Mechanika budowli

Izabela Lubowiecka
Katedra Mechaniki Budowli WILiś

Stateczność belek ciągłych i ram płaskich

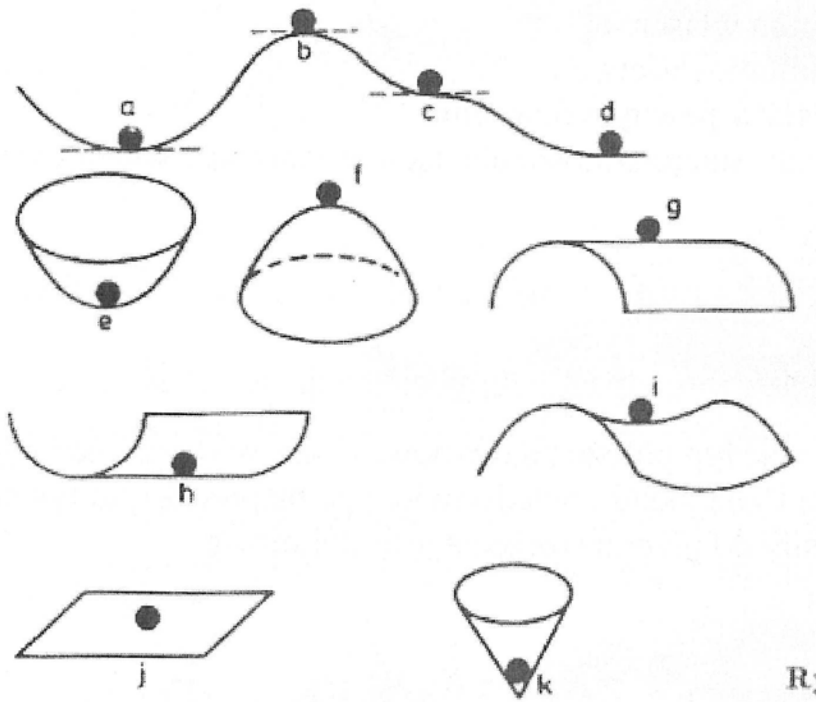
› **Pojęcie stateczności ustroju, energia potencjalna a rodzaj równowagi układu**

Stateczność ustroju jest to zdolność powracania ustroju do położenia równowagi, z którego został wyprowadzony przez działanie dowolnej (lecz niewielkiej) przyczyny.

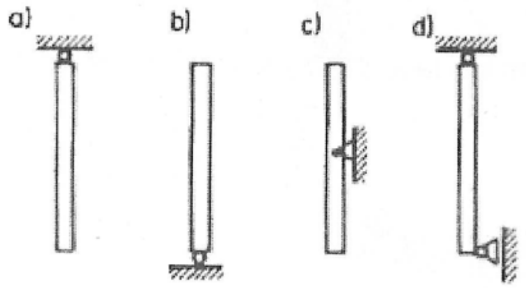
Stateczność belek ciągłych i ram płaskich

położenie równowagi może być :

- stateczne (6-1 k, 6-2 d, 6-1 a,e, 6-2a),
- niestateczne (6-1b,f , 6-2b)
- obojętne (6-1d, 6.2c wychylenie z położenia równowagi w dowolną stronę prowadzi do nowego położenia równowagi)
- krytyczne (6-1c,g,h,i układ zachowuje się różnie w zależności od nadanego niewielkiego przemieszczenia)



Rys. 6-1



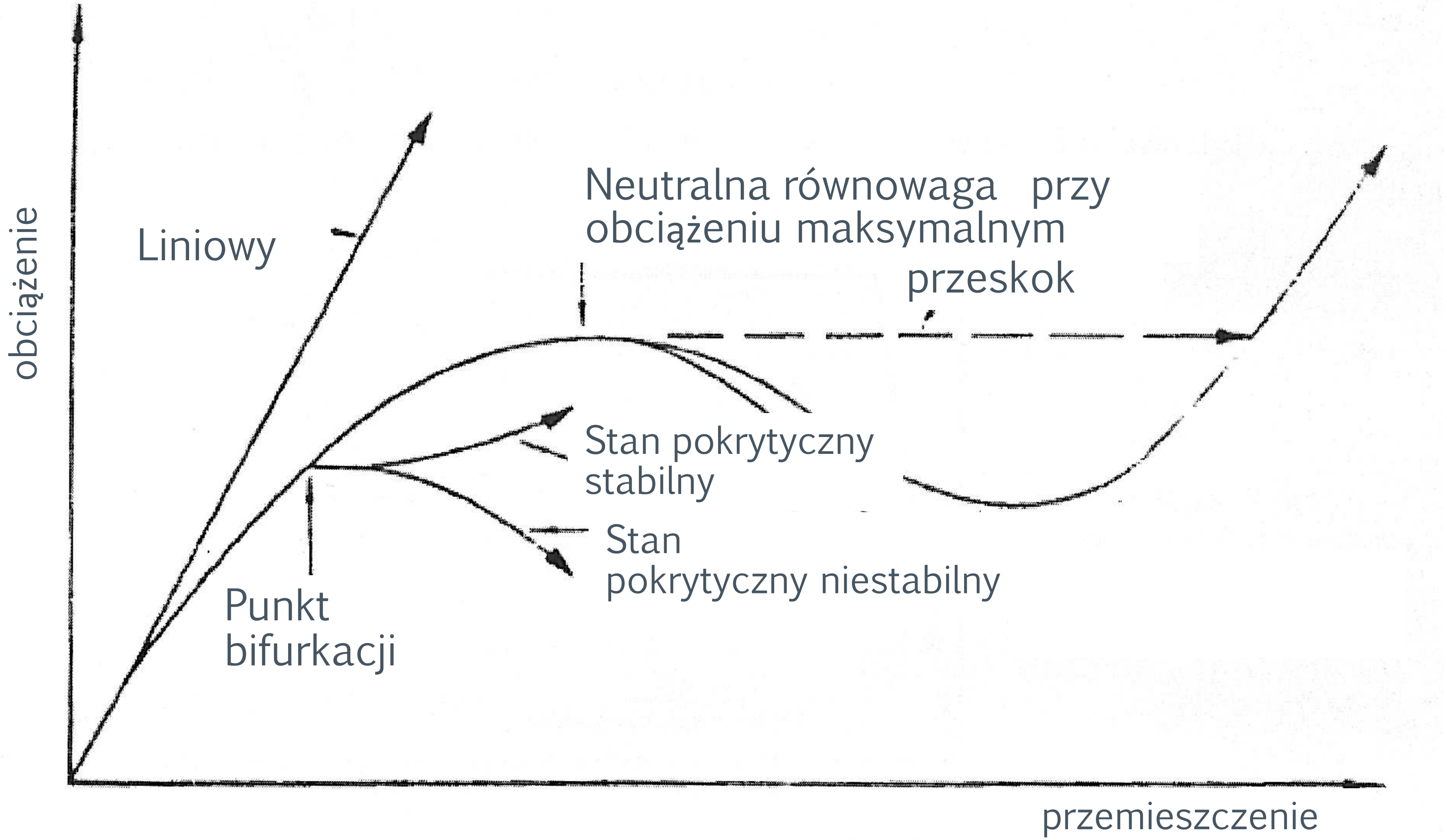
Rys. 6-2

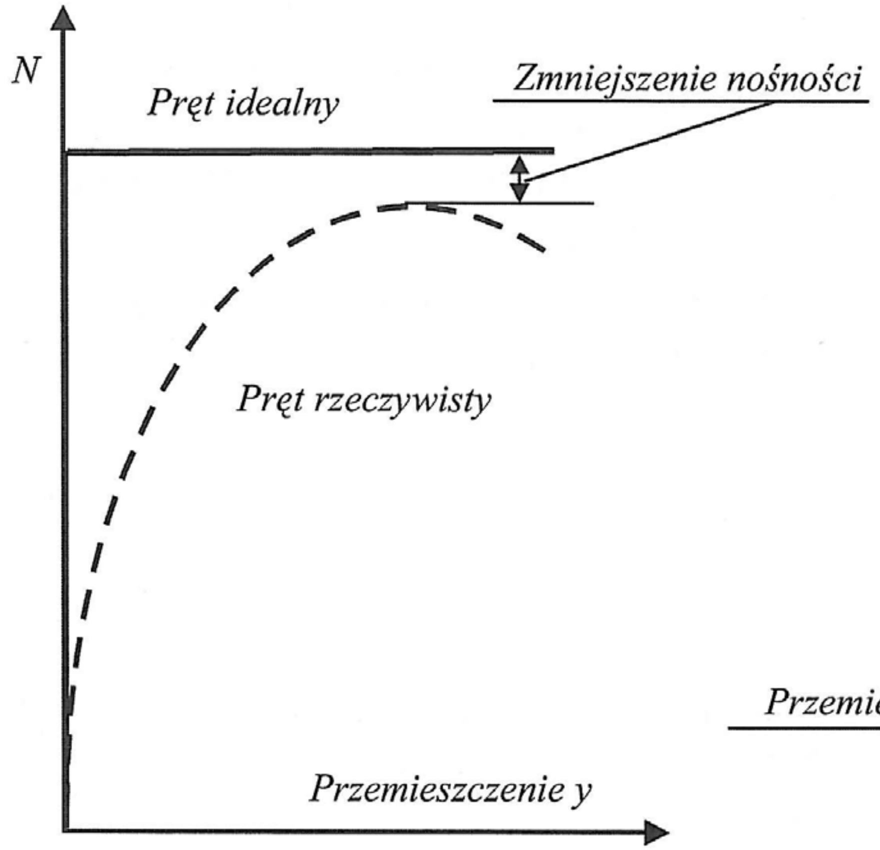
Stateczność belek ciągłych i ram płaskich

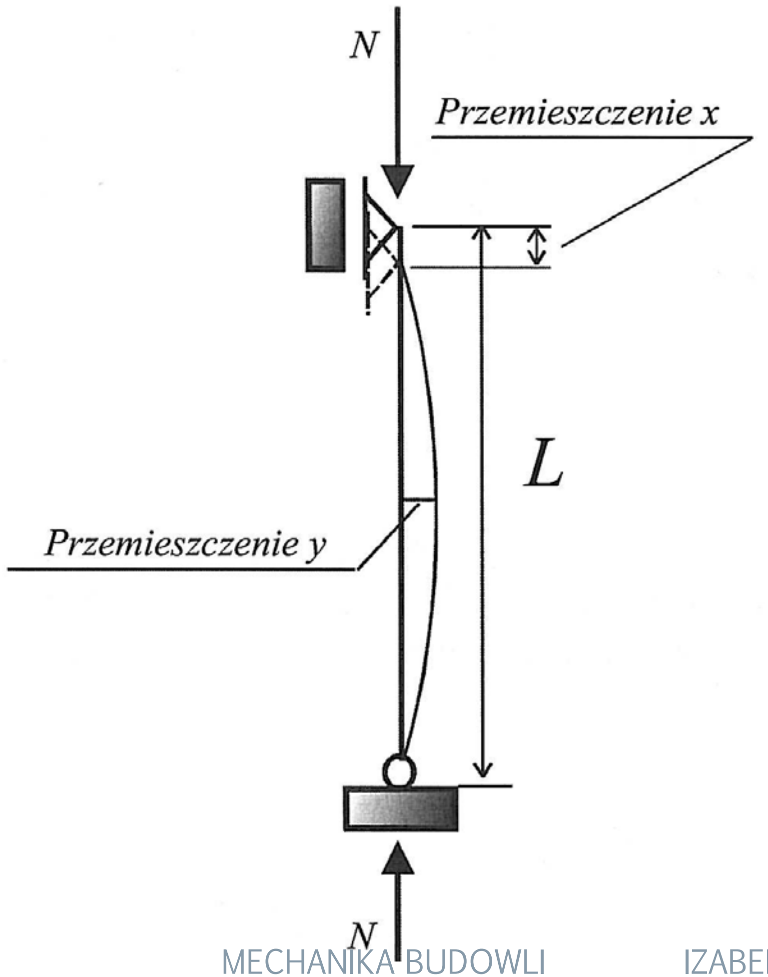
w zależności od rodzaju położenia równowagi energia układu osiąga:

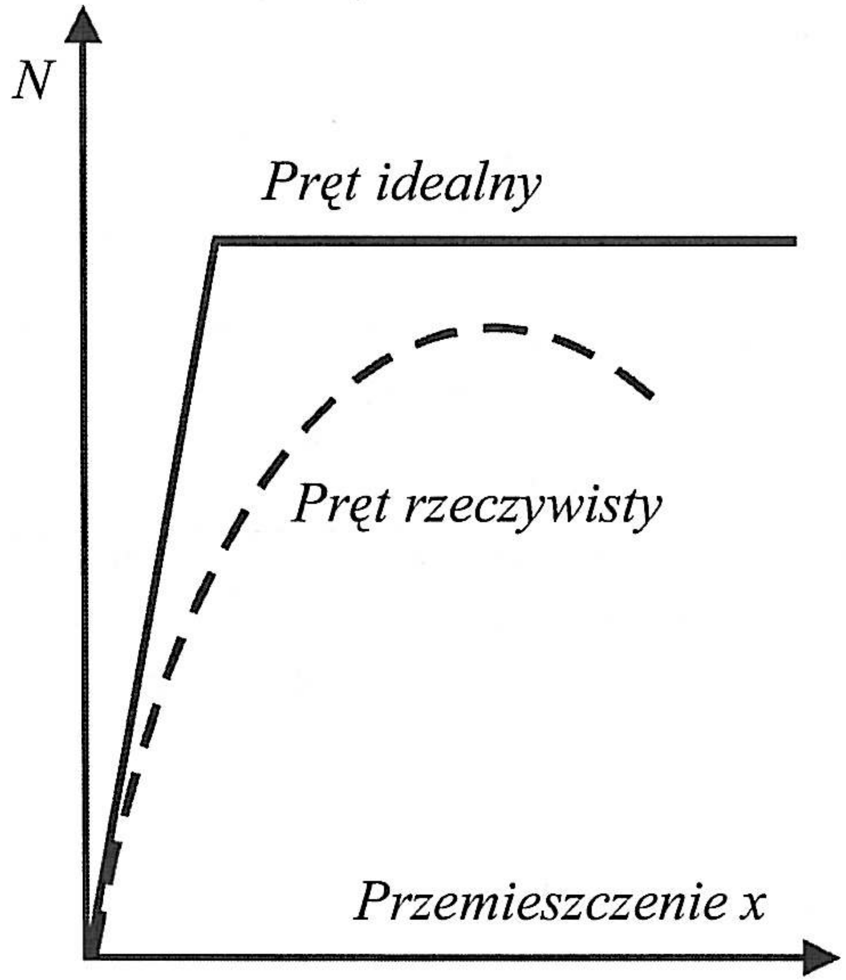
- minimum właściwe,
- maksimum właściwe
- jest stała w pewnym otoczeniu
- ma punkt stacjonarności nie będący żadnym z wyżej wymienionych

Na poniższym rysunku podano *(Flexural-Torsional Buckling of Structures) N.S. Trahair,E&FN SPON1993)* zależność siły działającej na konstrukcję P od przemieszczenia.(np. przymieszczenia : poprzeczne y)




N
Pręt idealny
Zmniejszenie nośności
Pręt rzeczywisty
Przemieszczenie y


N
Przemieszczenie x
L
Przemieszczenie y
N



zależności siły normalnej od przemieszczeń x i y pręta idealnego i rzeczywistego (z imprerfekcjami geometrycznymi i mimośrodem obciążenia)

Stateczność - definicje

- **Obciążenie krytyczne** – najmniejsze obciążenie, dla którego jest możliwa również druga postać równowagi układu połączona z zakrzywieniem prętów.
- **Wyboczenie w płaszczyźnie układu** – wszystkie pręty po wyboczeniu pozostają w płaszczyźnie układu (płaska postać wyboczenia).
- **Wyboczenie z płaszczyzny układu** – pręty po wyboczeniu nie pozostają w płaszczyźnie układu (przestrzenna postać wyboczenia).

Definicje

Postać przestrzenna jest związana ze skręcaniem prętów i zginaniem w obu płaszczyznach osi głównych.

Jeżeli przekroje prętów nie są symetryczne lub jeżeli ich osie symetrii nie leżą w płaszczyźnie układu to płaska postać wyboczenia nie jest w ogóle możliwa.

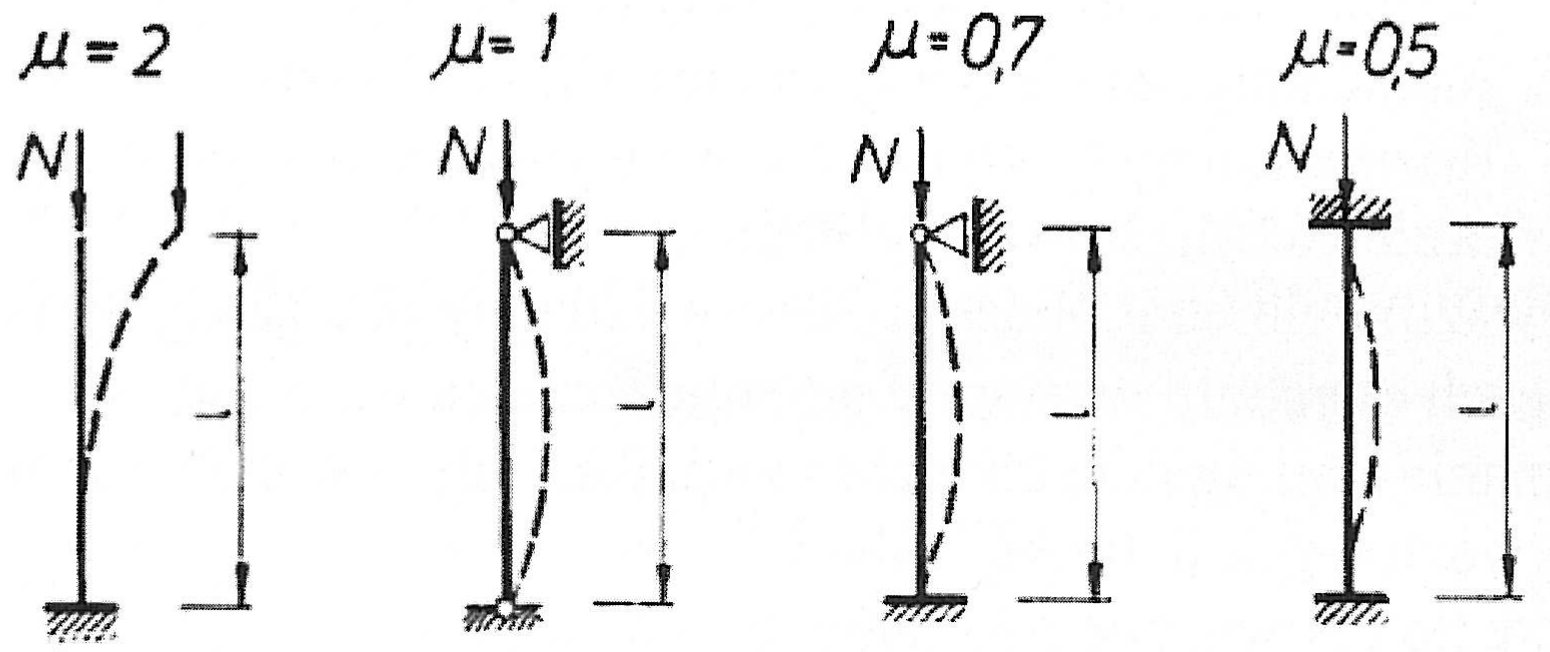
Przedmiot badania stateczności – obliczanie obciążeń krytycznych

Przypomnienie z wytrzymałości materiałów.
Siła krytyczna wyboczenia pojedynczego pręta jest równa (wg modelu Eulera):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

gdzie $\boxed{\lambda = \frac{l_w}{i}}$ jest smukłością pręta. W zależności od schematu statycznego pręta przyjmujemy różne długości wyboczeniowe $l_w = \mu l_0$ gdzie przez l_0 oznaczono długość pręta.

Długości wyboczeniowe zależne od warunków podparcia



Wzór powyższy jest ważny dla materiału sprężystego, czyli:

$$\sigma = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2 A} \leq \sigma_{pl}$$

czyli obowiązuje dla prętów o smukłości większej niż smukłość porównawcza:

$$\boxed{\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}}$$

<u>Pewna graniczna wartość smukłości</u>

Założenia

- Zakładamy, że elementy są idealnie proste,
- Materiał jest liniowo sprężysty,
- Wstępnie elementy mogą być poddane wyłącznie działaniu sił normalnych (siły tnące i momenty zginające są równe zeru),
- Zakładamy, że elementy są nieściśliwe $EA=\infty$,
- Rozpatrujemy tylko możliwość wyboczenia w płaszczyźnie ramy.

Wzory transformacyjne metody przemieszczeń wg teorii II rzędu – uwzględnienie sił normalnych

W rzeczywistych konstrukcjach budowlanych elementy prętowe są najczęściej fragmentem większej konstrukcji np. słup ramy, rygiel ramy, pręty kratownicy, elementy belek ciągłych, rusztów. Elementy te nie są podparte w tak prosty sposób jak to było zakładane w wytrzymałości materiałów.

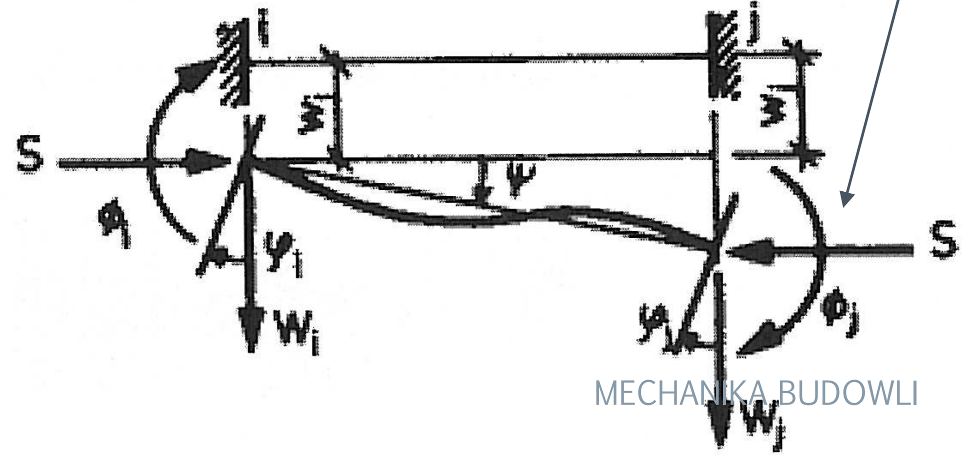
Przedmiotem niniejszej analizy jest wyznaczenie sił krytycznych ram i belek płaskich.

Równanie różniczkowe problemu:
Rozważmy element obustronnie utwierdzony obciążony siłą osiową S, na końcach elementu wystąpiły przemieszczenia w_i, φ_i, w_k, φ_k. Szukamy równania linii ugięcia elementu w funkcji siły S w celu wyrażenia sił przywęzłowych w funkcji siły S.
W pręcie obowiązuje równanie równowagi:

$$EJy''(x) = -M(x)$$
$$M(x) = Sy(x)$$
$$EJy''(x) + Sy(x) = 0$$

W teorii I rzędu tego składnika nie ma

zakładamy, że S>0 dla siły ściskającej



$$y''(x)+\frac{S}{EJ}y(x)=0$$

po dwukrotnym zróżniczkowaniu powyższej zależności względem x otrzymamy:

$$y''''(x)+\frac{S}{EJ}y''(x)=0$$

podstawiając zmienną bezwymiarową:

$\xi=\frac{x}{l}\,oraz\,\frac{d}{dx}(...)=\frac{1}{l}\frac{d}{d\xi}(...)$ otrzymamy:

$$\frac{dy^4}{d\xi^4}+\frac{Sl^2}{EJ}\frac{dy^4}{d\xi^4}=0,$$

oznaczając przez $\lambda^2 = \frac{Sl^2}{EJ}$ otrzymamy równanie różniczkowe liniowe rzędu II:

$$\frac{dy^4}{d\xi^4} + \lambda^2 \frac{dy^2}{d\xi^2} = 0 \quad (*)$$

jeżeli założymy, że $y(\xi) = Ce^{r\xi}$ otrzymamy równanie charakterystyczne:

$$r^4 + \lambda^2 r^2 = 0$$

równanie to ma następujące pierwiastki:

$$r_{1,2} = 0, r_{3,4} = \pm i\lambda, i = \sqrt{-1} \qquad \text{(zespolone)}$$

rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (*) ma więc postać:

$$y(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3 \cos \lambda\xi + C_4 \sin \lambda\xi$$

Wykorzystując powyższe równanie linii ugięcia belki możemy wyznaczyć siły wewnętrzne M, T w funkcji zmiennej x

$$M(x) = -EJy''(x)$$

$$T(x) = -EJy'''(x) - S\sin\varphi = -EJy'''(x) - Sy'(x)$$

lub w funkcji zmiennej $\xi = \dfrac{x}{l}$:

$$M(\xi) = -\frac{EJ}{l^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

$$T(\xi) = -\frac{EJ}{l^3}\frac{d^3y}{d\xi^3} - \frac{S}{l}\frac{dy}{d\xi} = -\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{d^3y}{d\xi^3} + \lambda^2\frac{dy}{d\xi}\right)$$

siły wewnętrzne na końcach pręta obliczymy z następujących zależności:

$$M_{ik} = -\frac{EJ}{l^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=0} \quad M_{ki} = -\frac{EJ}{l^2}\frac{d^2y}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=1}$$

$$-T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{d^3y}{d\xi^3} + \lambda^2\frac{dy}{d\xi}\right)\bigg|_{\xi=1}$$

wykorzystując warunki brzegowe:

$\xi = 0, y(0) = w_i, y'(0) = \varphi_i l$

$\xi = 1, y(1) = w_k, y'(1) = \varphi_k l$

możemy wyrazić stałe C_1, C_2, C_3, C_4 poprzez przemieszczenia na końcach pręta w_i, φ_i, w_k, φ_k. W ten sposób możemy również wyrazić siły przywęzłowe w funkcji przemieszczeń końców pręta:

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l}\left[\alpha(\lambda)\varphi_i + \beta(\lambda)\varphi_k - \vartheta(\lambda)\psi_{ik}\right]$$

$$M_{ki} = \frac{EJ}{l}\left[\alpha(\lambda)\varphi_k + \beta(\lambda)\varphi_i - \vartheta(\lambda)\psi_{ik}\right]$$

$$-T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EJ}{l^2}\left[\vartheta(\lambda)(\varphi_i + \varphi_k) - \delta(\lambda)\psi_{ik}\right]$$

Powyższe wzory możemy zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} T_{ik} \\ M_{ik} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\delta(\lambda)}{l} & \vartheta(\lambda) & -\frac{\delta(\lambda)}{l} & \vartheta(\lambda) \\ & \alpha(\lambda)l & -\vartheta(\lambda) & \beta(\lambda)l \\ sym & & \frac{\delta(\lambda)}{l} & -\vartheta(\lambda) \\ & & & \alpha(\lambda)l \end{bmatrix}}_{\text{macierz sztywności } \mathbf{K}} \begin{bmatrix} w_{ik} \\ \varphi_{ik} \\ w_{ki} \\ \varphi_{ki} \end{bmatrix}$$

macierz sztywności **K**

gdzie:

$$\psi_{ik} = \frac{w_k - w_i}{l}$$

$$\alpha(\lambda) = \lambda \frac{\sin\lambda - \lambda\cos\lambda}{2(1-\cos\lambda) - \lambda\sin\lambda}, \lim_{\lambda\to 0} \alpha = 4$$

$$\beta(\lambda) = \lambda \frac{\lambda - \sin\lambda}{2(1-\cos\lambda) - \lambda\sin\lambda}, \lim_{\lambda\to 0} \beta = 2$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda), \lim_{\lambda\to 0} \vartheta = 6$$

$$\delta(\lambda) = \lambda^3 \frac{\sin\lambda}{2(1-\cos\lambda) - \lambda\sin\lambda}, \lim_{\lambda\to 0} \delta = 12$$

dla pręta z jednej strony utwierdzonego a z drugiej strony przegubowo podpartego:

$$M_{ik} = \frac{EJ}{l}\alpha'(\lambda)(\varphi_i - \psi_{ik})$$

$$-T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EJ}{l^2}\left[\alpha'(\lambda)(\varphi_i) - \delta'(\lambda)\psi_{ik}\right]$$

$$\alpha'(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda - \lambda\cos\lambda}, \lim_{\lambda\to 0}\alpha' = 3$$

$$\delta'(\lambda) = \lambda^3 \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda - \lambda\cos\lambda}, \lim_{\lambda\to 0}\delta' = 3$$

Table of Stability functions

Lambda	alpha	beta	theta	delta	alpha'	delta'
0.0	4.0000	2.0000	6.0000	12.0000	3.0000	3.0000
0.1	3.9987	2.0003	5.9990	11.9880	2.9980	2.9880
0.2	3.9947	2.0013	5.9960	11.9520	2.9920	2.9520
0.3	3.9880	2.0030	5.9910	11.8920	2.9820	2.8920
0.4	3.9786	2.0054	5.9840	11.8080	2.9679	2.8079
0.5	3.9666	2.0084	5.9750	11.6999	2.949	[illegible]
0.6	3.9518	2.0121	5.9639	11.5678	2.927	[illegible]
0.7	3.9342	2.0166	5.9508	11.4117	2.900	[illegible]
0.8	3.9139	2.0218	5.9357	11.2314	2.869	[illegible]
0.9	3.8908	2.0277	5.9185	11.0271	2.834	[illegible]
1.0	3.8649	2.0344	5.8993	10.7986	2.794	[illegible]
1.1	3.8360	2.0419	5.8779	10.5459	2.749	[illegible]
1.2	3.8043	2.0502	5.8545	10.2690	2.699	[illegible]
1.3	3.7695	2.0594	5.8289	9.9678	2.644	[illegible]
1.4	3.7317	2.0695	5.8012	9.6424	2.583	[illegible]
1.5	3.6907	2.0806	5.7713	9.2926	2.517	[illegible]
1.6	3.6466	2.0926	5.7392	8.9184	2.445	[illegible]
1.7	3.5991	2.1057	5.7048	8.5197	2.367	[illegible]
1.8	3.5483	2.1199	5.6682	8.0964	2.281	[illegible]
1.9	3.4940	2.1353	5.6293	7.6486	2.189	[illegible]
2.0	3.4361	2.1519	5.5880	7.1761	2.088	[illegible]
2.1	3.3745	2.1699	5.5444	6.6788	1.979	[illegible]
2.2	3.3090	2.1893	5.4983	6.1566	1.860	[illegible]
2.3	3.2395	2.2102	5.4498	5.6095	1.731	[illegible]
2.4	3.1659	2.2328	5.3987	5.0373	1.591	[illegible]
2.5	3.0878	2.2572	5.3450	4.4400	1.437	[illegible]
2.6	3.0052	2.2834	5.2887	3.8174	1.270	[illegible]
2.7	2.9178	2.3118	5.2297	3.1693	1.0862	-6.2038
2.8	2.8254	2.3425	5.1679	2.4957	0.8833	-6.9567
2.9	2.7276	2.3756	5.1032	1.7965	0.6586	-7.7514

$$\alpha(\lambda)=\lambda\frac{\sin\lambda-\lambda\cos\lambda}{2(1-\cos\lambda)-\lambda\sin\lambda},\lim_{\lambda\to 0}\alpha=4$$

$$\beta(\lambda)=\lambda\frac{\lambda-\sin\lambda}{2(1-\cos\lambda)-\lambda\sin\lambda},\lim_{\lambda\to 0}\beta=2$$

$$\vartheta(\lambda)=\alpha(\lambda)+\beta(\lambda),\lim_{\lambda\to 0}\vartheta=6$$

$$\delta(\lambda)=\lambda^3\frac{\sin\lambda}{2(1-\cos\lambda)-\lambda\sin\lambda},\lim_{\lambda\to 0}\delta=12$$

$$\alpha'(\lambda)=\lambda^2\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda-\lambda\cos\lambda},\lim_{\lambda\to 0}\alpha'=3$$

$$\delta'(\lambda)=\lambda^3\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda-\lambda\cos\lambda},\lim_{\lambda\to 0}\delta'=3$$

W przypadku siły rozciągającej S<0

$$\frac{dy^4}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{dy^2}{d\xi^2} = 0 \;, \quad \lambda^2 = -\frac{Sl^2}{EJ}$$

$$r^4 - \lambda^2 r^2 = 0$$

równanie to ma następujące pierwiastki:

$$r_{1,2} = 0, r_{3,4} = \pm\lambda,$$

$$\boxed{y(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3\cosh\lambda\xi + C_4\sinh\lambda\xi}$$

$$\bar{\alpha}(\lambda) = \lambda\frac{\sinh\lambda - \lambda\cosh\lambda}{2(\cosh\lambda - 1) - \lambda\sinh\lambda},$$

$$\bar{\beta}(\lambda) = \lambda\frac{\lambda - \sinh\lambda}{2(\cosh\lambda - 1) - \lambda\sinh\lambda},$$

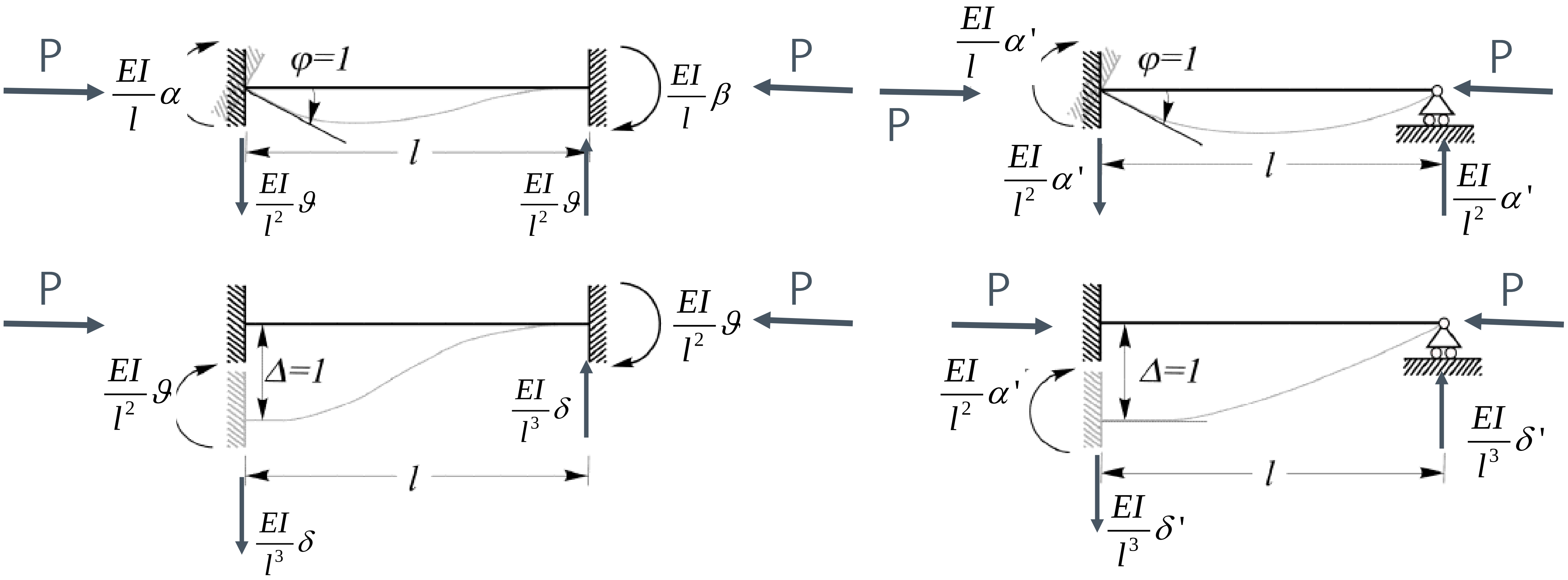
$$\bar{\delta}(\lambda) = \lambda^3\frac{\sinh\lambda}{2(\cosh\lambda - 1) - \lambda\sinh\lambda},$$

$$\bar{\alpha}'(\lambda) = \lambda^2\frac{\sinh\lambda}{\lambda\cosh\lambda - \sinh\lambda},$$

$$\bar{\delta}'(\lambda) = \lambda^3\frac{\cosh\lambda}{\lambda\cosh\lambda - \sinh\lambda},$$

Obliczanie obciążeń krytycznych

- Wyjściowe siły przywęzłowe w elemencie belkowym wg teorii II rzędu (wpływ sił normalnych)



- Wg teorii I rzędu: $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\theta = 6$, $\delta = 12$, $\alpha' = 3$, $\delta' = 3$

Obliczanie obciążeń krytycznych

Przedmiotem analizy zagadnień stateczności jest wyznaczanie siły krytycznej wyboczenia sprężystego konstrukcji, lub krytycznego mnożnika obciążenia. Najpierw należy określić siły normalne występujące w konstrukcji, następnie wykorzystując wzory transformacyjne utworzyć macierz sztywności konstrukcji w zależności od sił osiowych *S*.

$$Kq = P$$

$$dla P = 0$$

$$K(\mu)q = 0$$

następnie przy założeniu że wektor obciążeń *P=0,* z warunku:

$$\det K(\mu) = 0 \rightarrow \mu_1, \mu_2, \ldots$$

możemy wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia.

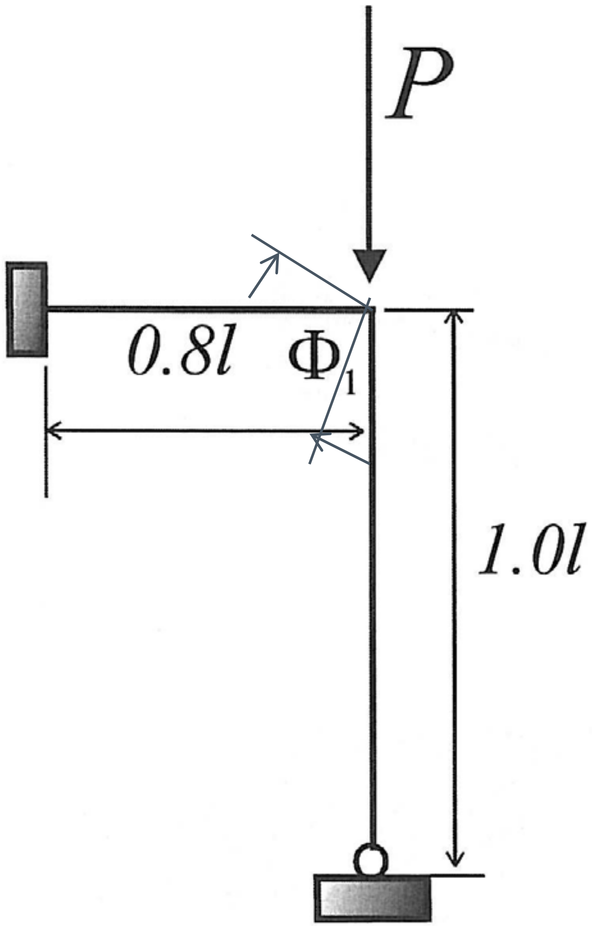
Sprowadzone długości wyboczeniowe elementów

W normowych procedurach wymiarowania prętów wymagana jest znajomość długości wyboczeniowej pręta konstrukcji. Znając siłę krytyczną pręta ze wzoru Eulera dla pręta jednoprzęsłowego możemy wyznaczyć długość wyboczeniową pręta, który jest elementem ramy, belki lub innej konstrukcji z następującej zależności:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^{\ 2}} \rightarrow l_w = \pi \sqrt{EJ / P_{cr}}$$

$$P_{cr} = \lambda^2 \frac{EJ}{l^2}, \qquad l_w = \frac{\pi l}{\lambda}$$

Przykład.1
Oszacować przedział w którym znajduje się siła krytyczna, znaleźć siłę krytyczną dla następującego układu oraz obliczyć długość wyboczeniową elementu ściskanego.
Przyjąć następujące dane: *EJ, l*.



Równanie równowagi w kierunku obrotu węzła $\phi1$:

$$M_1 = \left(\frac{4EJ}{0.8l} + \frac{\alpha' EJ}{l}\right)\varphi_1 = 0$$

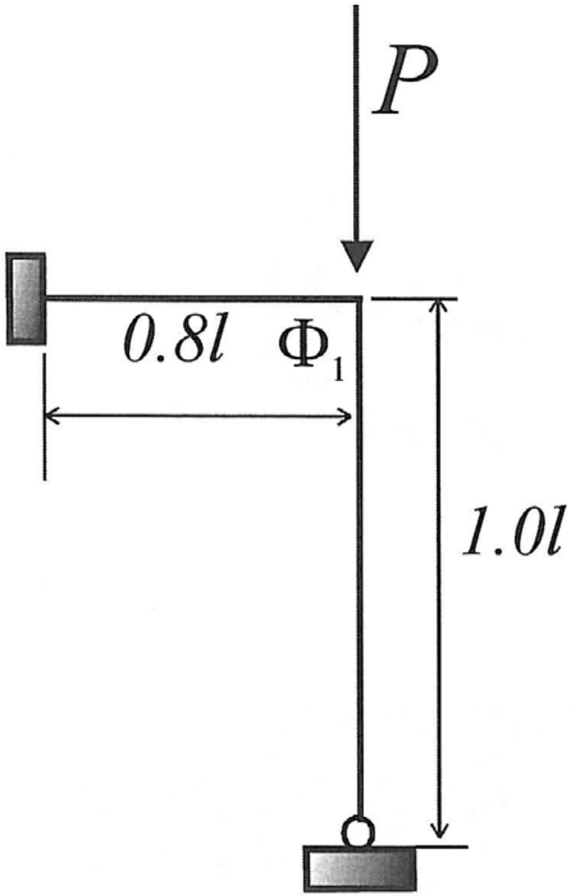
$$\frac{5EJ}{l} + \frac{\alpha' EJ}{l} = 0$$

$$\alpha' = -5$$

na podstawie tabeli funkcji oraz po aproksymacji:

$$\lambda = 3.9086$$

$$P_{cr} = \lambda^2 \frac{EJ}{l^2}, \qquad P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_w{}^2}$$



siła krytyczna pręta wynosi:

$$P_{cr} = \frac{3.9086^2 EJ}{l^2} = 15.277 \frac{EJ}{l^2}$$

obliczenie długości wyboczeniowej elementu:

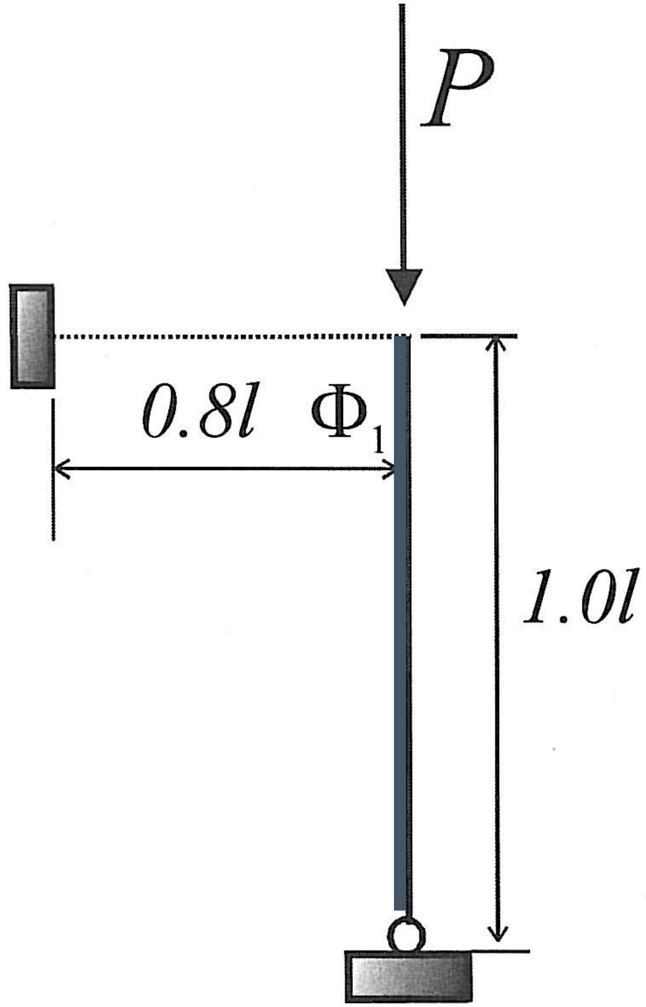
$$l_e = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{EJ}{15.277 \frac{EJ}{l^2}}} = 0.804l$$

rzeczywista długość wyboczeniowa pręta wynosi 0.804l.

Minimalną wartość siły krytycznej znajdziemy dla przypadku gdy słup jest dużo sztywniejszy od rygla:

$$P_{cr}\min = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 9.87\frac{EJ}{l^2}$$

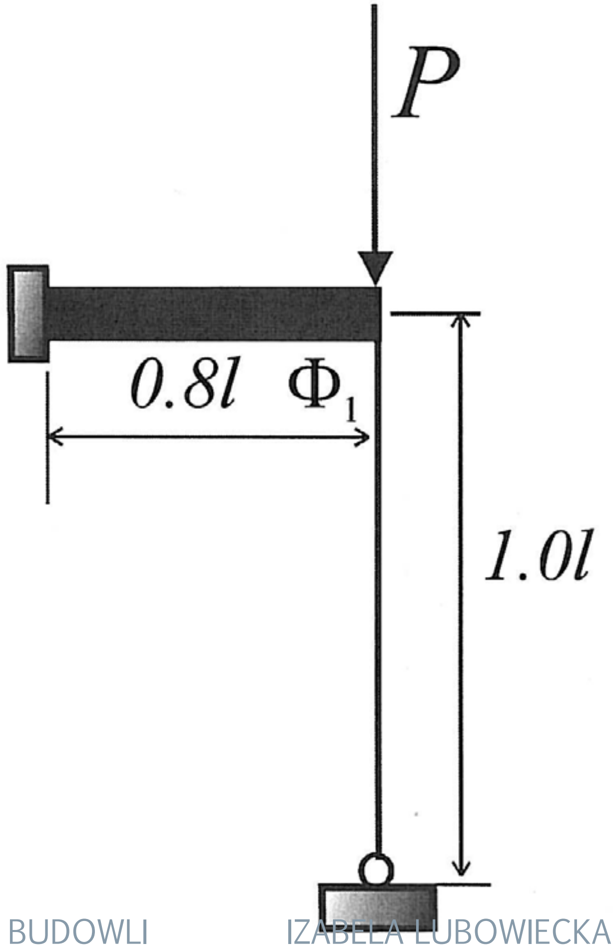
długość wyboczeniowa takiego układu wynosi $l_w = l_0$

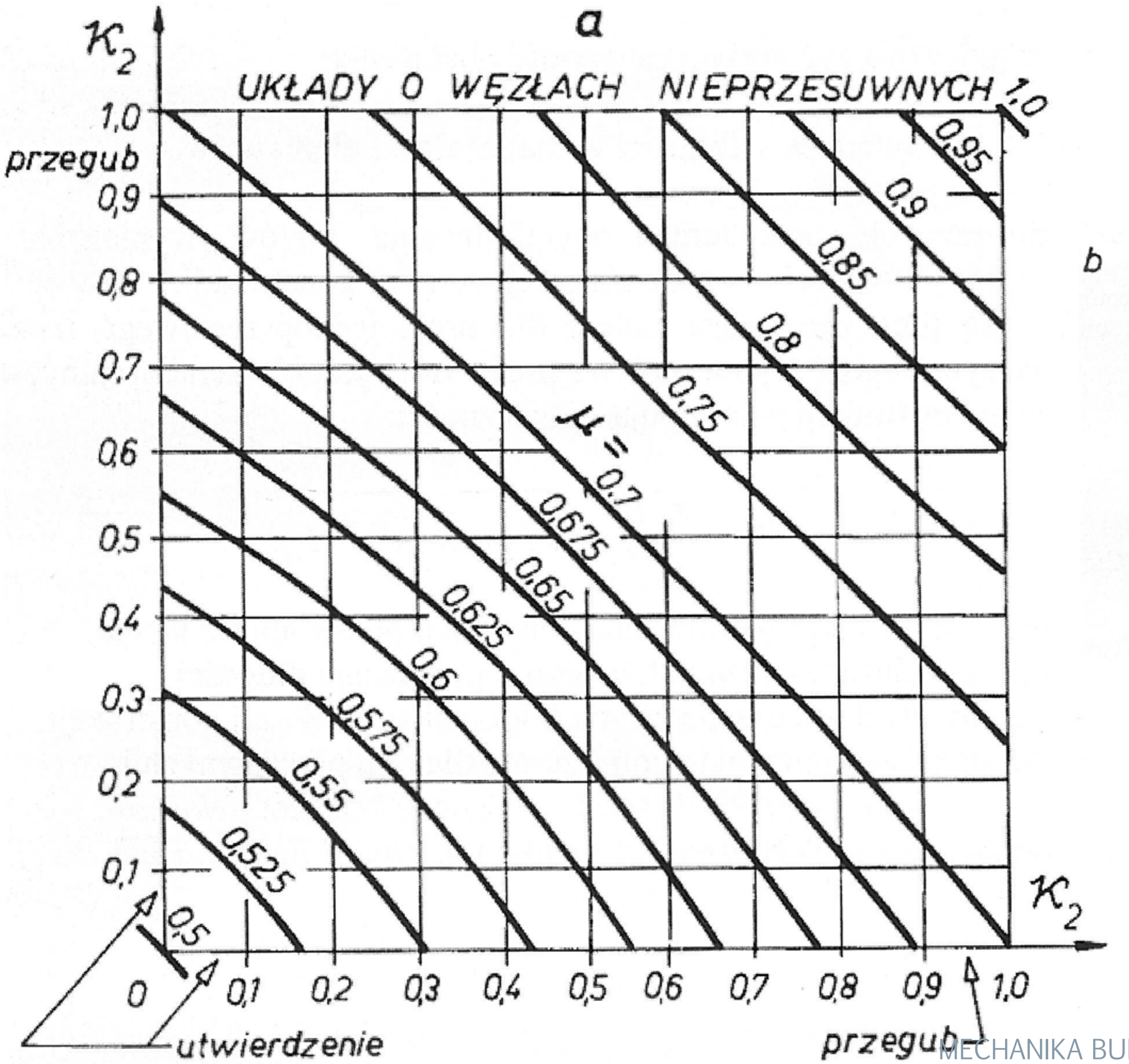


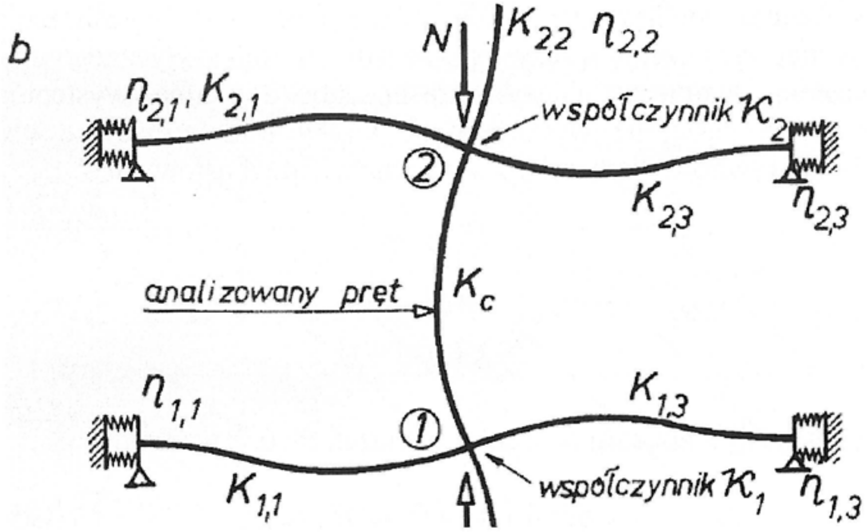
Maksymalną wartość siły krytycznej uzyskamy gdy rygiel będzie dużo sztywniejszy od słupa

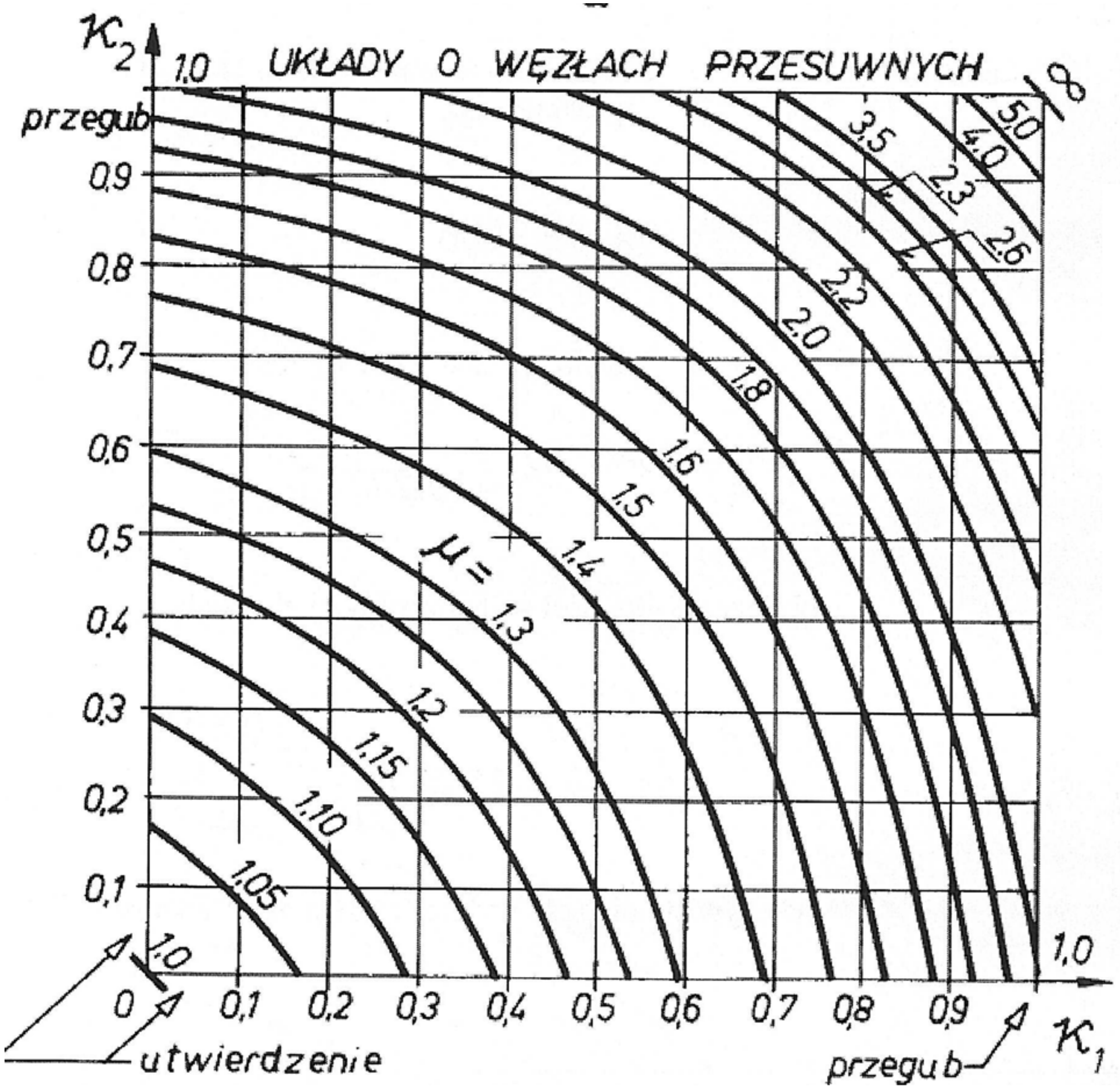
$$P_{cr}\max = \frac{\pi^2 EJ}{(0.707l)^2} = 19.75\frac{EJ}{l^2}$$

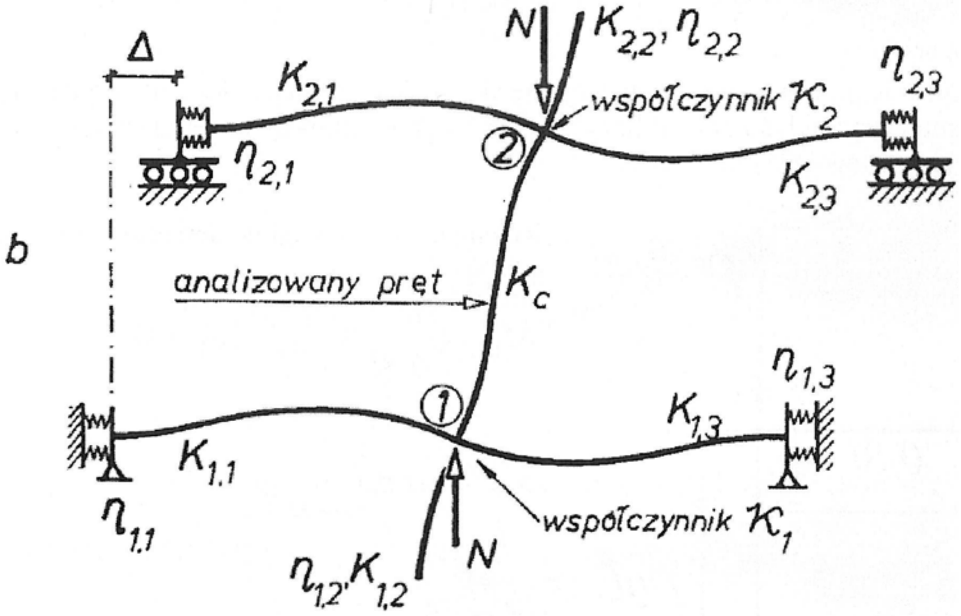
długość wyboczeniowa takiego układu wynosi $l_w=0.7\ l_0$




a
UKŁADY O WĘZŁACH NIEPRZESUWNYCH
przegub
utwierdzenie
μ = 0,7

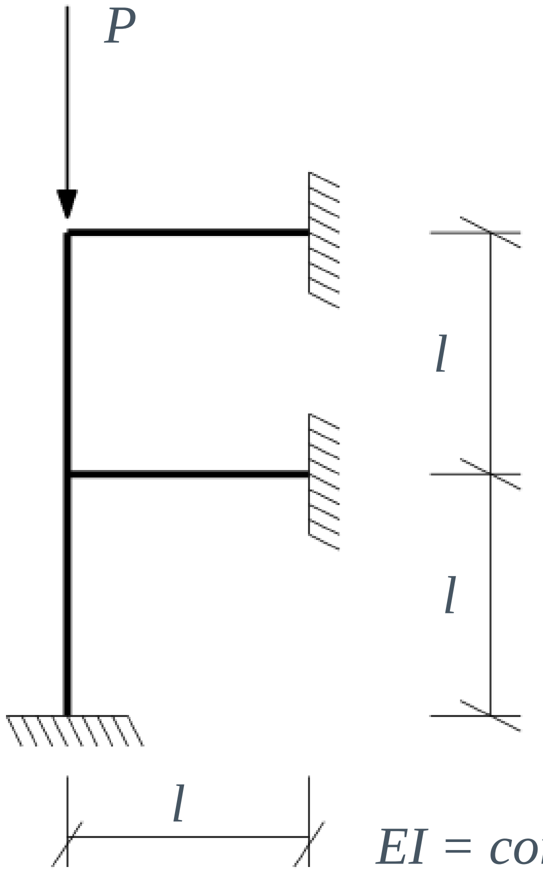

b
analizowany pręt
współczynnik


UKŁADY O WĘZŁACH PRZESUWNYCH
$\mathcal{K}_2$
przegub
utwierdzenie
przegub
$\mathcal{K}_1$
$\mu =$
1,05 1,10 1,15 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,8 2,0 2,2 2,3 2,6 3,5 4,0 5,0 ∞


Δ
b
$K_{2,1}$
$\eta_{2,1}$
N
$K_{2,2}, \eta_{2,2}$
współczynnik $\mathcal{K}_2$
$\eta_{2,3}$
$K_{2,3}$
analizowany pręt
K_c
$\eta_{1,3}$
$K_{1,3}$
$K_{1,1}$
$\eta_{1,1}$
współczynnik $\mathcal{K}_1$
$\eta_{1,2}, K_{1,2}$

Przykład 1.

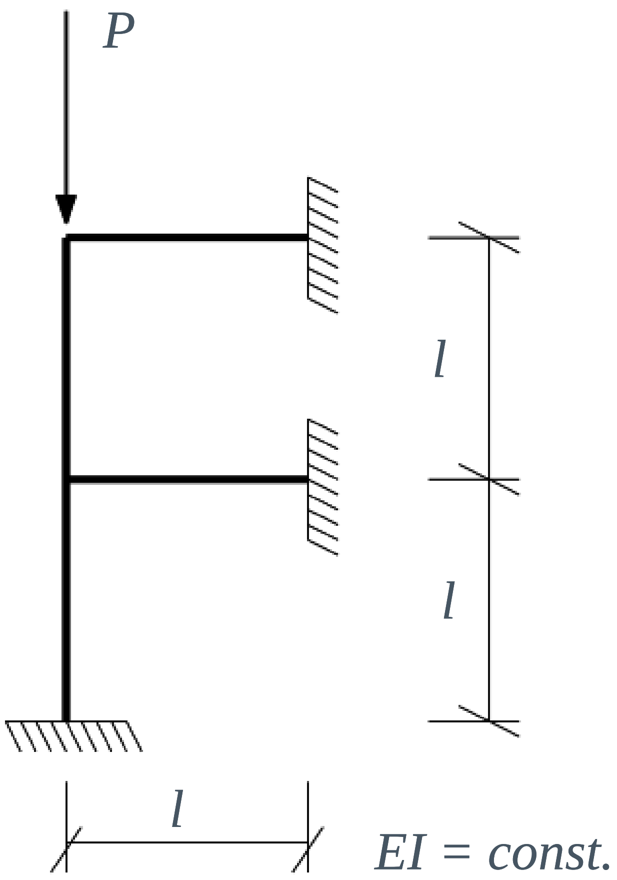
Wyznacz równanie, z którego można obliczyć λ.



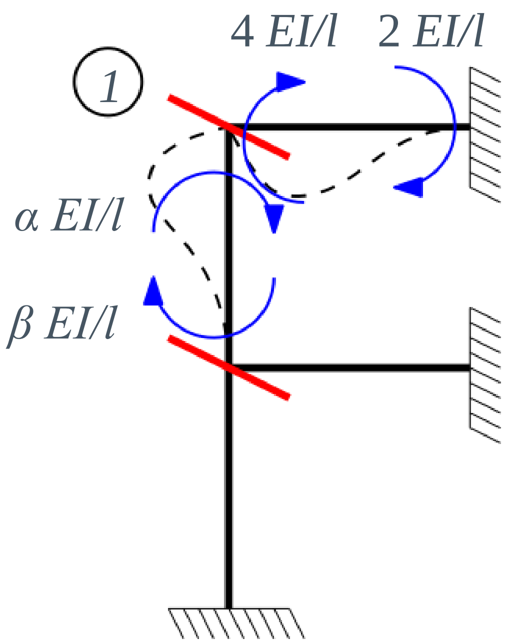
$EI = const.$

Przykład 1.

Wyznacz równanie, z którego można obliczyć λ.



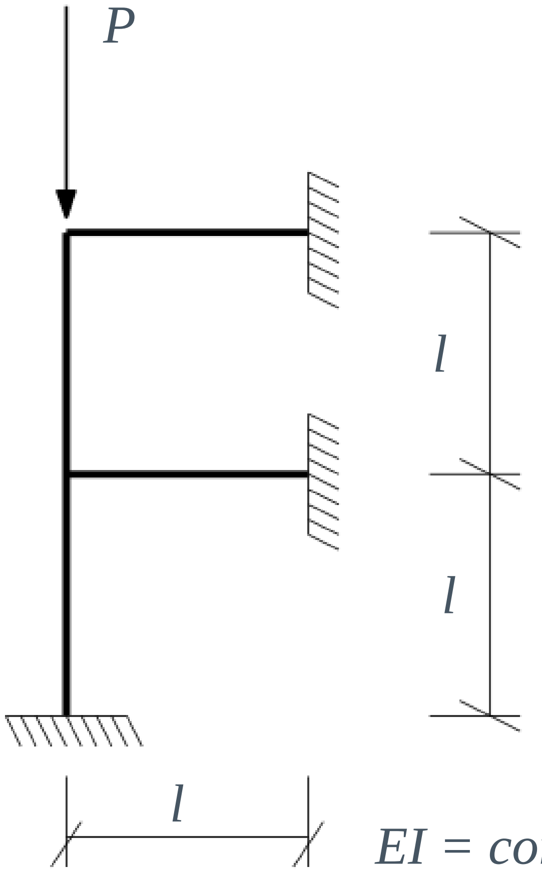
obrót węzła nr 1 o kąt $\varphi_1 = 1$



$$k_{11} = (\alpha+4)EI/l$$
$$k_{12} = \beta\, EI/l$$

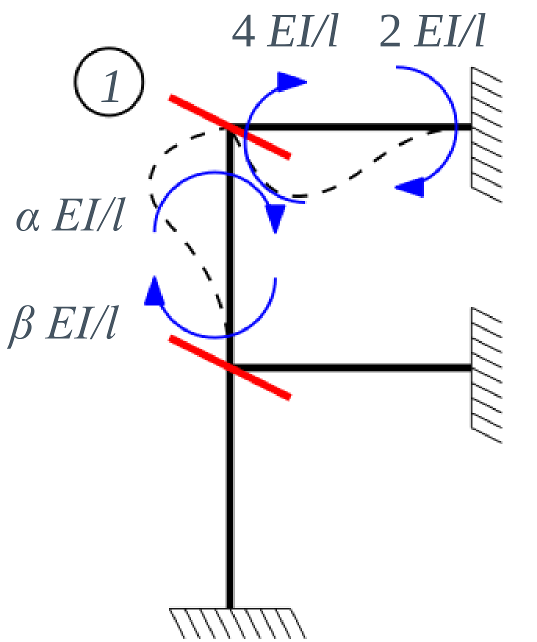
Przykład 1.

Wyznacz równanie, z którego można obliczyć λ.



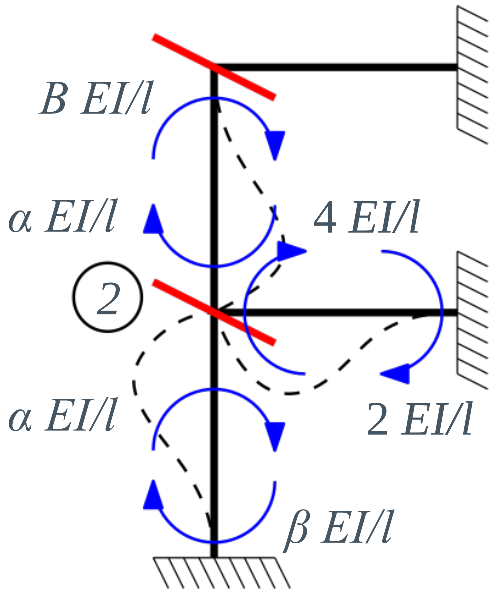
$EI = const.$

obrót węzła nr 1 o kąt $\varphi_1 = 1$



$$k_{11} = (\alpha+4)EI/l$$
$$k_{12} = \beta\ EI/l$$

obrót węzła nr 2 o kąt $\varphi_2 = 1$

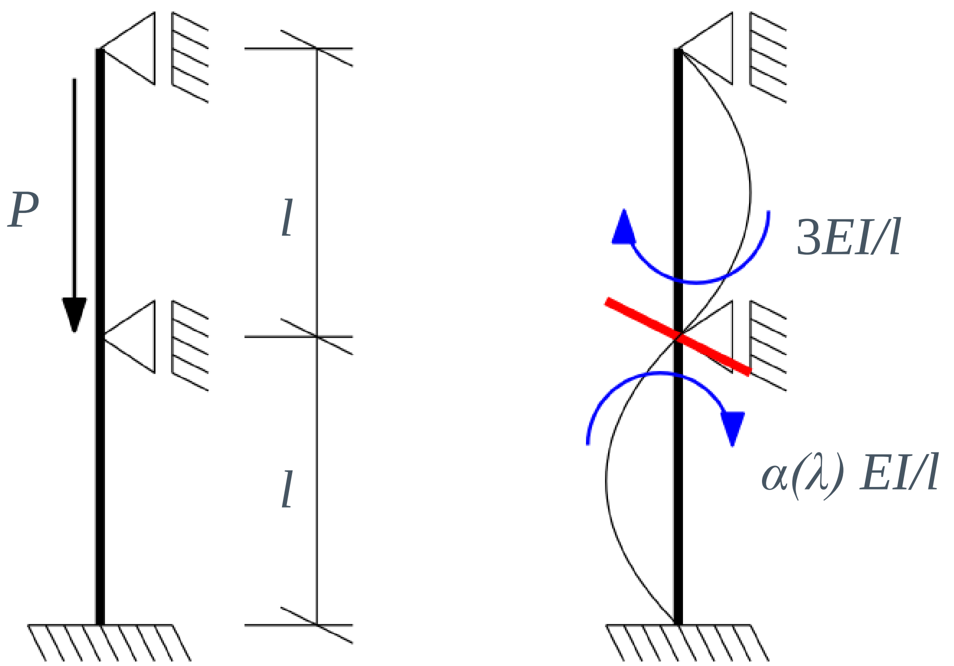


$$k_{21} = \beta\ EI/l$$
$$k_{22} = (2\alpha+4)EI/l$$

Przykład 2.

Oblicz siłę krytyczną P_{kr} .

obrót węzła o kąt $\varphi = 1$

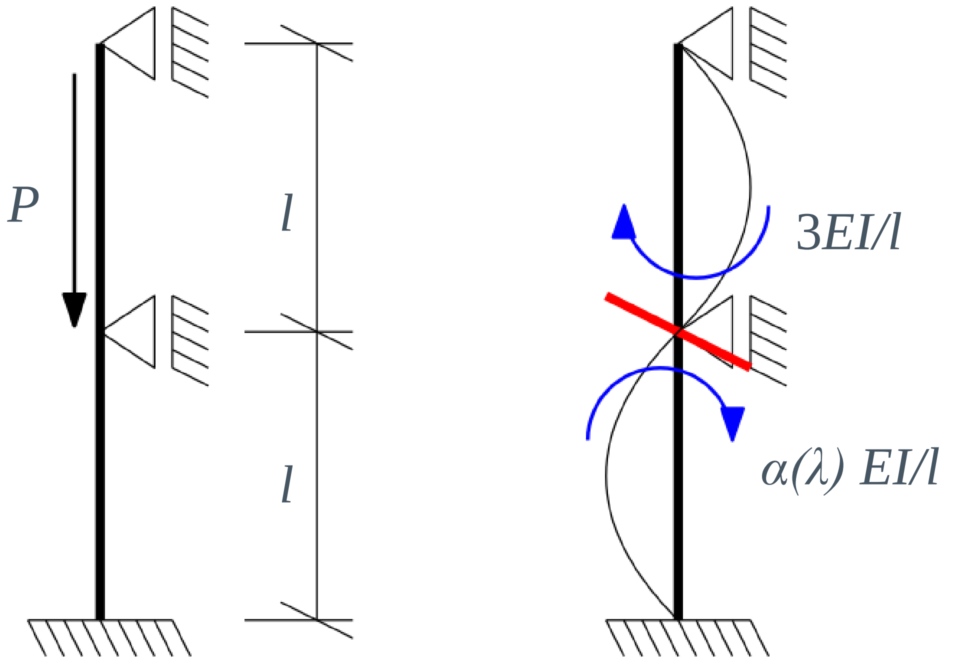


$EI = const.$

Przykład 2.

Oblicz siłę krytyczną P_{kr} .

obrót węzła o kąt $\varphi = 1$

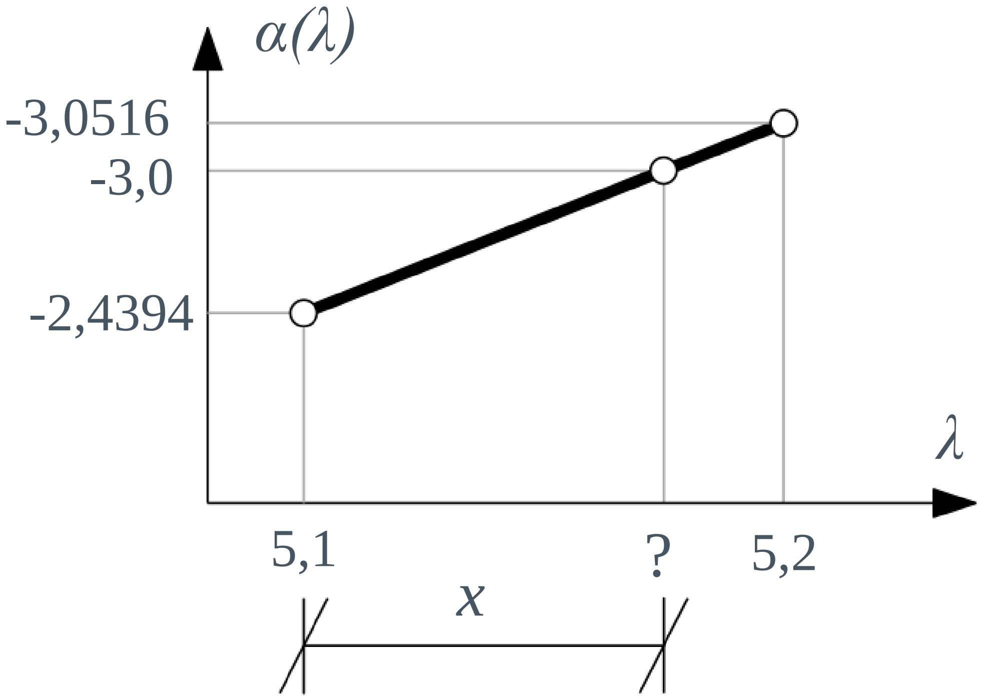


$EI = const.$

$$\alpha(\lambda) + 3 = 0$$
$$\alpha(\lambda) = -3$$

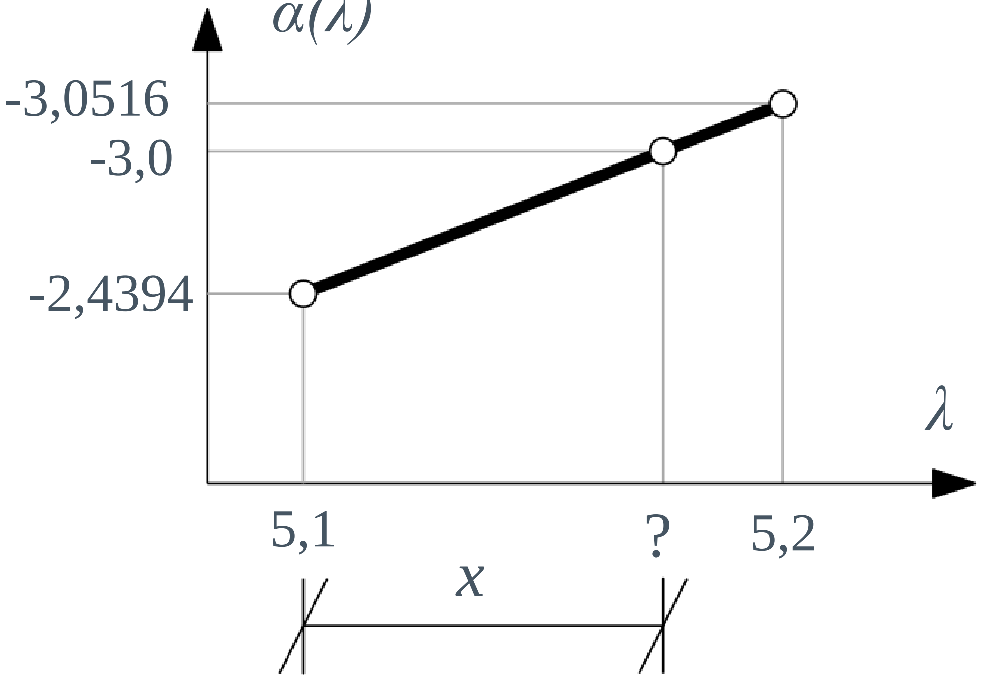
λ	$\alpha(\lambda)$
5,1	-2,4394
5,2	-3,0516

interpolacja liniowa:



Przykład 2.

Oblicz siłę krytyczną P_{kr} .



z podobieństwa trójkątów:

$(5{,}2 - 5{,}1) / (-3{,}0516 + 2{,}4394) = x / (-3{,}0 + 2{,}4394)$

$x = 0{,}09517 \quad \lambda = 5{,}19157$

$$P_{kr} = \lambda^2 EI / l^2 = 26{,}95\, EI / l^2$$

$$l_w = \pi\, l / \lambda = 0{,}605\, l$$

Przykład 2.

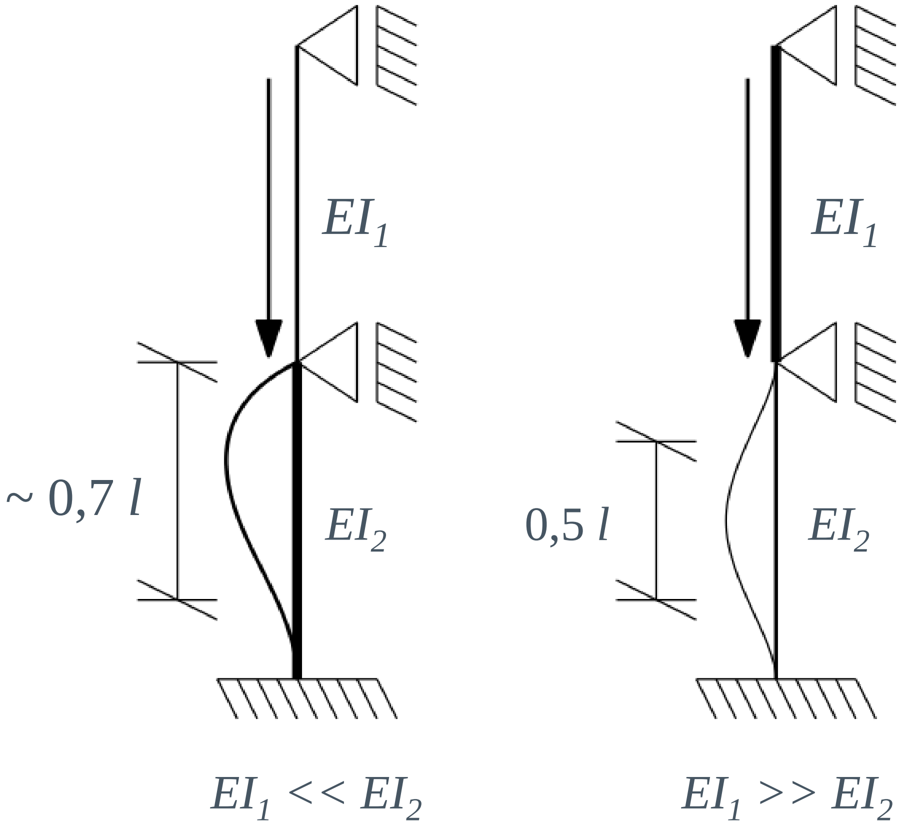
Oblicz siłę krytyczną P_{kr} .

Rozwiązanie mieści się w przedziale między dwoma przypadkami o "klasycznych" warunkach brzegowych

$$0{,}7\, l \quad > \quad 0{,}605\, l \quad > \quad 0.5\, l$$

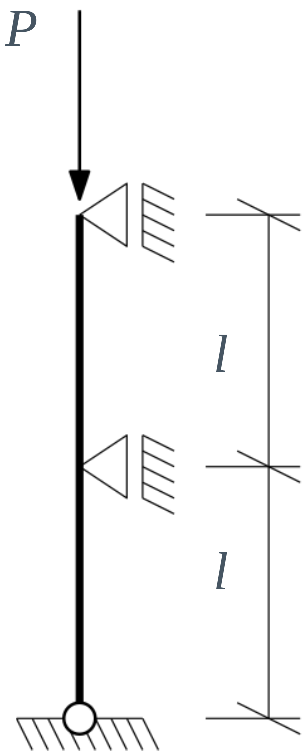
$$P_{kr} = \lambda^2 EI / l^{\,2}$$
$$= 26{,}95\, EI / l^{\,2}$$

$$l_w = \pi\, l / \lambda$$
$$= 0{,}605\, l$$



Przykład 3.

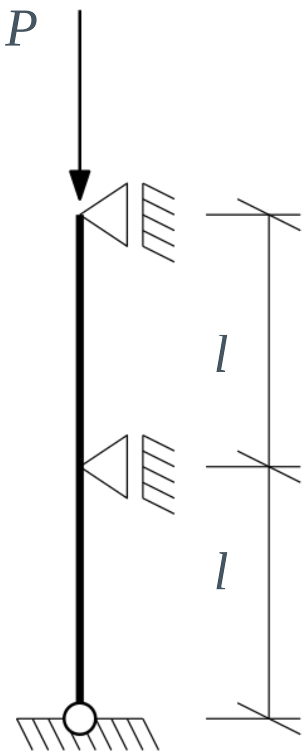
Oblicz długość wyboczeniową l_w .



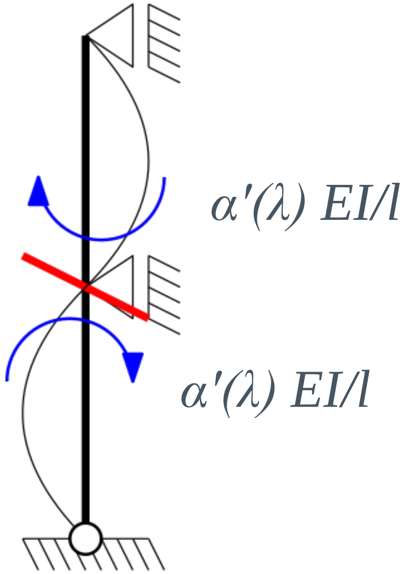
$EI = const.$

Przykład 3.

Oblicz długość wyboczeniową l_w .



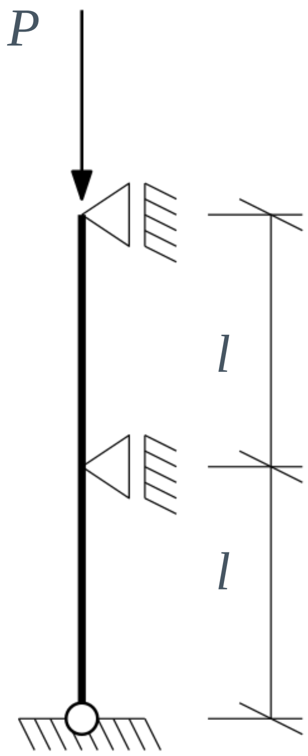
obrót węzła o kąt $\varphi = 1$



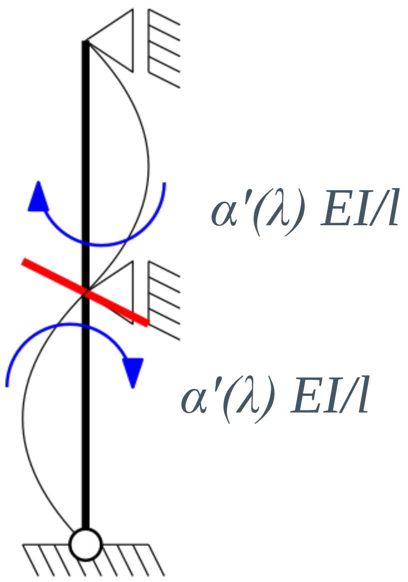
$EI = const.$

Przykład 3.

Oblicz długość wyboczeniową l_w .



obrót węzła o kąt $\varphi = 1$

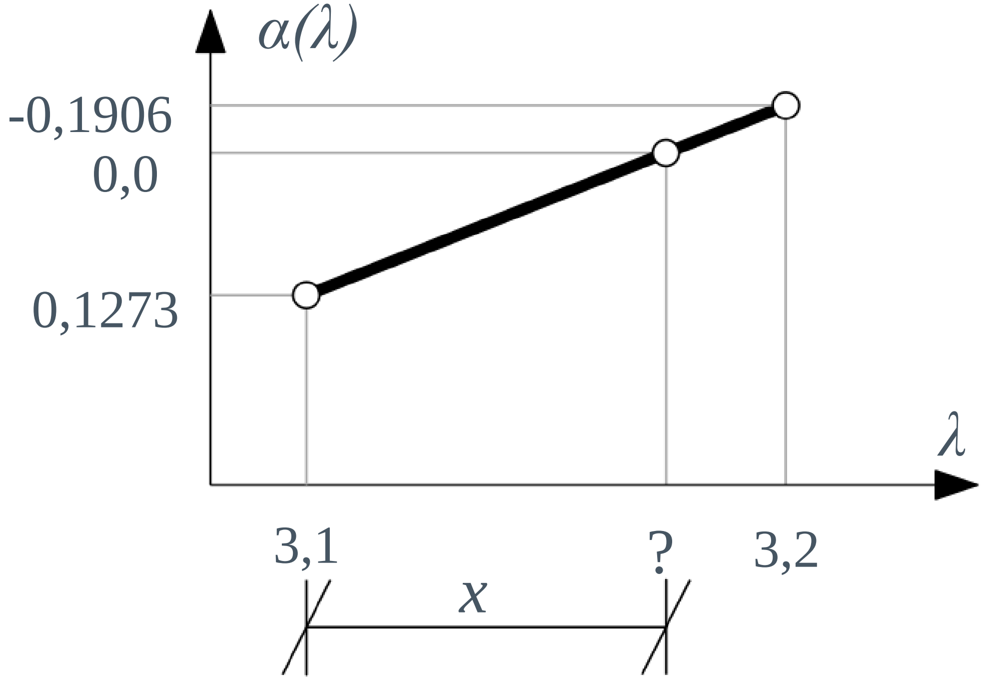


$EI = const.$

$$2\alpha'(\lambda) = 0$$
$$\alpha(\lambda) = 0$$

λ	$\alpha(\lambda)$
3,1	0,1273
3,2	-0,1906

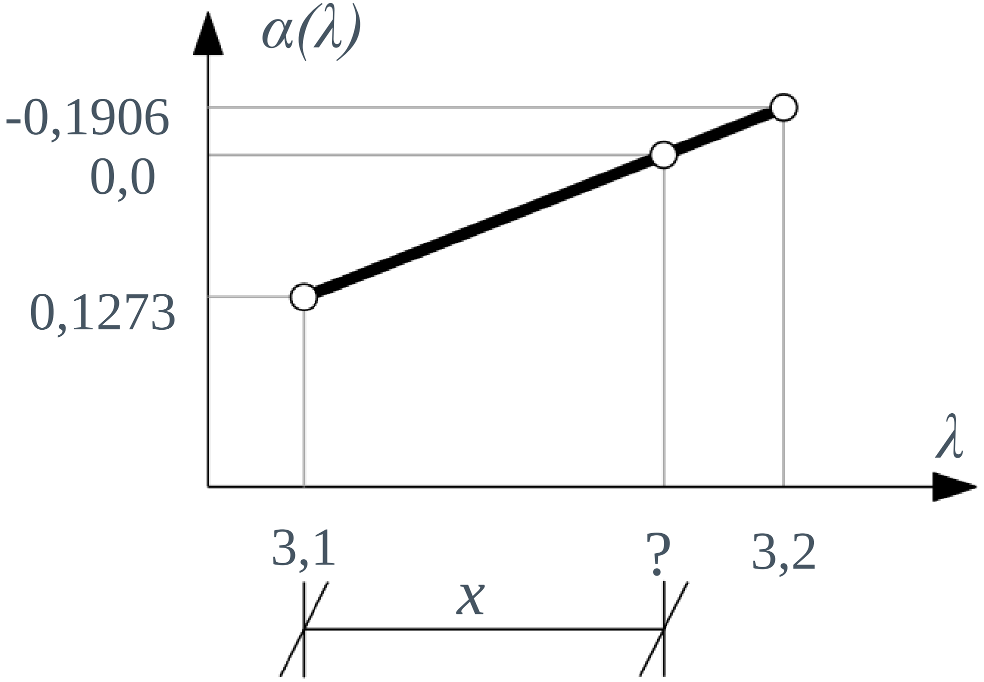
interpolacja liniowa:



Przykład 3.

Oblicz długość wyboczeniową l_w .

interpolacja liniowa:



z podobieństwa trójkątów:

$(3{,}2 - 3{,}1) / (0{,}1273 + 0{,}1906) = x / 0{,}1273$

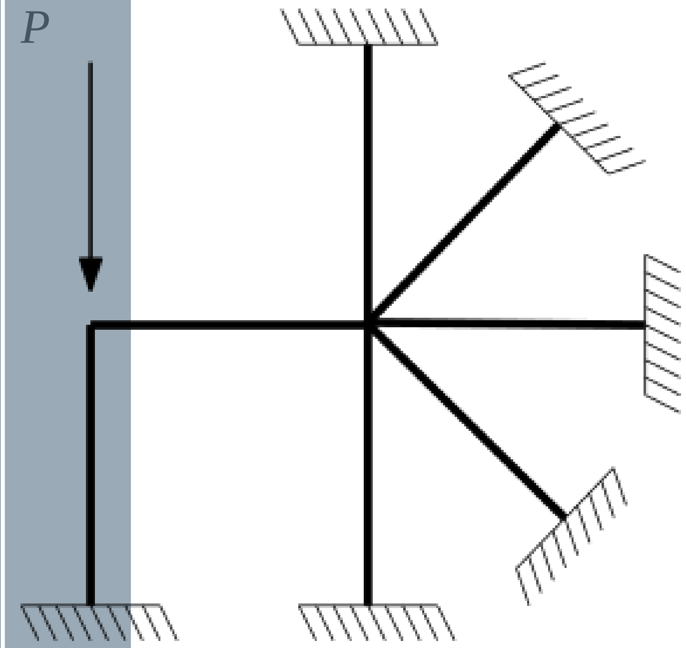
$x = 0{,}04 \quad \lambda = 3{,}14$

$$P_{kr} = \lambda^2 EI / l^2$$
$$= 9{,}86\, EI / l^2$$

$$l_w = \pi\, l / \lambda$$
$$\sim 1{,}0\, l$$

Przykład 4.

Oblicz współczynnik długości wyboczeniowej μ .

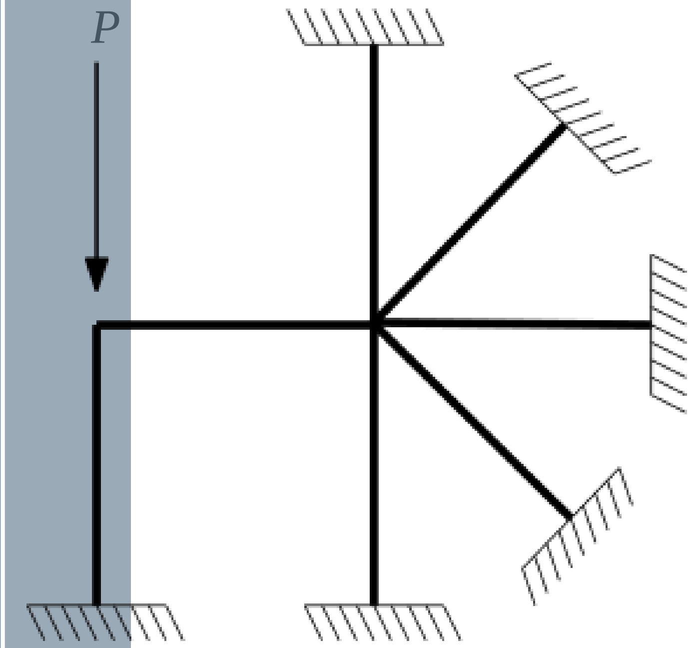


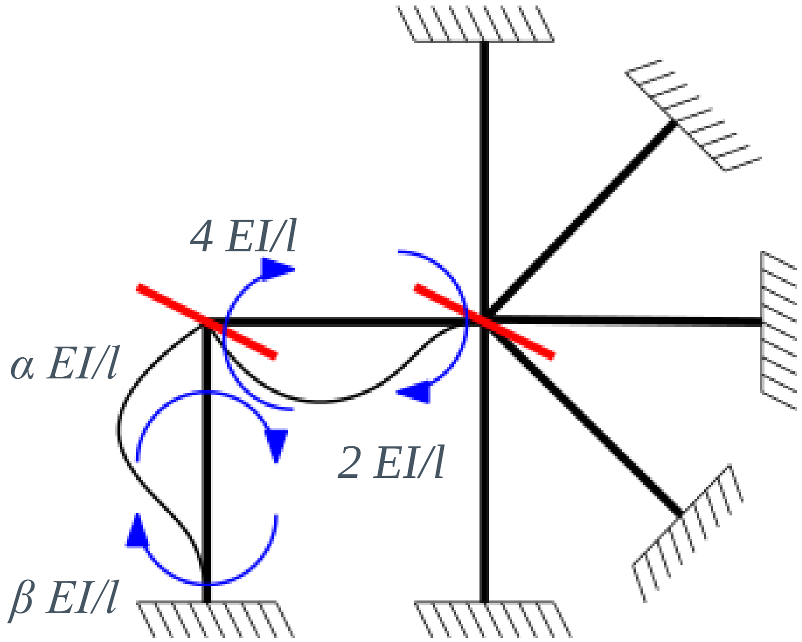
$EI = const.\ l = const.$

Przykład 4.

Oblicz współczynnik długości wyboczeniowej μ .

obrót węzła nr 1 o kąt $\varphi_1 = 1$

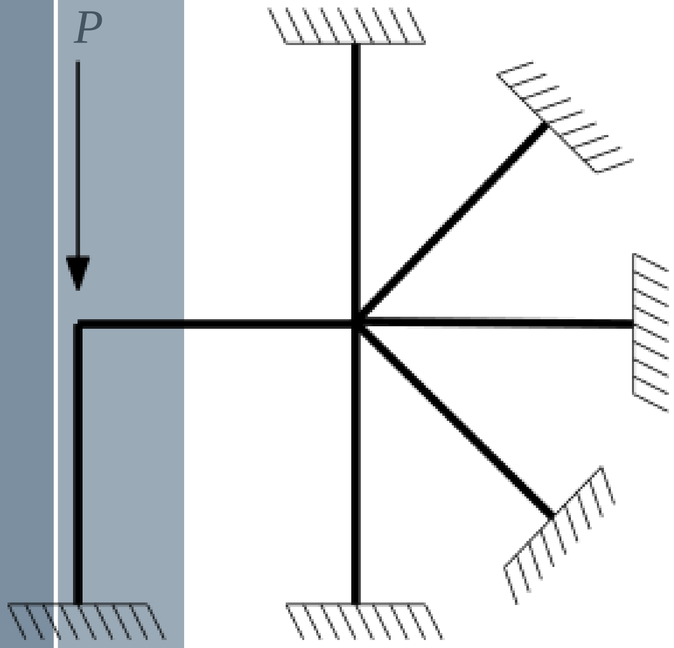




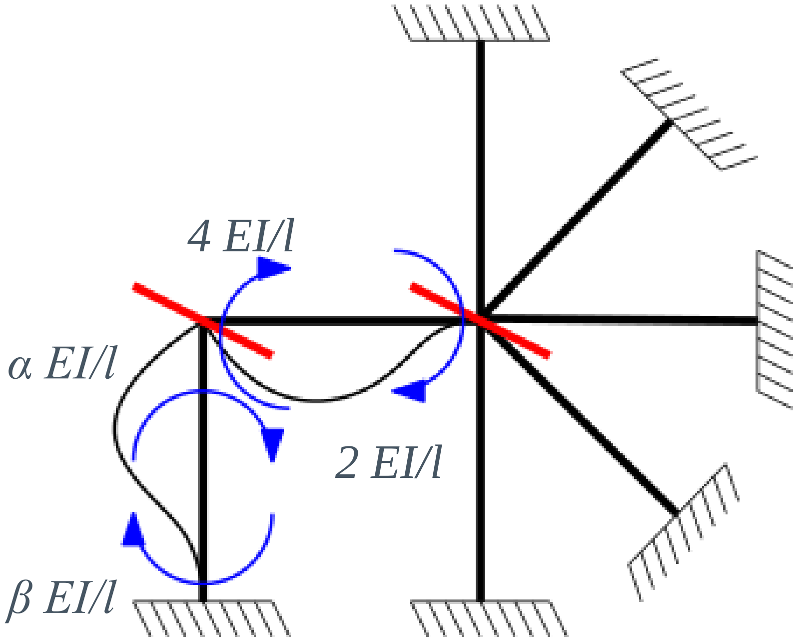
$EI = const.\ l = const.$

Przykład 4.

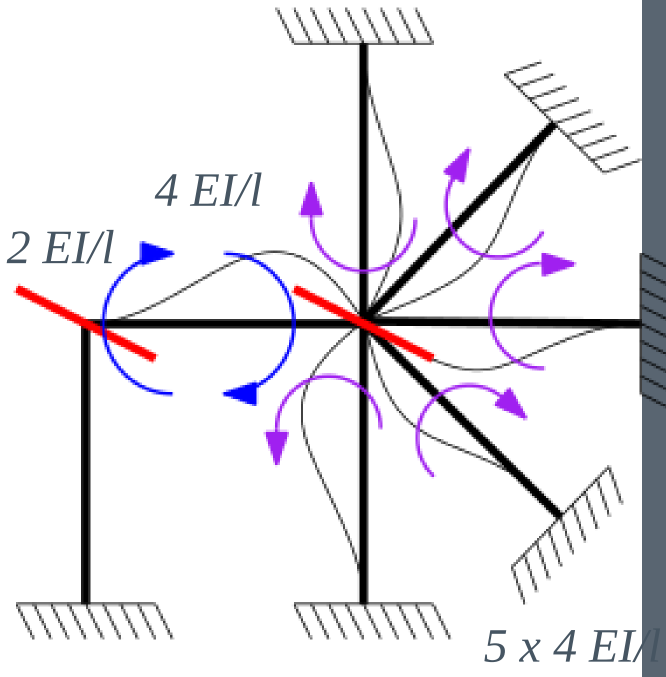
Oblicz współczynnik długości wyboczeniowej μ .



obrót węzła nr 1 o kąt $\varphi_1 = 1$



obrót węzła nr 2 o kąt $\varphi_2 = 1$



$EI = const.$ $l = const.$

Przykład 4.

Oblicz współczynnik długości wyboczeniowej μ .

$$\det \mathbf{K} = \det \begin{bmatrix} \alpha + 4 & 2 \\ 2 & 24 \end{bmatrix} EI/l = 24(\alpha + 4) - 4 = 0$$

$$\alpha = -3{,}83$$
$$\lambda = 5{,}3075$$

$$\mu = \pi / \lambda$$
$$= 0{,}5919$$