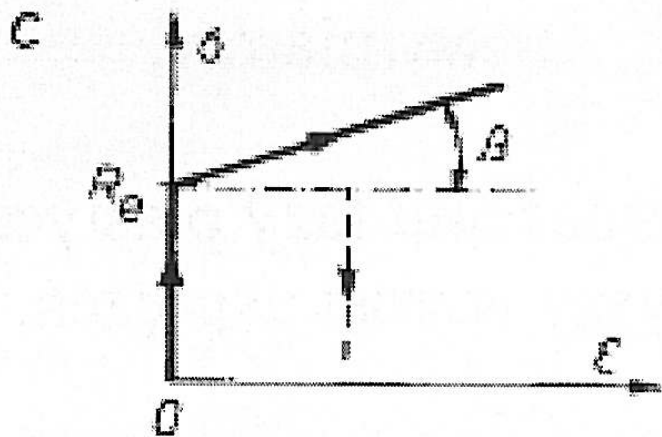
Model liniowo sprężysty



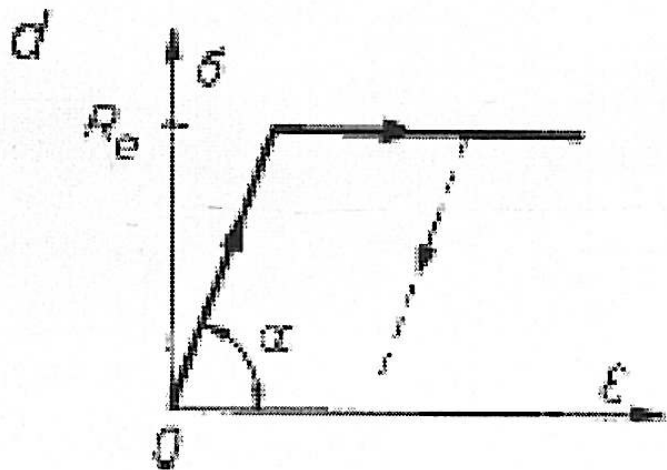
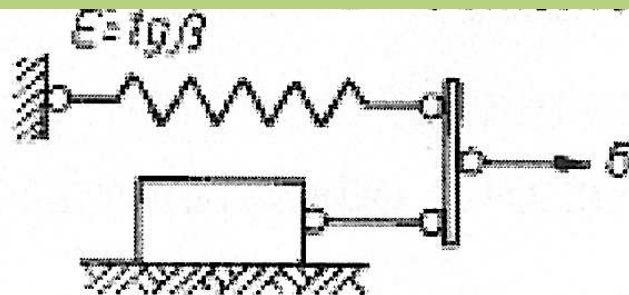
Model sztywno plastyczny



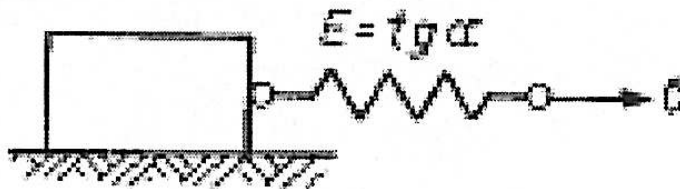
Modele materiałowe



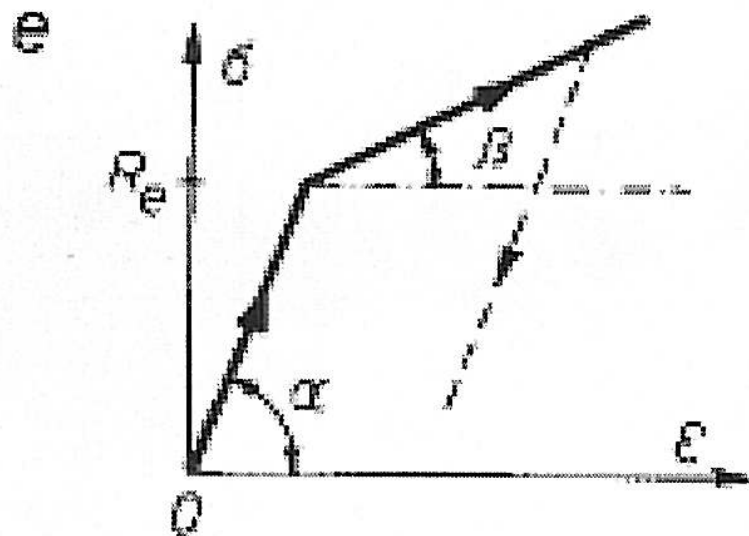
Model sztywno plastyczny
ze wzmocnieniem



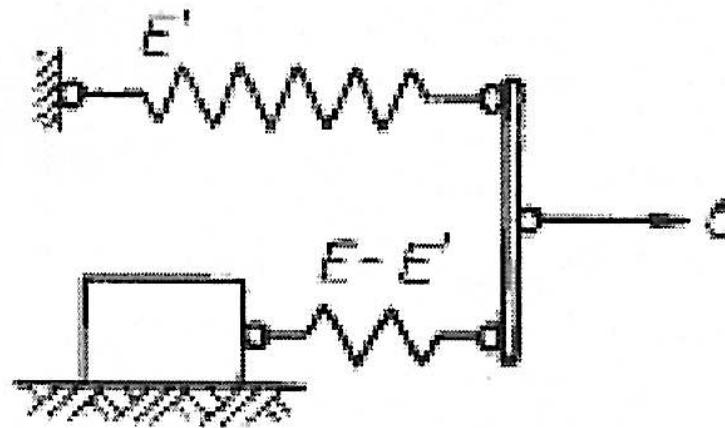
Model sprężysto plastyczny



Modele materiałowe



Model sprężysto plastyczny
ze wzmocnieniem



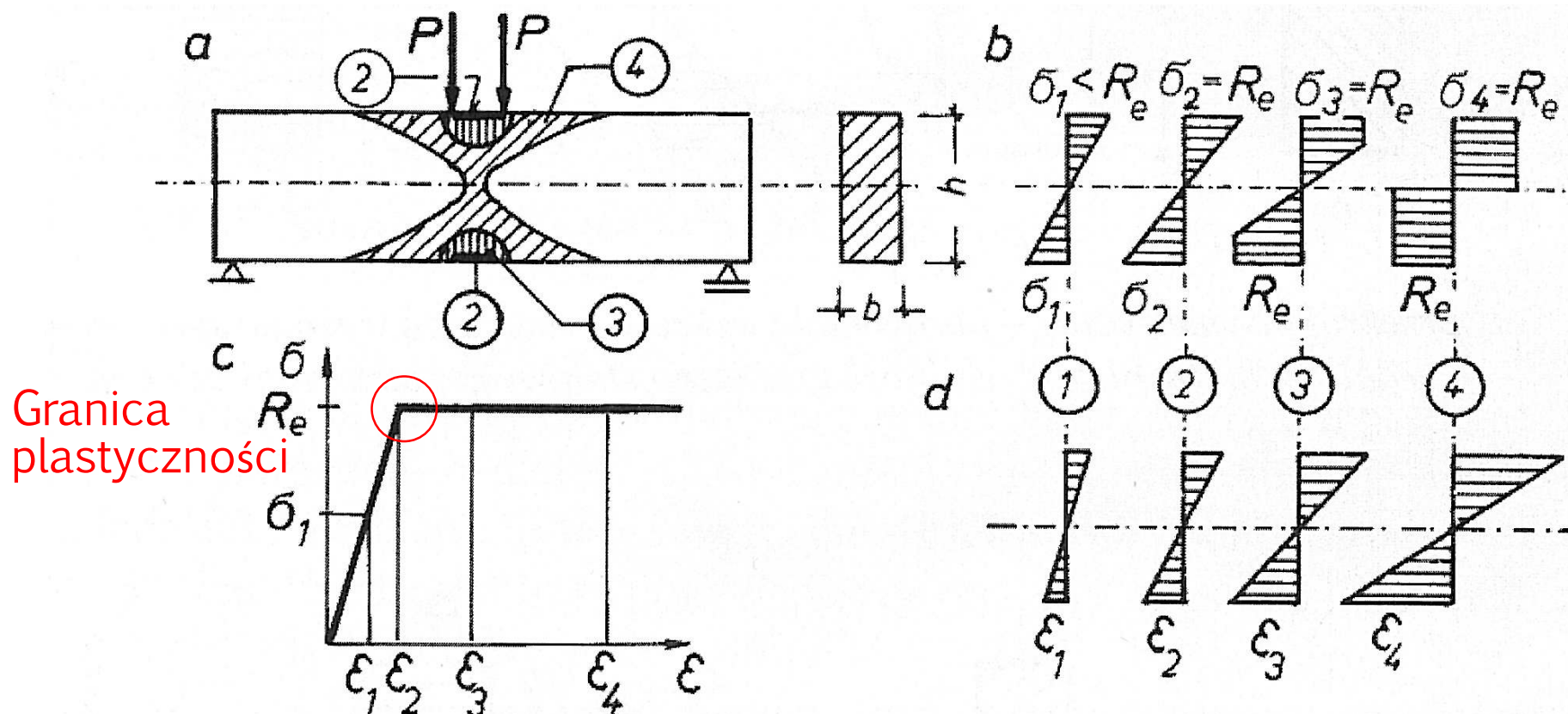
(A.Biegus: Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych)

Nośność graniczna przekroju poprzecznego pręta

Dla materiału sprężysto–plastycznego stan plastyczny oznacza wyczerpanie się nośności w danym punkcie ciała. W zakresie złożonych stanów naprężeń badanie uplastycznienia w danym punkcie ciała jest przedmiotem badań „hipotez wytrzymałościowych”.

W przypadku prostych stanów naprężeń np. dla czystego zginania, gdy występują tylko naprężenia normalne możemy badać stany graniczne całego przekroju poprzecznego. Przez stan graniczny przekroju poprzecznego rozumiemy taki przypadek w którym wszystkie włókna przekroju uległy uplastycznieniu.

Nośność graniczna przekroju poprzecznego pręta



Granica
plastyczności

Rys. 3.4. Rozkłady naprężeń (b) i odkształceń (d) belki statycznie wyznaczalnej (a) w pozaspręż zakresie wyteżenia materiału w kolejnych fazach obciążenia (1, 2, 3, 4); c – wykres $\sigma(\epsilon)$

*Rozkład naprężeń i odkształceń przy uplastycznianiu się przekroju
(A.Biegus: Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych)*

Nośność graniczna przekroju poprzecznego pręta

W belce zginanej w stanie sprężystym (1) wykres naprężeń i odkształceń jest liniowy. Obowiązuje założenie płaskich przekrojów. W miarę przyrostu obciążenia wzrastają odkształcenia i naprężenia. W skrajnych „włóknach” przekroju, tam gdzie naprężenia (i odkształcenia) są największe osiągnięta zostaje granica plastyczności (2), jeżeli obciążenie dalej wzrasta to strefy uplastycznienia rozszerzają się do środka przekroju (3) aż osiągnięty zostaje stan pełnego uplastycznienia całego przekroju (4). Przy pełnym uplastycznieniu przekroju obowiązuje nadal założenie płaskich przekrojów (liniowy wykres odkształceń).

Nośność graniczna przekroju poprzecznego pręta

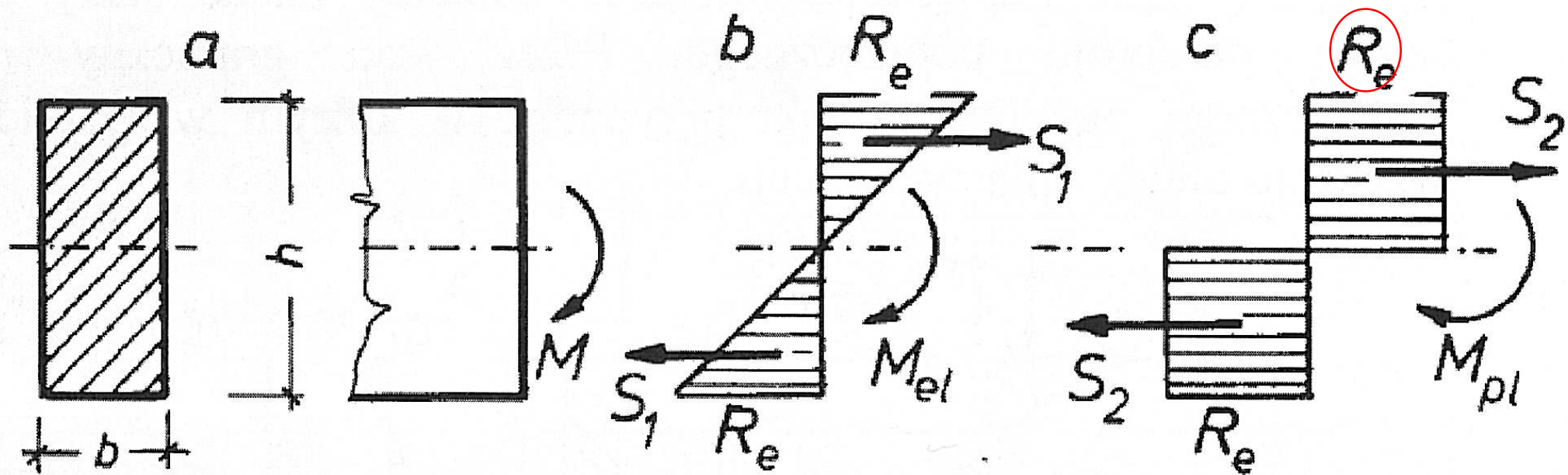
Moment panujący w stanie granicznym nazywa się **momentem plastycznym przekroju**.

$$M_{pl} = \int_A \sigma(y) \times y dA$$

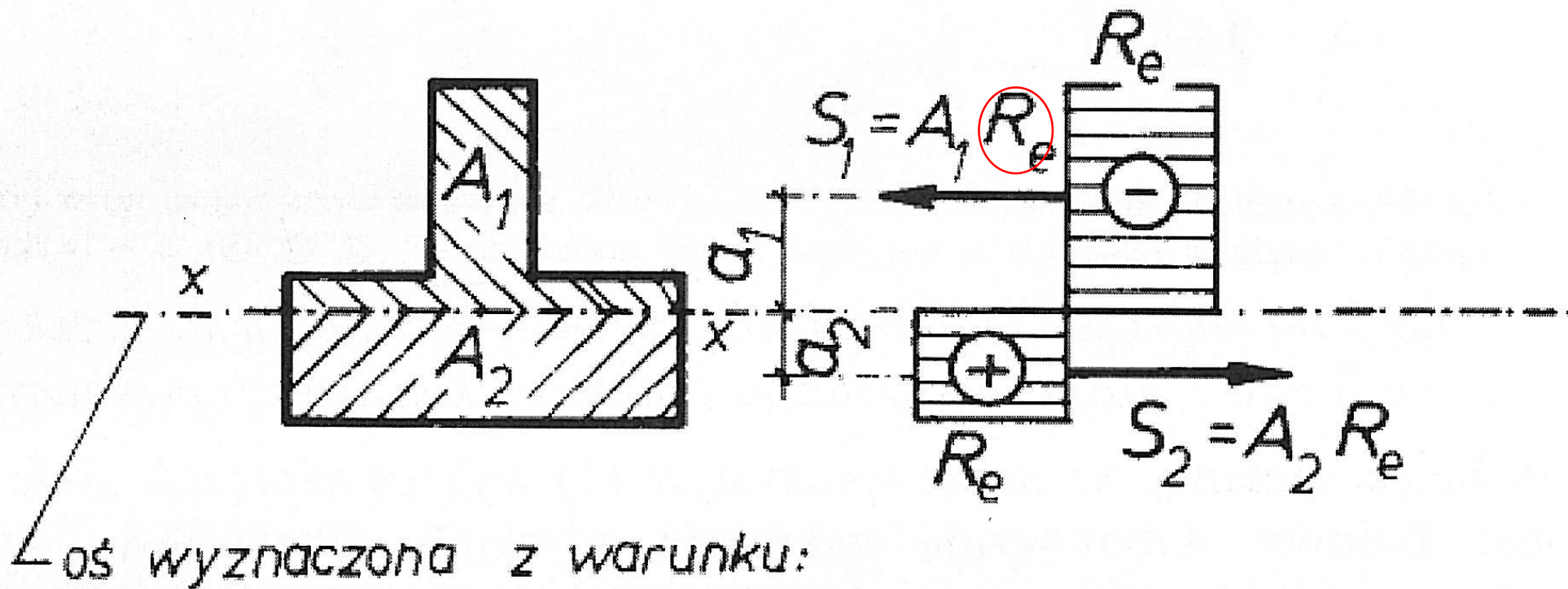
położenie osi obojętnej w stanie granicznym przekroju można wyznaczyć z warunku:

$$N = \int_A \sigma(y) dA = 0$$

Porównanie rozkładu naprężeń w stanie sprężystym i granicznym w przekroju bisymetrycznym



Porównanie rozkładu naprężeń w stanie granicznym w przekroju **monosymetrycznym**



$$A_1 = A_2 = 0,5A$$

$$W_{pl} = S_{x1} + S_{x2}$$

Zależność między momentem plastycznym i sprężystym w przekroju prostokątnym

Moment plastyczny w przekroju prostokątnym jest dany wzorem:

$$M_{pl} = \int_A \sigma(y) \times y dA = R_e \times \frac{bh^2}{4}$$

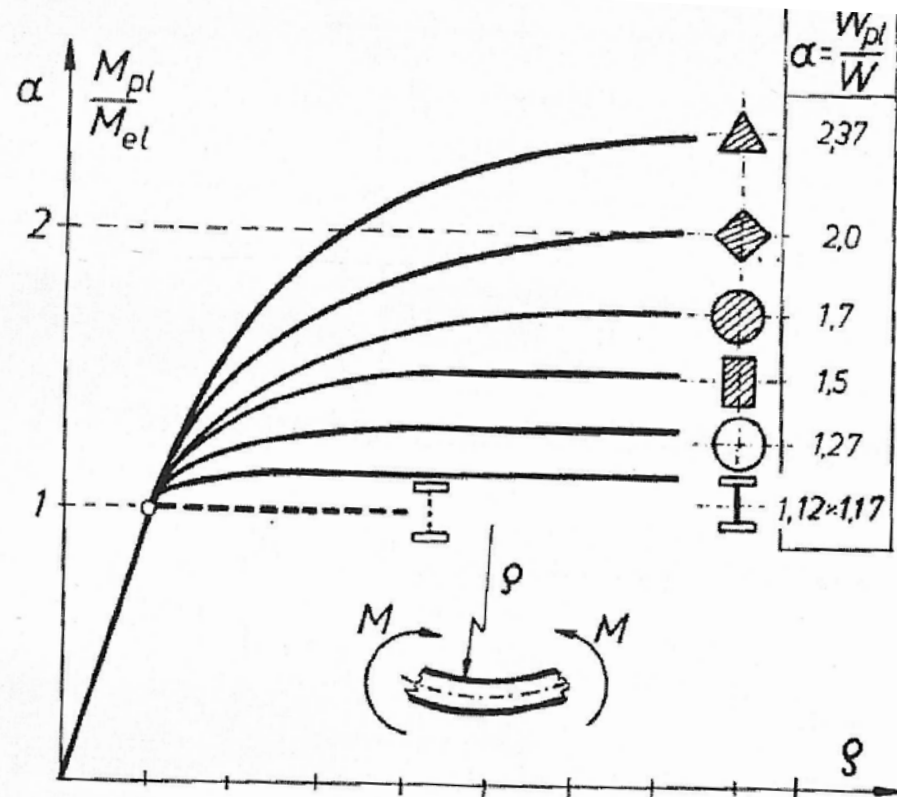
Maksymalny moment sprężysty, po przekroczeniu którego skrajne włókna ulegają uplastycznieniu

$$M_{el} = \int_A \sigma(y) \times y dA = R_e \times \frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{M_{pl}}{M_{el}} = \left(R_e \times \frac{bh^2}{4} \right) / \left(R_e \times \frac{bh^2}{6} \right) = 1.5$$

Podobnie można wyznaczyć stosunek M_{pl}/M_{el} dla innych przekrojów poprzecznych. **Zapas nośności zależy od kształtu przekroju poprzecznego.**

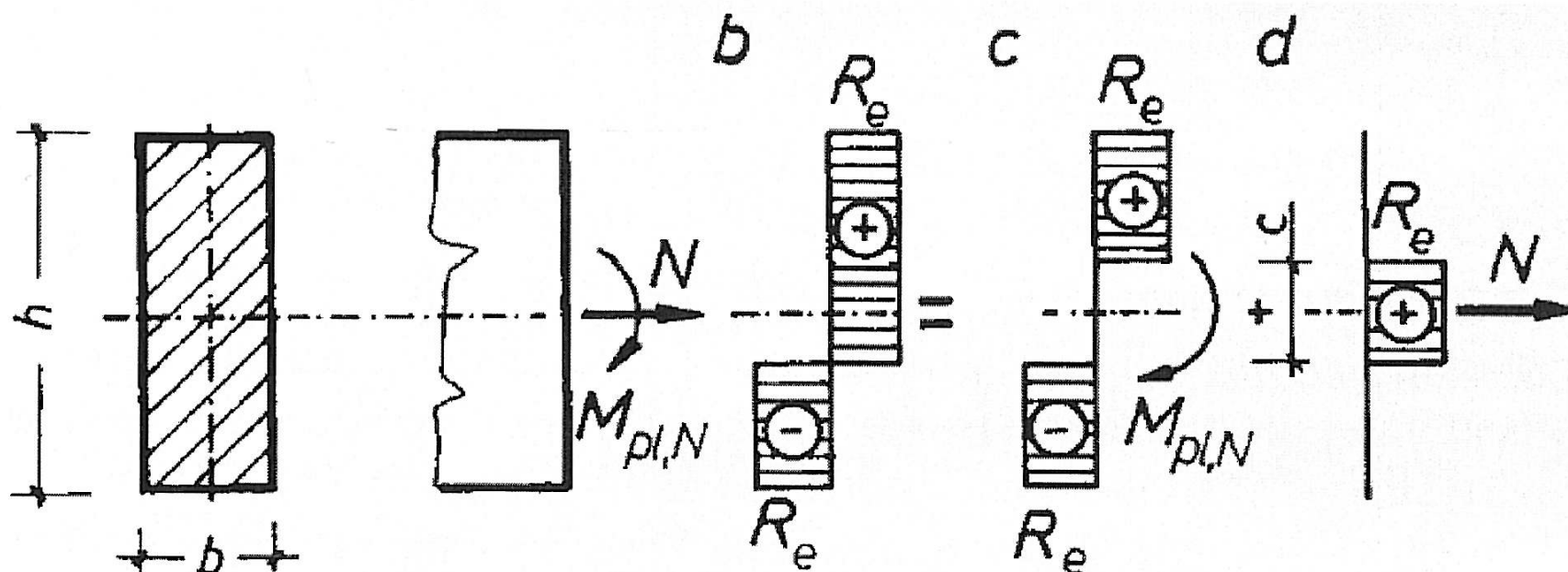
Na rysunku zamieszczono zależności dla różnych typów przekrojów poprzecznych (oś pozioma – krzywizna belki)



Rys. 3.6. Ścieżki równowagi statycznej elementów zginanych o różnych przekrojach poprzecznych

Wpływ sił normalnych na nośność graniczną

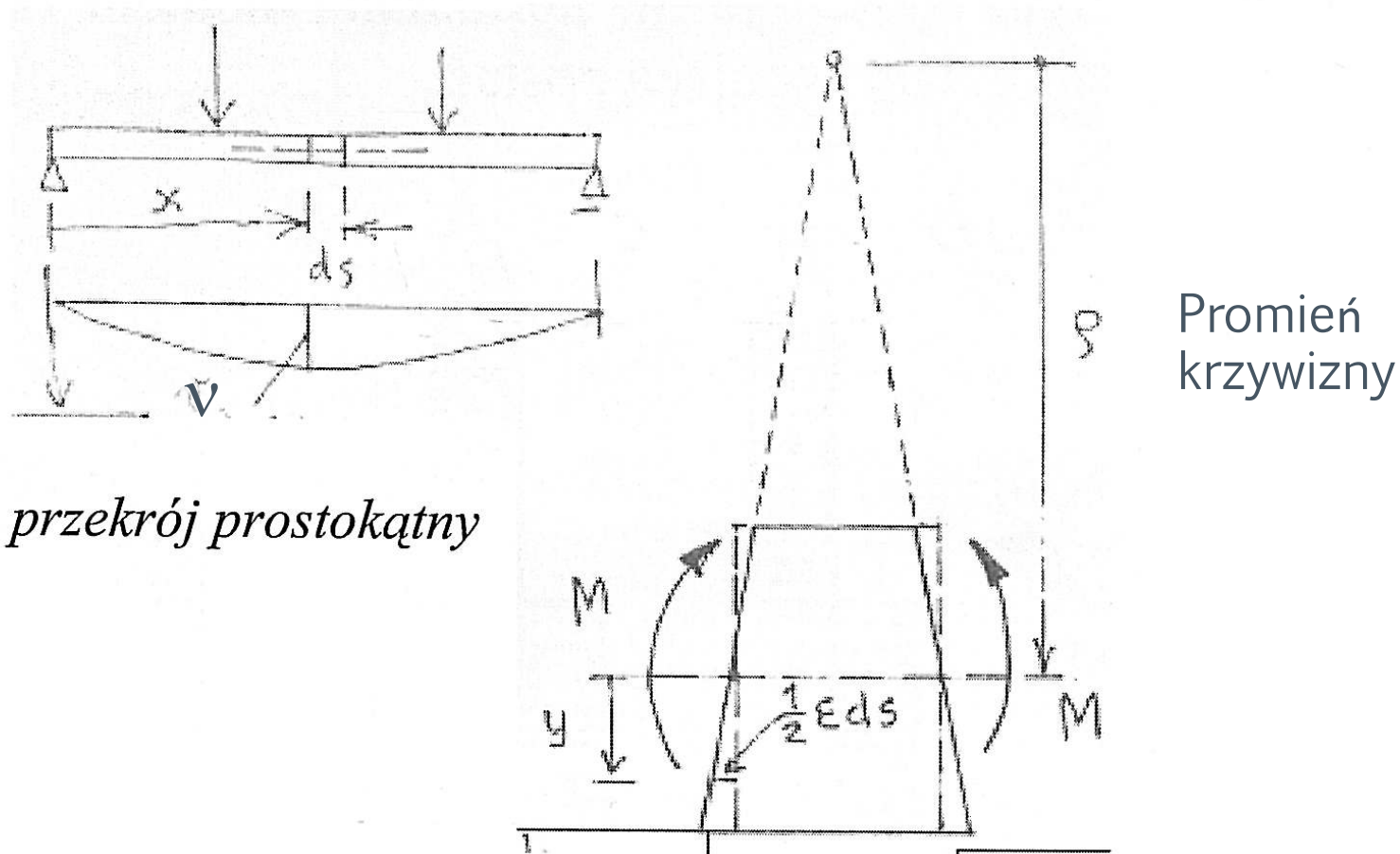
Jeżeli w przekroju poprzecznym występuje siła normalna i moment zginający to rozkład naprężeń ma następującą postać:



(A.Biegus: *Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych*)

Pełne uplastycznienie przekroju może wywołać moment zginający o mniejszej wartości niż w przypadku czystego zginania.

Związek momentu z krzywizną dla elementu zginanego z materiału sprężysto-plastycznego



Związek momentu z krzywizną dla elementu zginanego z materiału sprężystego

Zależność krzywizny dla małych przemieszczeń dana jest wzorem:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \cong -v'', \text{ } v\text{-oznacza ugięcie belki}$$

z wytrzymałości materiałów : $EIv'' = -M$

$$\text{stąd: } M = EI \frac{1}{\rho}$$

dla materiału sprężystego i małych przemieszczeń zależność momentu zginającego od krzywizny jest więc liniowa.

Związek momentu z krzywizną dla elementu zginanego z materiału sprężysto-plastycznego

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego, przy częściowym uplastycznieniu przekroju poprzecznego belki, zakładając hipotezę płaskich przekrojów (Bernouliego) moment zginający dany jest wzorem:

$$M = \int_A \sigma(y) \times y dA = R_e \times \frac{b(2y)^2}{6} + 2 \times b \times \left(\frac{h}{2} - y\right) \times \left(y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right) R_e$$

gdzie y -oznacza granicę strefy uplastycznionej przekroju

$$M = M_{pl} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{y^2}{h^2}\right), M_{pl} = \frac{bh^2}{4} R_e$$

podstawiając:

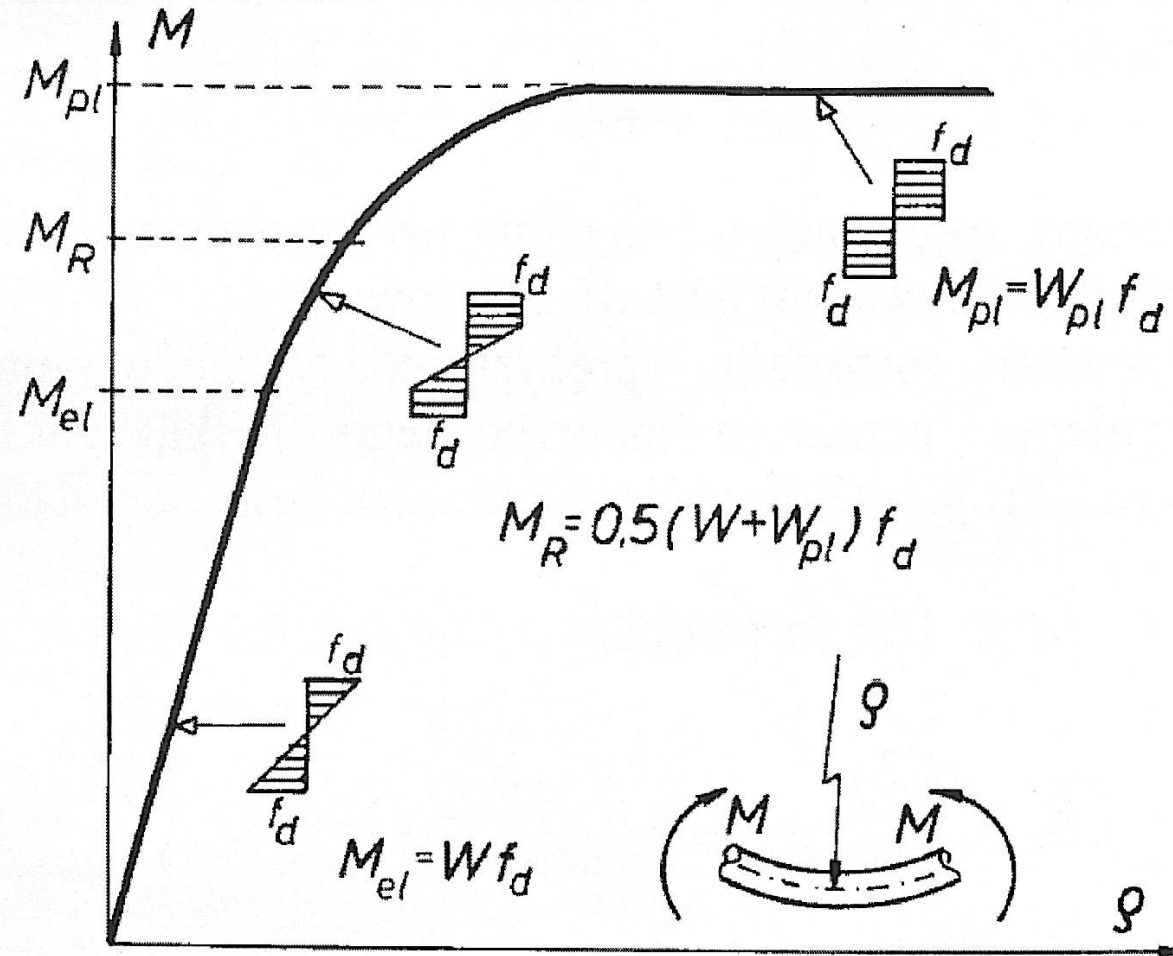
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{R_e}{Ey}$$

$$y = \frac{R_e}{E\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

można otrzymać zależność momentu od krzywizny:

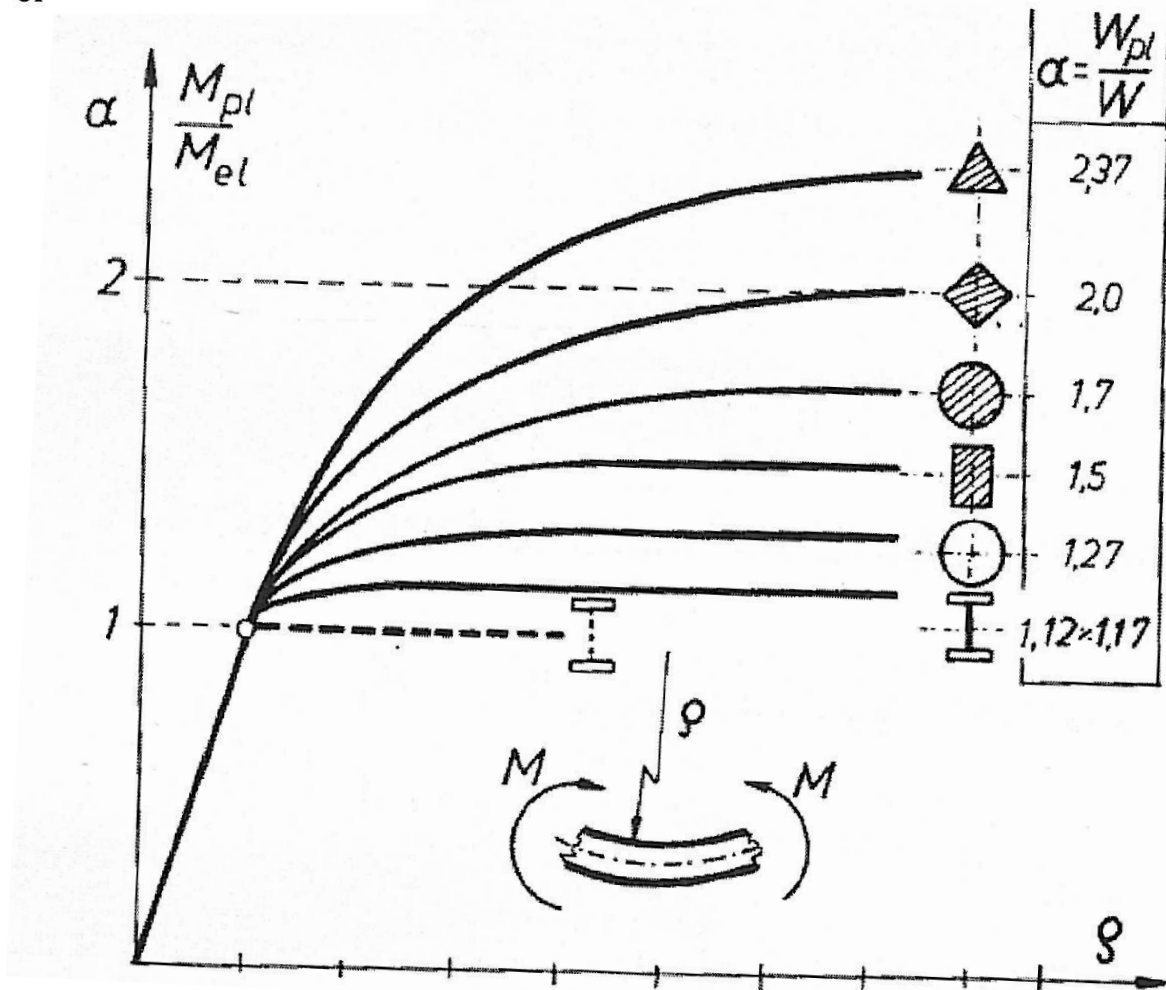
$$M = M_{pl} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{R_e^2}{E^2 h^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^2}\right),$$

Po osiągnięciu pełnego uplastycznienia przekroju w przypadkach układów statycznie wyznaczalnych następuje przyrost krzywizny bez przyrostu momentu zginającego (tworzy się przegub plastyczny). Na wykresie $M - \rho$ odpowiada temu stanowi część pozioma.



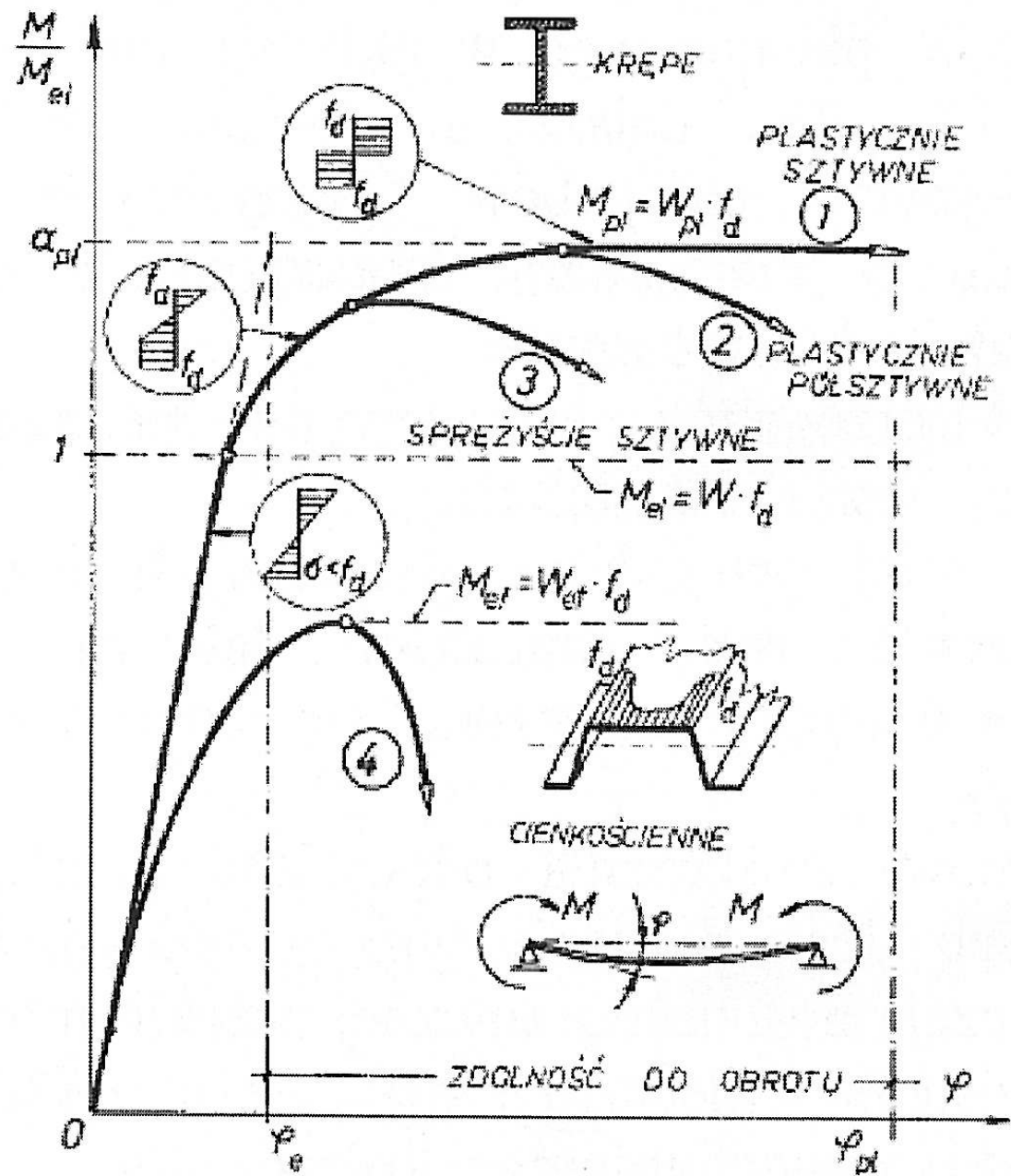
Rys. 3.8. Ścieżka równowagi statycznej krępego przekroju zginanego

Dla innych kształtów przekrojów poprzecznych otrzymamy wykresy różniące się zasięgiem części sprężysto-plastycznej. Wynika to z różnych wartości stosunku: M_{pl}/M_{el} . Im więcej materiału znajduje się w pobliżu osi obojętnej tym większy jest stosunek M_{pl}/M_{el}



Nośność graniczna – klasy przekrojów prętowych

- › Wg norm projektowania konstrukcji stalowych rozróżnia się różne klasy przekrojów poprzecznych w zależności od możliwości uplastycznienia przekrojów.



Nośność graniczna – klasy przekrojów prętowych

- › Niniejsza analiza dotyczy przekrojów tzw. klasy 1, które są na tyle **masywne**, że mogą się w pełni uplastyczyć wraz ze wzrostem obciążeń. Wiele przekrojów ma na tyle smukłe ścianki, że przed uplastycznieniem utraci stateczność.
- › Do tego typu przekrojów należą np. takie elementy jak blacha trapezowa lub płatwie zimnogięte.

Nośność graniczna belek i ram

Założenia upraszczające

- › Przyjmujemy związek moment-krzywizna dla przekroju idealnego (dwuteowego)
- › Pomijamy strefy uplastycznienia w przekrojach wokół przekroju w pełni uplastycznionego (zakładamy, że w miejscu przekroju uplastycznionego powstaje **przegub plastyczny** a pozostałe części belki są sztywne)
- › Pomijamy możliwość lokalnej utraty stateczności (przekroje klasy 1)

Nośność graniczna belek i ram

Układy statycznie wyznaczalne

- › Osiągnięcie w jakimkolwiek przekroju momentu M_{el} powoduje wyczerpanie nośności przekroju w stanie granicznym,
- › Możliwe jest dalsze obciążanie układu do momentu pojawienia się w tym przekroju momentu plastycznego co zmienia układ w mechanizm,
- › Wzrostowi obciążeń od zakresu sprężystego do granicznego towarzyszy szybki wzrost ugięć konstrukcji.

Nośność graniczna belek i ram

Układy n -krotnie statycznie niewyznaczalne

- › Pojawienie się przegubu plastycznego w układzie nie wyczerpuje jego nośności. Możliwe jest dalsze zwiększanie obciążenia i tworzenie się kolejnych przegubów plastycznych aż do przekształcenia układu w mechanizm. **Maksymalnie może się utworzyć $n+1$ przegubów plastycznych.**
- › Jeżeli wytworzy się $n+1$ przegubów plastycznych to **mechanizm zniszczenia układu ma charakter globalny.**
- › Jeżeli utworzy się mniej przegubów plastycznych niż $n+1$ to mechanizm zniszczenia ma **charakter lokalny** (np. w budynku wielokondygnacyjnym gdy niszczy się tylko jeden strop lub odrywa jeden balkon).

Nośność graniczna belek i ram

- › Każdemu mechanizmowi zniszczenia towarzyszy graniczny stan momentów zginających.

Jeśli w stanie tym, w żadnym przekroju momenty nie przekraczają nośności granicznej przekroju to stan ten towarzyszy rzeczywistemu mechanizmowi zniszczenia i jest **statycznie dopuszczalnym mechanizmem zniszczenia**.

Nośność graniczna belek i ram

- › Liczba możliwych mechanizmów zniszczenia zależy
 - od stopnia statycznej niewyznaczalności układu
 - od liczby przekrojów niebezpiecznych czyli takich, w których mogą wystąpić przeguby plastyczne
 - od postaci obciążenia.

Tylko jeden mechanizm zniszczenia jest prawdziwy (czasami dwa mogą być tożsame).

Przyjęty mechanizm zniszczenia odpowiada pewnemu **granicznemu stanowi równowagi**. Ponieważ zakładamy koncentrację odkształceń plastycznych w przegubach plastycznych i nieodkształcalność konstrukcji pomiędzy przegubami plastycznymi, ruch sztywny w chwili gdy konstrukcja zamienia się w mechanizm w stanie granicznym spełnia równanie pracy wirtualnej:

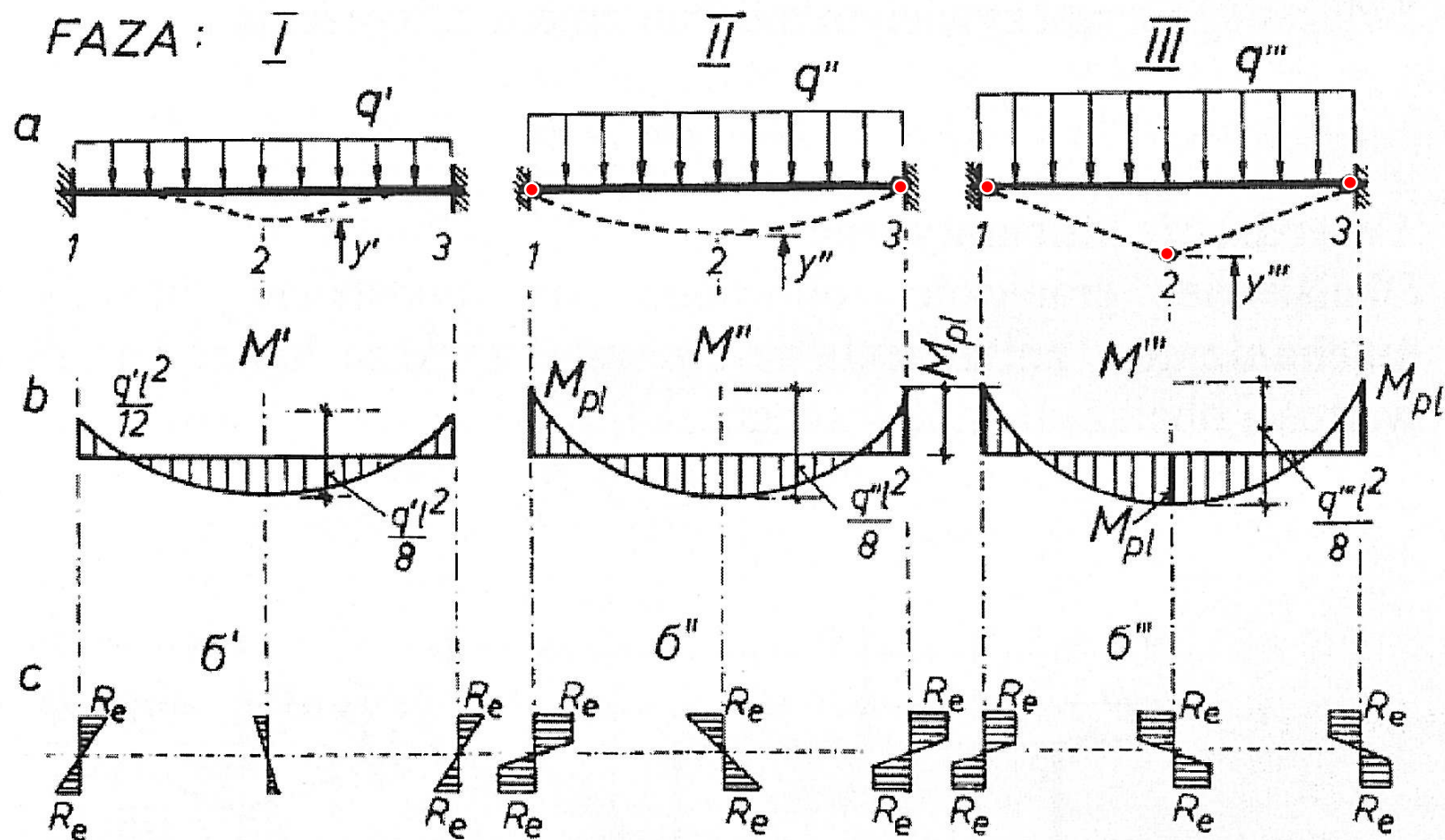
$$L_z = \sum P \bar{\delta} = \sum M_{pl} \Delta \bar{\theta} = L_w$$

gdzie L_z, L_w oznaczają odpowiednio prace sił zewnętrznych wirtualnych przemieszczeniach, i pracę momentów plastycznych na odkształceniach wirtualnych (obroty w przegubach plastycznych). Z powyższego wzoru możemy wyznaczyć obciążenie graniczne.

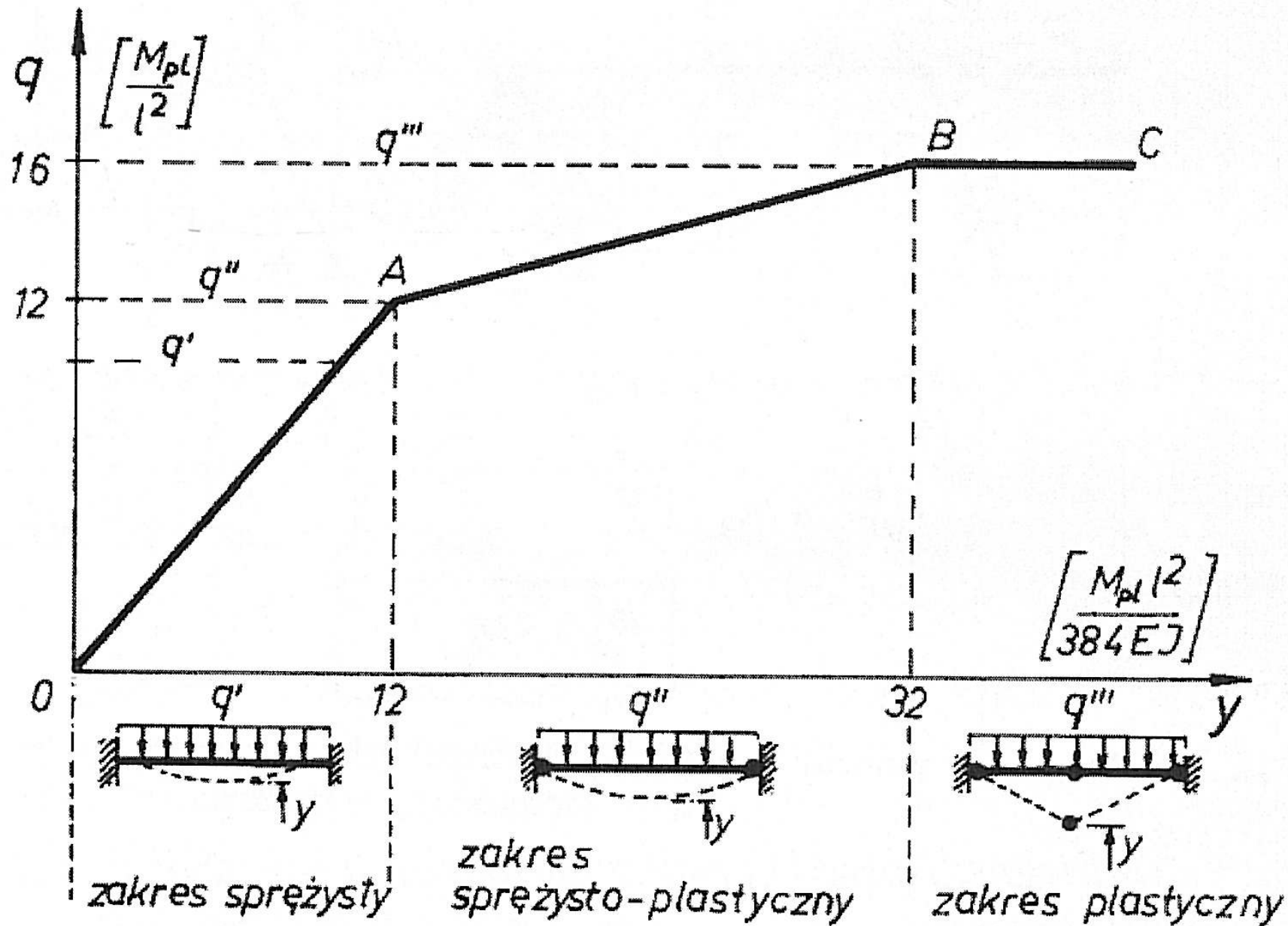
Metody wyznaczania obciążenia granicznego

- › Kinematyczna (z równania pracy wirtualnej)
- › Analizy stanów sprężysto-plastycznych (na podstawie statyki)

Metoda analizy stanów sprężysto-plastycznych: badanie pojawiania się przegubów plastycznych aż do przekształcenia się układu w mechanizm.



Rys. 3.22. Wykresy momentów zginających (b) oraz rozkłady naprężeń w przekrojach (c) belki statycznie niewyznaczalnej (a) w sprężystej i pozasprężystej fazie obciążenia



Odcinkowo zlinearyzowana ścieżka równowagi belki statycznie niewyznaczalnej

Twierdzenia o nośności granicznej

› Twierdzenie statyczne

Obciążenie graniczne obliczone na podstawie statycznie dopuszczalnego stanu sił wewnętrznych jest zawsze mniejsze lub równe obciążeniu związanemu z rzeczywistym mechanizmem zniszczenia

$$P_{gr}^s \leq P_{gr}$$

Twierdzenia o nośności granicznej

› Twierdzenie kinematyczne

Obciążenie graniczne obliczone na podstawie analizy różnych mechanizmów zniszczenia jest zawsze większe lub równe rzeczywistej wartości obciążenia

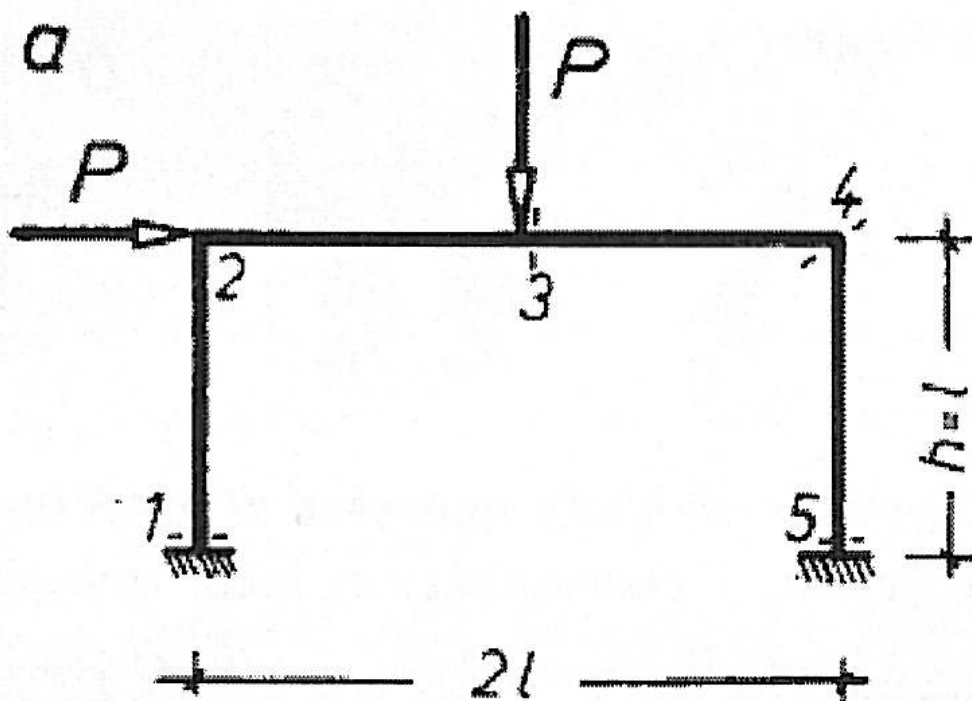
$$P_{gr}^k \geq P_{gr}$$

Analiza stanu granicznego metodą prób kinematycznych (tok postępowania)

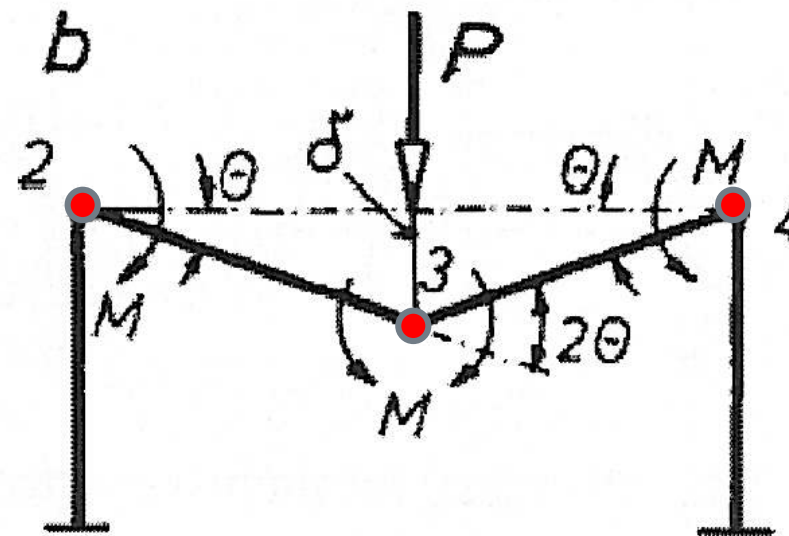
- › Przyjmujemy k -możliwych mechanizmów zniszczenia
- › Dla każdego mechanizmu wyznaczamy odpowiadające mu obciążenie graniczne
- › Ze zbioru wyników wybieramy najmniejsze obciążenia graniczne
- › Wyznaczamy wykres momentów zginających odpowiadający danemu obciążeniu granicznemu. Jeżeli wartości momentów na wykresie nie przekraczają wartości momentów plastycznych we wszystkich przekrojach układu to wybrany mechanizm zniszczenia jest mechanizmem rzeczywistym.

› **Przykład** wyznaczania obciążenia granicznego ramy metodą kinematyczną

› $n = 3 \rightarrow$ mogą powstać 4 przeguby plastyczne

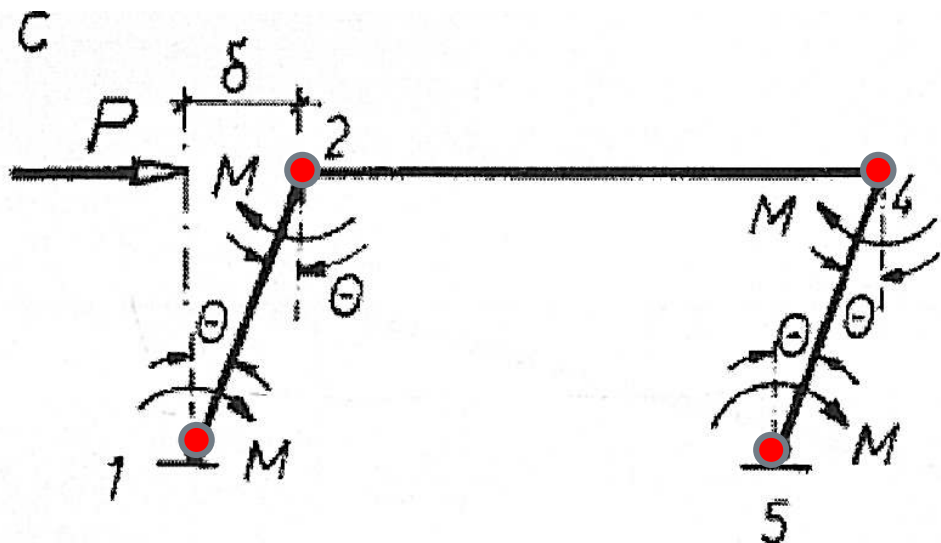


Mechanizm belkowy (I)



$$P_{gr}^1 = 4M_{pl}/l$$

Mechanizm ramowy (II)

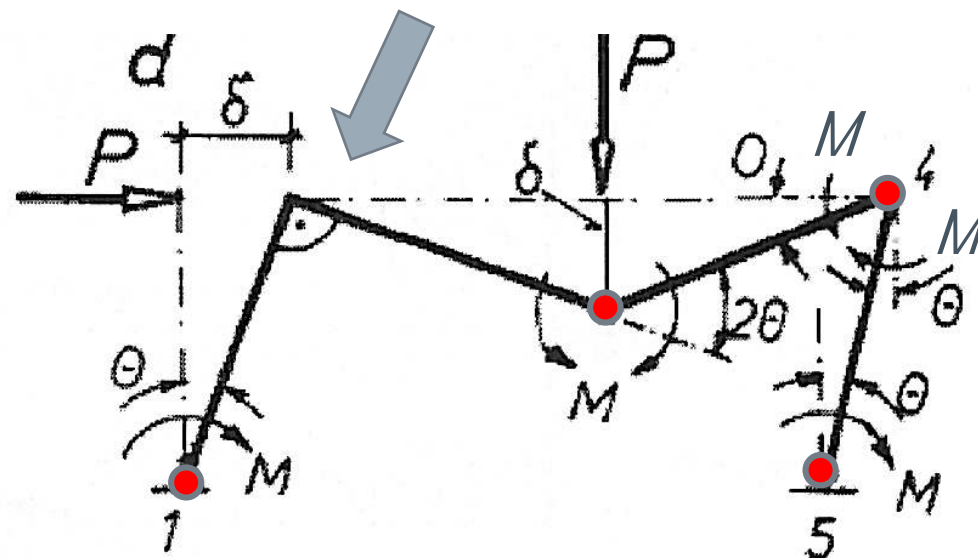


$$(M_1 + M_2 + M_4 + M_5) \theta = P \delta$$

$$P_{gr}^2 = 4 M_{pl} / l$$

Mechanizm złożony (I + II)

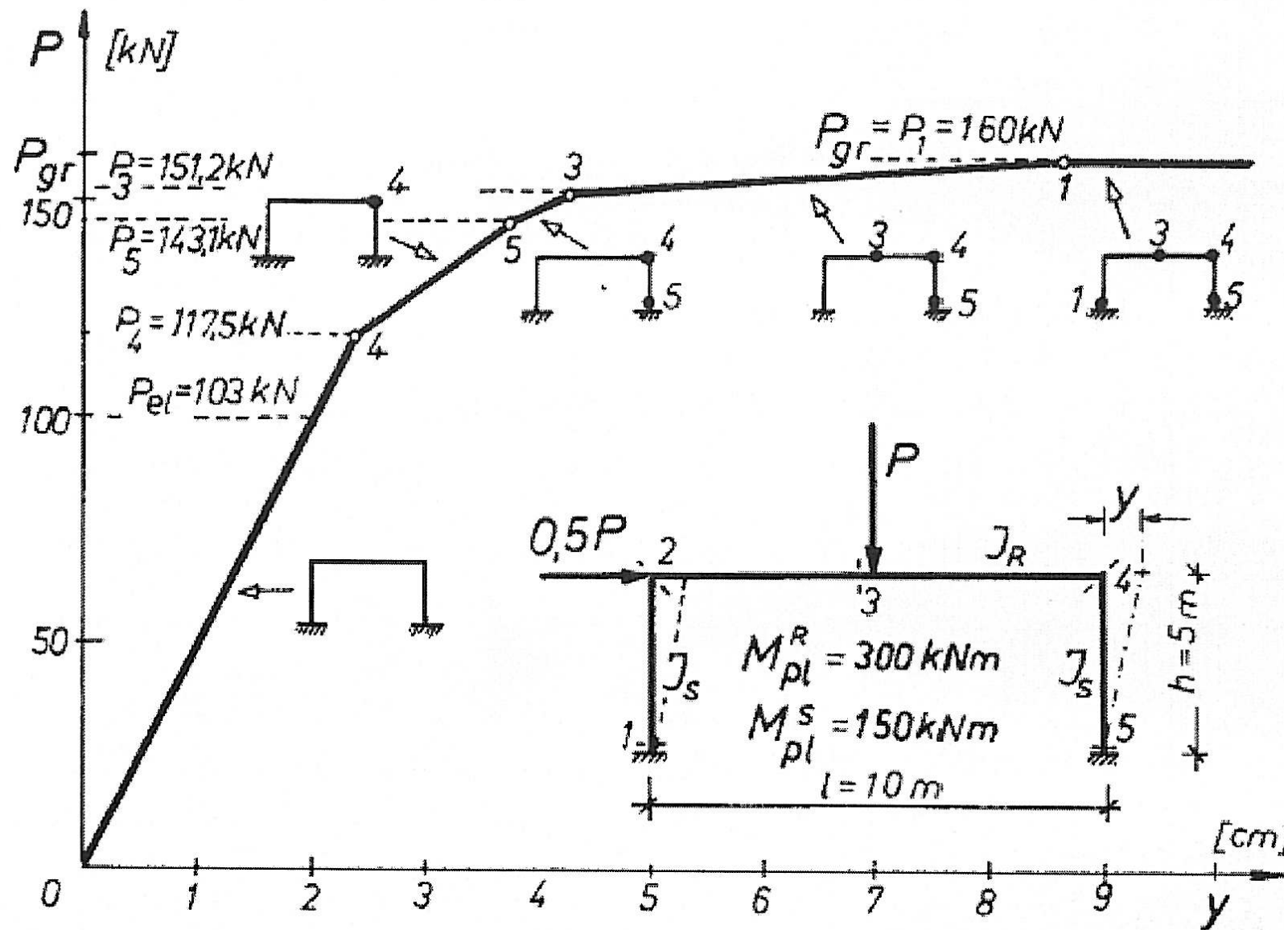
Kąt prosty jest złożeniem kąta ostrego i rozwartego



$$(M_1 + 2M_3 + 2M_4 + M_5) \theta = 2P \delta$$

$$P_{gr}^3 = 3 M_{pl} / l$$

$$P_{gr} = 3 M_{pl} / l$$



Rys. 3.26. Odcinkowo zlinearyzowana ścieżka równowagi statycznej ramy portalowej