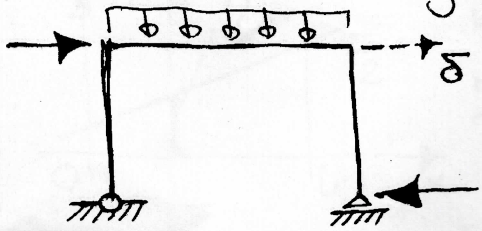
MB ćw 02/1

PRZEMIESZCZENIA W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH

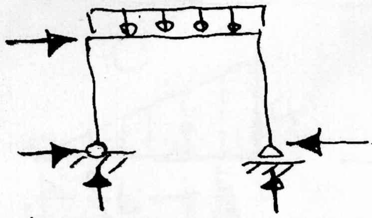
(zastosowanie zasady prac wirtualnych w układach odkształcalnych)

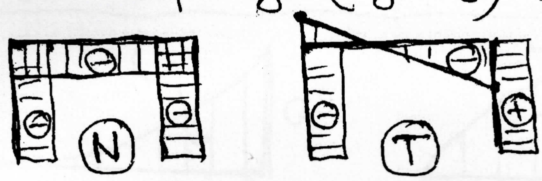
ZADANIE: obliczyć wskazane przemieszczenie δ

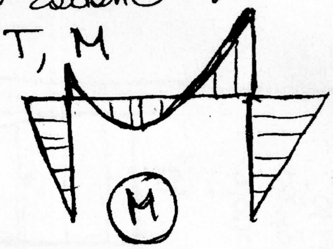


Rozważane są dwa stany obciążenia w zadanym układzie

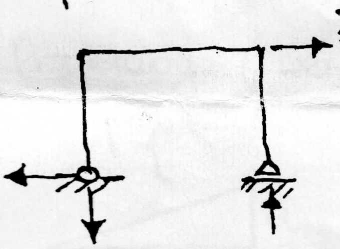
1) rzeczywiste – obciążenie zadane → funkcje (wykresy) N, T, M

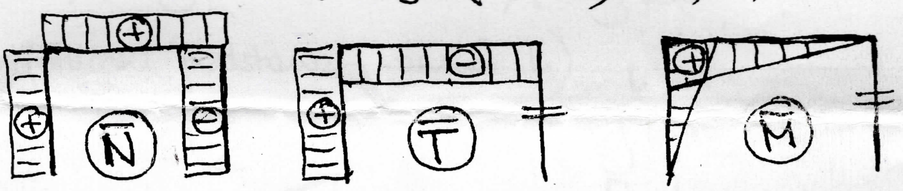






2) jednostkowe obciążenie wirtualne związane (sprzężone) z szukanym przemieszczeniem: $\overline{P} \equiv \overline{1}$ → funkcje (wykresy) $\overline{N}, \overline{T}, \overline{M}$





Ogólne wyrażenie – twierdzenie o pracy wirtualnej (układ odkształcalny)

$$1 \cdot \overline{\delta} = \int_L \left(\frac{N\overline{N}}{EA} + k\frac{T\overline{T}}{GA} + \frac{M\overline{M}}{EI} \right) ds$$

s – zmienna obejmująca wszystkie elementy układu (łączna długość L)

Układy belkowe, ramowe, łukowe – dominujący wpływ zginania $\delta \approx \int_L \frac{M\overline{M}}{EI} ds$

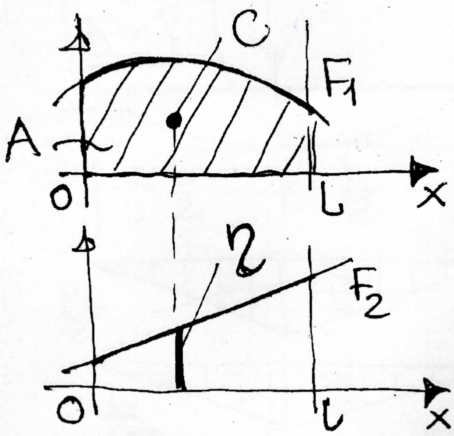
Kratownice – jedynie siły normalne, stałe w poszczególnych prętach, wzór całkowy – postać sumy $\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i \overline{S}_i}{EA_i} l_i$

(n prętów, w każdym z nich: długość l_i, przekrój A_i, siły wywołane dwoma stanami odpowiednio S_i i $\overline{S}_i$)

Dźwigary załamane w planie – wpływ zginania i skręcenia $\delta = \int_L \left(\frac{M\overline{M}}{EI} + \frac{M_s\overline{M}_s}{GI_0} \right) ds$

Układy ramowo-kratowe – wpływ zginania w części ramowej, rozciągania/ściskania w prętach kratowych

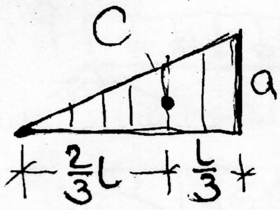
Twierdzenie o całkowaniu graficznym



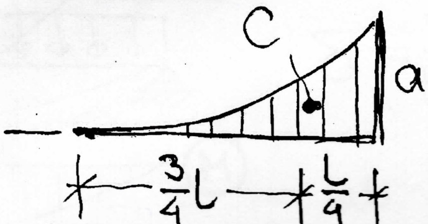
Wykres o dowolnym kształcie, znane pole A oraz położenie środka ciężkości C

wykres liniowy w przedziale $x \in \langle 0, L \rangle$

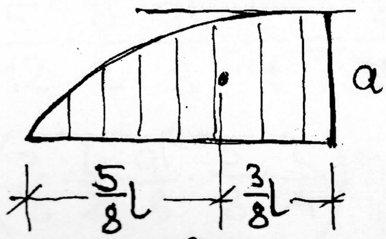
Zachodzi $\int_0^L F_1 F_2 \, dx = A\eta$



$A = \frac{1}{2}aL$



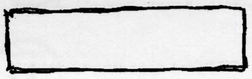
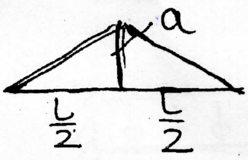
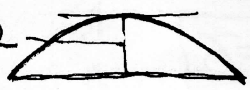
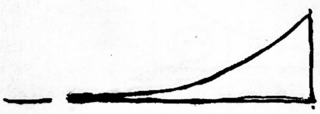
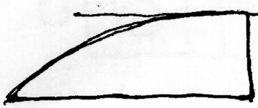
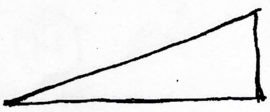
$A = \frac{1}{3}aL$



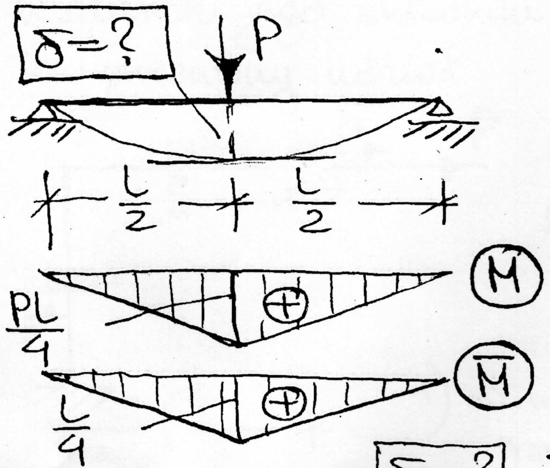
$A = \frac{2}{3}aL$

parabole drugiego stopnia

Przykłady (we wszystkich podstawa równa L)

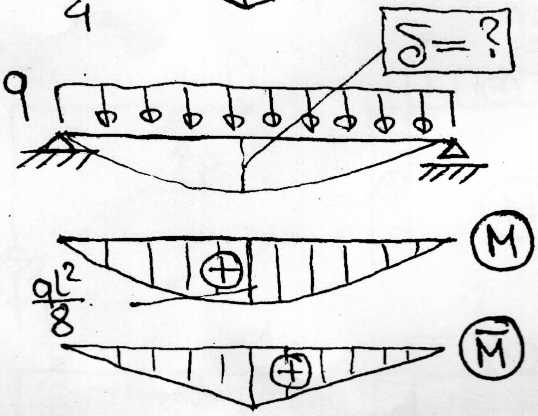
F_1	F_2	$\int_0^L F_1 F_2 \, dx$
 a	 b	$\frac{1}{3}abL$
 a	b 	$\frac{1}{6}abL$
 a	b 	$\frac{1}{2}abL$
	 b	$\frac{1}{4}abL$
a 	 b	$\frac{1}{3}abL$
 a	 b	$\frac{1}{4}abL$
 a	 b	$\frac{5}{12}abL$

Obliczyć podane ugięcia belek $(EI = const)$



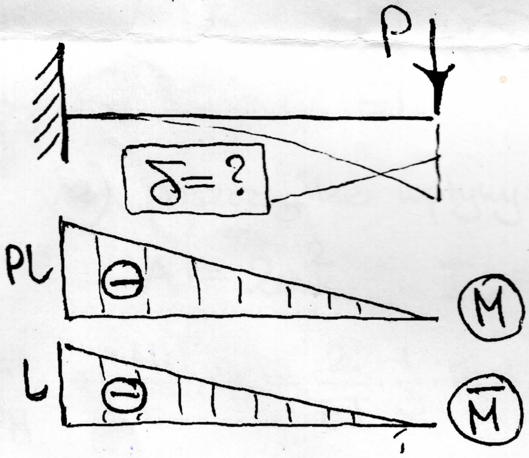
$$\delta = \frac{2}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{PL}{4}\cdot\frac{L}{4} = \frac{PL^3}{48EI}$$

lub $\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{PL}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{4}\right)$



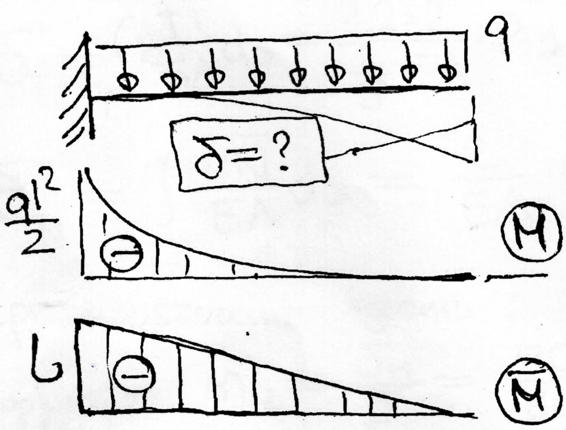
$$\delta = \frac{2}{EI}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{L}{4} = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI}$$

lub $\frac{2}{EI}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{L}{4}\right)$



$$\delta = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{EI}\cdot L\cdot PL\cdot L = \frac{PL^3}{3EI}$$

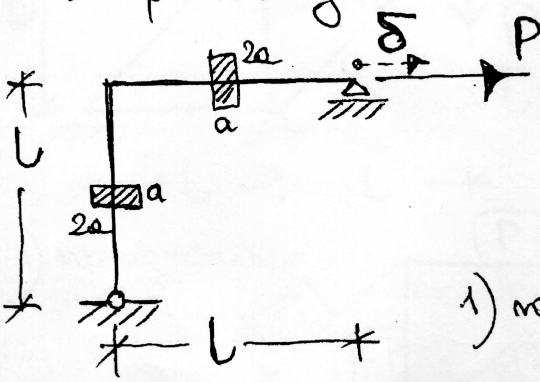
lub $\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot PL\cdot L\cdot\frac{2}{3}\cdot L$

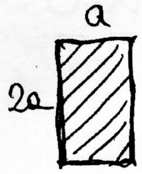


$$\delta = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{4}\cdot L\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot L = \frac{qL^4}{8EI}$$

lub $\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot L\cdot\frac{3}{4}\cdot L$

* Obliczyć wskazane przemieszczenie δ — wszystkie jego składniki (wpływy M, T i N), ocenić ich procentowy udział



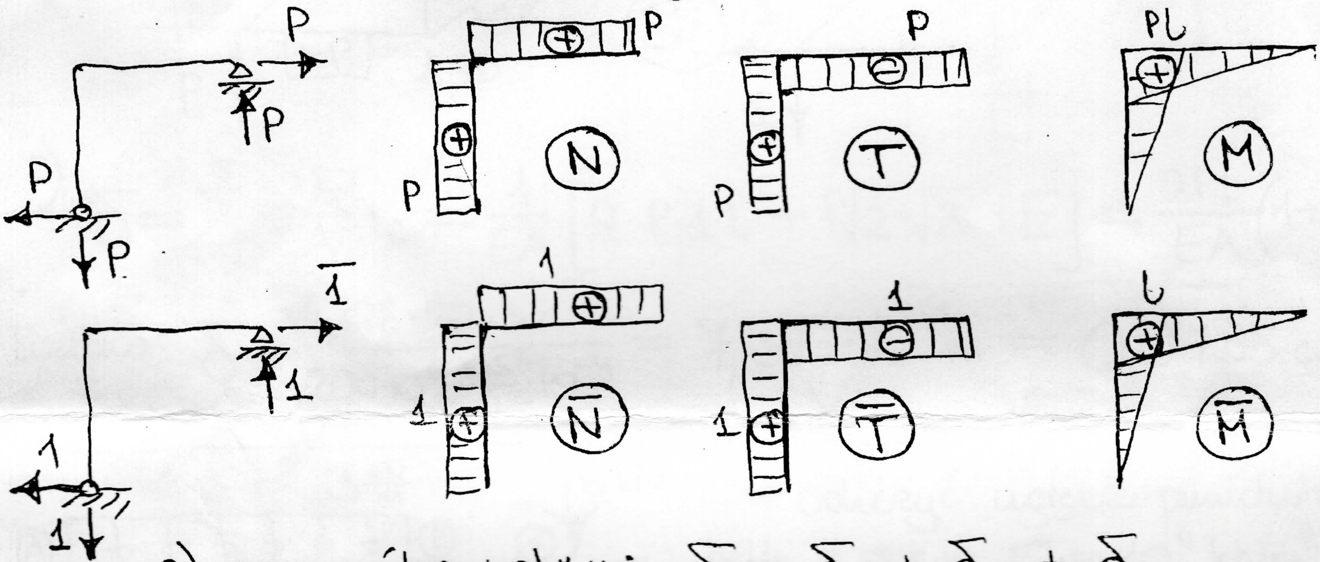


$a = \frac{L}{20}$

$k = 1,2$ (prostokąt)

$\nu = 0,25$

1) rozwiązanie pod obciążeniami: rzeczywistym i wirtualnym



2) poszczególne wpływy: $\delta = \delta_M + \delta_T + \delta_N$

$A = 2a^2 \qquad I_y \equiv I = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}a^4 \qquad G = \frac{E}{2\cdot 1,25} = \frac{E}{2,5}$

$$\delta_M = \int_L \frac{M\bar{M}}{EI}ds = \frac{2}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot PL\cdot L\cdot L = \frac{2}{3}\frac{PL^3}{EI} = \frac{2}{3}\cdot\frac{P(20a)^3}{E\cdot\frac{2}{3}a^4} = 8000\frac{P}{Ea}$$

$$\delta_T = \int_L k\frac{T\bar{T}}{GA}ds = \frac{1,2\cdot 2}{\frac{2}{5}EA}\cdot P\cdot 1\cdot L = \frac{6P\cdot 20a}{E\cdot 2a^2} = 60\frac{P}{Ea}$$

$$\delta_N = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA}ds = \frac{2}{EA}\cdot P\cdot 1\cdot L = \frac{2P\cdot 20a}{E\cdot 2a^2} = 20\frac{P}{Ea}$$

przemieszczenie łączne: $\delta = 8080\frac{P}{Ea}$

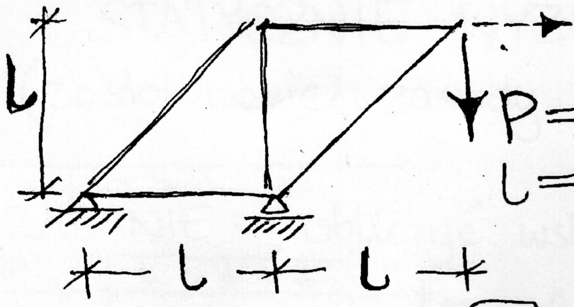
wpływy: $\eta_M = \frac{\delta_M}{\delta} = \frac{8000}{8080} \cong 0,991$

$\eta_T = \frac{\delta_T}{\delta} = \frac{60}{8080} \cong 0,007$

$\eta_M = \frac{\delta_N}{\delta} = \frac{20}{8080} \cong 0,002$

MBćw02/5

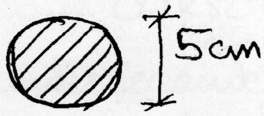
* Obliczyć przemieszczenie δ kratownicy



$P = 20\,kN$

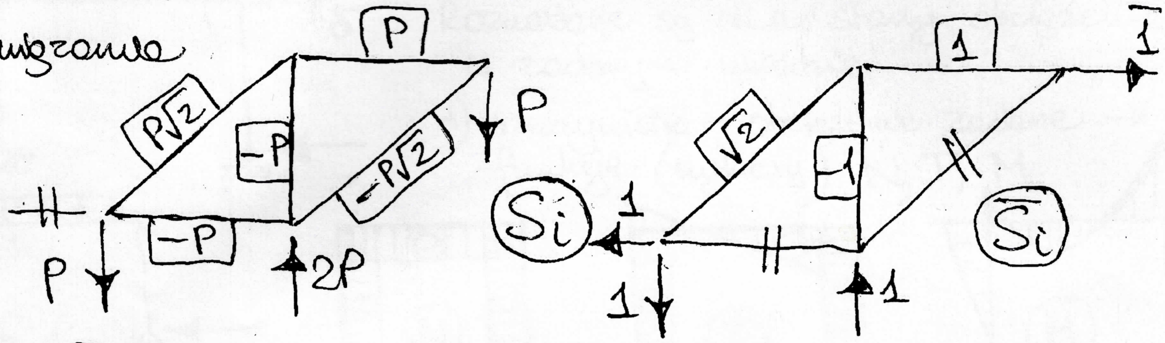
$l = 3\,m$

$E = 200\,GPa$



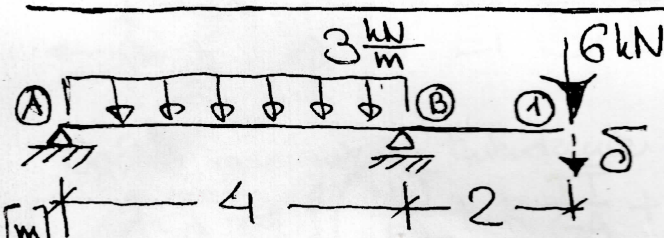
$EA = const$

1) rozwiązanie

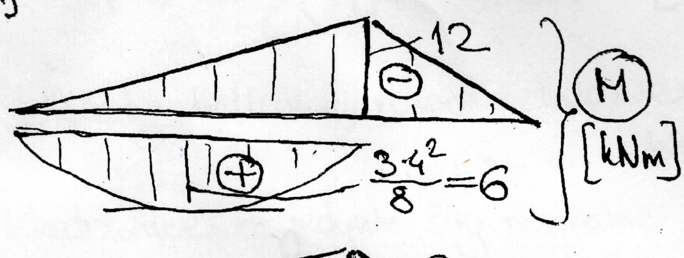


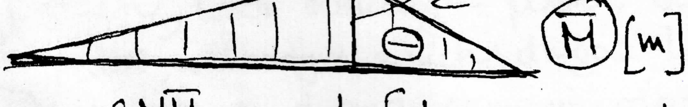
2)
$$\delta = \sum_{i=1}^{5} \frac{S_i \overline{S_i}}{EA_i} l_i = \frac{1}{EA}\left[2 \cdot P \cdot 1 \cdot L + P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot L\sqrt{2}\right] = \frac{2PL}{EA}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

liczbowo: $$\delta = \frac{4{,}828 \cdot 20 \cdot 3}{200 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \cdot 10^{-4}} = 7{,}377 \cdot 10^{-4}\,m = 0{,}0738\,cm$$



* obliczyć ugięcie punktu 1 belki o stałym $EI = 10^4\,kNm^2$





$$\delta = \int_L \frac{M\overline{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 12 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2\right] = \frac{32}{EI} =$$
$$= 0{,}0032\,m = 0{,}32\,cm$$

zadanie: obliczenie + szkic linii ugięcia gdy na odc. B-1 jest $EI \to \infty$ (bardzo duża wartość)

Przedział z $EI \to \infty \Rightarrow V'' = 0$ (zerowa krzywizna – linia prosta) zachodzi $V' \to$ funkcja stała, V – funkcja liniowa