Mechanika budowli

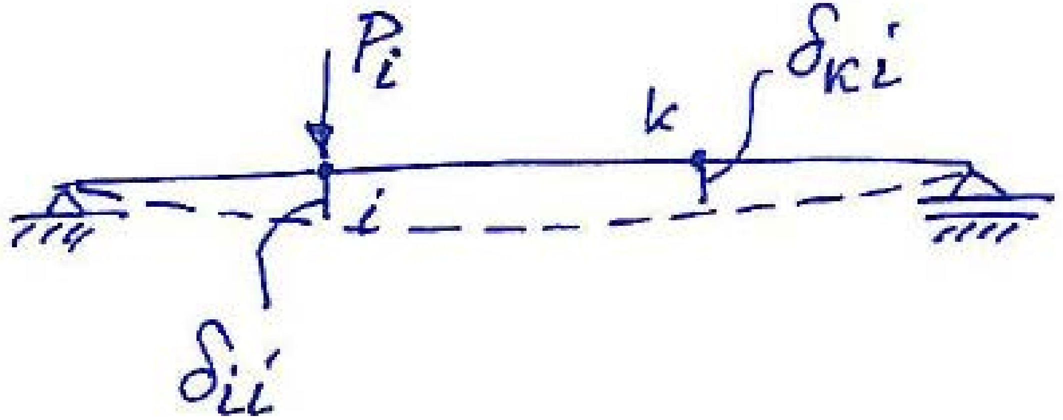
Izabela Lubowiecka
Katedra Mechaniki Budowli WILiś

Twierdzenia o wzajemności - przypomnienie

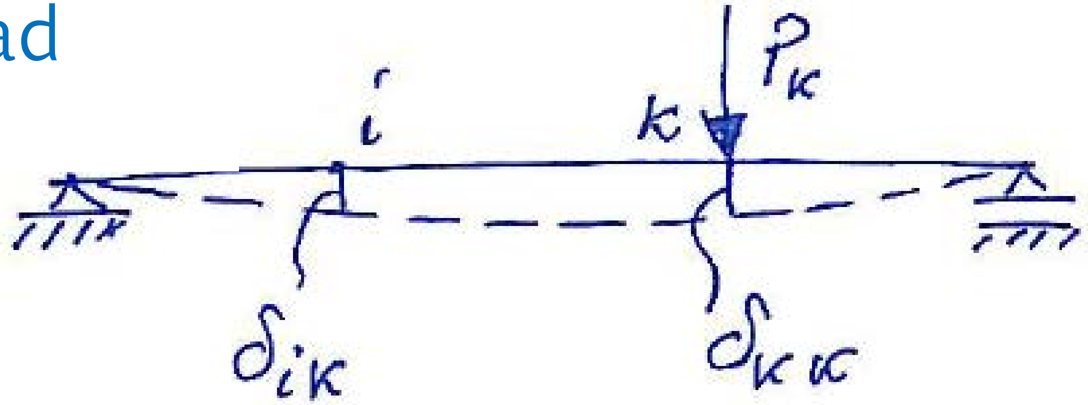
Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)

Dwa układy statyczne

I układ



II układ



δ_{ik}

przyczyna

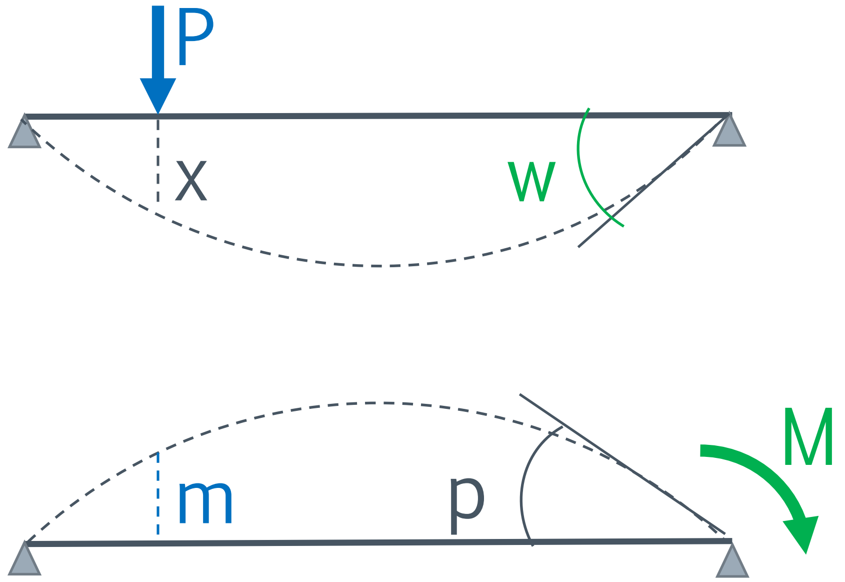
miejsce

Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)

Praca siły P_i na przemieszczeniu wywołanym siłą P_k jest równa pracy siły P_k na przemieszczeniu wywołanym siłą P_i.

$$\boxed{P_i\delta_{ik} = P_k\delta_{ki}}$$

Twierdzenie o wzajemności prac (Bettiego)
(dla sił uogólnionych – moment i siła skupiona)

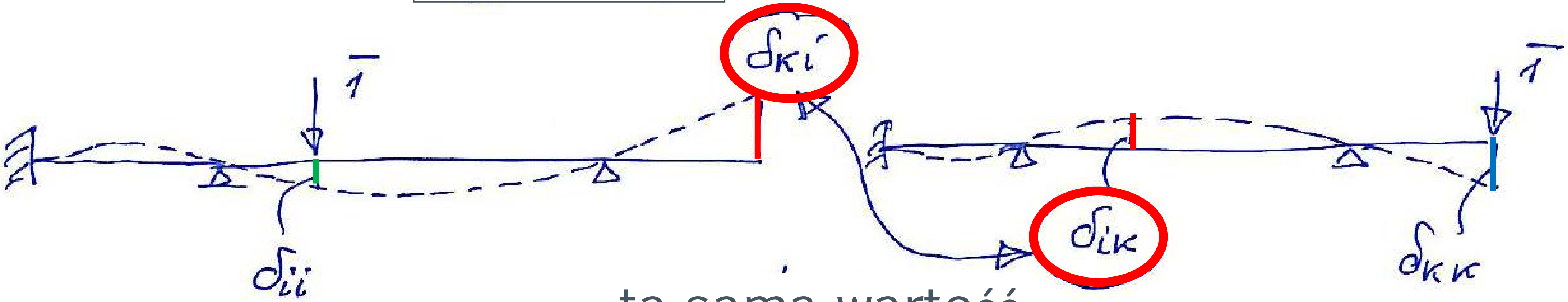


$$P^{*}m = M^{*}w$$

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń Betti-Maxwella

Jeżeli założymy we wzorze Bettiego $P_i = P_k = 1$

$$\boxed{\delta_{ik} = \delta_{ki}}$$

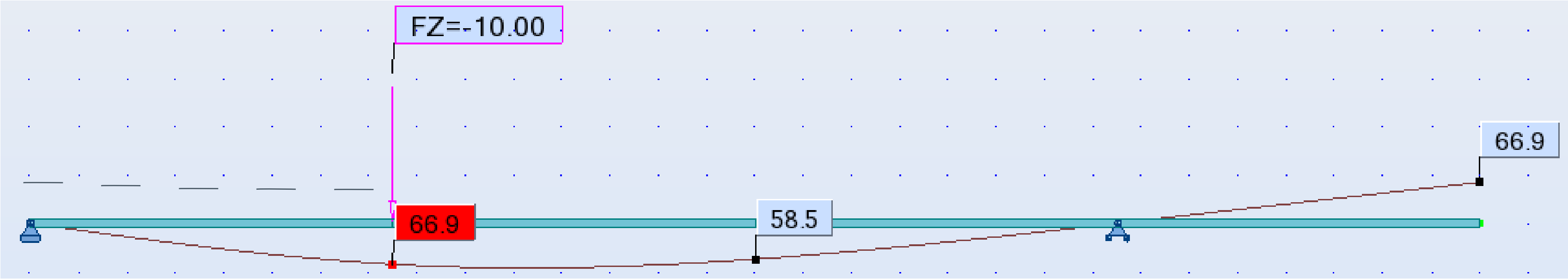


ta sama wartość
przemieszczeń

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń Betti-Maxwella

można stosować do obliczania linii wpływowych przemieszczeń

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$



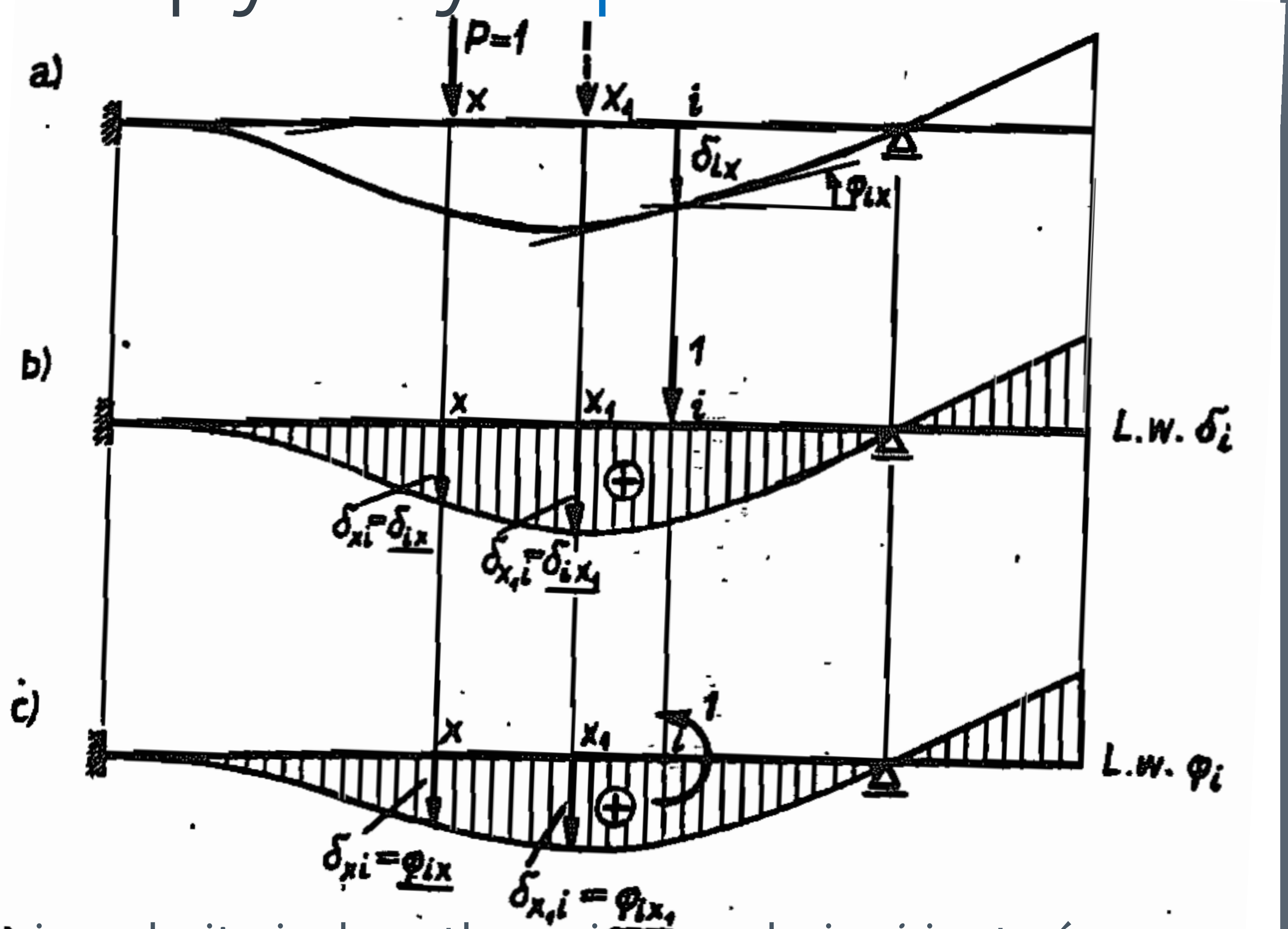
Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń

Z tw. o wzajemności przemieszczeń:

$$\delta_{xi} = \delta_{ix}$$

podobnie dla każdego położenia siły

$$\delta_{x_1 i} = \delta_{ix_1}$$



Każda rzędna linii ugięcia od siły jednostkowej w punkcie *i* jest równa ugięciu δ_i, jakie wywołuje siła znajdująca się nad tą właśnie rzędną linii ugięcia.

Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń

Każda rzędna linii ugięcia od siły jednostkowej w punkcie *i* jest równa ugięciu δ_i, jakie wywołuje siła znajdująca się nad tą właśnie rzędną linii ugięcia.

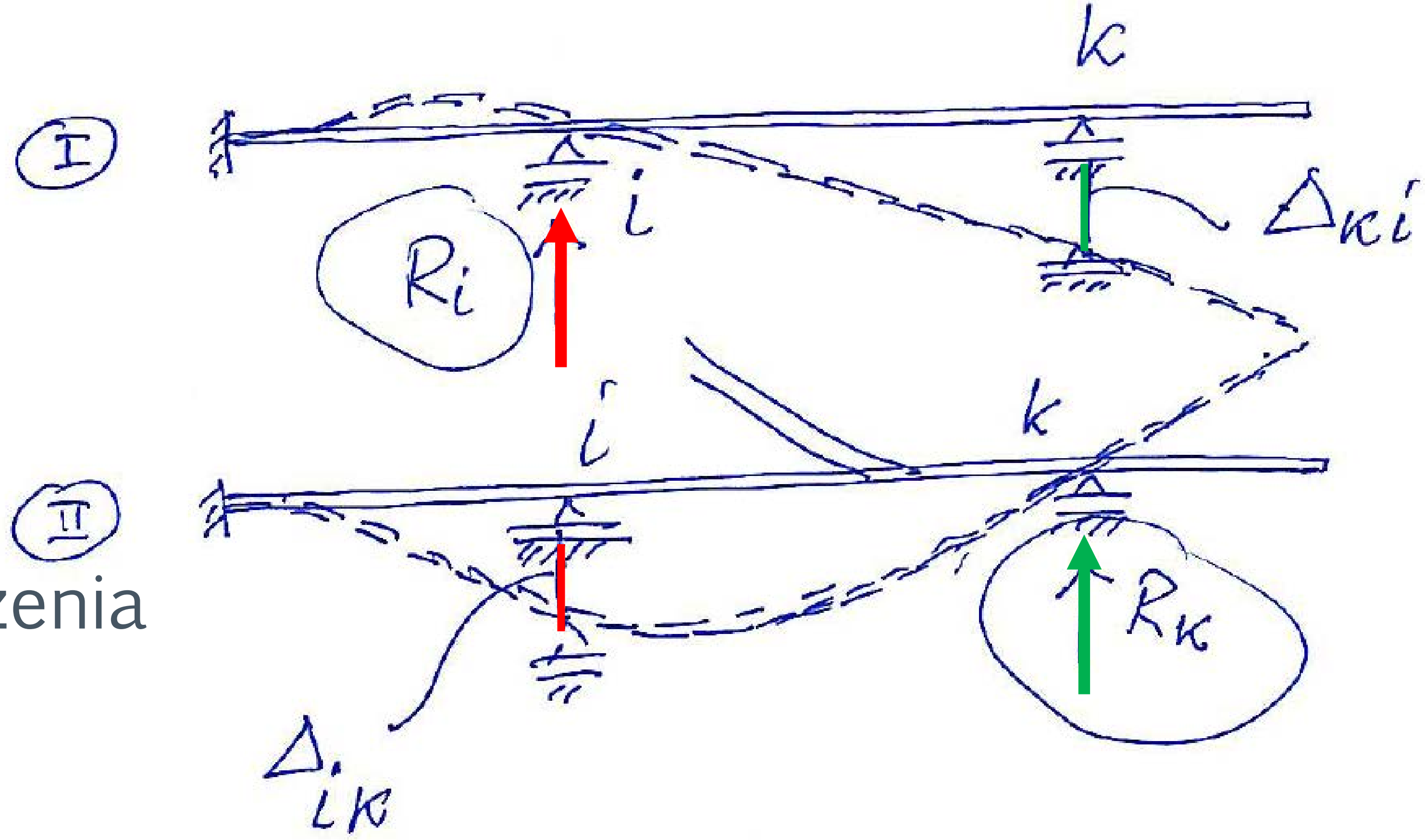
Oznacza to, że **linia ugięcia od siły jednostkowej** zaczepionej w punkcie *i* jest linią wpływu ugięcia w tym punkcie dla poruszającej się siły pionowej.

Podobnie z tw. Maxwella w postaci $\delta_{ik} = \phi_{ki}$ możemy stwierdzić, że linia wpływu kąta obrotu w punkcie *i* jest identyczna **z linią ugięcia od obciążenia momentem** jednostkowym zaczepionym w tym punkcie.

Twierdzenie o wzajemności reakcji Rayleigh'a

$$P_i \delta_{ik} = P_k \delta_{ki}$$

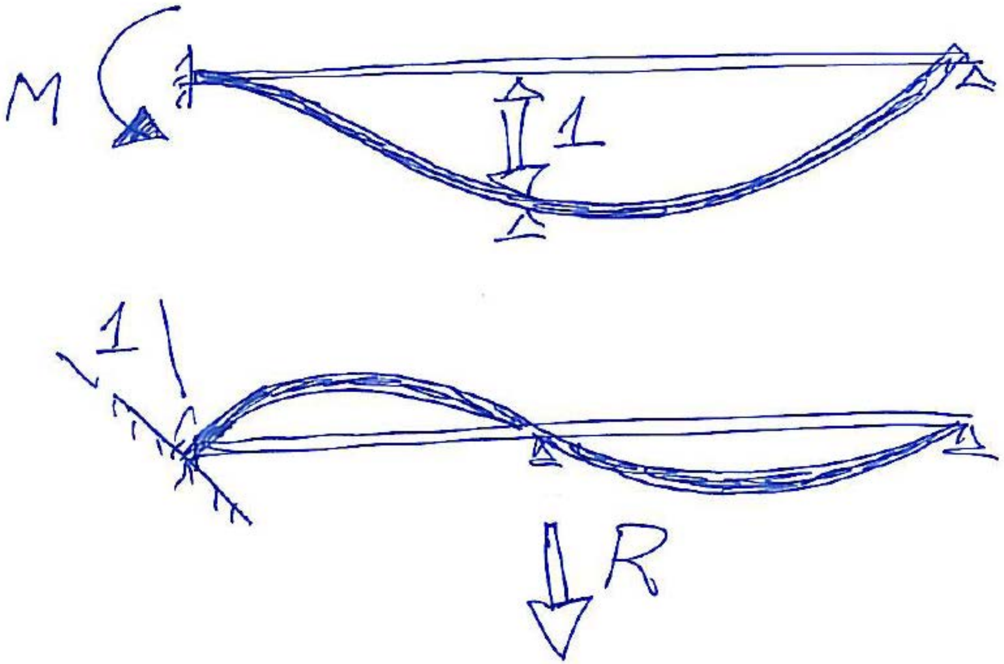
$$\underline{R_i \Delta_{ik}} = \underline{R_k \Delta_{ki}}$$



Jeżeli przemieszczenia podpór = 1, to

$$\boxed{R_i = R_k}$$

Twierdzenie o wzajemności reakcji Rayleigh'a

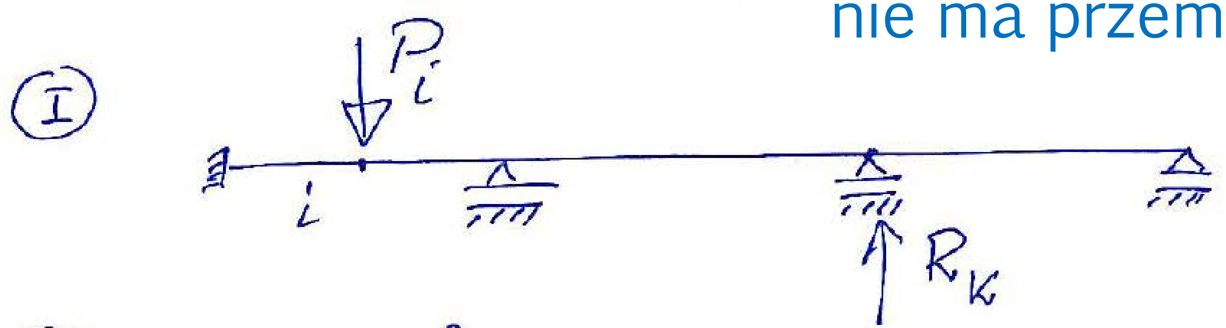


$$M = R$$

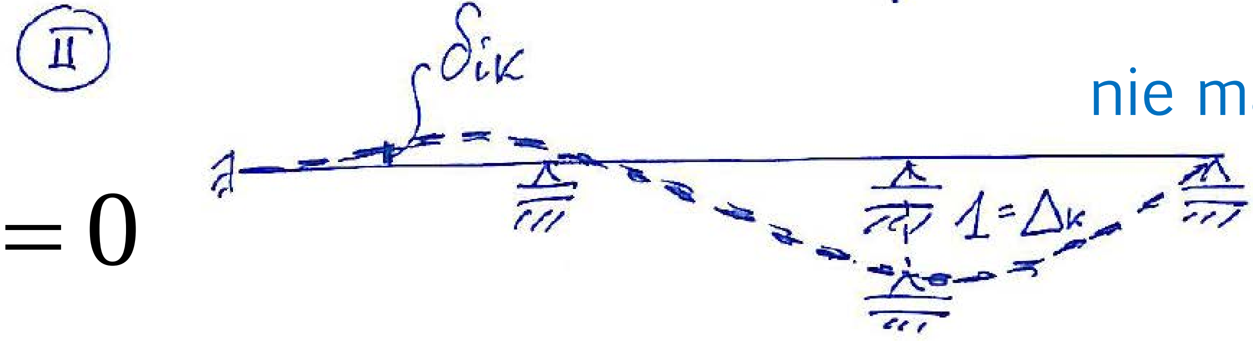
Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń Mueller'a-Breslaua

nie ma przemieszczeń podpór .

$$\sum P_i \delta_{ik} = 0,$$



nie ma sił



$$P_i \delta_{ik} + R_k \Delta_k = 0$$

$$\boxed{R_k = -\delta_{ik}}$$

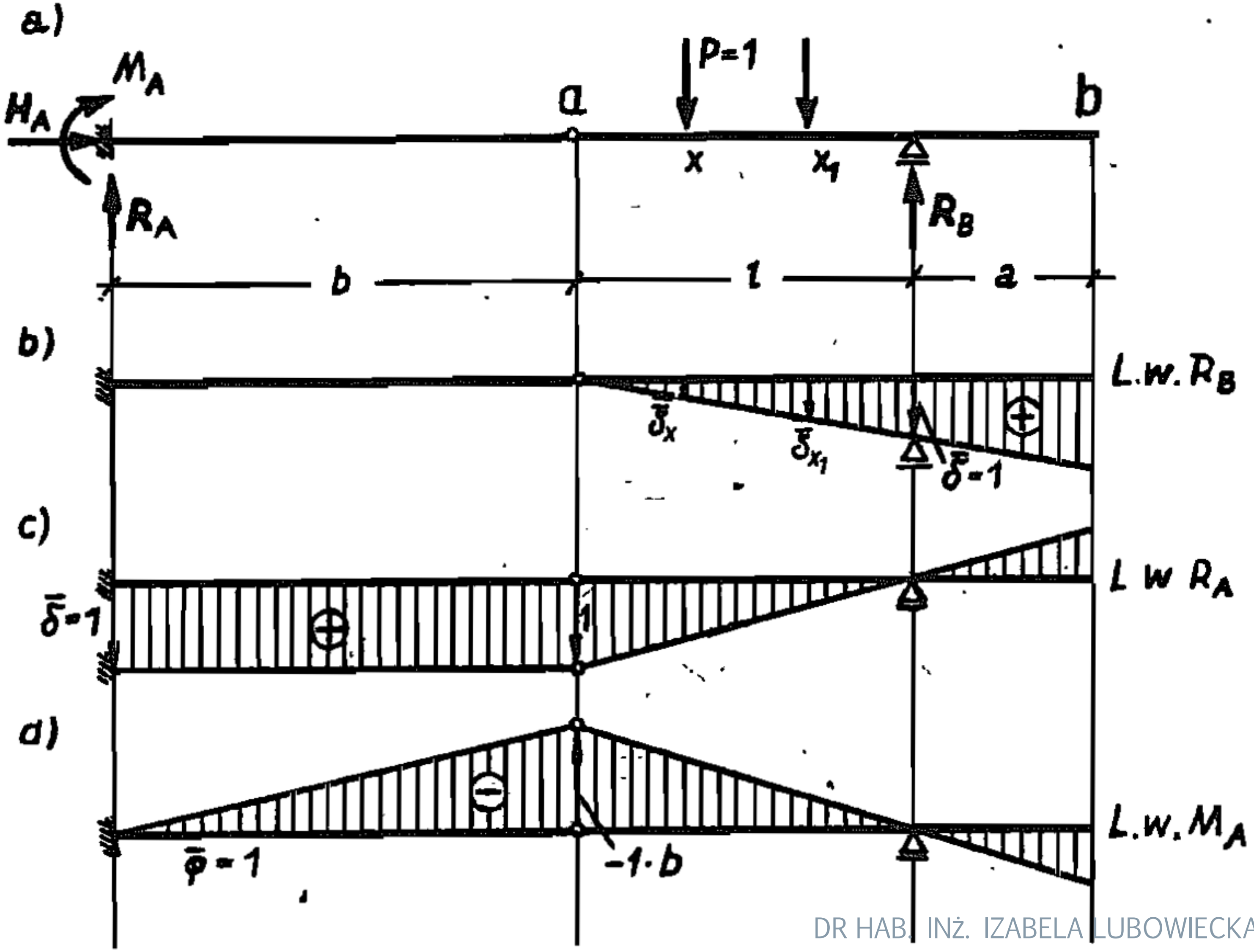
Można stosować do wyznaczania linii wpływowych (działa gdy P = 1 i Δ = 1)

Linie wpływowe sił – metoda kinematyczna

Linię wpływu dowolnej wielkości statycznej można traktować jako linię ugięcia wywołaną jednostkowym przemieszczeniem (uogólnionym) punktu zaczepienia tej wielkości statycznej skierowanym przeciwnie do jej dodatniego zwrotu.

Rzędne linii wpływu są dodatnie, jeżeli przedstawiają przemieszczenia skierowane zgodnie ze zwrotem działania siły jednostkowej.

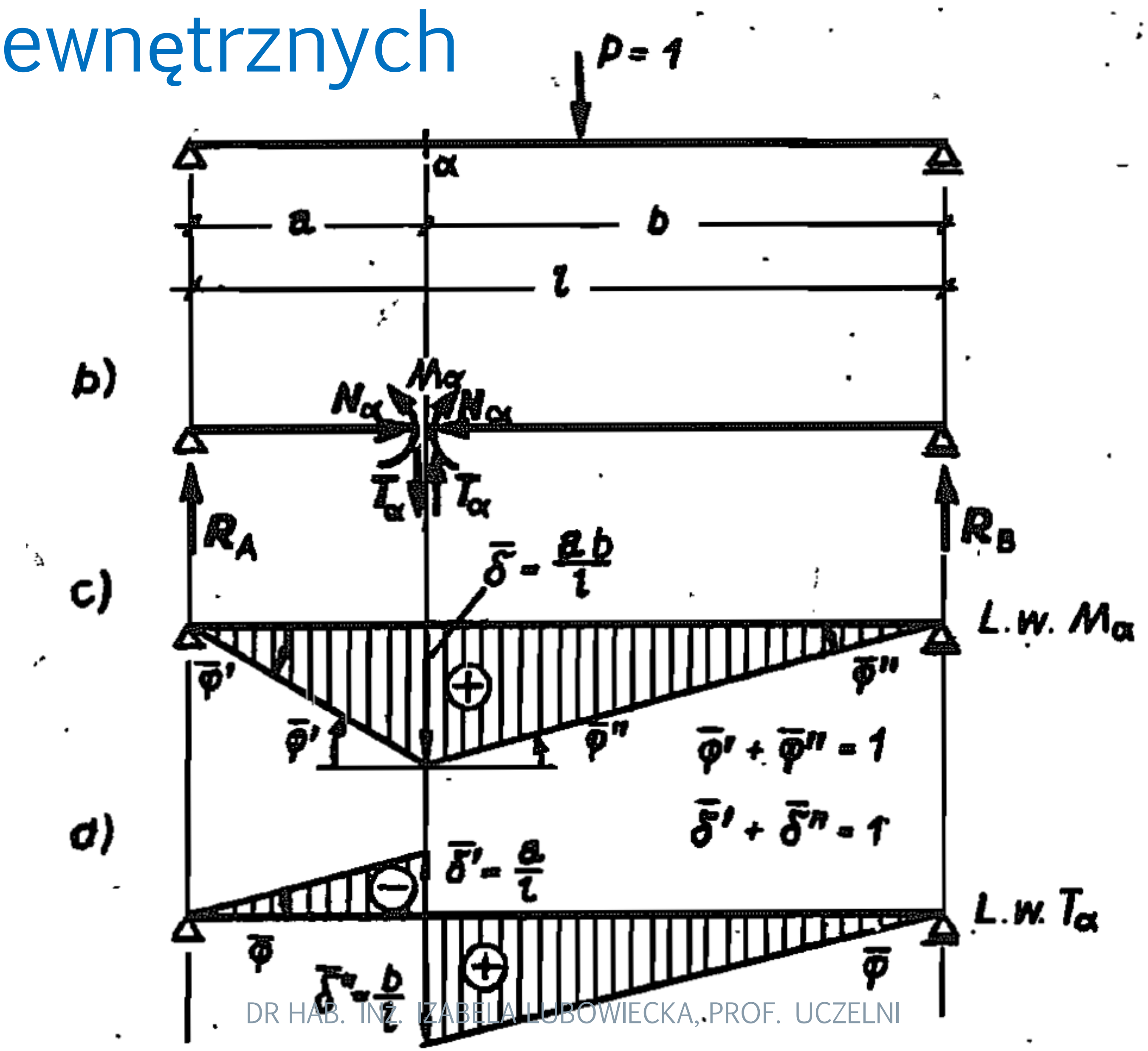
Wyznaczanie linii wpływowych reakcji – układy wyznaczalne



$$R_k = -\delta_{ik}$$

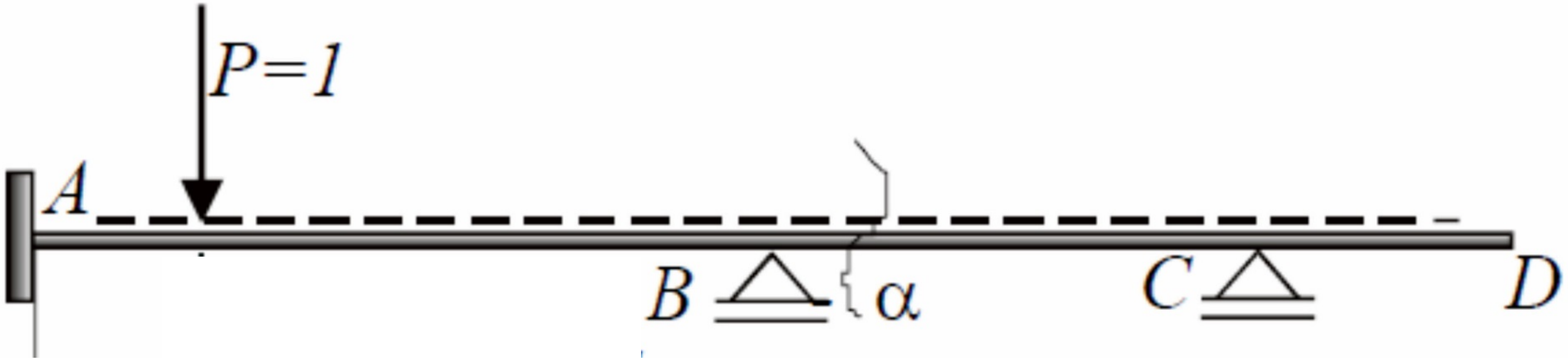
Wyznaczanie linii wpływowych sił wewnętrznych

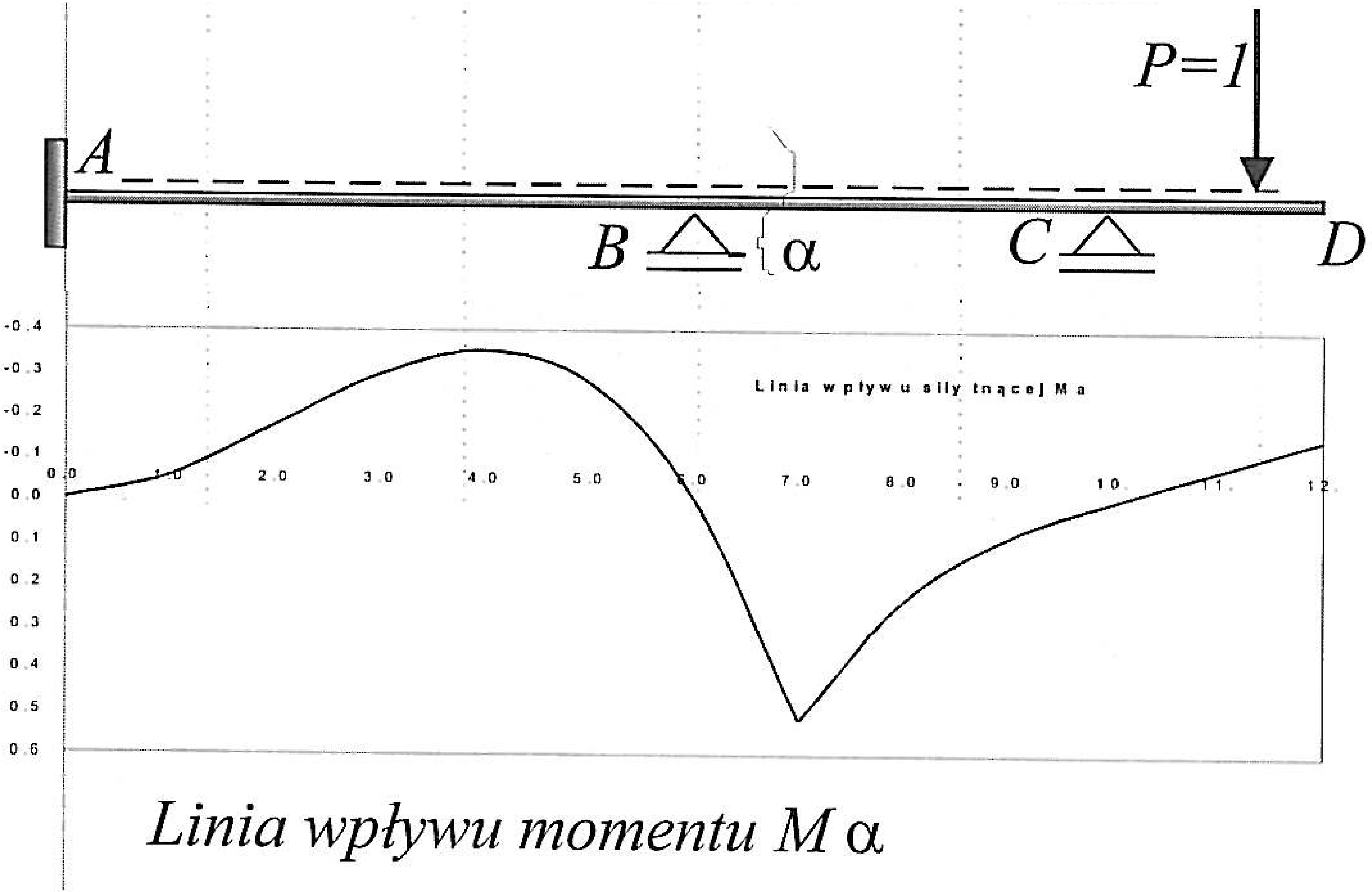
$$R_k = -\delta_{ik}$$



Wyznaczanie linii wpływowych w układach statycznie niewyznaczalnych

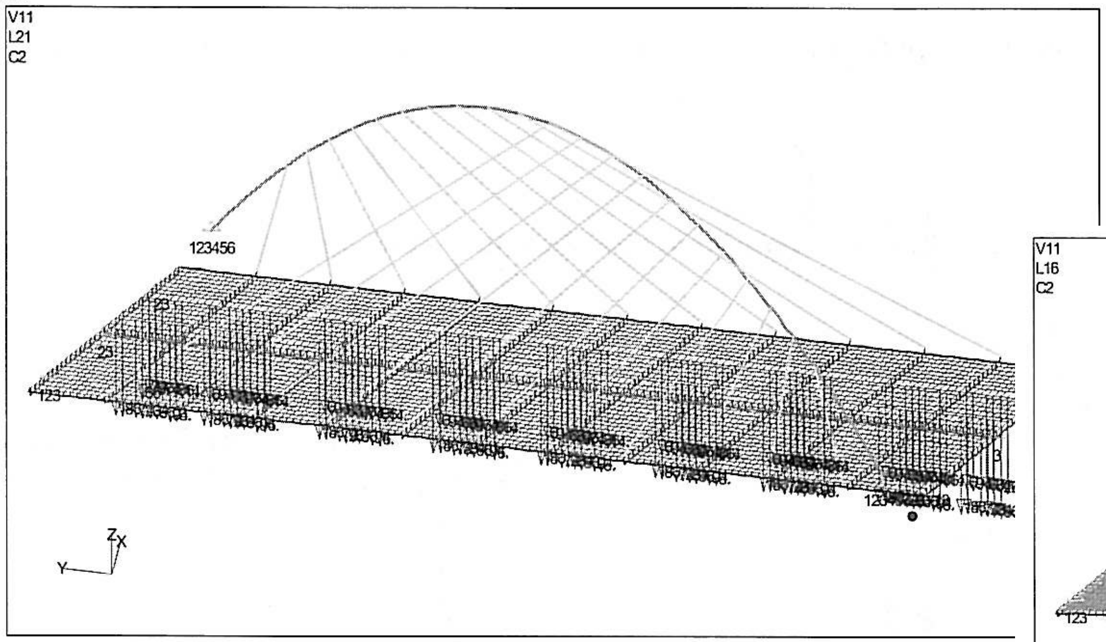
Linią wpływu pewnej wielkości statycznej Z (reakcja, moment zginający, siła tnąca, siła normalna) nazywamy wykres przedstawiający zależność pomiędzy wartością Z a położeniem poruszającej się po układzie siły jednostkowej o określonym kierunku.

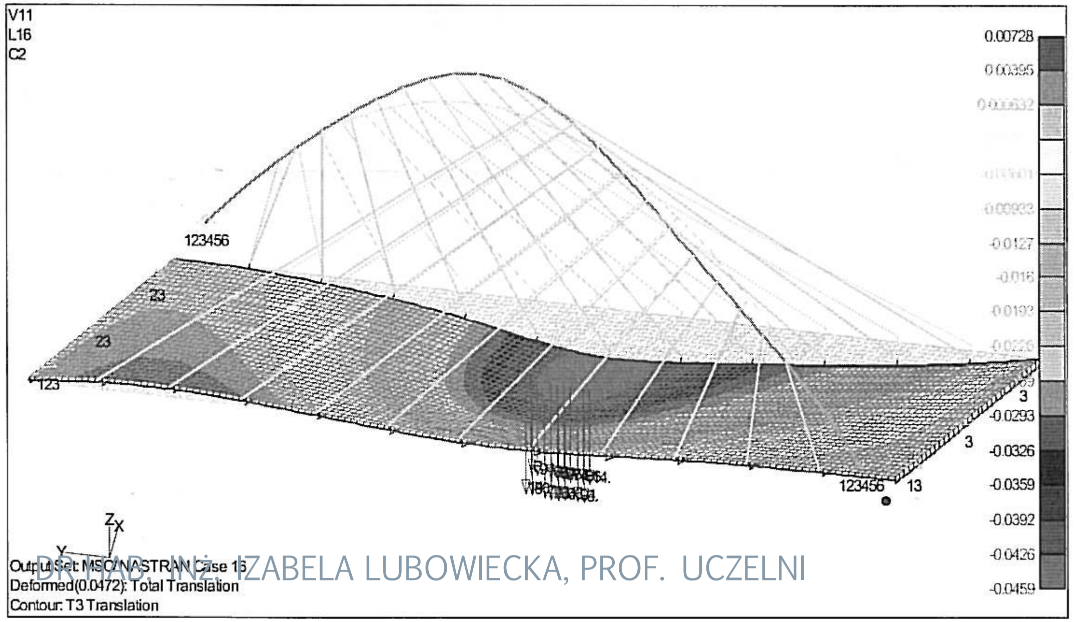




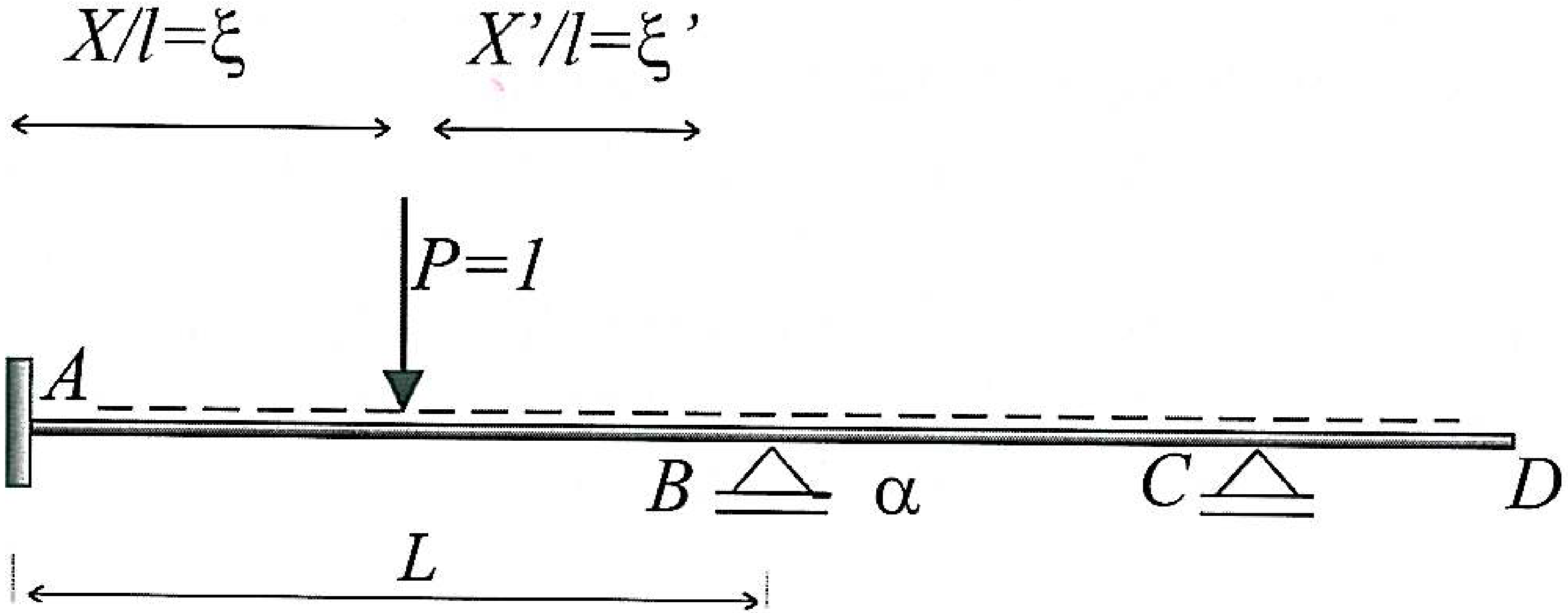
Linia wpływu momentu M α

Linie wpływu mają zastosowanie do ustalania najbardziej niekorzystnych dla konstrukcji położeń obciążeń zmiennych takich jak na przykład obciążenie pojazdem, obciążenie tłumem ludzi, obciążenie zmienne użytkowe. Projektant powinien tak zaplanować ustawienie obciążenia zmiennego aby wynikające z niego siły i przemieszczenia były maksymalne. Bez znajomości linii wpływu trudno jest to określić.



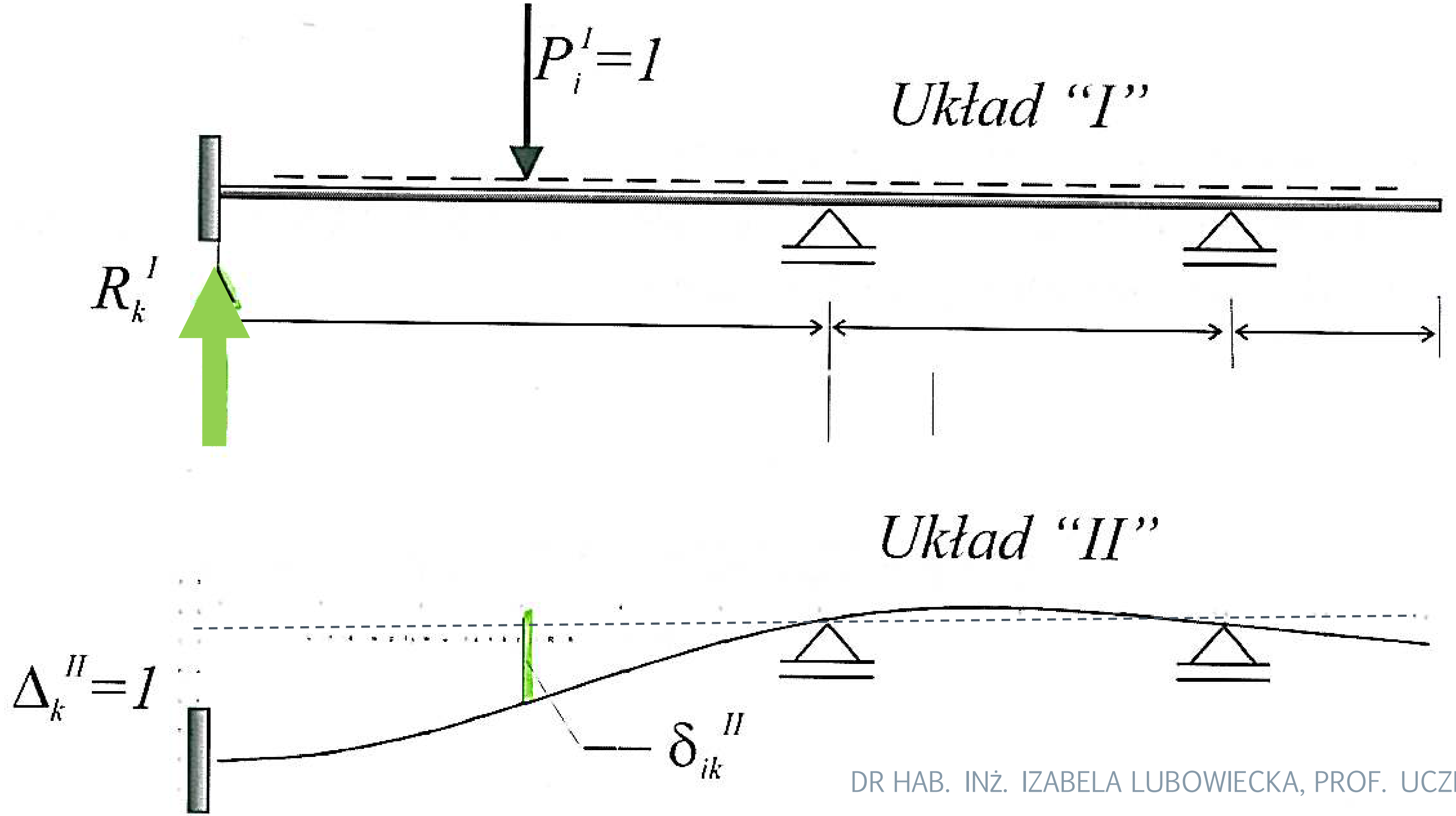


- Linie wpływu można wyznaczać wprost z definicji. W tym celu należy wyrazić wielkości statyczne w funkcji położenia siły jednostkowej (x, x').



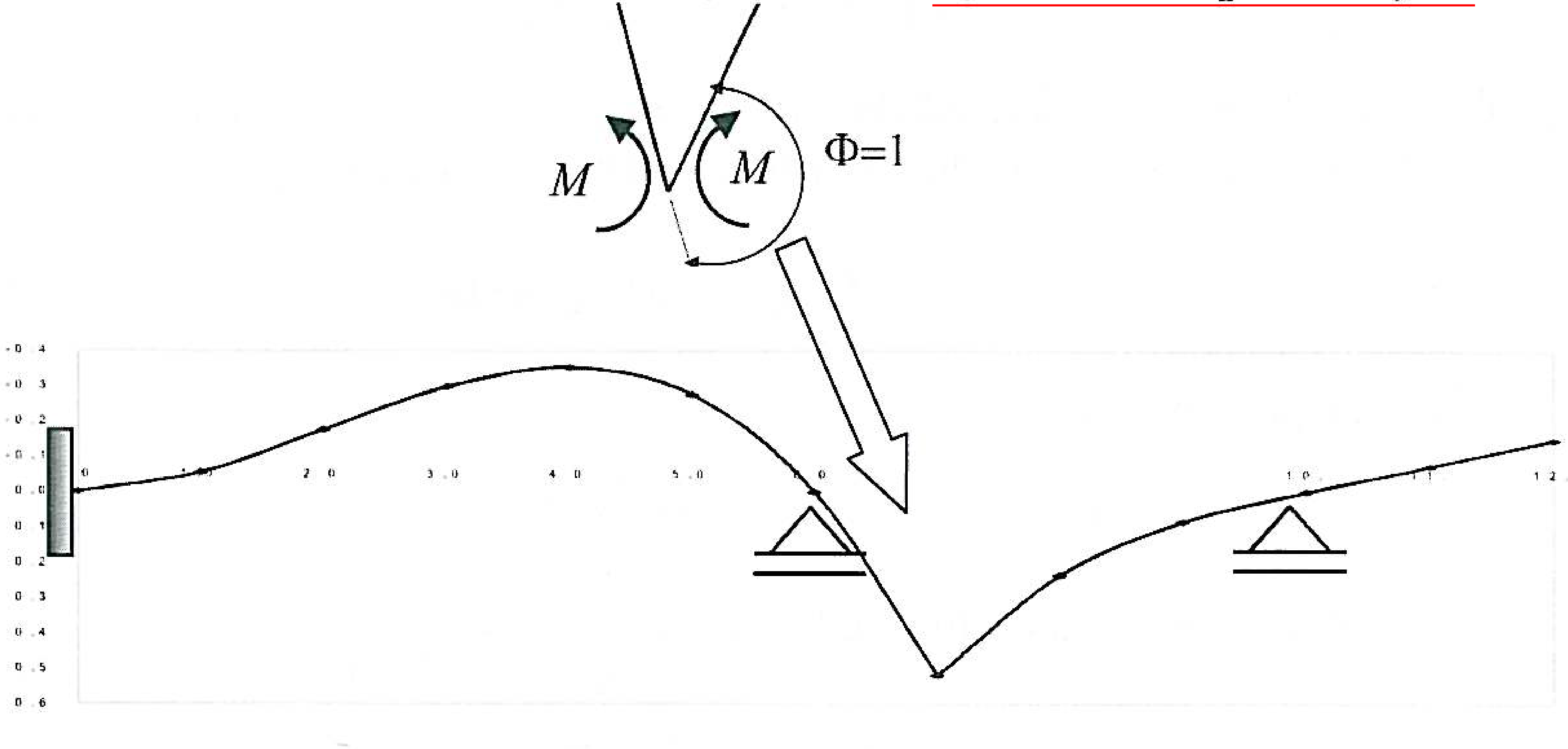
- Drugi sposób wyznaczania linii wpływu sił wewnętrznych lub reakcji polega na wykorzystaniu twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczeń.

Reakcja na podporze *k* od obciążenia jednostkowego w punkcje *i* jest równa liczbowo przemieszczeniu punktu *i* (w kierunku tego obciążenia) wywołanemu jednostkowym przemieszczeniem podpory *k* przeciwnie do zwrotu reakcji. (zasada Mullera-Breslau'a).



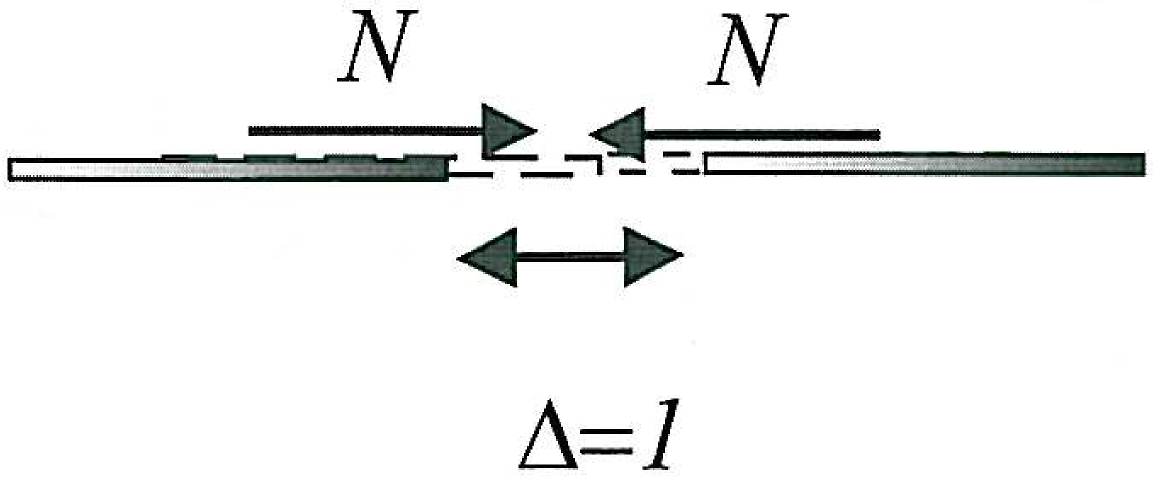
- Wyznaczanie linii wpływu **momentu zginającego**:

W celu wyznaczenia linii wpływu momentu zginającego wprowadzamy jednostkowe wymuszenie kinematyczne na kącie obrotu przekrojów.



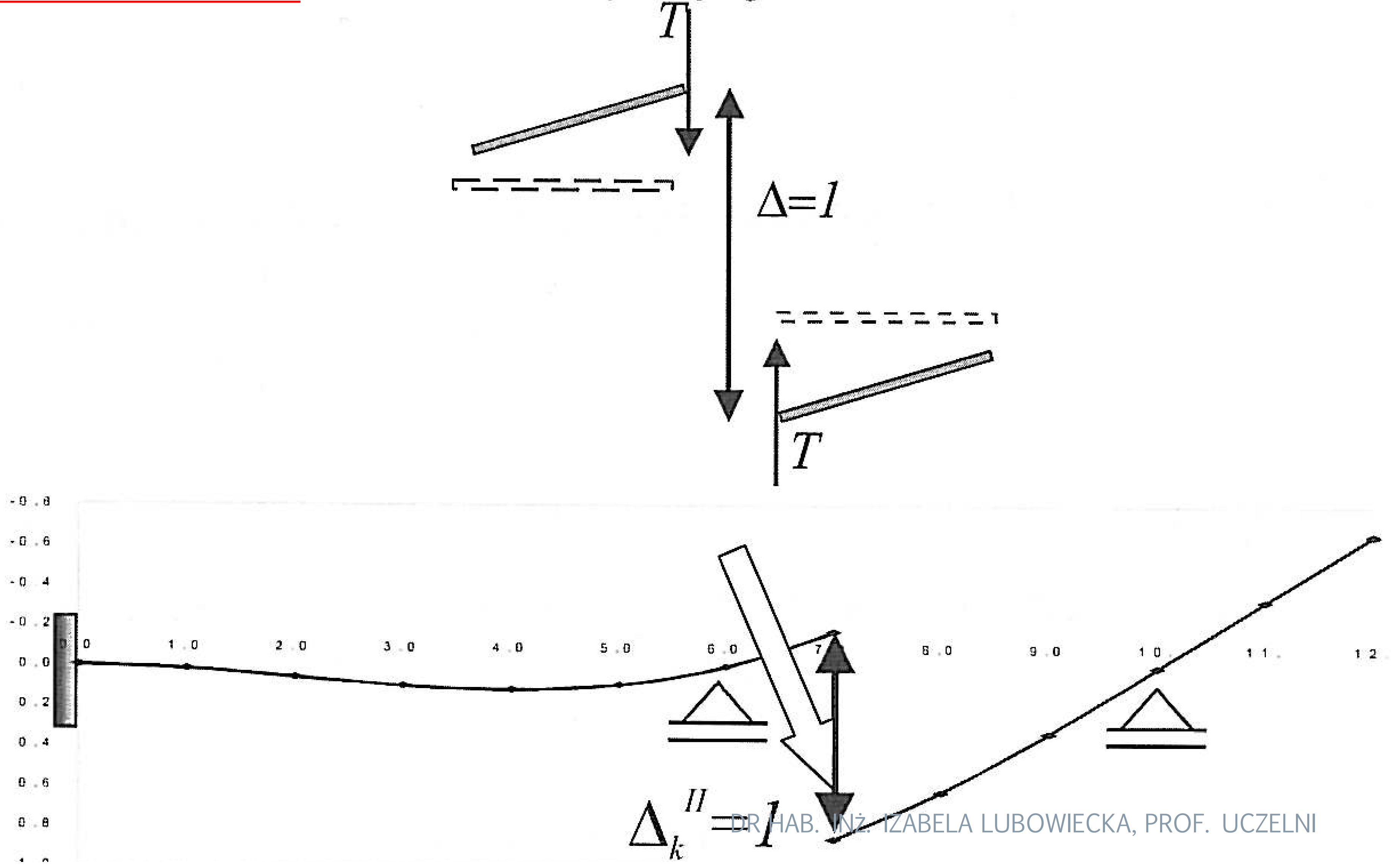
- Linia wpływu **siły normalnej**

W celu wyznaczenia linii wpływu siły normalnej wprowadzamy jednostkowe rozsunięcie przekrojów.



- Wyznaczanie linii wpływu **siły tnącej:**

Wprowadzamy wymuszenie kinematyczne w postaci rozsunięcia przekrojów pręta w kierunku siły tnącej.



- Linia wpływu **reakcji**: przesunięcie podpory o 1 przeciwnie skierowane do zwrotu reakcji.
- Linia wpływu **momentu podporowego** : obrót podpory o kąt jednostkowy przeciwnie skierowany do działającego momentu.

Własności linii wpływu:

- Tam gdzie kierunek przemieszczenia powstałego przy wymuszeniu kinematycznym jest zgodny z kierunkiem działania siły jednostkowej znak linii wpływu jest dodatni.
- W układzie statycznie niewyznaczalnym linie wpływu są liniami gładkimi (nie mają załamań i nieciągłości) za wyjątkiem przekroju w którym nastąpiło wymuszenie oraz przegubów.
- W obrębie wspornika linia wpływu jest linią prostą

- W układach statycznie wyznaczalnych również można wyznaczać linię wpływu w sposób kinematyczny. W układach statycznie wyznaczalnych linia wpływu jest linią prostą lub składa się z linii prostych.
- Przy podporach kształt linii wpływu jest zgodny z warunkami brzegowymi (na przykład w utwierdzeniu styczna pozioma)

Wyznaczanie linii wpływowych w układach statycznie niewyznaczalnych – z definicji

Linie wpływowe wielkości statycznych w układzie statycznie niewyznaczalnym można wyznaczyć jeżeli znane są linie wpływowe nadliczbowych: X1, X2, X3..., Xn.

$$\delta_{11} X_1 = -\delta_{10} \quad \rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} \quad \rightarrow \quad X_1 = -\beta_{11}\delta_{10}$$

$$\delta_{10} = \int_l \frac{M_1 M_0}{EJ} ds \quad \delta_{11} = \int_l \frac{M_1^2}{EJ} ds$$

Wróćmy do równania metody sił

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\delta_{10}$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\delta_{20}$$

$$[\delta][X] = -[\delta_0]$$
$$[X] = -[\delta]^{-1}[\delta_0]$$

1) Wyznaczamy współczynniki stojące przy niewiadomych $[\delta]$

2) Szukamy macierzy odwrotnej $$[\beta] = [\delta]^{-1}$$

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=-\delta_{10}$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=-\delta_{20}$$

$$X_1=-\beta_{11}\delta_{10}-\beta_{12}\delta_{20}$$
$$X_2=-\beta_{21}\delta_{10}-\beta_{22}\delta_{20}$$

$$[X]=-[\delta]^{-1}[\delta_0]$$
$$[\beta]=[\delta]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}$$

3) Wyznaczamy wielkości δ_{10}, δ_{20}

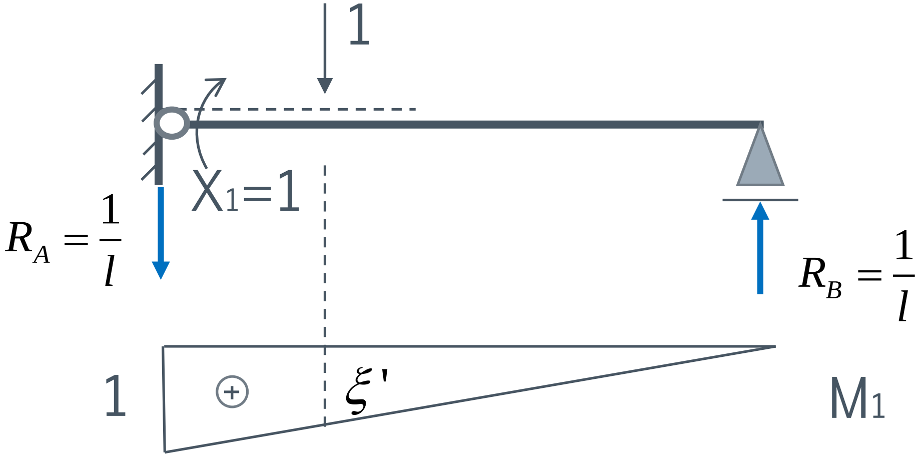
4) Wyznaczamy wielkości nadliczbowe X1, X2

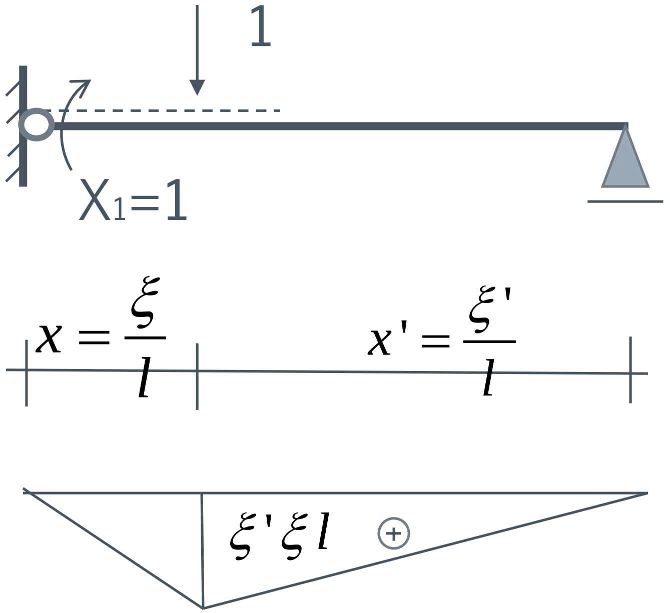
5) Wyznaczamy równanie linii wpływowej szukanej wielkości z uogólnionych zależności superpozycji

$$R = R^{0} + X_{1}R_{1} + X_{2}R_{2}$$

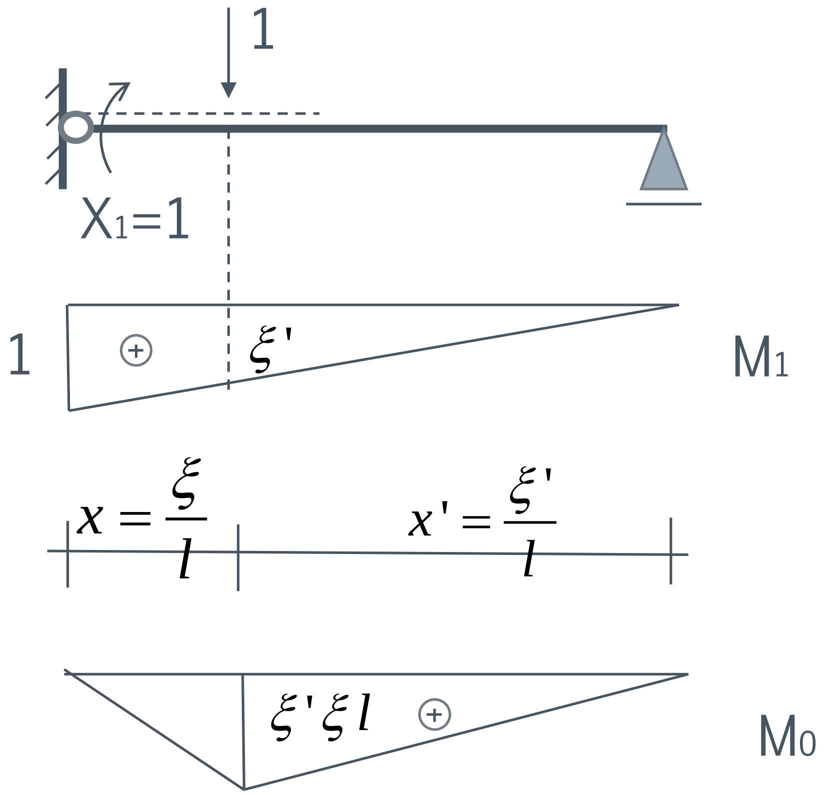
Przykład

$$\delta_{11}, \delta_{10} = ?$$





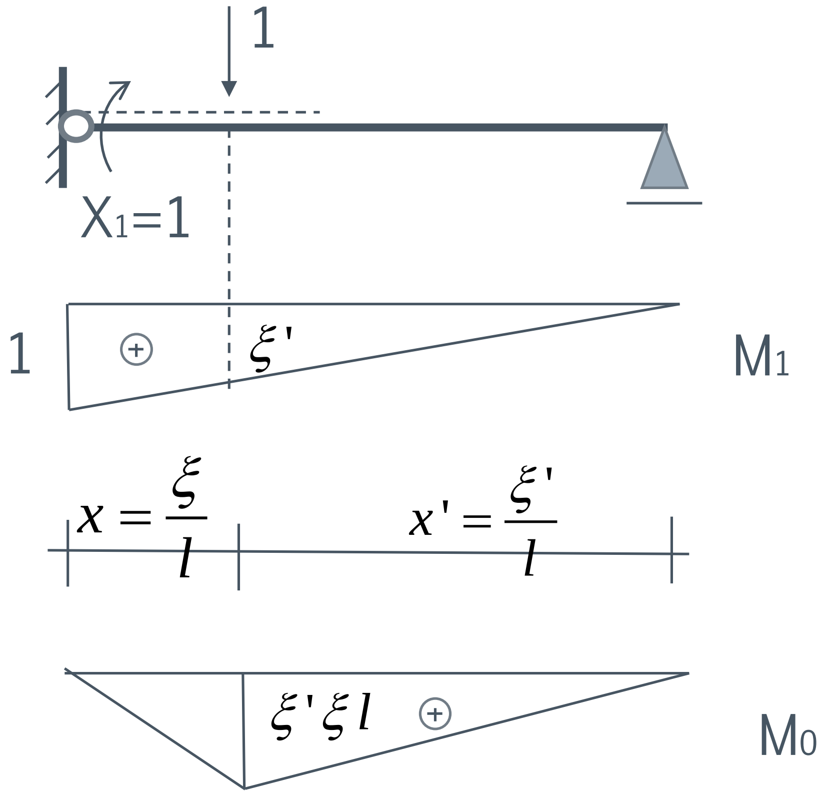
$$\xi = \frac{x}{l}$$



$$\xi = \frac{x}{l}$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}1l\frac{2}{3}1 = \frac{l}{3EI}$$

$$\beta_{11} = \frac{3EI}{l}$$



$$\xi=\frac{x}{l}$$

$$\delta_{10}=\int_l \frac{M_1 M_0}{EI}ds=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\xi' l\xi\xi' l\frac{2}{3}\xi'+\frac{1}{2}\xi l\xi\xi' l\xi'+\frac{1}{2}\xi\xi' l\xi l\frac{1}{3}(1-\xi')\right)=$$

$$\delta_{10} = \int\limits_l \frac{M_1 M_0}{EI} ds = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\xi' l \xi \xi' l \frac{2}{3}\xi' + \frac{1}{2}\xi l \xi \xi' l \xi' + \frac{1}{2}\xi \xi' l \xi l \frac{1}{3}(1-\xi')\right) =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{l^2}{3}\xi'^3 \xi + \frac{l^2}{2}\xi'^2 \xi^2 + \frac{l^2}{6}\xi^2 \xi' - \frac{l^2}{6}\xi^2 \xi'^2\right) =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{l^2}{3}\xi'^3 \xi + \frac{l^2}{3}\xi'^2 \xi^2 + \frac{l^2}{6}\xi^2 \xi'\right) =$$

$$= \frac{l^2}{6EI}\left(2\xi'^3 \xi + 2\xi'^2 \xi^2 + \xi^2 \xi'\right)$$

$$= \frac{l^2}{6EI}\left(2\xi'^3\xi + 2\xi'^2\xi^2 + \xi^2\xi'\right) = \ldots$$

$$\xi' = 1 - \xi$$

$$0 \le \xi \le 1$$

$$\ldots = \frac{l^2}{6EI}\xi(1-\xi)\left(2(1-\xi)^2 + 2(1-\xi)(1-\xi) + \xi\right) =$$

$$= \frac{l^2}{6EI}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$

$$\delta_{10} = \frac{l^2}{6EI}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_1^2}{EI}ds = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}1l\frac{2}{3}1 = \frac{l}{3EI}$$

$$\beta_{11} = \frac{3EI}{l}$$

$$X_1 = -\beta_{11}\delta_{10} = \frac{3EI}{l}\frac{l^2}{6EI}\xi(1-\xi)(2-\xi) =$$

$$= -\frac{l}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$

$$X_1 = -\frac{l}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$

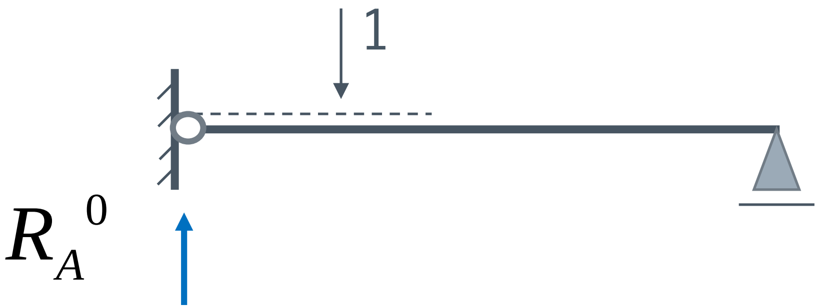
$$R_A = R_A{}^0 + X_1 R_{A1} =$$

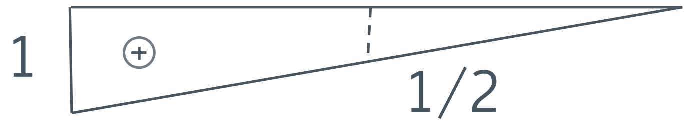
$$= R_A{}^0 + \left(-\frac{l}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)\right)\frac{1}{l}$$

$$\boxed{R_A = R_A{}^0 - \frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)}$$

$$M_A = M_A{}^0 + X_1 M_{A1} =$$

$$\boxed{M_A = 0 - \frac{l}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)}$$

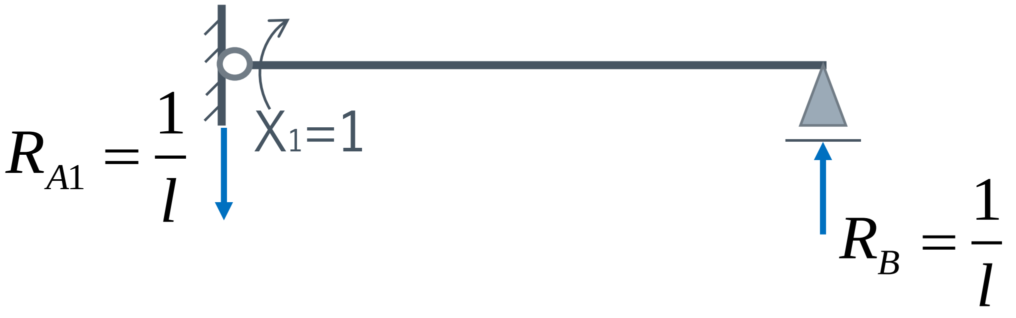


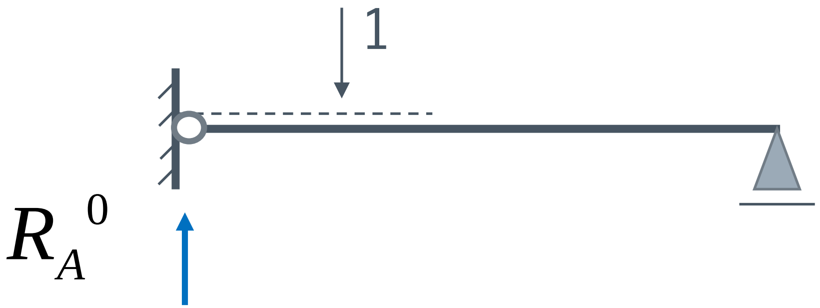


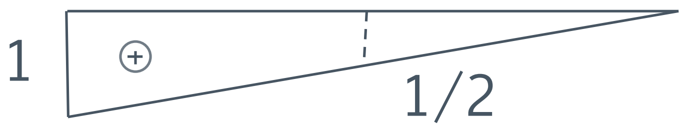
$$R_A = R_A{}^0 - \frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$

ξ	0	0.5	1
Lw RA	1	$\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$	0
Lw MA	0	$-\frac{3}{16}$	0

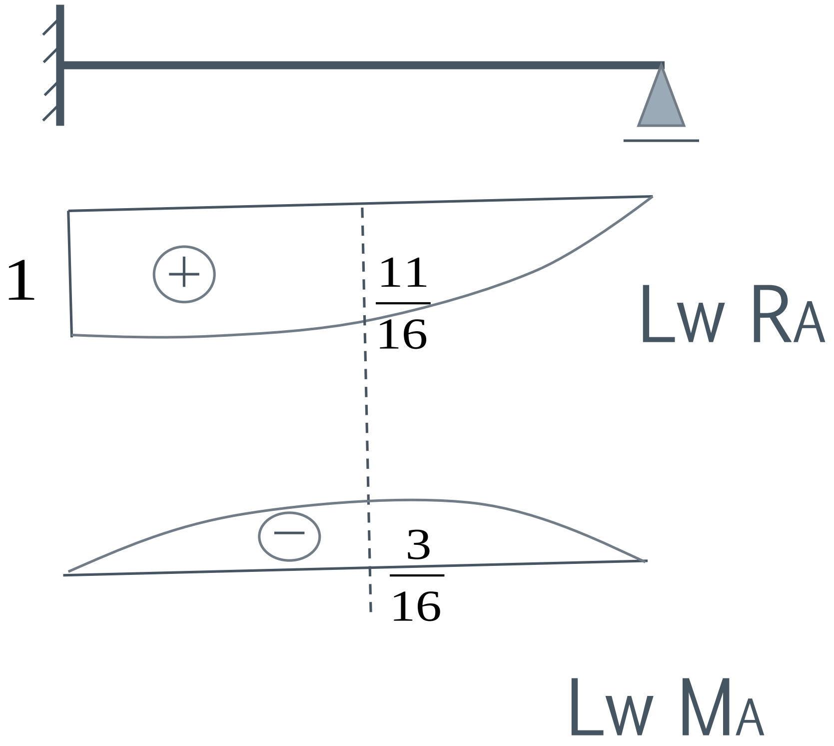
$$M_A = 0 - \frac{l}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)$$





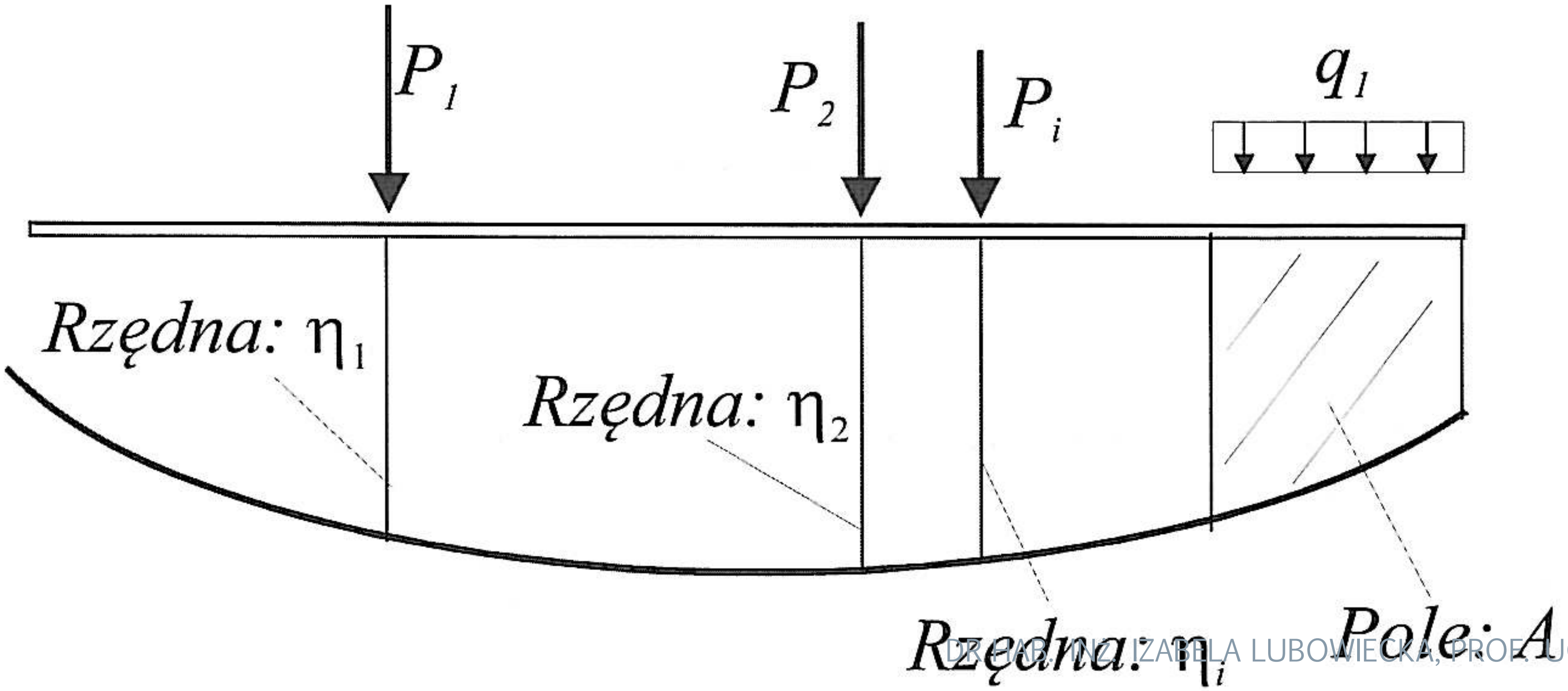


ξ	0	0.5	1
Lw RA	1	$\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$	0
Lw MA	0	$-\frac{3}{16}$	0



Obciążanie linii wpływowych

Linia wpływu danej wielkości statycznej Z przedstawia wartość tej wielkości w zależności od położenia jednostkowej siły poruszającej się po konstrukcji. Jeżeli na konstrukcję działają inne obciążenia to linia wpływu może być wykorzystana do wyznaczenia danej wielkości statycznej Z od tych obciążeń.



Jeżeli na układ działają siły skupione P, i obciążenie ciągłe q to wielkość statyczną Z możemy wyznaczyć z następującego wzoru:

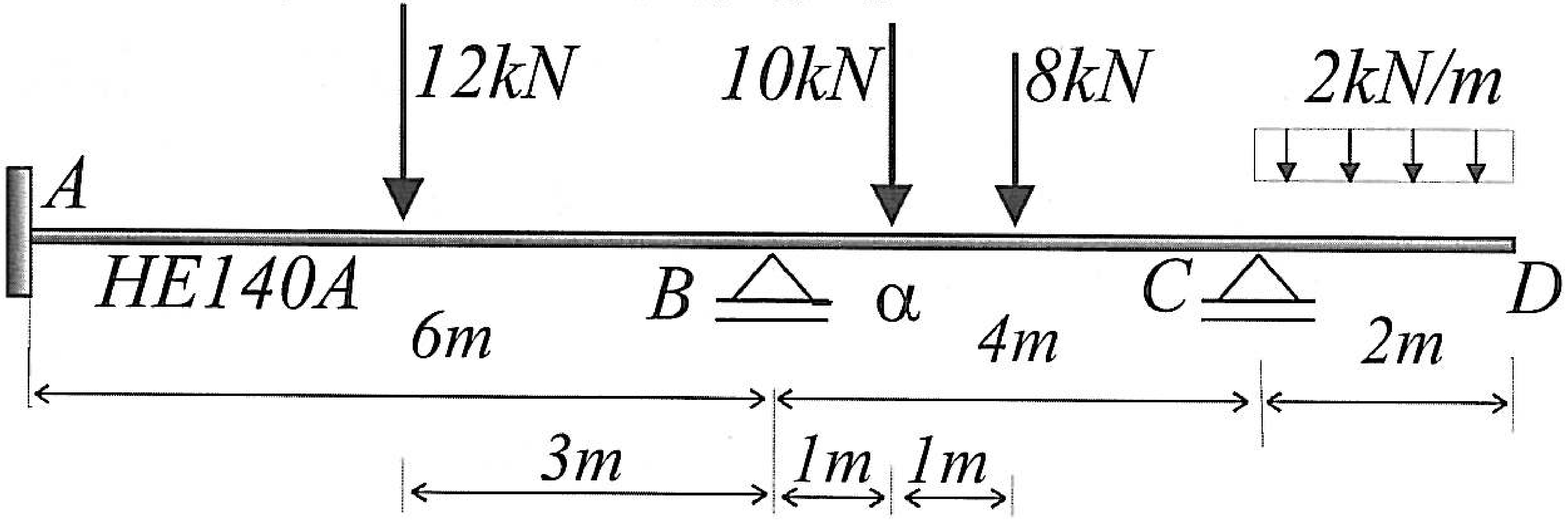
$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \eta_i + \int_a^b q(x) \times \eta(x)\, dx$$

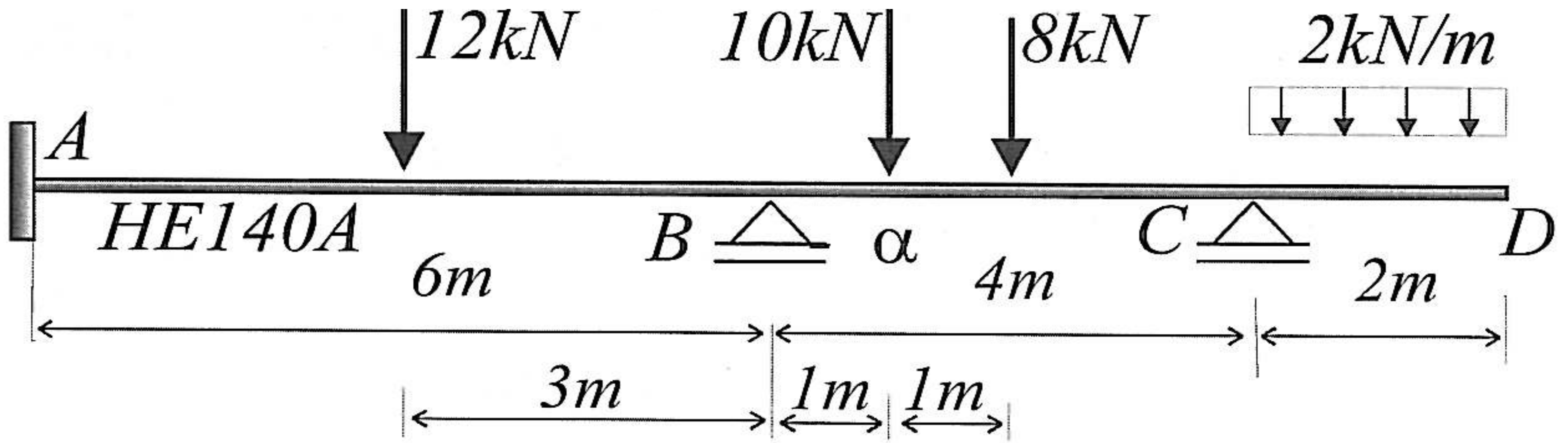
Jeżeli obciążenie q jest stałe na pewnym odcinku konstrukcji to powyższy wzór przyjmie postać:

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \times \eta_i + A \times q(x)$$

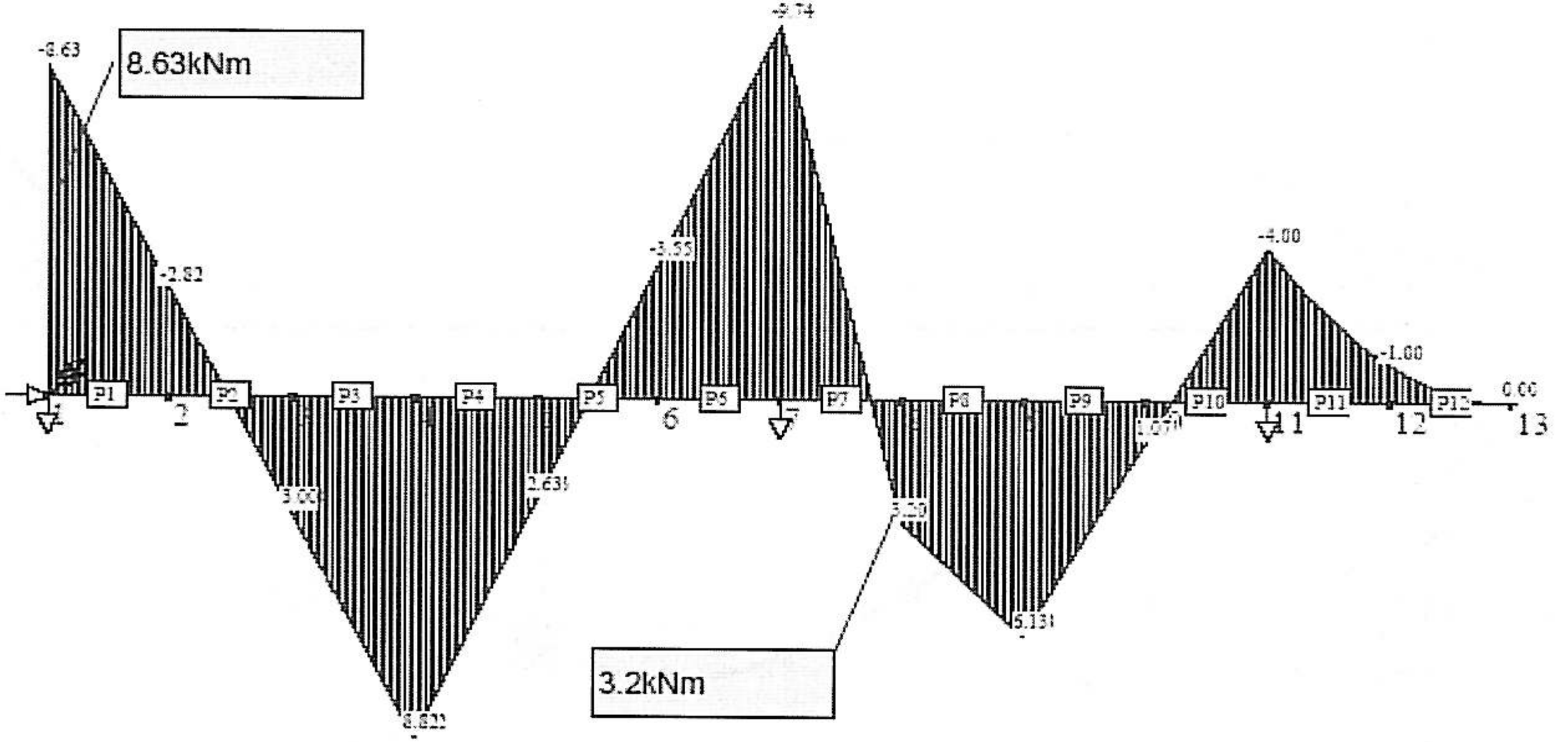
Przykład

Sprawdzić rozwiązanie belki za pomocą obciążania linii wpływu. Dla podanego obciążenia obliczyć wartość M_α, T_α, R_A, R_B, M_A .

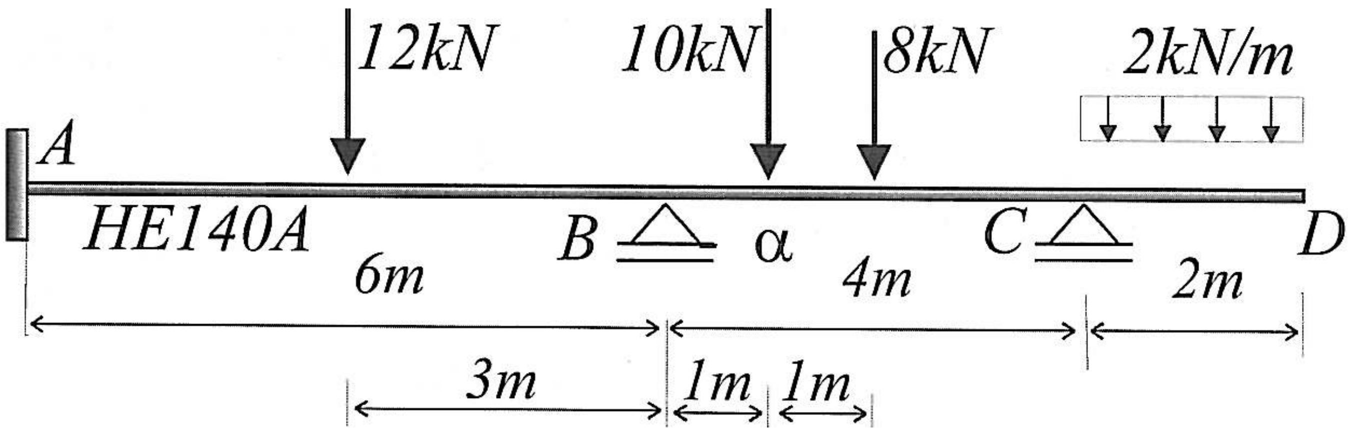


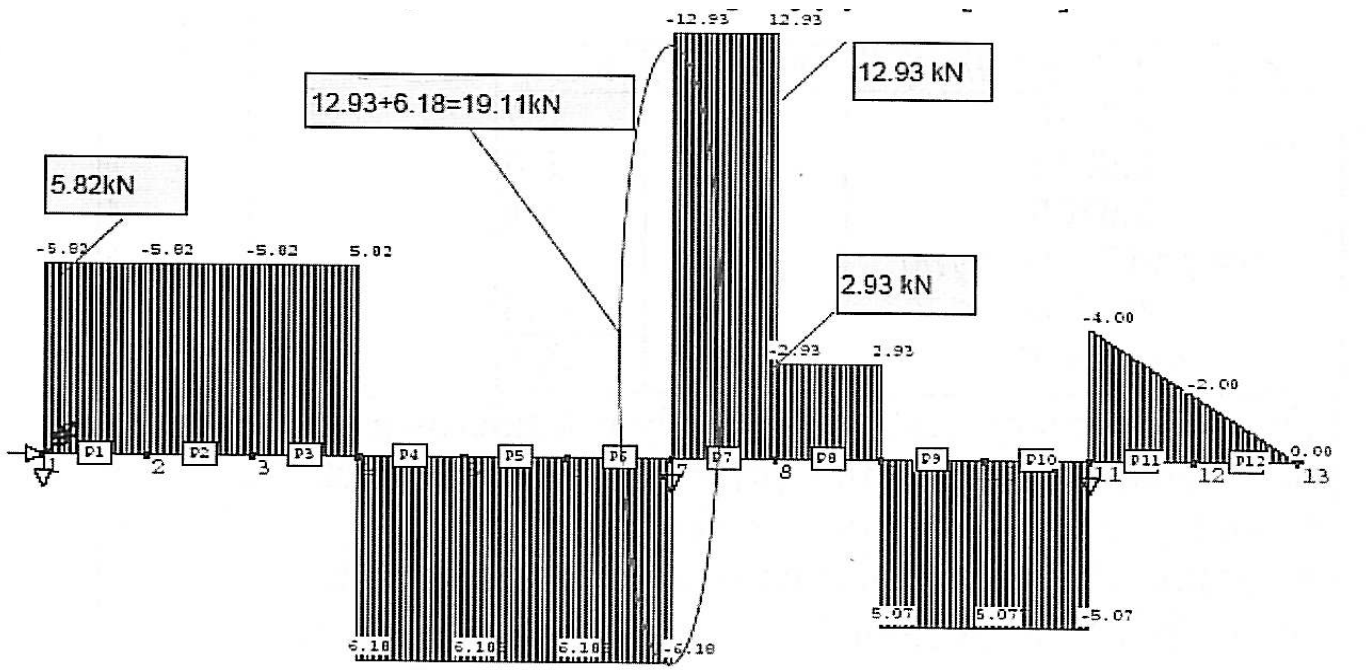


geometria układu



wykres momentów zginających M [kNm]





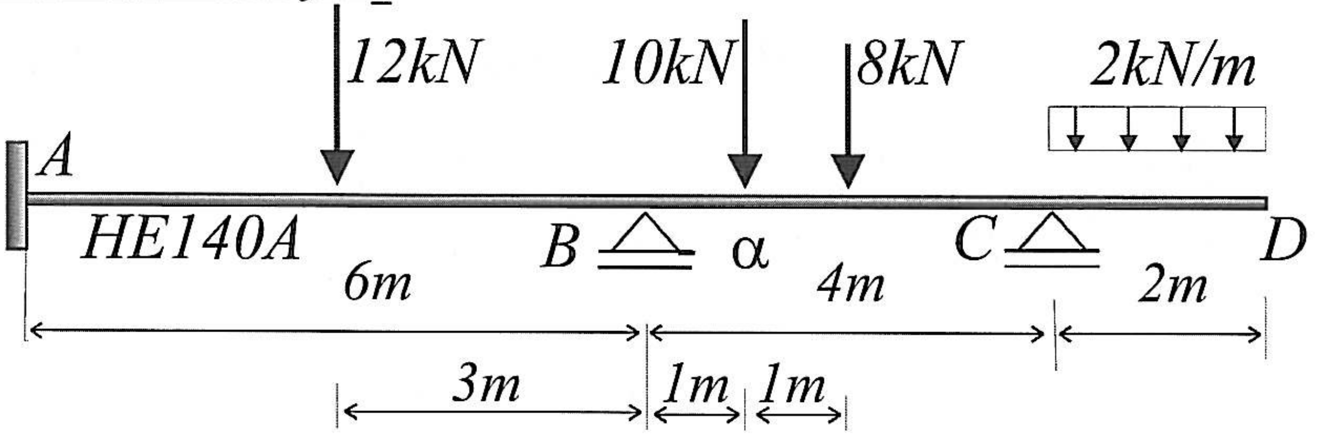
wykres sił tnących T [kN]

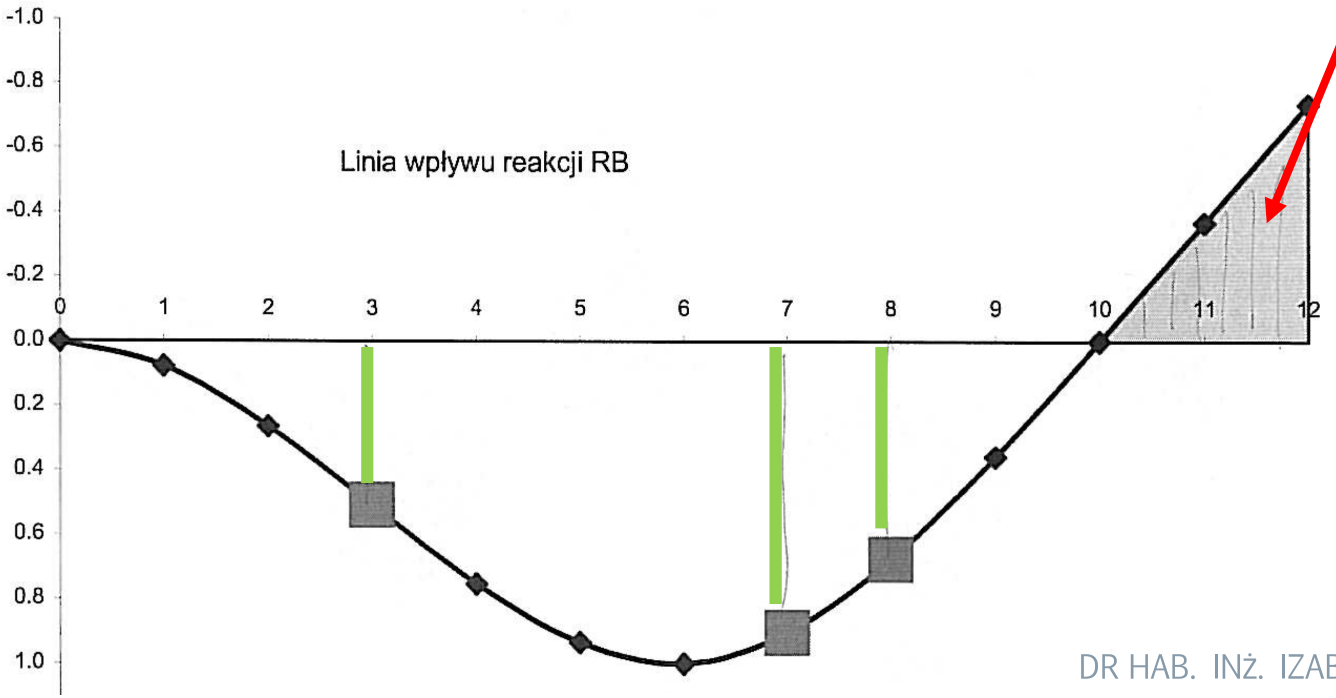
π

Wartości sił wewnętrznych uzyskane z rozwiązania statyki belki:

$M_\alpha = 3.20 kNm$, $T_\alpha^L = 12.93 kN$, $R_A = 5.820 kN$, $R_B = 19.12 kN$, $M_A = 8.63 kNm$

<u>Sprawdzenie reakcji R_B</u>





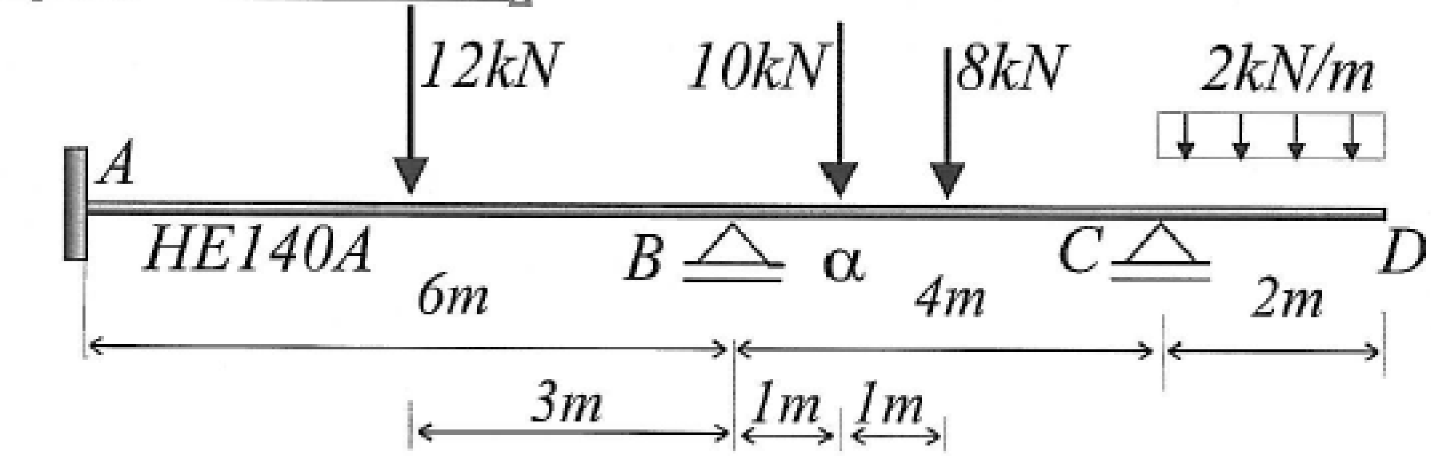
rzędne linii wpływu η	siła P [kN]	P x η
0.5110	12	6.1
0.9044	10	9.0
0.6765	8	5.4
pole pod linią wpływu		
-0.7353	2	-1.5
reakcja R_B		19.1

x[m]	Linia wpływu reakcji R_B
0	0.000
1	0.076
2	0.266
3	0.511
4	0.754
5	0.936
6	1.000
7	0.904
8	0.677
9	0.360
10	0.000
11	-0.368
12	-0.735

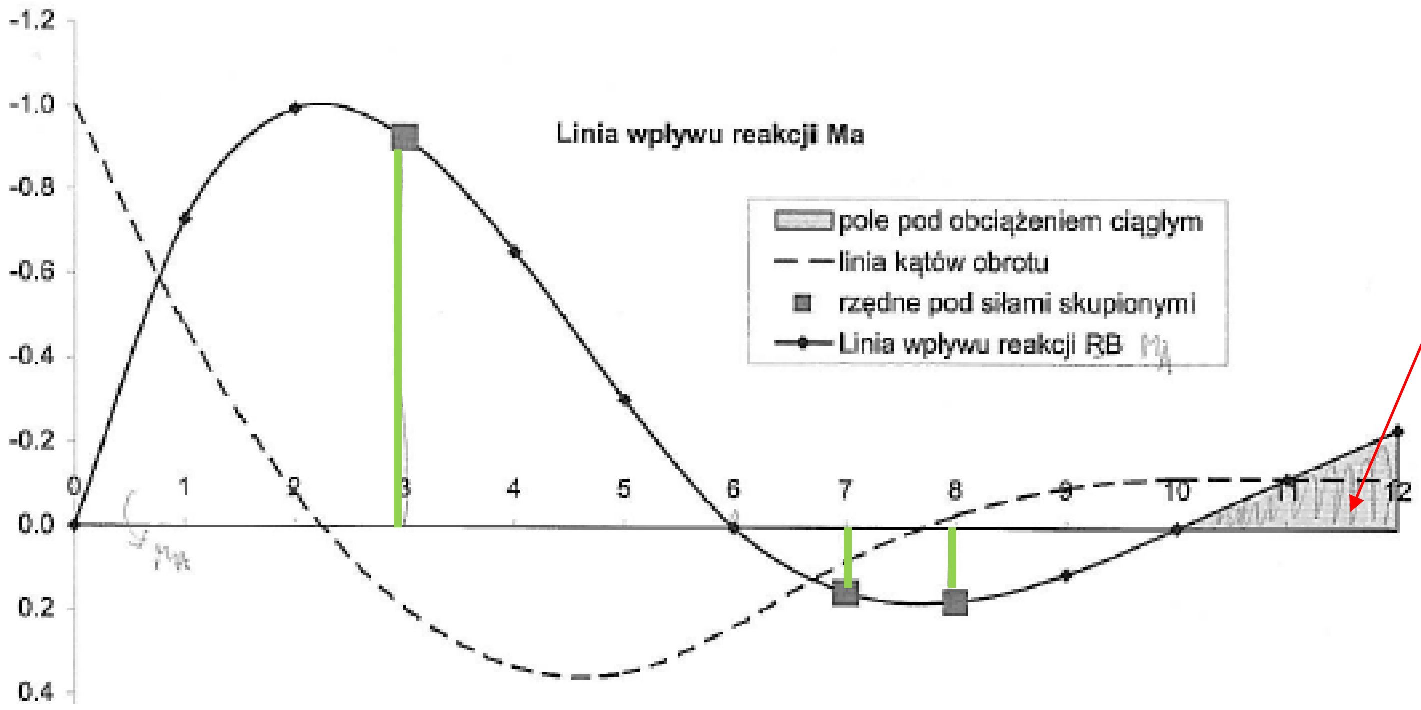
Reakcja jest dodatnia gdy jest skierowana w górę.
Dodatnie rzędne linii wpływu dla sił skupionych świadczą o tym, że siły te wywołują reakcję dodatnią, obciążenie ciągłe natomiast powoduje reakcję ujemną - odrywanie belki od podpory.

Poprzez obciążenie linii wpływu uzyskano tą samą reakcję co z rozwiązania statyki belki.

Sprawdzenie momentu M_A



rzędne linii wpływu η	siła P [kN]	P x η
-0.9265	12	-11.1
0.1544	10	1.5
0.1765	8	1.4
pole pod linią wpływu		
-0.2353	2	-0.5
reakcja M_A		-8.63



x[m]	Linia wpływu reakcji MA
0	0
1	-0.7271
2	-0.9935
3	-0.9265
4	-0.6536
5	-0.3023
6	0
7	0.1544
8	0.1765
9	0.1103
10	0
11	-0.1176
12	-0.2353

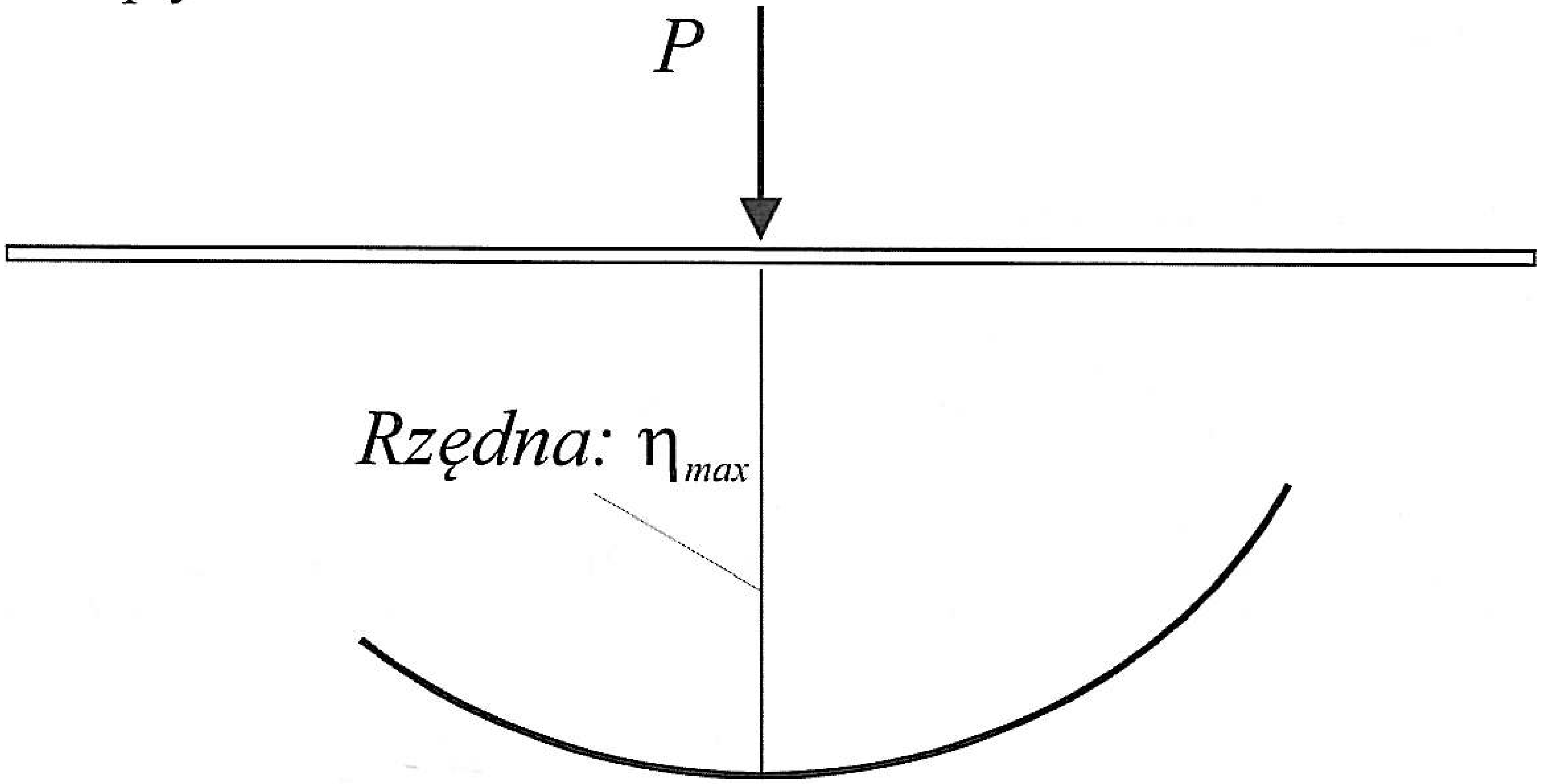
Założono, że moment M_A jest dodatni gdy działa w prawo, siła 12kN wywołuje ujemny moment przy podporze A, podobnie obciążenie ciągłe, siły z przęsła środkowego wywołują moment dodatni.

Ekstremalne obciążanie linii wpływowych. Obwiednie wielkości statycznych

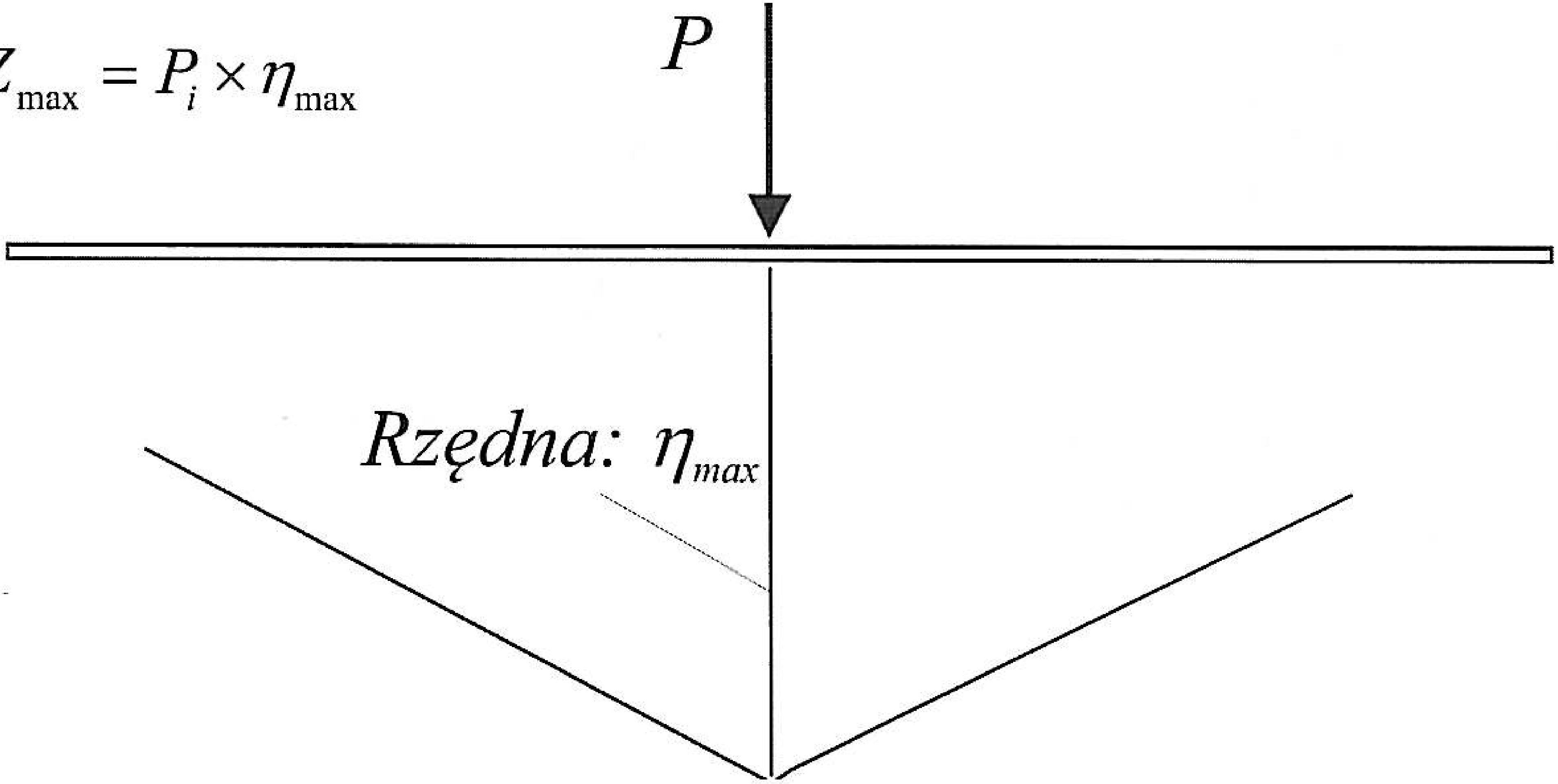
Obciążenia konstrukcji możemy podzielić na obciążenia stałe i obciążenia zmienne. Do obciążeń stałych możemy zaliczyć na przykład obciążenie ciężarem własnym. Obciążenie zmienne to obciążenia śniegiem, wiatrem, obciążenia użytkowe, obciążenia pojazdami, suwnicami itp.
Przy analizie konstrukcji często powstaje problem takiego ustawienia obciążeń zmiennych aby uzyskać ekstremalne wielkości sił wewnętrznych, które są najbardziej niekorzystne dla konstrukcji.

Przy poszukiwaniu takich ekstremalnych położeń sił wewnętrznych przydatna jest znajomość linii wpływowych.

Dla pojedynczej siły skupionej najbardziej niekorzystna wartość wielkości statycznej Z powstanie przy ustawieniu siły w ekstremalnych miejscach linii wpływu:

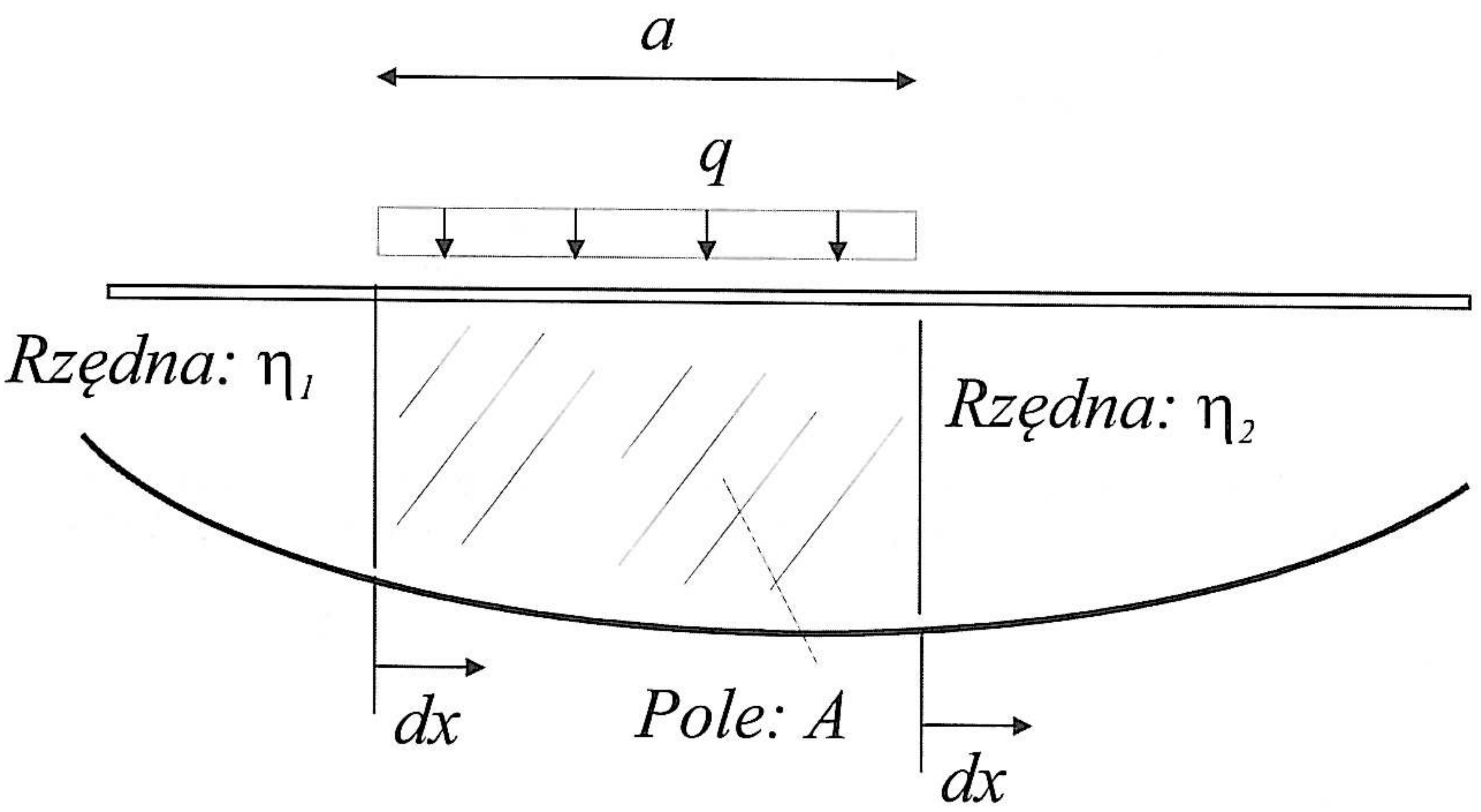


$$Z_{\max} = P_i \times \eta_{\max}$$



W przypadku obciążenia ciągłego o skończonej długości wartość Z jest równa:

$$Z = A \times q(x)$$



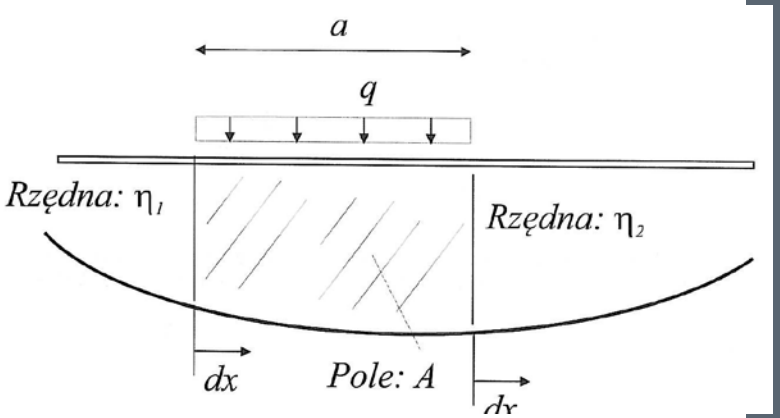
jeżeli założymy przesunięcie odcinka obciążenia o dx to nastąpi zmiana wielkości Z:

$$dZ = dA \times q = q \times (-z_1 \times dx + z_2 \times dx)$$

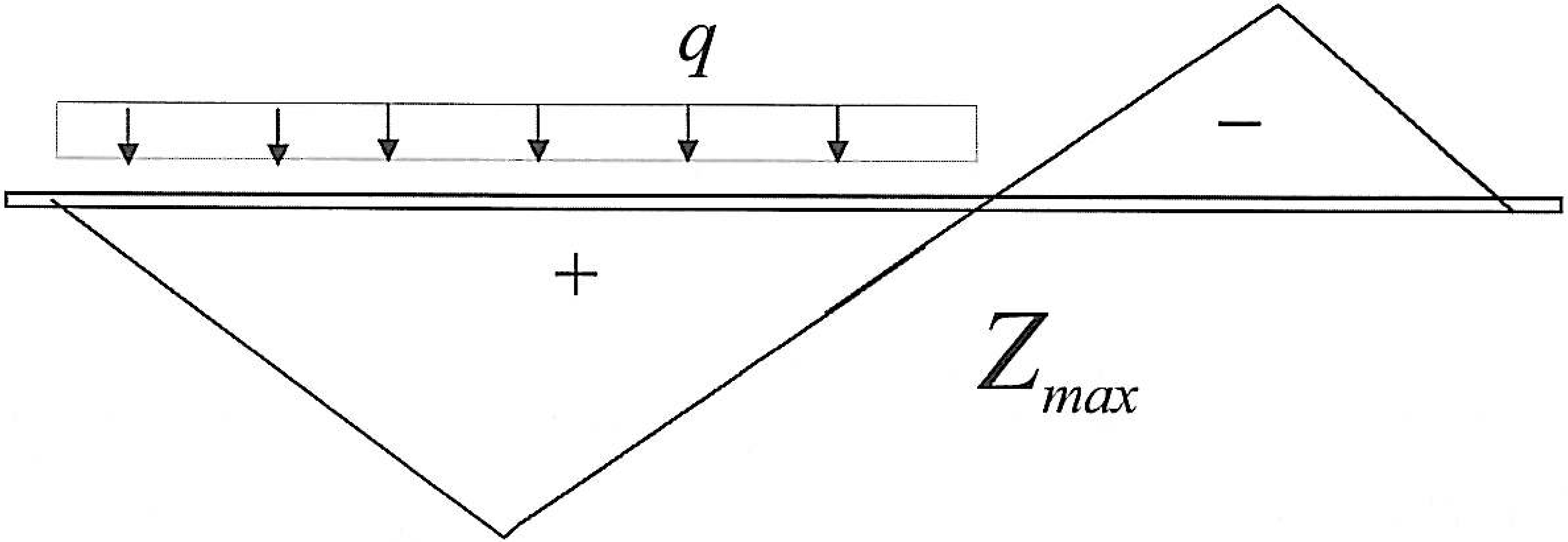
ponieważ poszukujemy takiego położenia obciążenia aby Z osiągało ekstremum z warunku zerowania się pochodnej możemy wyznaczyć:

$$\frac{dZ}{dx} = q \times (-z_1 + z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

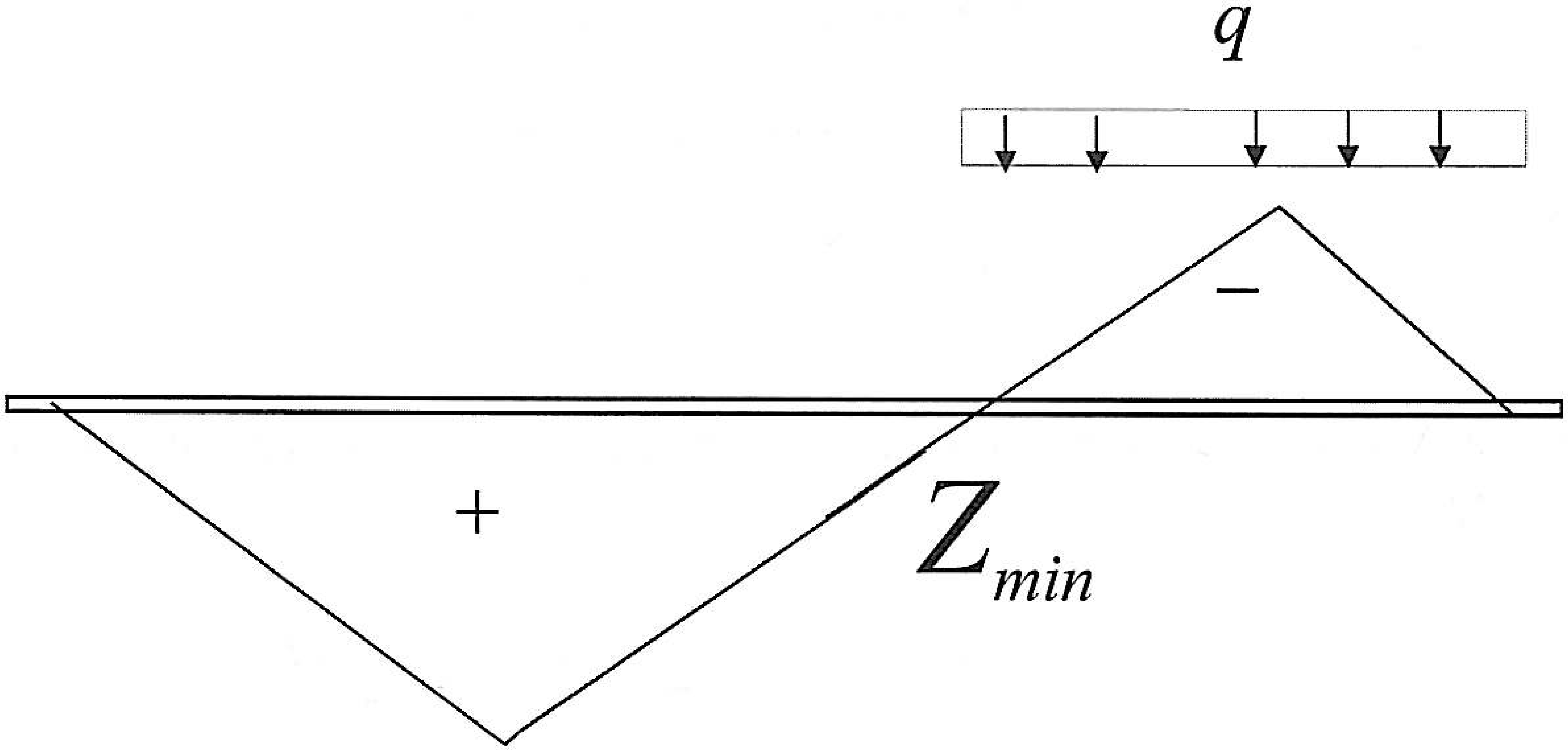
ekstremalna wielkość Z będzie wtedy gdy rzędne $z_1 = z_2$



W przypadku obciążeń o dowolnej długości ekstremalną wartość wielkości statycznej wyznaczymy przyjmując długość obciążenia tak aby się ona pokrywała z dodatnnią częścią linii wpływu



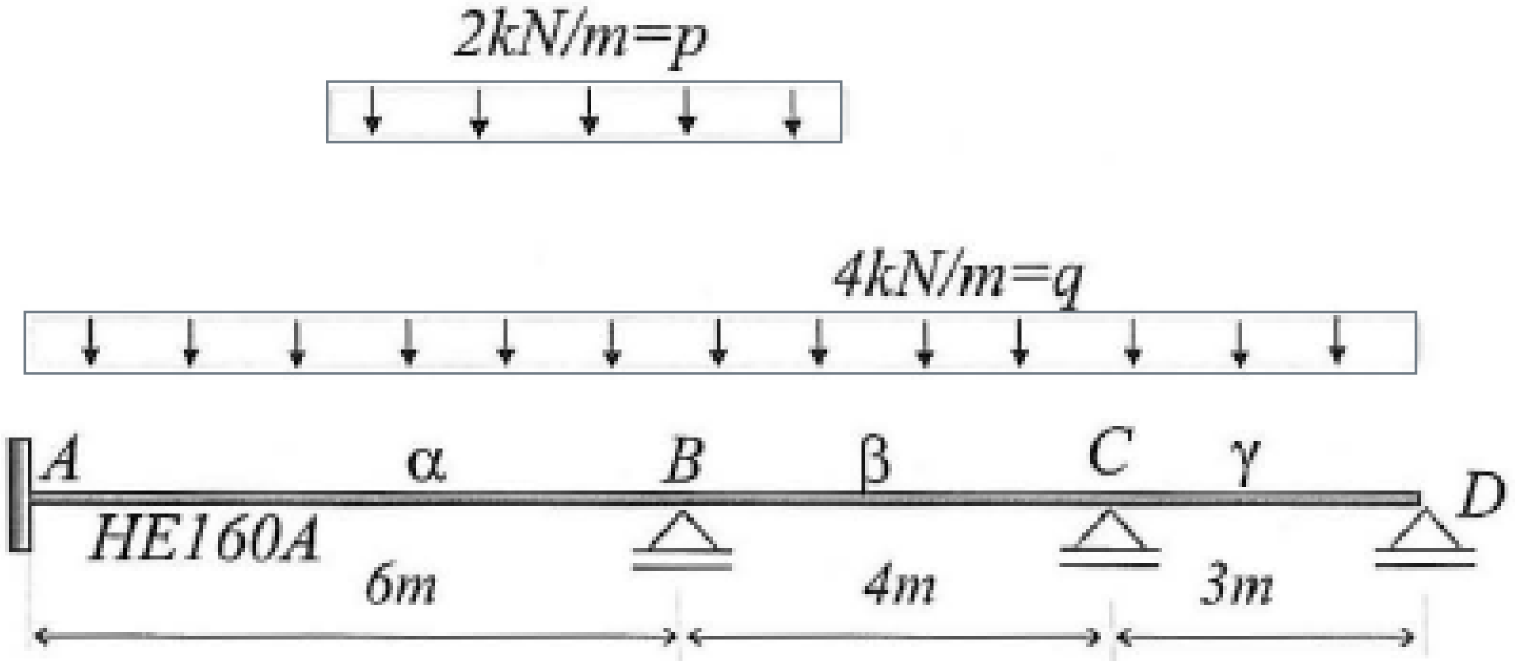
Aby uzyskać minimalne wartości danej wielkości statycznej możemy ustawić obciążenie tak aby pokrywało się z ujemną częścią linii wpływu wielkości Z.



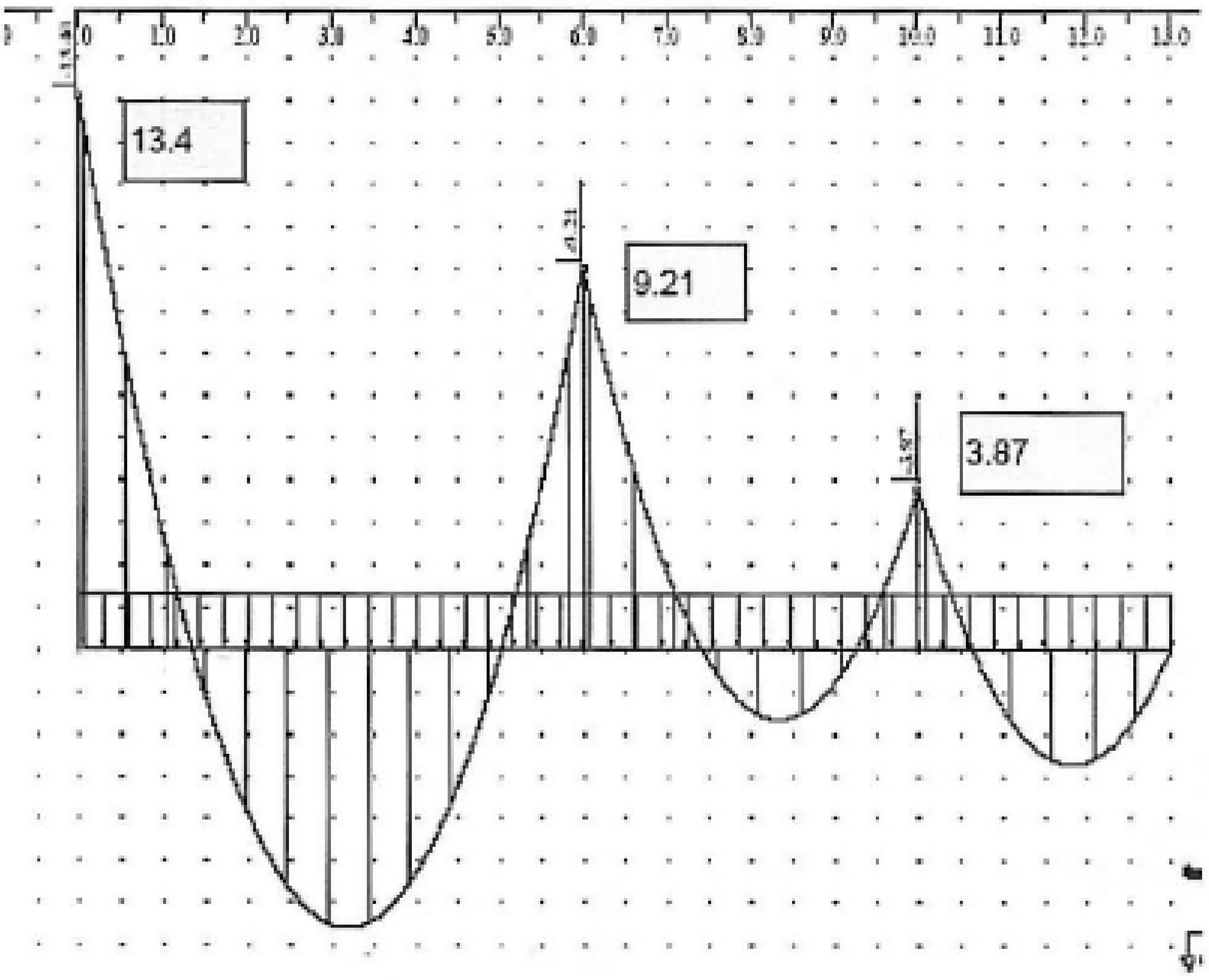
Jeżeli we wszystkich przekrojach poprzecznych wyznaczymy wartość maksymalną danej wielkości statycznej i wartość minimalną tej wielkości od zadanego obciążenia to uzyskany wykres wielkości ekstremalnych nazywamy **obwiednią** Z.

Przykład

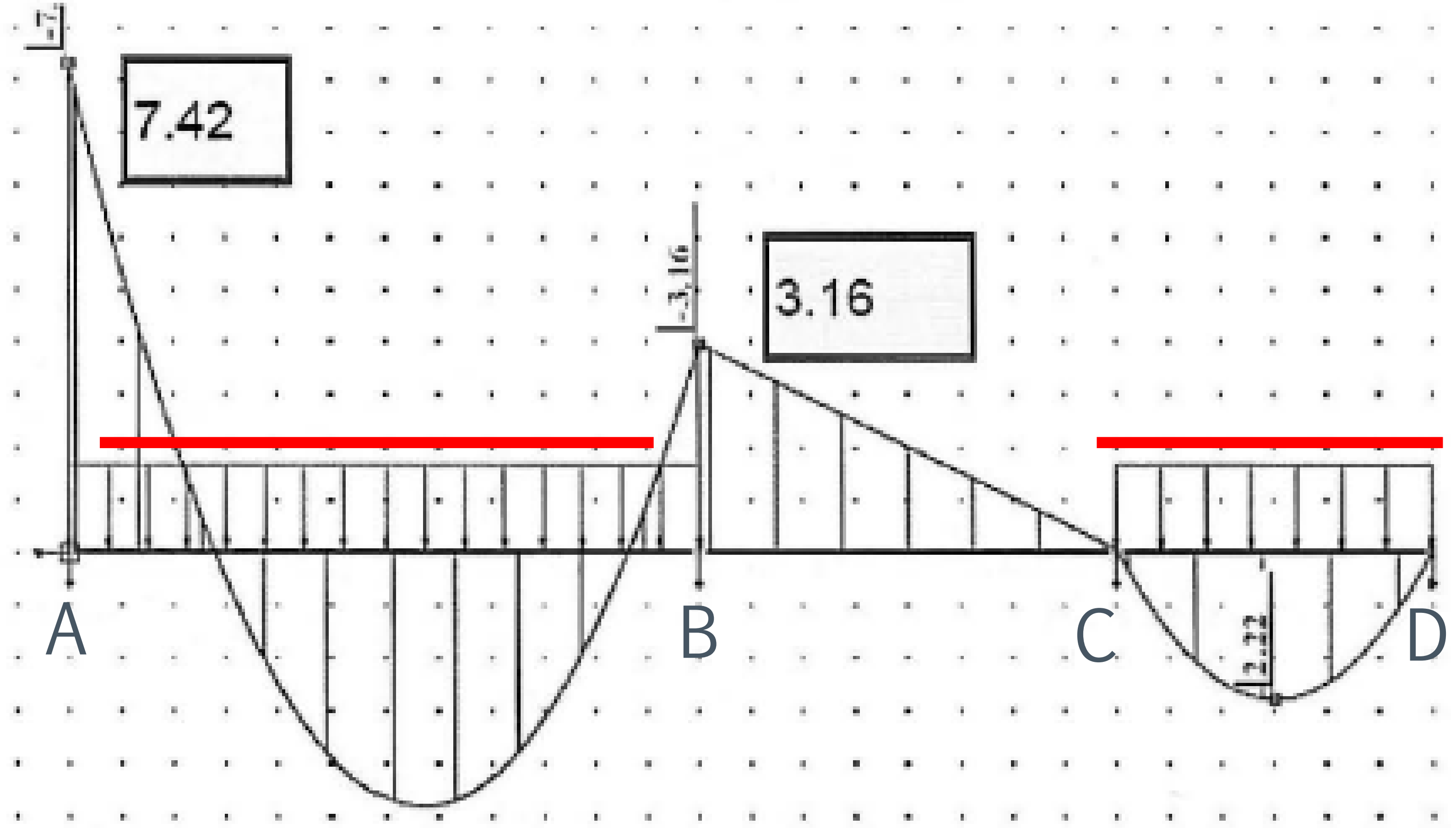
Wyznaczyć obwiednię momentów zginających M dla belki obciążonej ciężarem własnym i obciążeniem zmiennym o dowolnej długości .



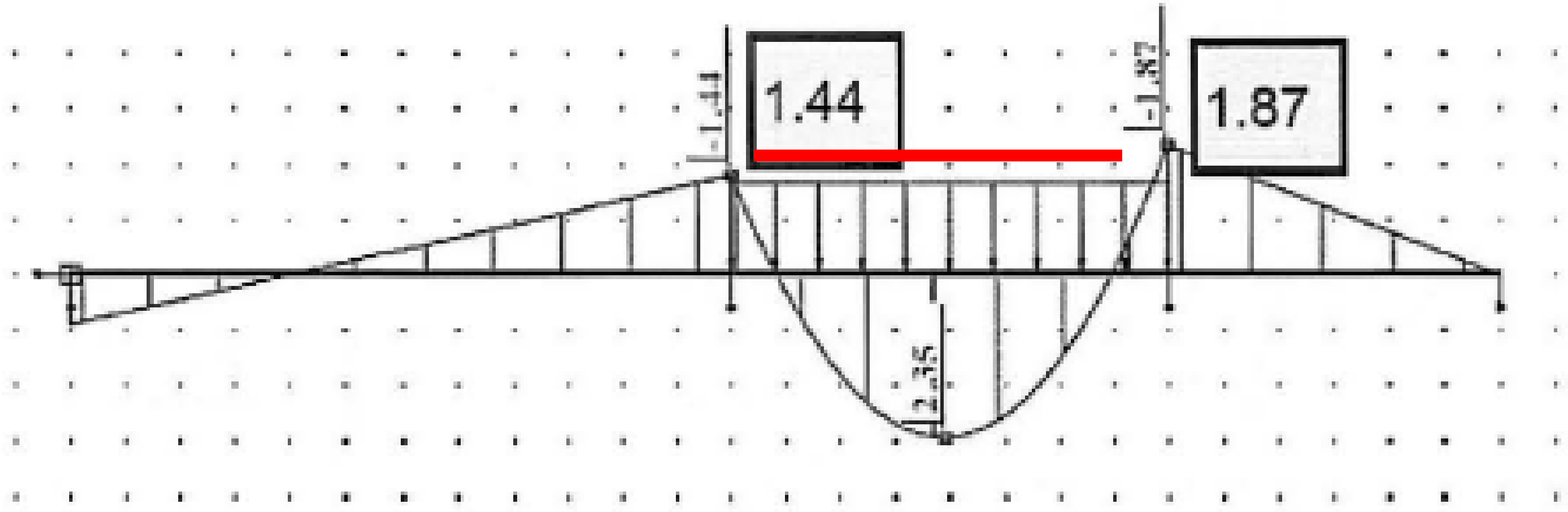
Przypadek 1. Momenty zginające od obciążeń stałych.



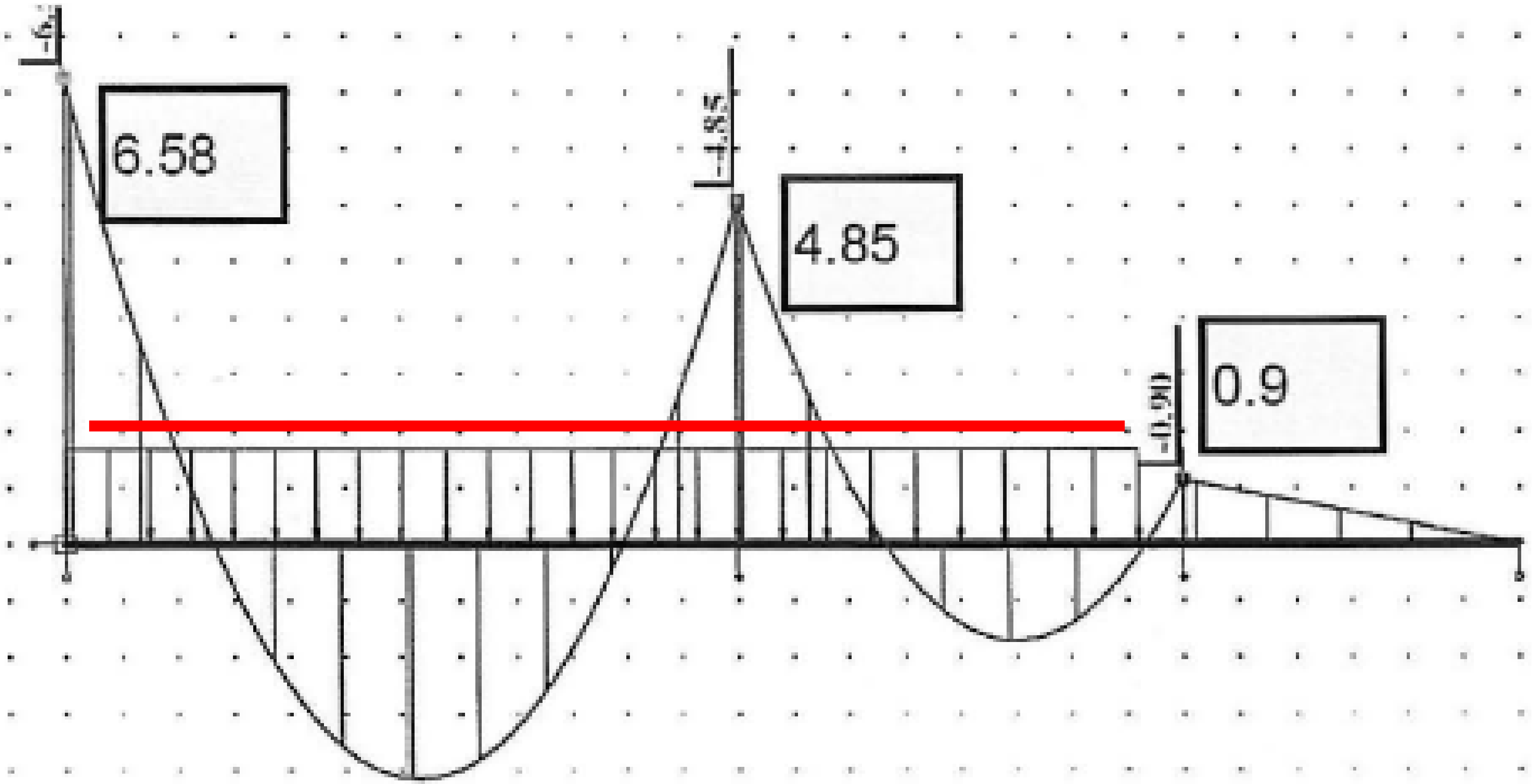
Przypadek 2. Obciążenie zmienne w przęśle AB i CD.
Max moment przęsłowy w prz. AB i CD, max moment na podporze A, minimalny moment w przęśle BC.



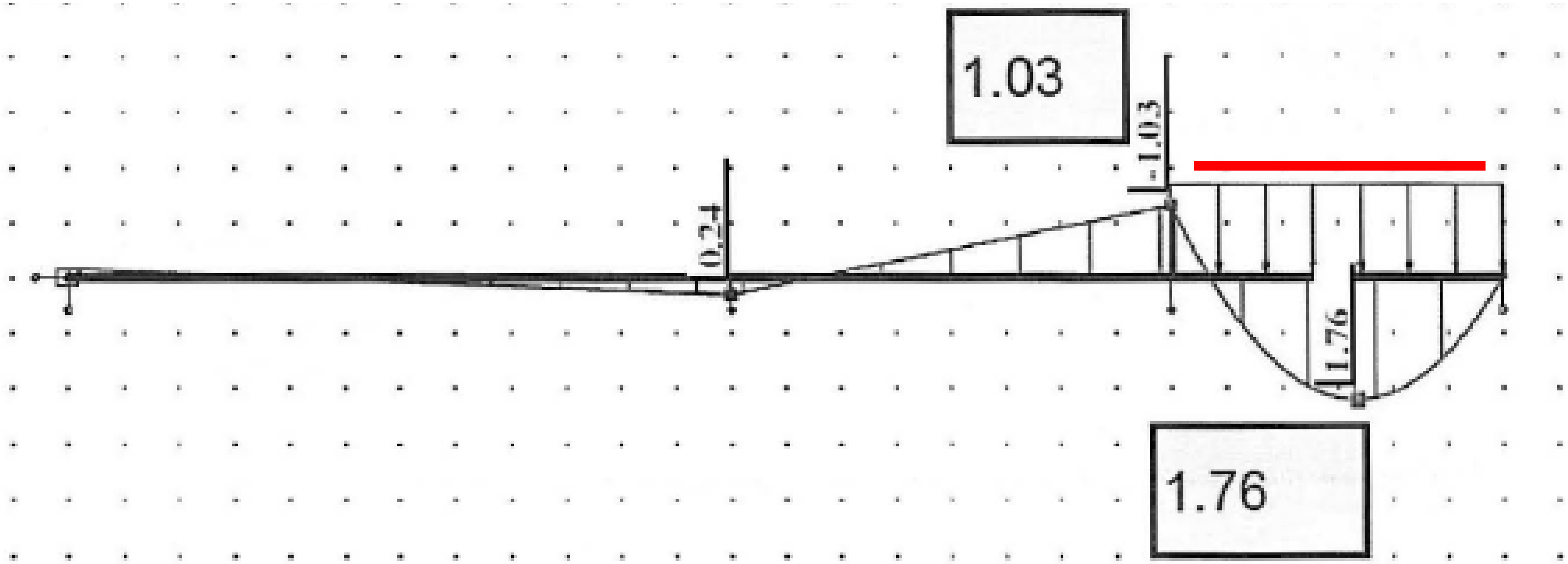
Przypadek 3. Obciążenie zmienne w przęśle BC.
Max moment przęsłowy w prz. BC, min moment na podporze A i w przęśle AB i CD.



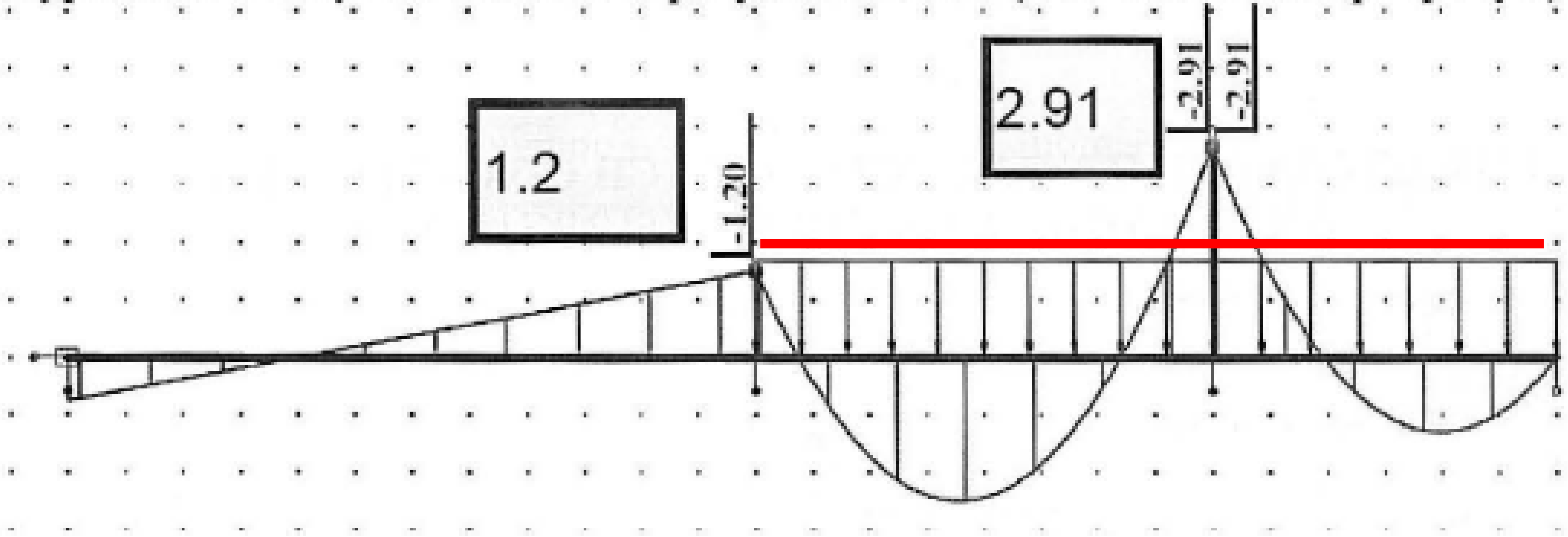
Przypadek 4. Obciążenie zmienne w przęśle AB i BC.
Max moment przęsłowy w prz. BC, min moment na podporze B.



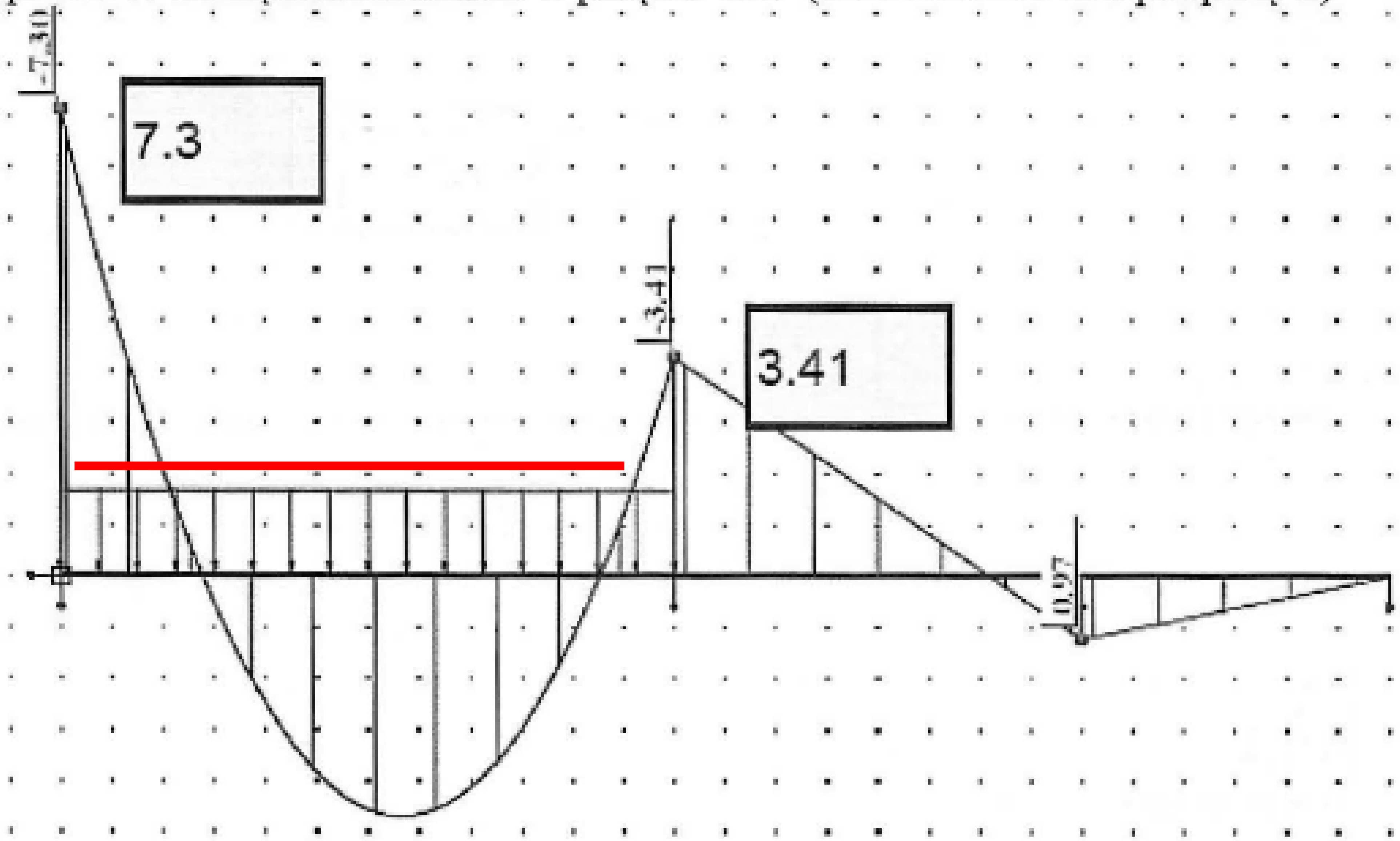
Przypadek 5. Obciążenie zmienne w przęśle CD.
Max moment na podporze B.



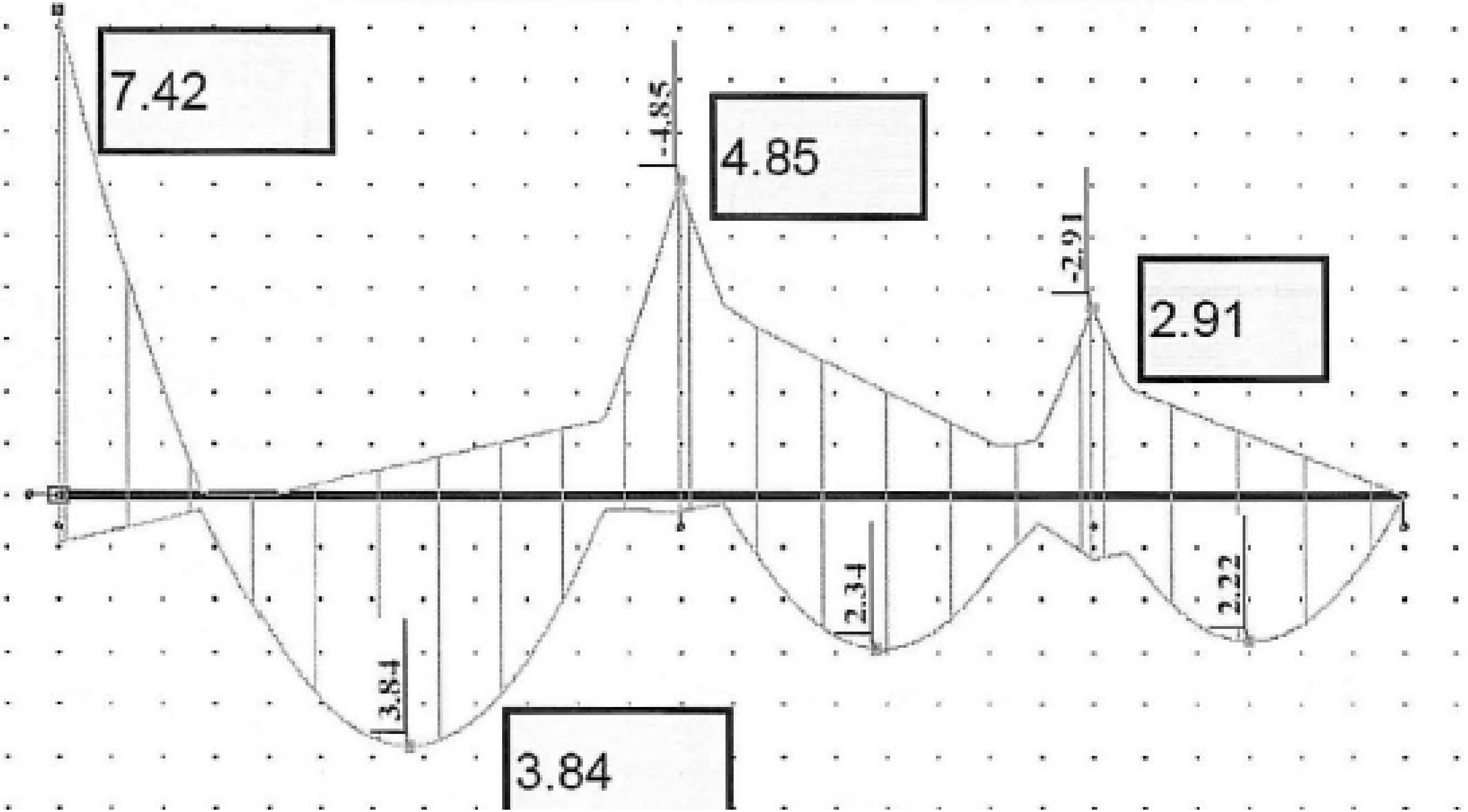
Przypadek 6. Obciążenie zmienne w przęśle BC i CD (min moment nad podporą C)



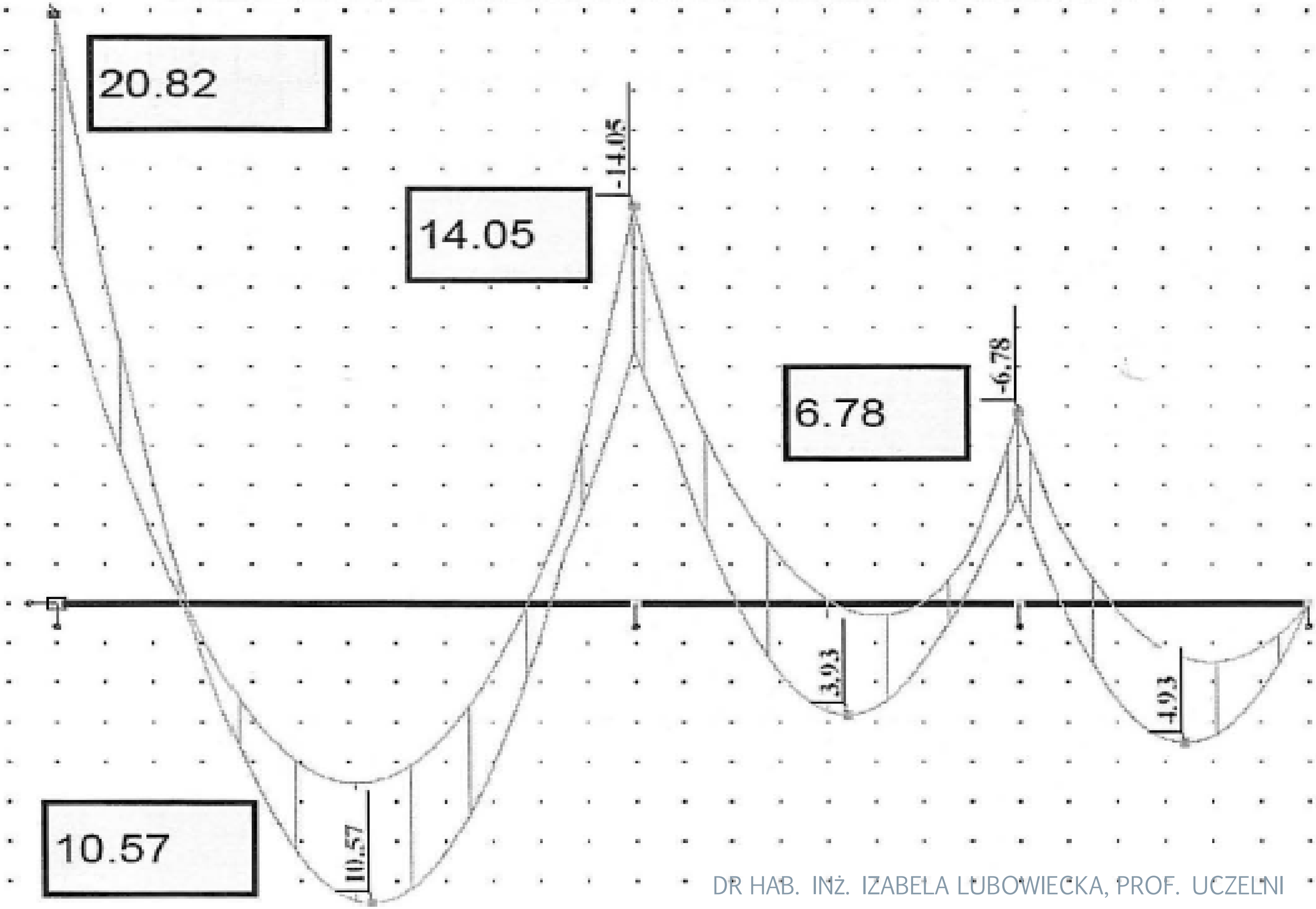
Przypadek 7. Obciążenie zmienne w przęśle AB (max moment nad podporą C)



OBWIEDNIA MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH OD OBCIĄŻEŃ ZMIENNYCH-
NA JEDNYM RYSUNKU WYKRESY Z PRZYPADKÓW 2-7



OBWIEDNIA MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH OD OBCIĄŻEŃ STAŁYCH I ZMIENNYCH – NA JEDNYM RYSUNKU WYKRESY 1-7

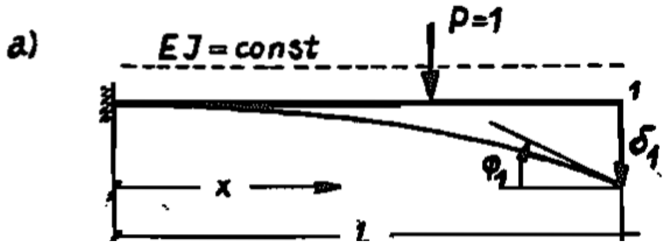


Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń
Metoda wtórnych obciążeń

Linia wpływu dowolnego przemieszczenia (uogólnionego) przy poruszającej się sile pionowej jest identyczna z linią ugięcia tych prętów układu, po których porusza się siła, wywołana działaniem jednostkowej siły (uogólnionej) w kierunku tego przemieszczenia.

Rzędne linii wpływu są dodatnie, jeżeli przedstawiają ugięcia skierowane w dół.

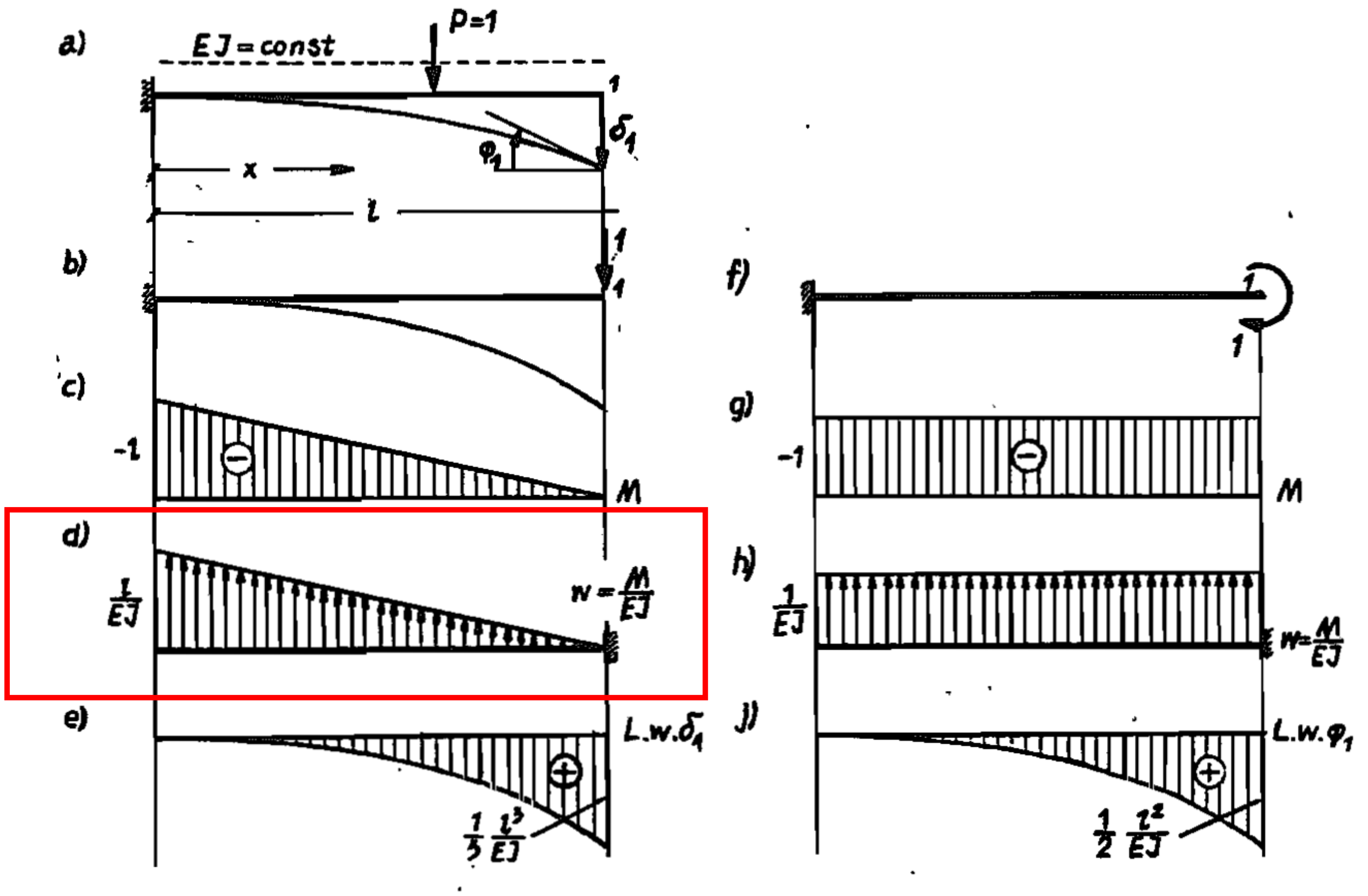
Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń



Dla belki wspornikowej określmy linię ugięcia δ_1 punktu 1.
W tym celu zaczepimy w p. 1 siłę jednostkową i napiszemy r-nie linii ugięcia – jako r-nie momentów zginających w układzie zastępczym (rys. d).

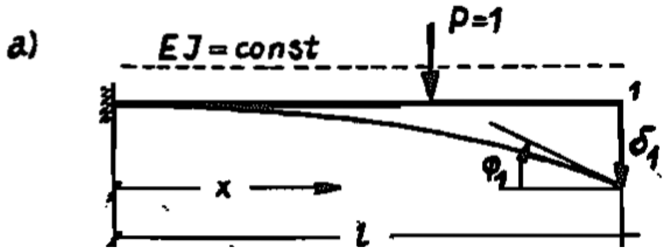
$$\delta_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right) = \frac{l^3}{6EI}\left(3\xi^2 - \xi^3\right), \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń



Rys. 95

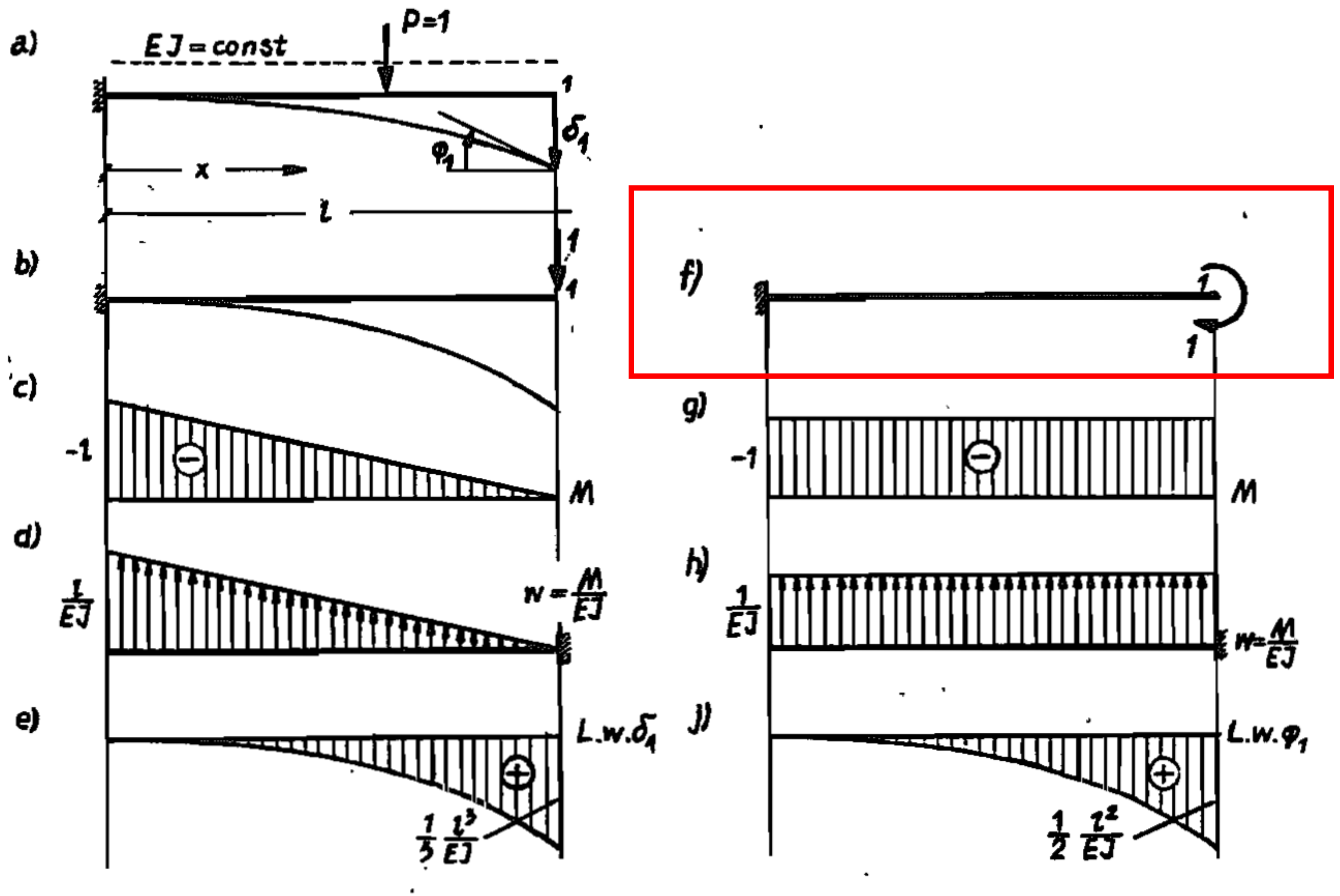
Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń



Linię wpływu kąta obrotu ϕ_1 otrzymamy jako linię ugięcia od obciążenia jednostkowym momentem zaczepionym w punkcie 1 (rys. f).

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}x^2$$

Wyznaczanie linii wpływowych przemieszczeń



Rys. 95