

Czesław Branicki, Tadeusz Chmielewski, Edmund Melerski,
Miroslaw Skowronek, Jerzy Wekezer

ZADANIA Z MECHANIKI BUDOWLI

Tom II

UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

pod redakcją

CZESŁAWA BRANICKIEGO



GDAŃSK 1976

**PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

Roman Kazimierzczak

REDAKTOR SKRYPTÓW

Zdzisław Puhaczewski

RECENZENT

Mieczysław Wizmur

**Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej**

PRINTED IN POLAND

Do nabycia: PP Dom Książki Nr 23 (Gmach Główny Politechniki Gdańskiej,
Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Majakowskiego 11; Nr kodu 80-952)

290

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Nakład 800-35-25 egzempl. Arkuszy wyd. 8,0. Arkuszy druku 7,0.
Papier offsetowy klasy III 70 g. Oddano do druku 9.10.1976 roku. Druk
ukończono w grudniu 1976 r. Zamówienie nr S/601/76. Cena zł 12,-

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Poznańskiej
61-821 Poznań, ul. Ogrodowa 11, tel. 554-25

SPIS TREŚCI

	Nr zadań	Str.
PRZEDMOWA		4
ZADANIA		
1. BELKI CIĄGŁE	1 - 20	6
1.1. Belki na podporach stałych	1 - 14	6
1.2. Belki na podporach sprężystych	15 - 20	9
2. METODA SIŁ	21 - 128	10
2.1. Ramy i łuki	21 - 60	10
2.2. Kratownice	61 - 79	19
2.3. Układy ramowo-kratowe	80 - 90	23
2.4. Wykorzystanie symetrii ustroju, biegun sprężysty, wpływ odkształceń podłużnych	91 - 112	26
2.5. Układy załamane w planie i ruszty	113 - 122	30
2.6. Linie wpływowe układów płaskich	123 - 128	33
3. METODA DEFORMACJI DLA UKŁADÓW PŁASKICH	129 - 189	34
3.1. Ramy nieprzesuwne	129 - 146	34
3.2. Ramy przesuwne	147 - 158	37
3.3. Wykorzystanie symetrii ustroju	159 - 166	39
3.4. Linie wpływowe	167 - 174	40
3.5. Metody macierzowe	175 - 189	42
4. METODA CROSSA	190 - 223	47
4.1. Ustroje nieprzesuwne	190 - 204	47
4.2. Ramy przesuwne	205 - 210	50
4.3. Wykorzystanie symetrii ustroju	211 - 217	51
4.4. Ramy o nieprostokątnej siatce prętów	218 - 223	53
5. PRZEMIESZCZENIA W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH	224 - 260	54
5.1. Twierdzenia redukcyjne	224 - 245	54
5.2. Kontrole obliczeń statycznych	246 - 260	57
ODPOWIEDZI		62

PRZEDMOWA

Tom II skryptu, zawierającego zadania z odpowiedziami bez rozwiązań z dziedziny mechaniki budowli, napisany jest w myśl tych samych założeń, jak i tom I.

Tak więc skrypt ma służyć studiującym przedmiot „Mechanika Budowli” do samodzielnego sprawdzania swoich umiejętności w rozwiązywaniu ustrojów statycznie niewyznaczalnych. Zadania dobrane są w takiej skali trudności, by czas potrzebny na rozwiązanie pojedynczego tematu nie przekroczył 30 min. Zadania trudniejsze o czasie rozwiązywania do 1 godz. oznaczono przez umieszczenie ich numerów w ramce.

Zbiór nie zawiera zadań o rozbudowanej stronie numerycznej analizy, jak np.: wyznaczanie sił wewnętrznych lub linii wpływu w ustrojach o zmiennym funkcyjnie momencie bezwładności. Dołączono natomiast do skryptu kilkanaście zadań w ujęciu macierzowym dla metody odkształceń oraz zadania na kontrolę poprawności gotowych rozwiązań. W opracowaniu pominięto zadania dotyczące analizy kinematycznej budowy ustrojów prętowych.

W odpowiedziach, jeżeli rysunki wykresu momentów nie są oznaczone znakami, przyjęto zasadę rysowania tych wykresów po stronie „włókien” rozciąganych.

Podstawy teorii układów statycznie niewyznaczalnych podają podręczniki [1] i [2] oraz [4]. Zadanie z rozwiązaniami można znaleźć w zbiorze [3].

Udział poszczególnych autorów w opracowaniu zbioru przedstawia się następująco: T.Chmielewski opracował p. 1.1 i 2.5; E.Melerski opracował rozdział 3 (bez p. 3.5); M.Skowronek opracował rozdział 4 (bez p. 4.4); J.Wekezer jest autorem pp. 2.2 i 2.4.

Cz.Branicki podał tematy większości zadań, opracował pp.: 1.2, 2.1, 2.3, 2.6, 3.5, 4.4, rozdz. 5, rozwiązał szereg zadań w pozostałych punktach i przeprowadził ogólną redakcję zbioru.

Autorzy nie wykluczają możliwości, że drukowana postać zbioru będzie zawierała omyłki. Będziemy niezmiernie wdzięczni za nadsyłane nam sprostowania i uwagi krytyczne.

Szczególne słowa podziękowania należą się prof. R.Kazimierzczakowi za życzliwość i wyrozumiałość okazywaną w trakcie przedłużającej się redak-

ojs skryptu, spowodowanej koniecznością wielokrotnych sprawdzeń i zmian dostosowujących opracowanie do zmieniających się programów studiów.

Dziękujemy również koledze M. Trojanowskiemu za staranne wykonanie rysunków.

Cz.Braniaki

-
- [1] A.Chudzikiewicz - Statyka Budowli, cz.II, PWN, Warszawa 1975.
 - [2] Z.Dyłał, E.Krzemińska-Niemiec, F.Filip - Mechanika Budowli, t. 1/2 PWN, Warszawa 1974.
 - [3] Z.Cywiński - Zbiór zadań z mechaniki budowli, PWN, Warszawa 1965.
 - [4] W.Nowacki - Mechanika Budowli, PWN, Warszawa 1974.

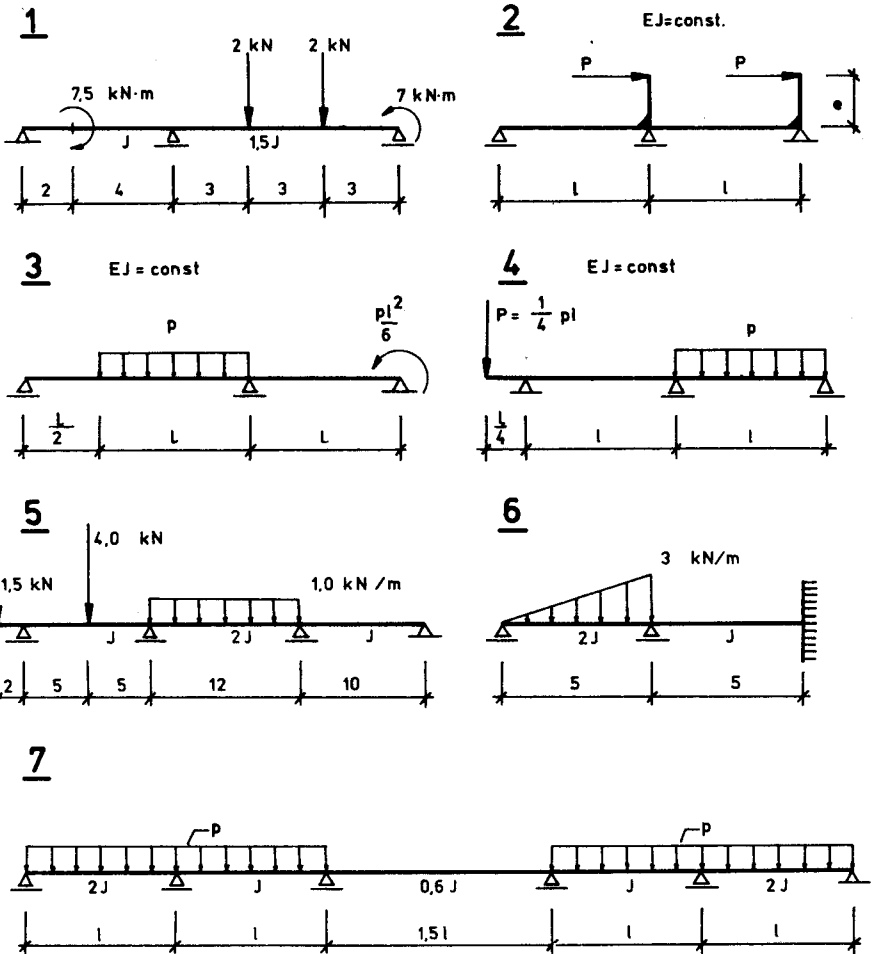
ZADANIA

1. BELKI CIĄGŁE

1.1. BELKI NA PODPORACH STAŁYCH

Zadania 1-7. Dla danych schematów belek ciągłych wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił tnących.

W zadaniu nr 7 wykorzystać symetrię układu.

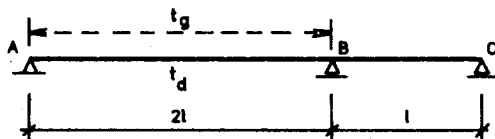


Rys. 1

8. Przeszło AB belki ciągłej poddane jest działaniu nierównomiernego ogrzania różnicą temperatur $\Delta t = t_d - t_g$.

Oba przęsła AB i BC mają identyczny przekrój prostokątny o szerokości b i wysokości h . Wyznaczyć wykres momentów i sił tnących, zakładając, że dane są: moduł sprężystości E oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej α_t .

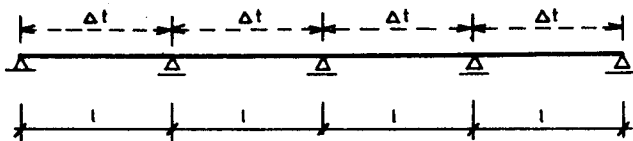
Wykazać, że dla danych zadania ekstremalne naprężenia normalne od zginania nie zależą od wymiarów przekroju poprzecznego.

8 $EJ = \text{const}$ 

Rys.2

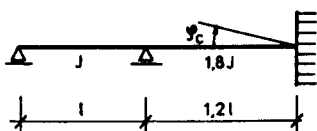
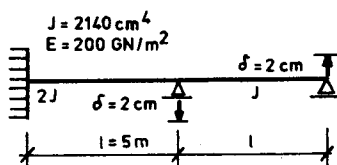
9. Czteroprzęsłowa belka ciągła poddana jest nierównomiernemu ogrzaniu we wszystkich przęsłach. Wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących, przyjmując jako zadane i równe dla wszystkich przęseł wielkości: α_t , $\Delta t = t_d - t_g$, EJ , h , l .

Wykorzystać symetrię układu.

9 $EJ = \text{const}$ 

Rys.3

10-11. Wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących od zaznaczonych osiadań podpór.

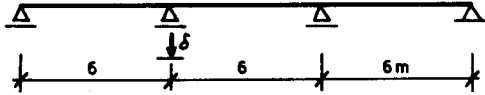
1011

Rys.4

12. Obliczyć wielkość δ dopuszczalnego osiadania podpory B belki ciągłej przy warunku nieprzekroczenia przez ekstremalną wartość momentu zginającego wielkości 100 kN·m.
Szywność belki EJ przyjąć równą 100 MN·m².

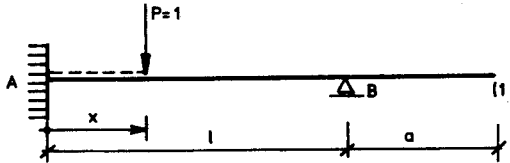
12

EJ = const



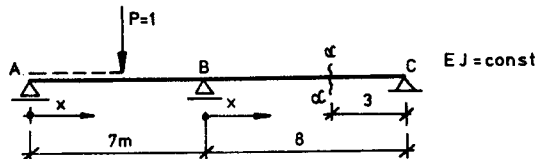
Rys.5

13. Wyznaczyć równanie linii wpływowej momentu utwierdzenia i obliczyć jej rzędne: ekstremalną w przedziale A-B oraz na końcu wspornika.

13

Rys.6

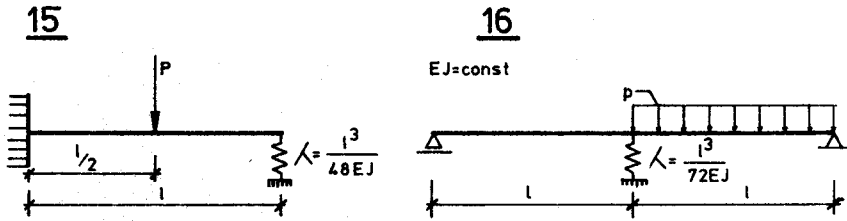
14. Wyznaczyć równania linii wpływowej momentu podporowego i obliczyć rzędne linii wpływowej M oraz T dla punktów środkowych (1) i (2) przęseł A-B i B-C.

14

Rys.7

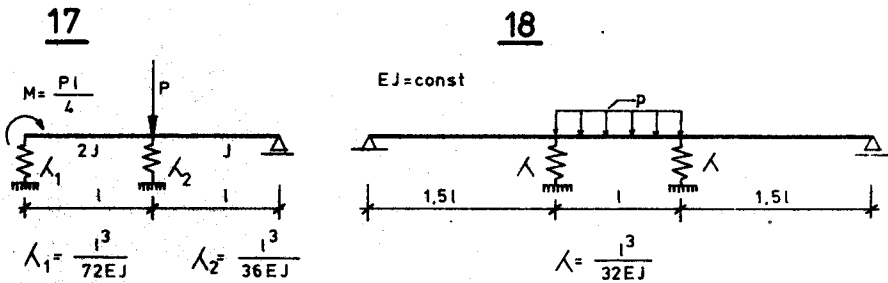
1.2. BELKI NA PODPORACH SPRĘŻYSTYCH^{x)}

15-16. Wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących.

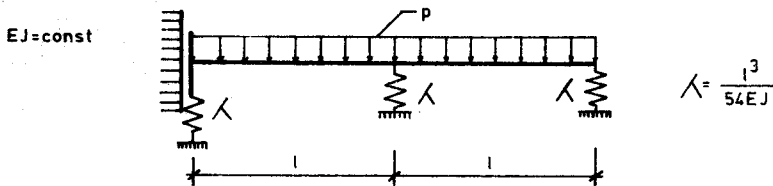


Rys.8

17-19. Dla danych belek podpartych podporami sprężystymi wyznaczyć wykresy momentów. Porównać otrzymany wykres z rozwiązaniem dla podpór niepodpartych.



19



Rys.9

^{x)} Zadania podane w tym punkcie można rozwiązywać klasyczną metodą sił. Najdogodniej jest wtedy przyjmować za niewiadome momenty podporowe. Całki metody sił oblicza się ze wzorów:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \sum_j R_{ij} R_{kj} \lambda_j$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

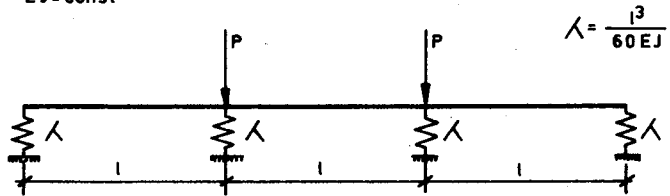
$$k = 0, 1, \dots, n$$

R_{kj} - jest reakcją w j-tej podporze sprężystej od k-tego stanu, zaś λ jest charakterystyką podpory:

$$\lambda = \frac{l^3}{\alpha EJ} \quad (\alpha - \text{stała liczbowa}).$$

20. Trójprzęsłowa belka ciągła o równych rozpiętościach l podparta jest czterema podporami sprężystymi o jednakowych charakterystykach. Belka obciążona jest symetrycznie dwoma równymi siłami ustawionymi na środkowych podporach.

Wyznaczyć wykres momentów. Wykazać bez przeprowadzania obliczeń, że dla ustawienia tych samych sił na podporach skrajnych otrzymamy wykres o znaku przeciwnym do otrzymanego poprzednio.

20 $EJ = \text{const}$ 

Rys.10

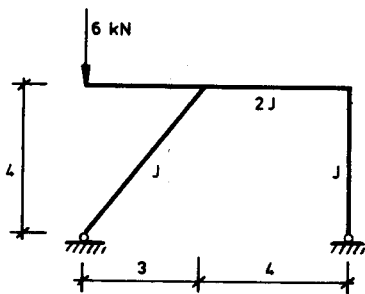
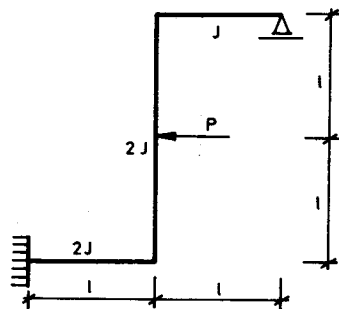
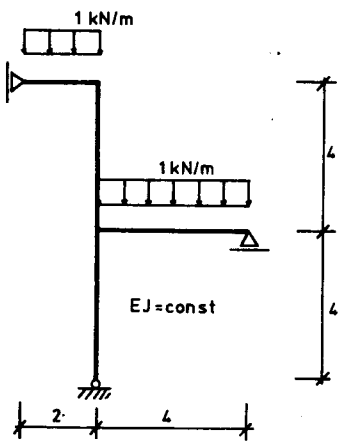
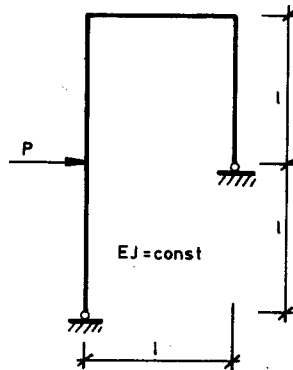
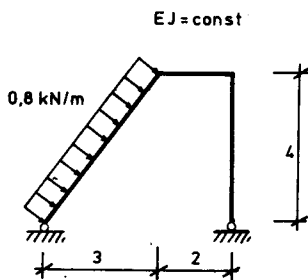
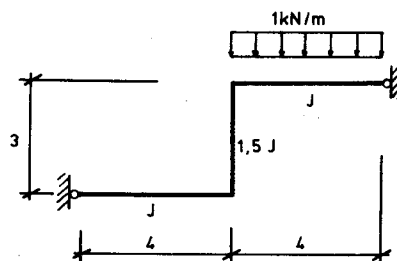
2. METODA SIŁ

2.1. RAMY I ŁUKI^{x)}

21-29. Dla danych ram wyznaczyć wykresy momentów sił tnących i normalnych.

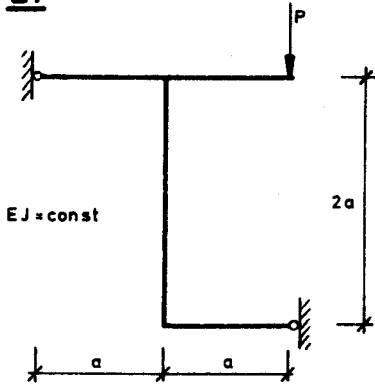
^{x)} Przemieszczenia δ_{ik} obliczać pomijając wpływ odkształceń podłużnych osi prętów oraz wpływ odkształceń od ścinania, tzn. ze wzoru:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds .$$

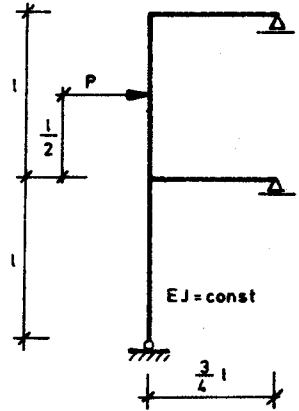
212223242526

Rys.11

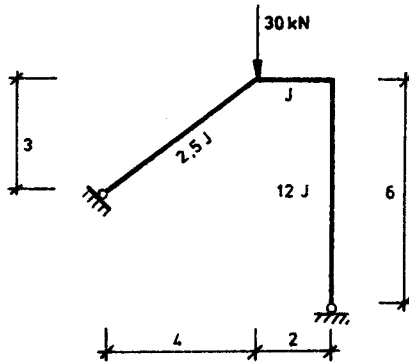
27



28



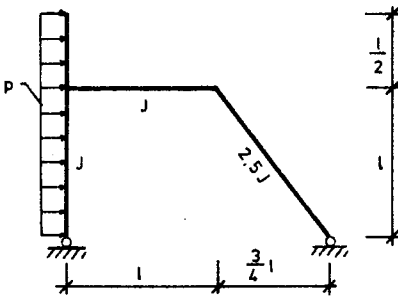
29



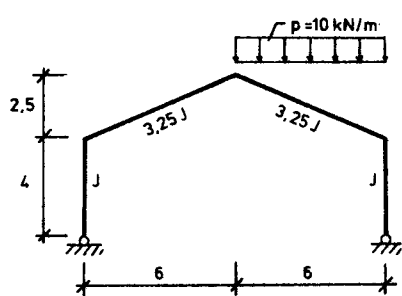
Rys.12

30-34. Wyznaczyć wykresy momentów zginających.

30

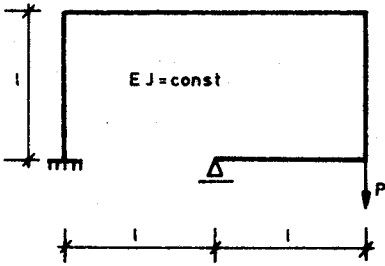


31

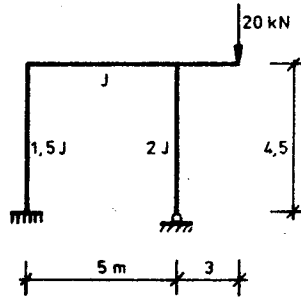


Rys.13

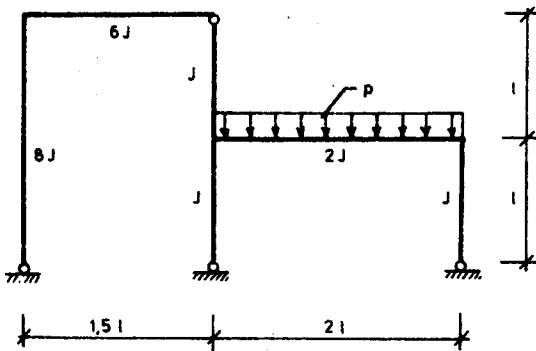
32



34



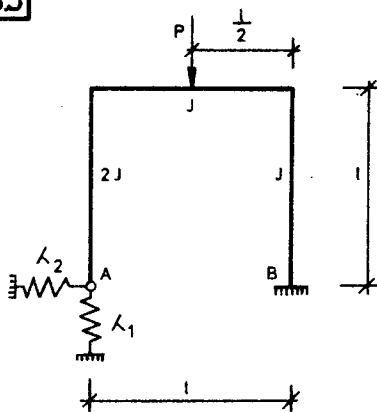
33



Rys. 14

35. Lewy słup ramy przedstawionej na rys.15 podparty jest sprężystością. Charakterystyki sprężystego podparcia wynoszą $\lambda_1 = l^3/(24 EJ)$ dla kierunku pionowego oraz $\lambda_2 = l^3/(4 EJ)$ dla kierunku poziomego.

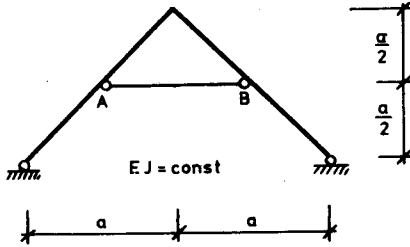
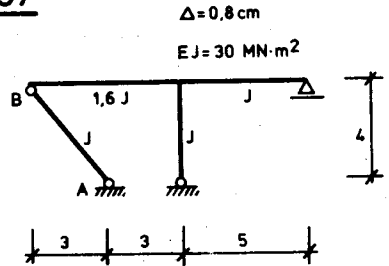
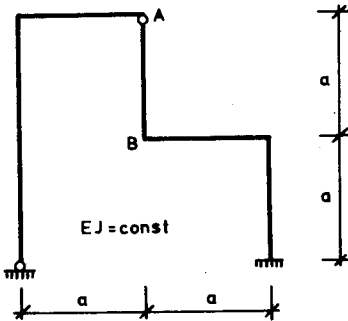
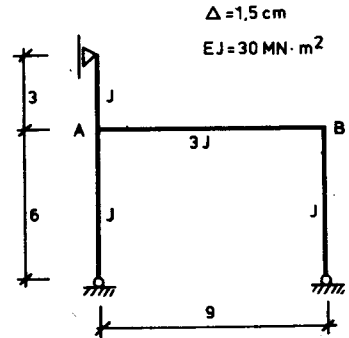
35



Rys. 15

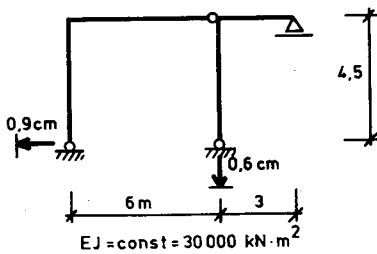
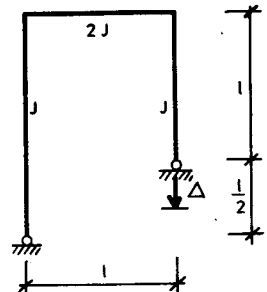
Wyznaczyć wykres momentów uwzględniając podatność podpory A. Porównać otrzymany wykres z rozwiązaniem dla przypadku podpory niepodatnej.

36-39. Dane ustroje zmontowano z błędem. Pręt A-B wmontowano dłuższy o wielkość Δ . Wyznaczyć wykres momentów.

36373839

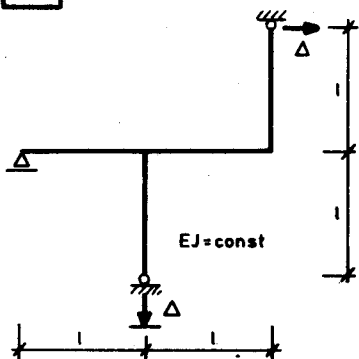
Rys.16

40-44. Dla danych schematów ram, poddanych działaniu zaznaczonych osiadań podpór, wyznaczyć wykresy momentów.

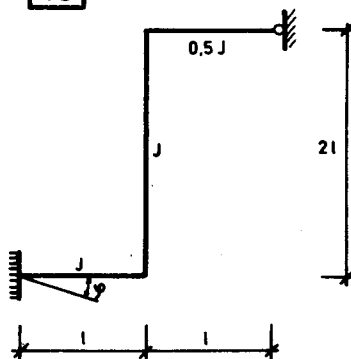
4041

Rys.17

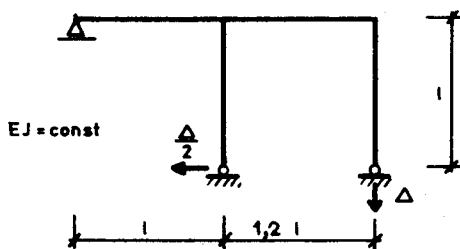
42



43



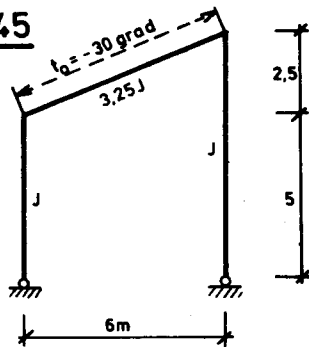
44



Rys.18

45-47. Oznaczone pręty poniższych schematów ram poddane są równomiernemu ogrzaniu do temperatury t_0 [°C] względem temperatury montażu. Wyznaczyć wykresy momentów.

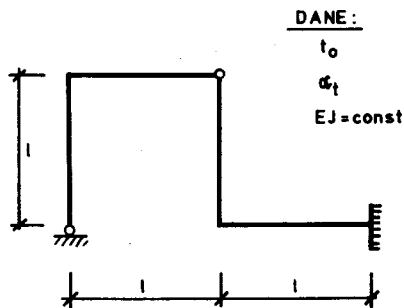
45



$$EJ = 6000 \text{ kN m}^2$$

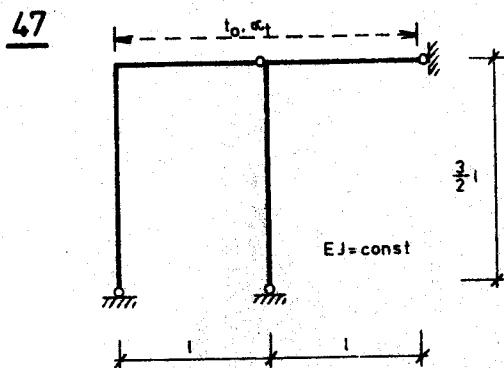
$$\alpha = 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$$

46



wszystkie pręty ogrzane równomiernie

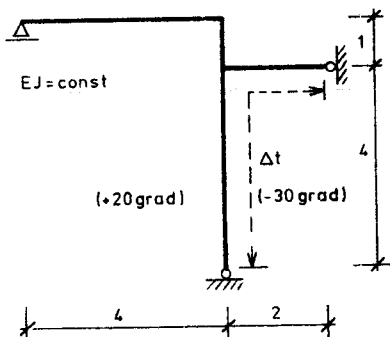
Rys.19



Rys.20

48-50. Wznaczone pręty danych ram poddane są wpływowi nierównomiernego nagrzania do różnicy temperatur Δt [°C] względem obu stron przekroju o wysokości h . Wyznaczyć wykresy momentów.

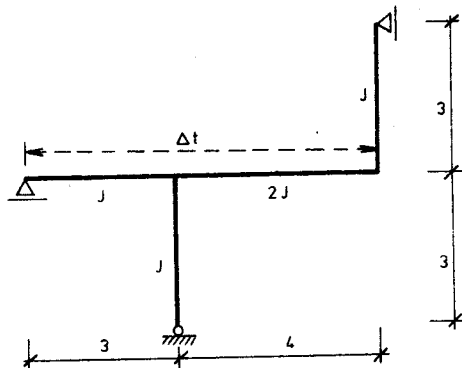
48



$h = 0,3 \text{ m}$
 $\alpha_t = 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$
 $EJ = 20\,000 \text{ kN}\cdot\text{m}$

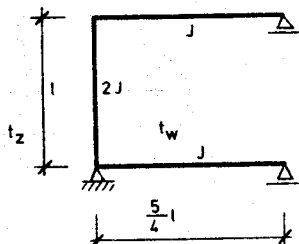
49

$\Delta t = t_d - t_g = 40 \text{ grad}$
 $\alpha_t = 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$
 $EJ = 2000 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $h = 0,2 \text{ m}$



Rys.21

50

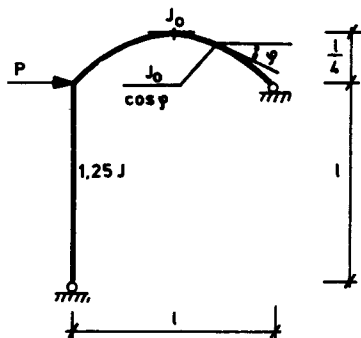


DANE

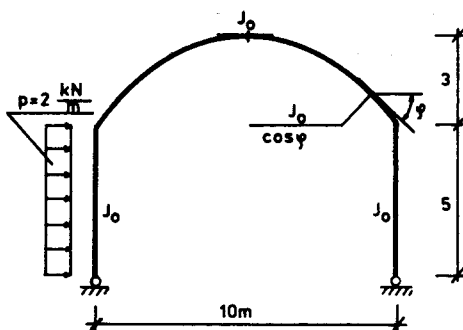
$t_w - t_z = \Delta t$ wszystkie pręty
 α_t
 EJ, h, l

51-54. Dla poniższych schematów statycznych, zawierających paraboliczne pręty łukowe, wyznaczyć wykresy momentów. Wpływ odkształceń podłużnych pominąć.

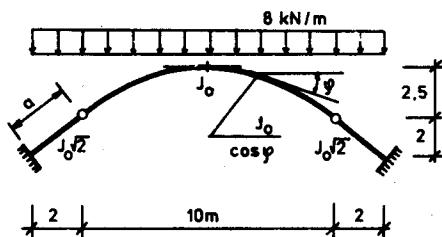
51



52

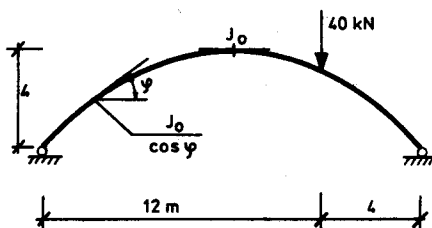


53



na odcinku a - prosta

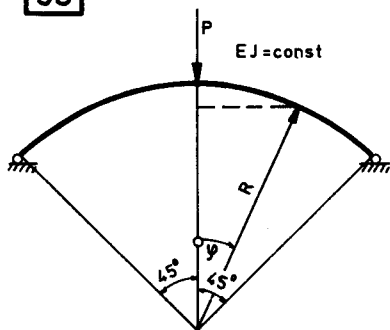
54



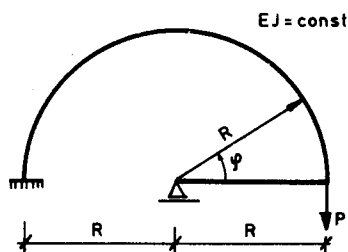
Rys.22

55-58. Dla danych układów prętowych, zawierających kołowe pręty łukowe o promieniu R, wyznaczyć wykresy momentów zginających. Wpływ odkształceń podłużnych pominąć.

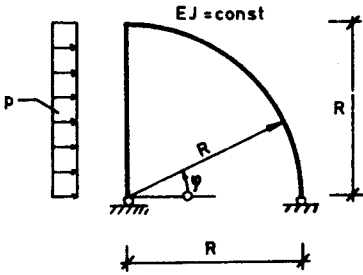
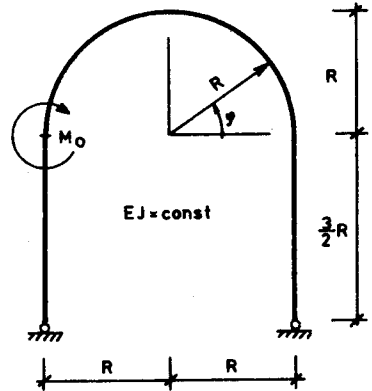
55



56

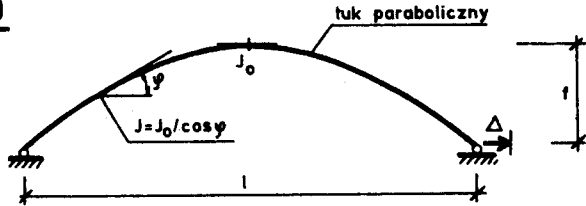


Rys.23

5758

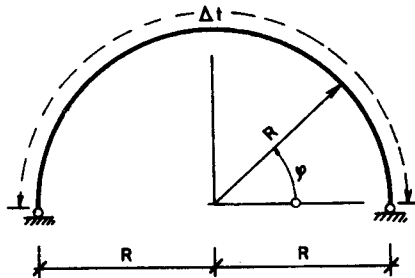
Rys.24

59. Dla danego łuku parabolicznego wyznaczyć przebieg momentów zginających spowodowanych poziomym osiadczeniem podpory.

59

Rys.25

60. Dla danego łuku kołowego wyznaczyć przebieg momentów zginających spowodowanych nierównomiernym nagrzaniem ustroju do różnicy temperatur Δt .

60

Rys.26

DANE:

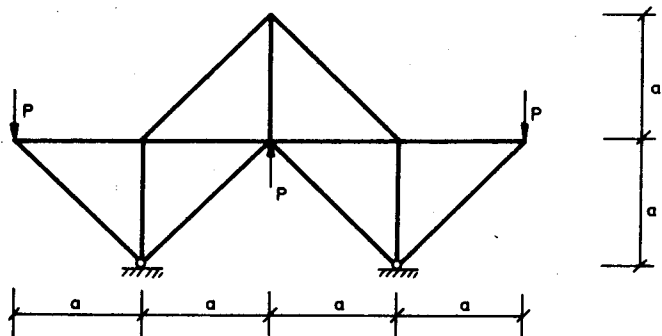
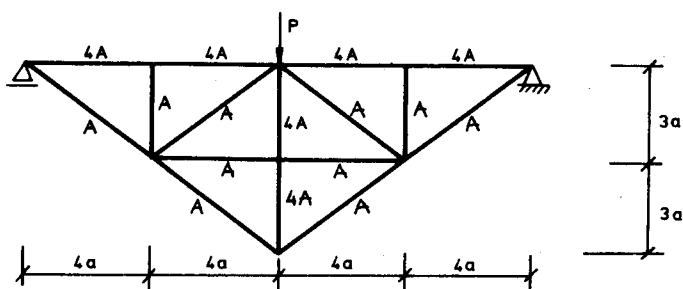
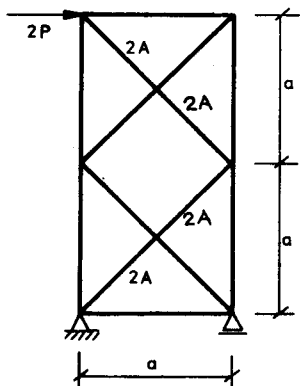
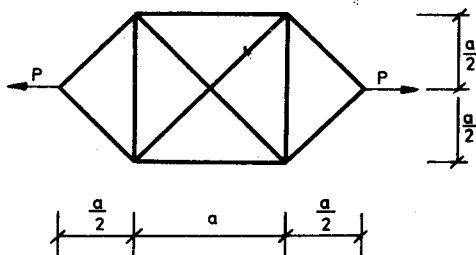
$$EJ = \text{const}$$

$$\Delta t = t_d - t_g$$

$$R, h, \alpha_t$$

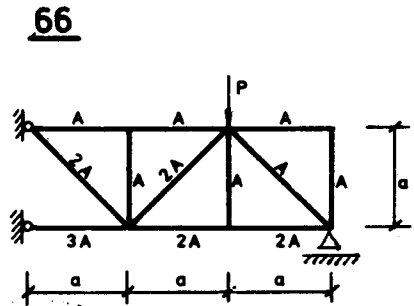
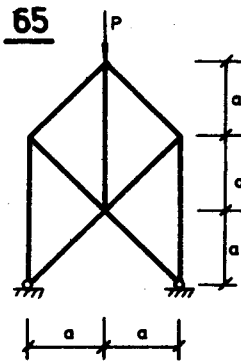
2.2. KRATOWNICE

61-66. Dla danych schematów kratownic statycznie niewyznaczalnych obliczyć siły we wszystkich prętach ustroju.^{x)}

61626364

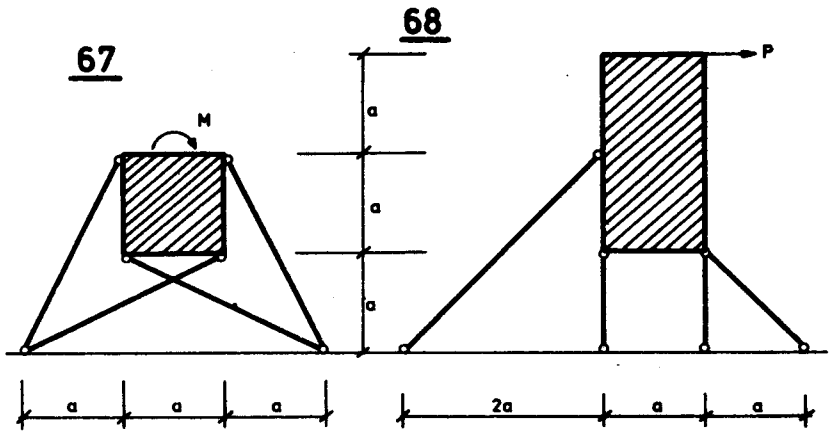
Rys.27

^{x)} We wszystkich zadaniach tego podrozdziału przyjmować dla prętów nieopisanych przekrój równy A .



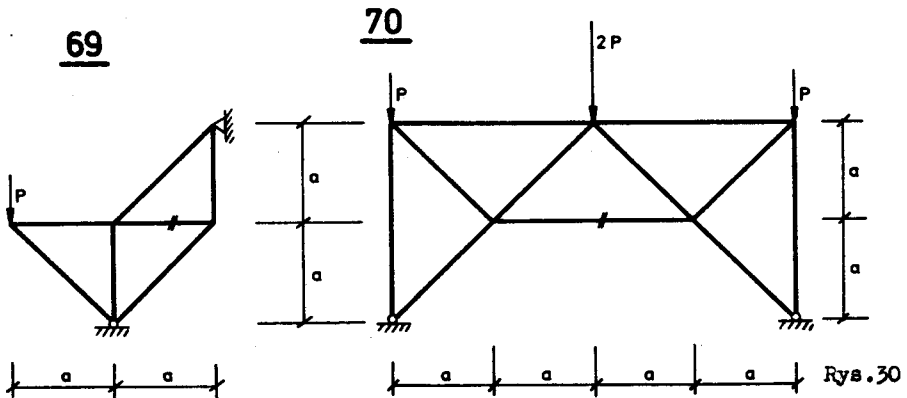
Rys.28

67-68. Obliczyć siły w prętach podpierających nieskończenie sztywne tarcze.



Rys.29

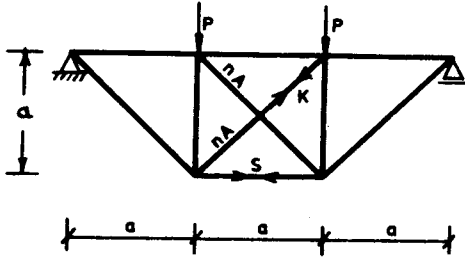
69-70. Obliczyć siły w zaznaczonych prętach kratownic.



Rys.30

71. Przedyskutować zmienność sił S oraz K kratownicy z rys.31 względem parametru n z przedziału $(0, \infty)$ określającego przekrój krzyżulców. Pozostałe pręty kraty posiadają przekrój stały i równy A .

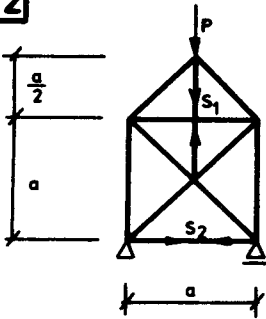
71



Rys.31

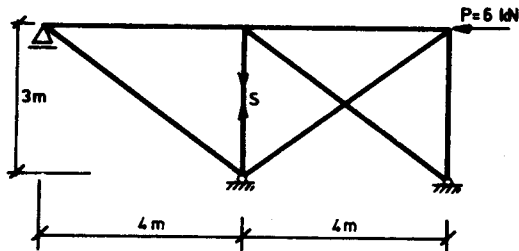
- 72-73. Obliczyć siły w zaznaczonych prętach kratownicy.

72



Rys.32

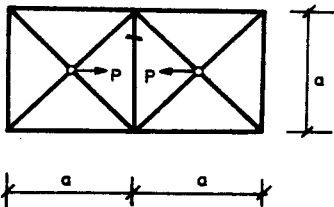
73



Rys.33

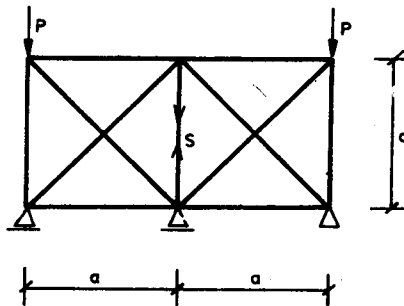
- 74-75. Obliczyć siłę w zaznaczonym pręcie kratownicy. Wykorzystać symetrię ustroju (niewiadome grupowe).

74

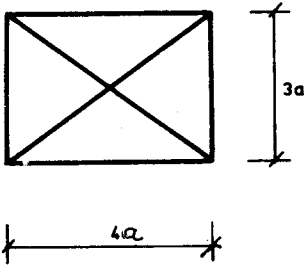


Rys.34

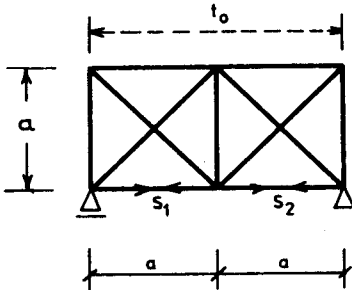
75



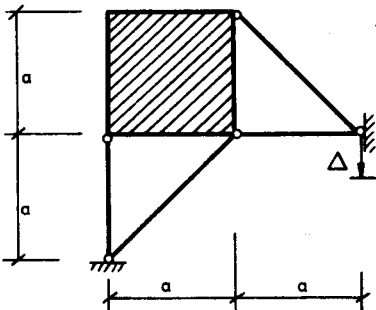
Rys.35

76

Rys.36

77

Rys.37

78

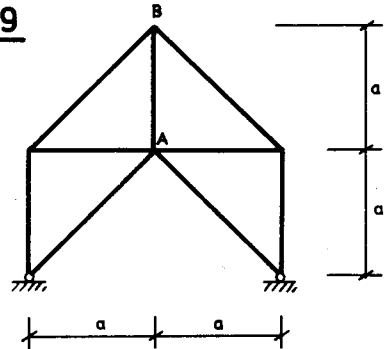
Rys.38

79. Obliczyć siły w prętach ustroju powstałe wskutek wmontowania pręta AB o długości $a + \Delta$.
Dane: a, Δ, EA .

76. Obliczyć siły w prętach kratownicy, której pręty obwodowe zostały ogrzane do temperatury t_0 względem temperatury montażu.
Dane: $EA, \alpha t, a, t_0$.

77. Pas górny kratownicy poddany jest równomiernemu nagrzaniu do temperatury t_0 względem temperatury montażu. Obliczyć siły S w zaznaczonych prętach. Wykorzystać symetrię ustroju.

78. Obliczyć siły w prętach ustroju wywołane osiadaniem podpory B pionowo w dół o wartość Δ . Dane: EA, a, Δ . Tarczę traktować jako nieskończenie sztywną.

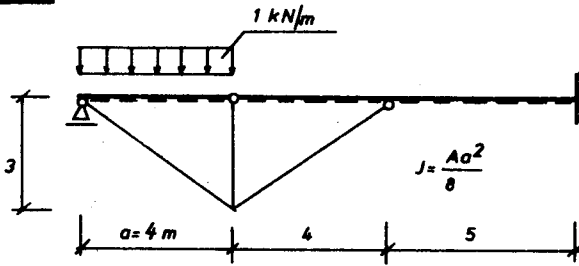
79

Rys.39

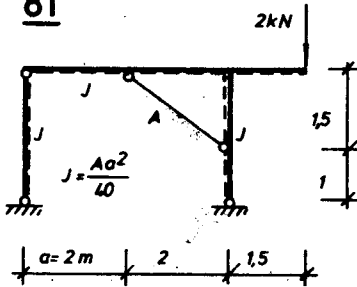
2.3. UKŁADY RAMOWO-KRATOWE

80-84. Dla danych ustrojów ramowo-kratowych wyznaczyć wykresy momentów oraz obliczyć siły w prętach wiotkich. We współczynnikach δ_{ik} uwzględnić wpływ odkształceń podłużnych prętów kratowych.

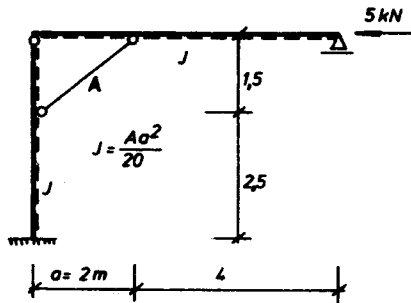
80



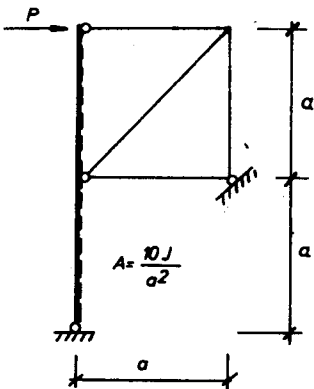
81



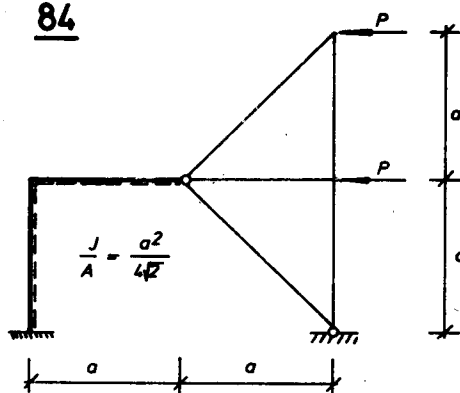
82



83

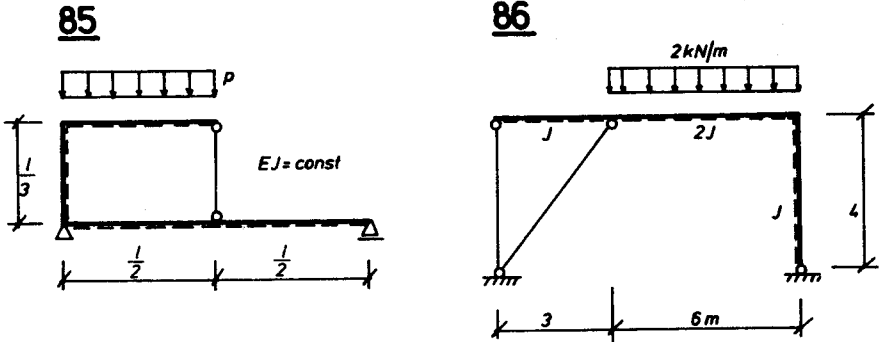


84



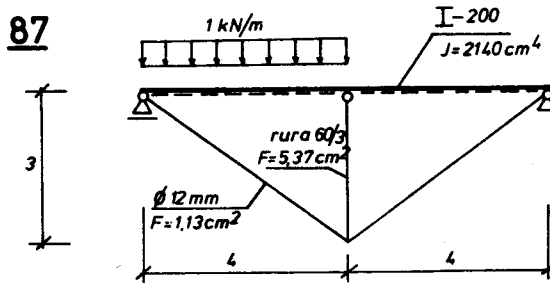
Rys.40

85-86. Wyznaczyć wykresy momentów oraz siły w prętach kratowych dla danych ustrojów. Pominąć wpływ odkształceń podłużnych w prętach wiotkich ($EA \rightarrow \infty$).



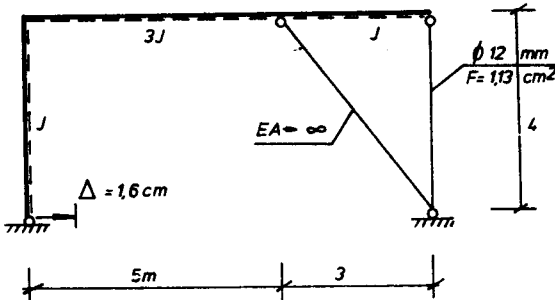
Rys.41

87. Belka AB, wykonana z profilu stalowego I-200 ($J = 2140 \text{ cm}^4$), została wzmocniona cięgnem $\varnothing 12 \text{ mm}$ ($F_1 = 1,13 \text{ cm}^2$) rozpartym słupkiem rurowym o przekroju 60/3 mm ($F_2 = 5,37 \text{ cm}^2$). Wyznaczyć wykres momentów w belce i siły w prętach wzmacniających z uwzględnieniem odkształcalności tych ostatnich, przyjmując $E = 210 \text{ GN/m}^2$. Wyniki porównać z rozwiązaniem nie uwzględniającym wpływów odkształcalności cięgna i słupka.



Rys.42

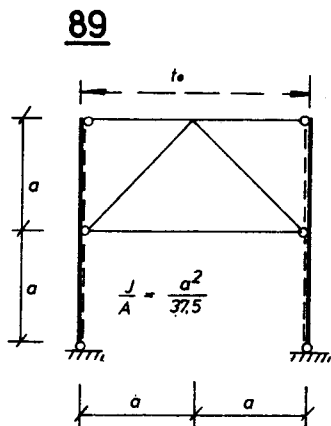
88



Rys.43

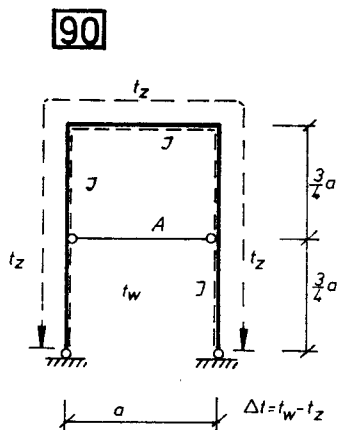
88. Wyznaczyć wykres momentów i siły w prętach spowodowane poziomym przemieszczeniem się lewej podpory o $\Delta = 1,6 \text{ cm}$. Sztywność belki $EJ = 40\,000 \text{ kNm}^2$, sztywność podłużna słupka $EA_1 = 23\,700 \text{ kN}$, odkształcalność zastrzału pominąć.

89. Wyznaczyć wykres momentów i siły w prętach poniższego ustroju, którego pas górny został równomiernie ogrzany do temperatury t_0 względem montażu. Dane: α_z , t_0 , EJ , a , $J/A = a^2/37,5$.



Rys.44

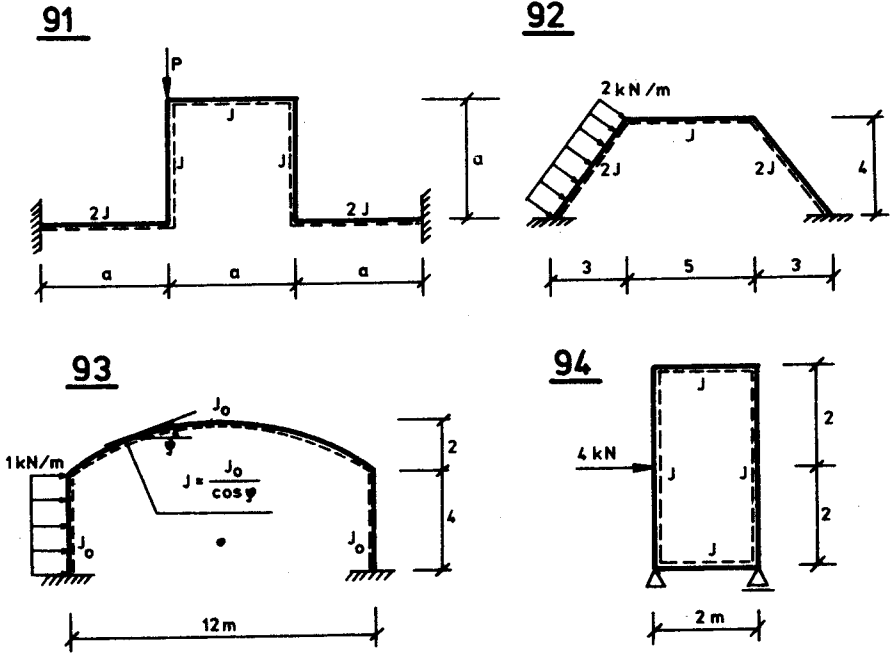
90. Wyznaczyć wykres momentów dla danego ustroju, którego wszystkie pręty ramowe podlegają nierównomiernemu nagrzaniu. Dane: $EJ = \text{const}$, $h = \text{const}$, $\Delta t = t_w - t_z$, α_t , $J/A = a^2/64$.



Rys.45

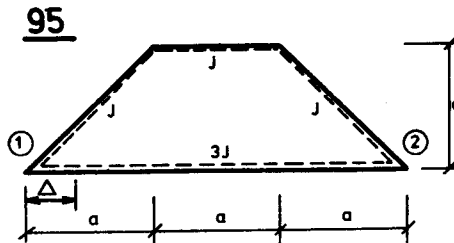
2.4. WYKORZYSTANIE SYMETRII USTROJU, BIEGUN SPRĘŻYSTY,
WPLYW ODKSZTAŁCEŃ PODŁUŻNYCH

91-94. Rozwiązać dane ustroje przyjmując układ podstawowy w postaci bieguny sprężystego.



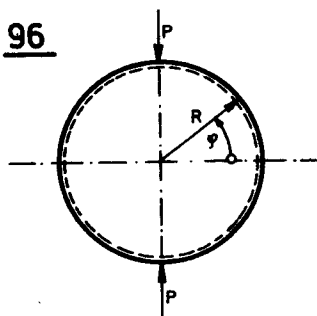
Rys.46

95. Zamkniętą ramę trapezową zmontowano z błędem montażowym - pręt 1 - 2 wmontowano krótszy o Δ . Wyznaczyć wykres momentów.

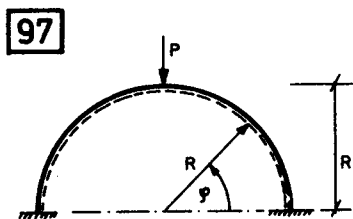


Rys.47

96-97. Dla danych ustroji o osi kolistej wyznaczyć wykresy momentów. W zadaniu 96 podać równanie momentów.

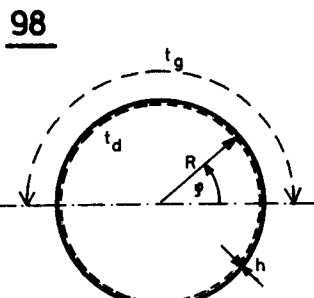


Rys.48



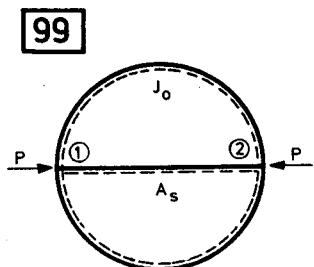
Rys.49

98. Pierścień kolisty o stałym momencie bezwładności i wysokości przekroju h podlega wpływom nierównomiernego nagrzania na połowie obwodu. Wyznaczyć wykres momentów. Dane: R , h , EJ , α_t , $\Delta_t = t_d - t_g$.



Rys.50

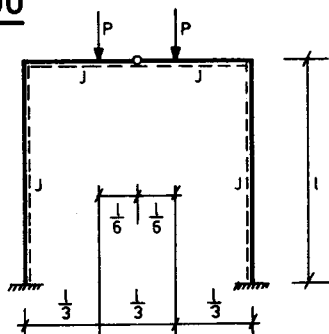
99. Dwukomorowy pierścień kolisty o stałym momencie bezwładności J_o ściśnięty jest siłami P wzdłuż pręta 1-2. Wyznaczyć wykres momentów uwzględniając odkształcalność podłużną pręta prostego; odkształcalność podłużną prętów zakrzywionych pominąć. Przyjąć stosunek $J_o/A_s = r^2/k$, gdzie k jest dużą liczbą - rzędu 10^4 .



Rys.51

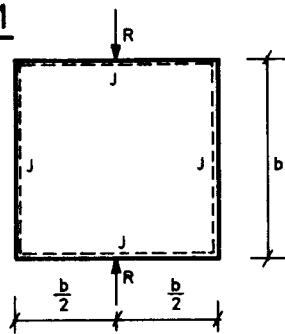
100-104. Wyznaczyć wykresy momentów dla danych układów ramowych wykorzystując symetrię układu i obciążenia.

100



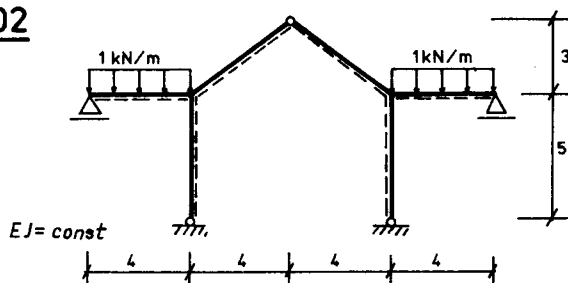
Rys. 52

101



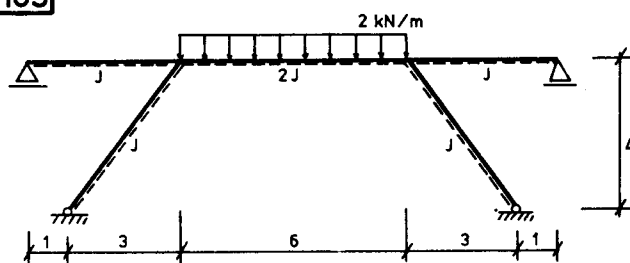
Rys. 53

102



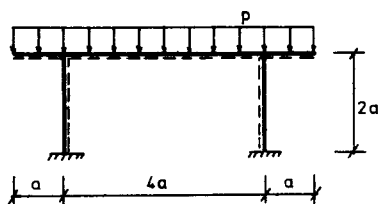
Rys. 54

103



Rys. 55

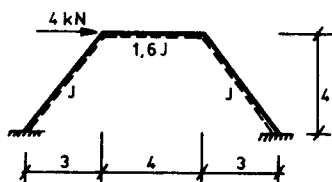
104



Rys. 56

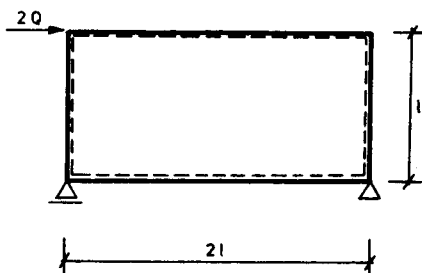
105-109. Wyznaczyć wykresy momentów dla danych układów ramowych wykorzystując symetrię układu i antysymetrię obciążenia. Wykazać, że zadania 106, 107 redukują się do schematów statycznie wyznaczalnych.

105

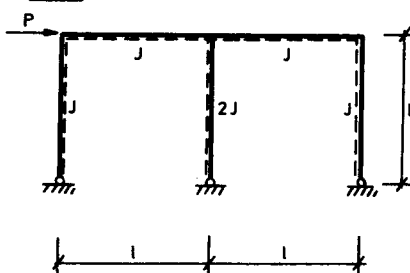


Rys. 57

106

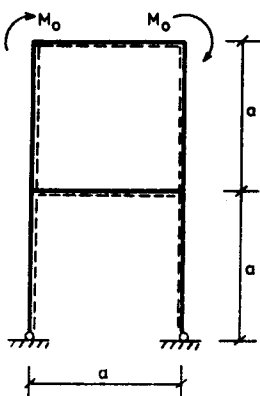


107

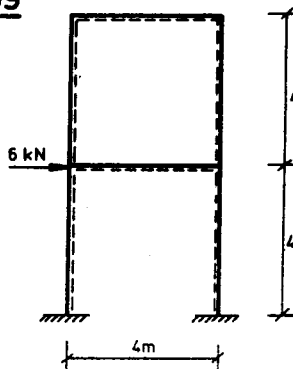


Rys. 58

108



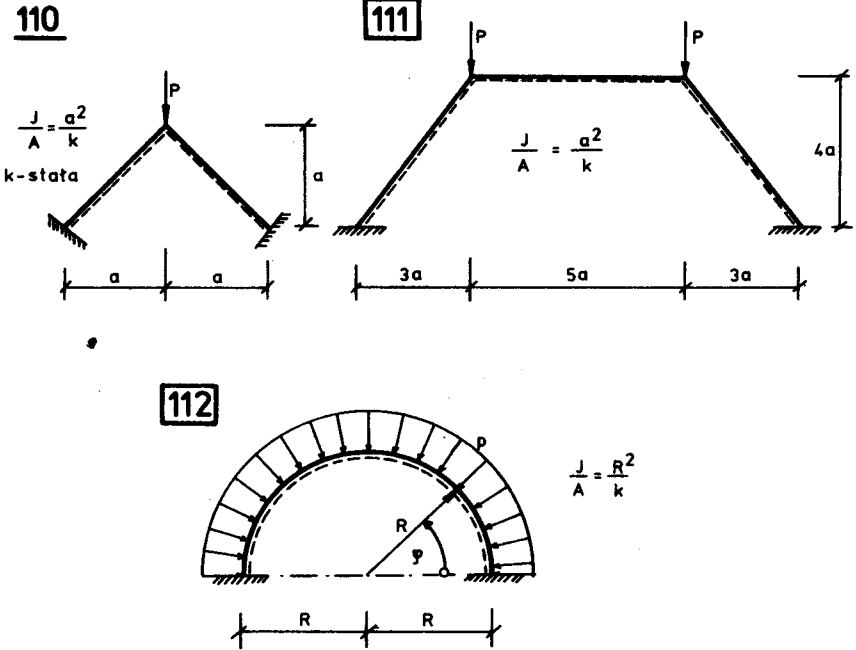
109



Rys. 59

110-112. Dla danych układów o osi pokrywającej się z linią ciśnień od zadanego obciążenia wyznaczyć wykresy momentów z uwzględnieniem odkształcalności podłużnej osi ustroju.

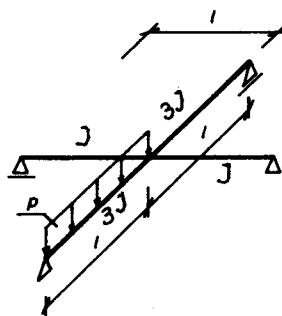
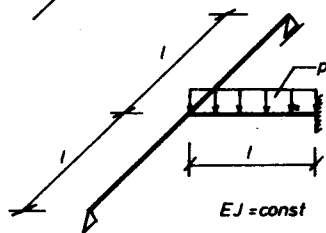
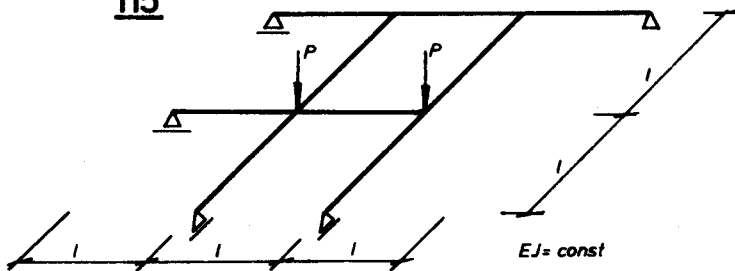
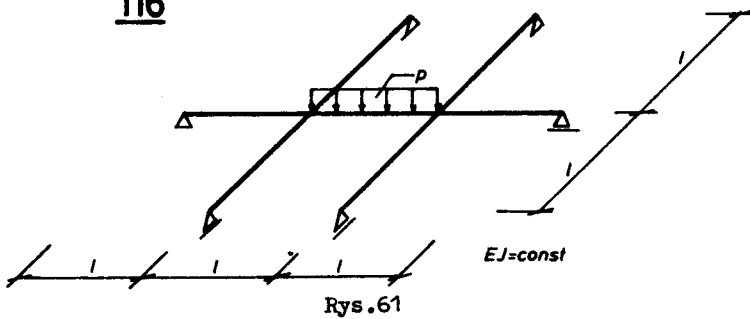
Wskazówka: układ podstawowy przyjmować tak, by zanikał wykres M_0 ; parametr k jest liczbą o wielkości rzędu 10^4 .



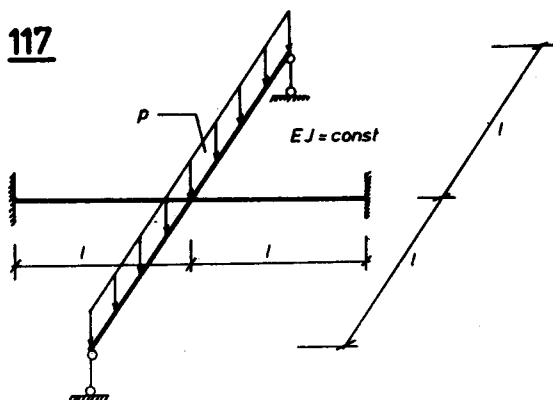
Rys.60

2.5. UKŁADY ZAŁAMANE W PŁANIE I RUSZTY

113-117. Dla danych rusztów wyznaczyć wykresy momentów od zadanego obciążenia zewnętrznego. Belki w węzłach traktować jako połączone tylko więzem pionowym. W zadaniu 117 przyjąć układ podstawowy statycznie niewyznaczalny.

113**114****115****116**

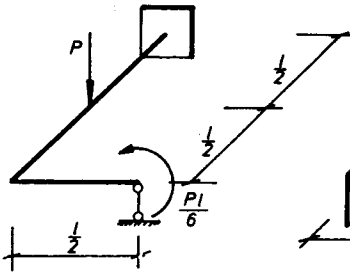
Rys. 61

117

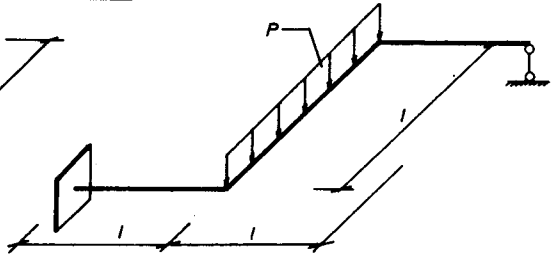
Rys. 62

118-122. Dla danych układów załamanych w planie wyznaczyć wykresy zginających momentów poprzecznych oraz momentów skręcających. W zadaniu 120 wykorzystać symetrię ustroju i obciążenia.

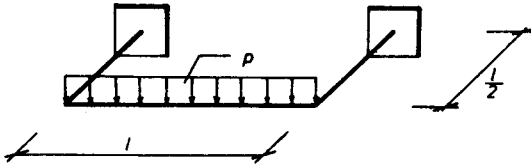
118 $EJ/GJ_S=3$



119 $EJ/GJ_S=2$

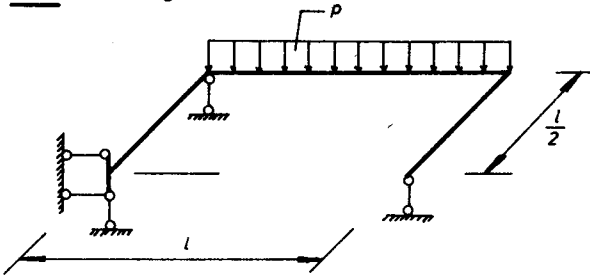


120 $EJ/GJ_S=3$

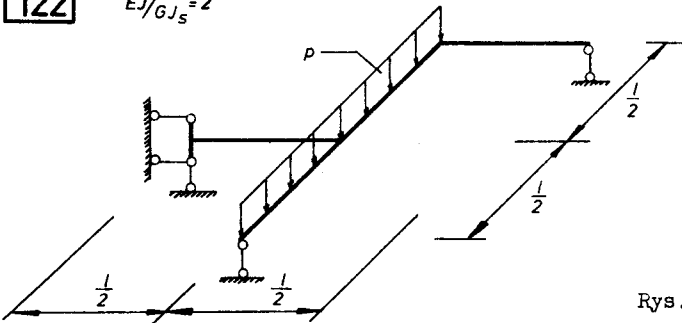


Rys. 63

121 $EJ/GJ_S=2$



122 $EJ/GJ_S=2$

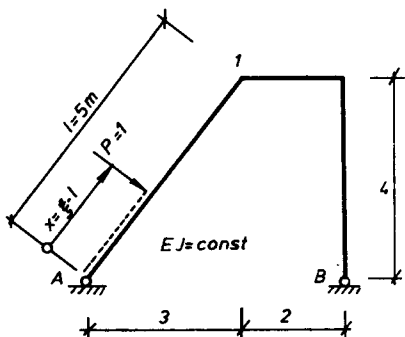


Rys. 64

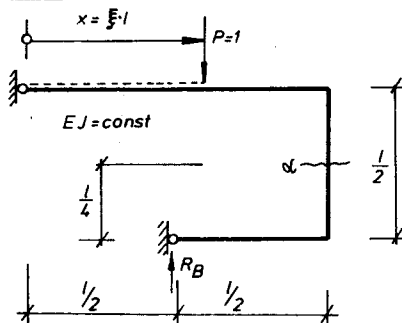
2.6. LINIE WPŁYWOWE UKŁADÓW PŁASKICH

123-126. Dla danych układów ramowych wyznaczyć równania linii wpływowych zaznaczonych wielkości, pochodzących od poruszającej się siły jednostkowej.

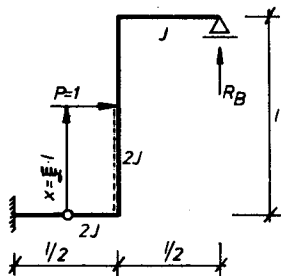
123 l.w. M_1



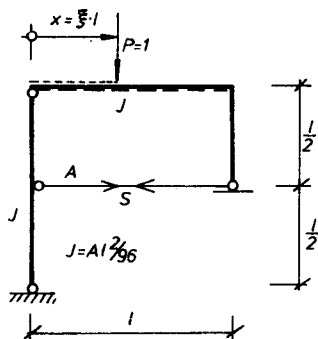
124 l.w. R_B, M_α



125 l.w. R_B



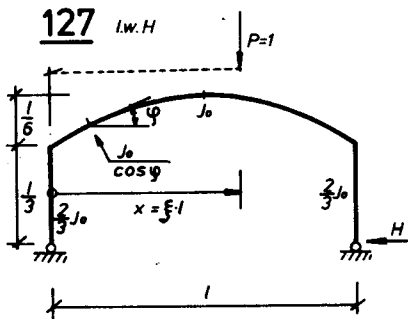
126 l.w. S



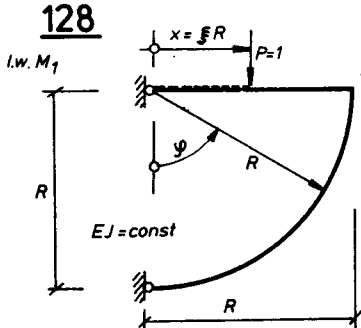
Rys.65

127-128. Dla danych układów łukowych wyznaczyć równania linii wpływowych zaznaczonych wielkości statycznych.

127 l.w. H



128 l.w. M_1



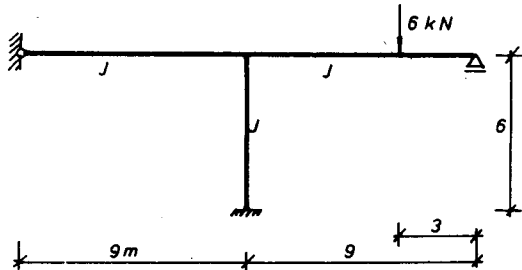
Rys.66

3. METODA DEFORMACJI DLA UKŁADÓW PŁASKICH

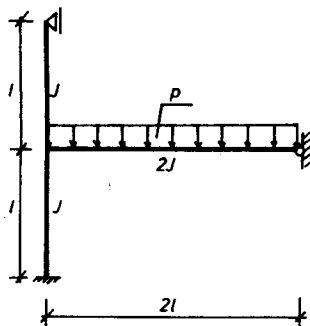
3.1. RAMY NIEPRZESUWNE

129-132. Dla danych układów ramowych wyznaczyć - stosując metodę deformacji - wykresy momentów.

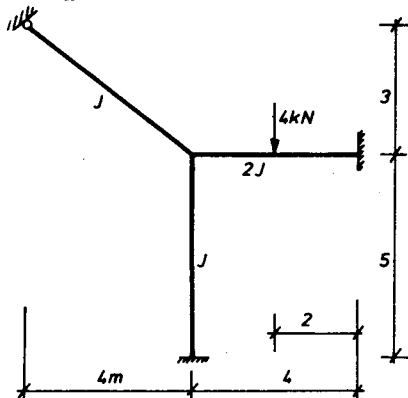
129



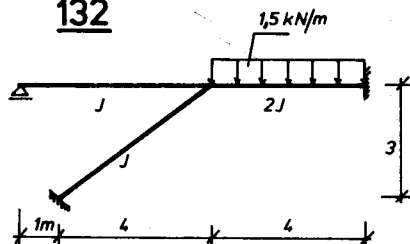
130



131



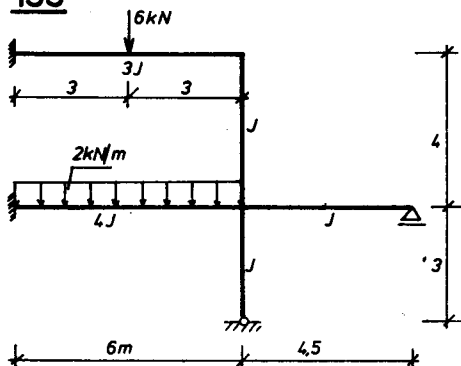
132



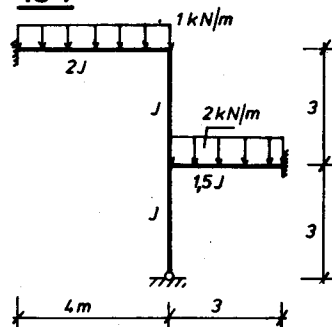
Rys.67

133-142. Rozwiązać metodą deformacji dane układy prętowe.

133

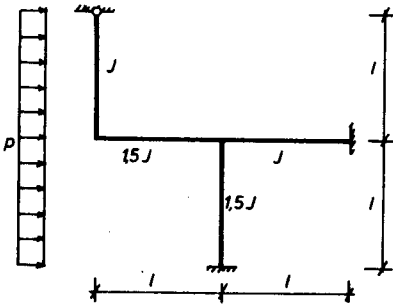


134

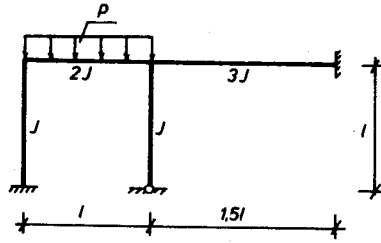


Rys.68

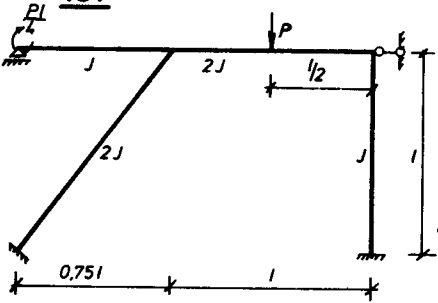
135



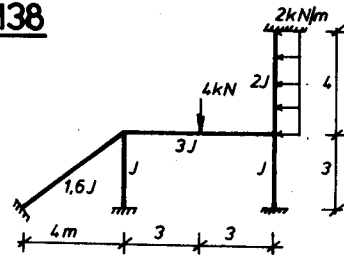
136



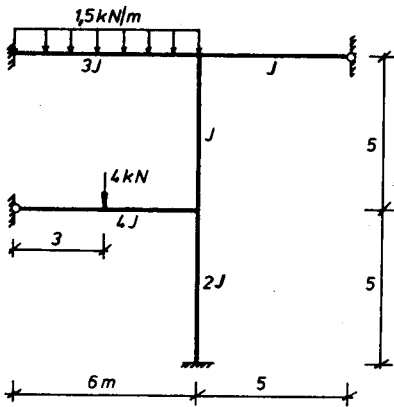
137



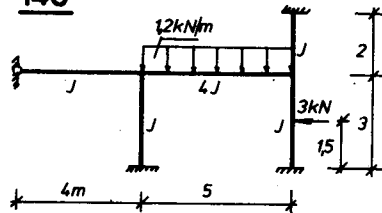
138



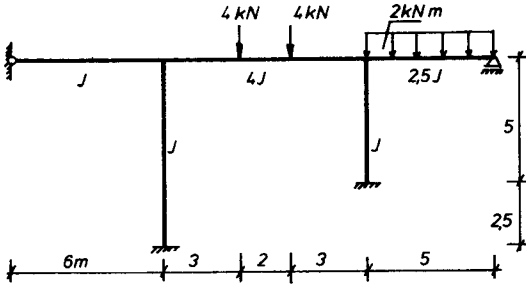
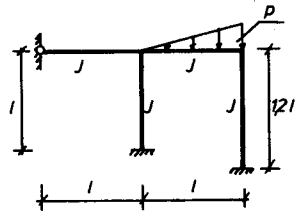
139



140

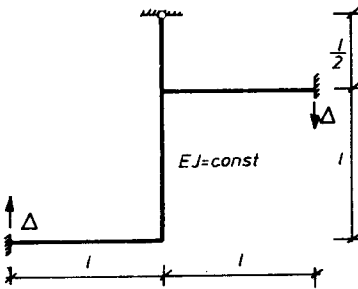


Rys. 69

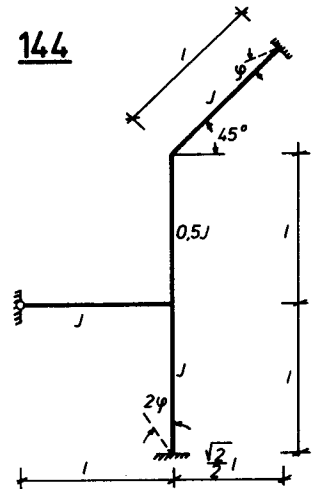
141**142**

Rys.70

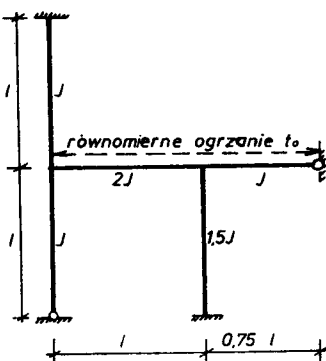
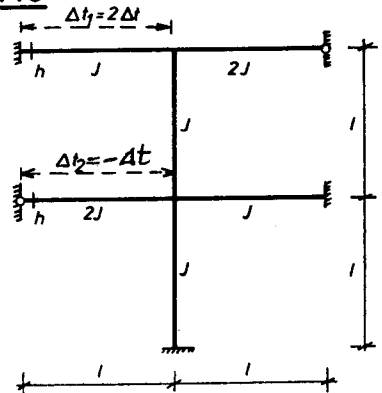
143-144. Dla danych ustroji poddanych działaniu zaznaczonych przemieszczeń podpór wyznaczyć wykresy momentów zginających.

143

Rys.71

144

145-146. Dla danych układów obciążonych zaznaczonymi wpływami termicznymi wyznaczyć wykresy momentów.

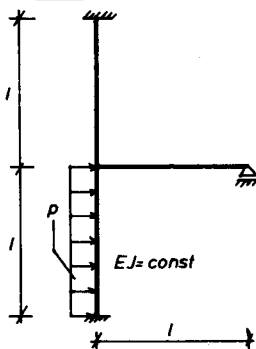
145**146**

Rys.72

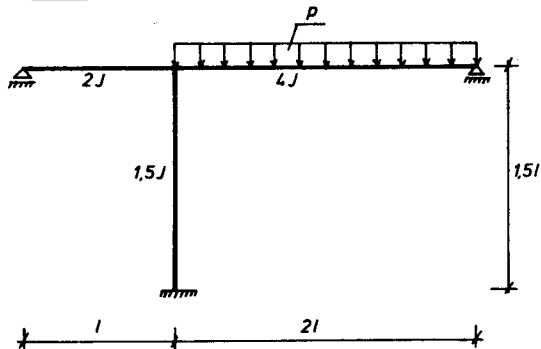
3.2. RAMY PRZESUWNE

147-149. Rozwiązać metodą deformacji poniższe ramy przesuwne. W zadaniu 149 słupek A - (1) traktować jako nieskończenie sztywny, co implikuje związek między przesuwną a kątem obrotu węzła (1).

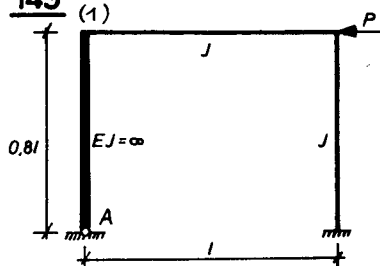
147



148



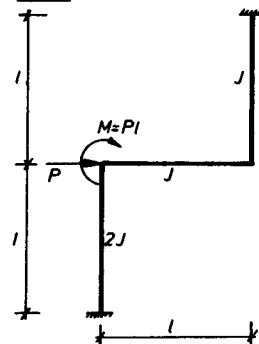
149



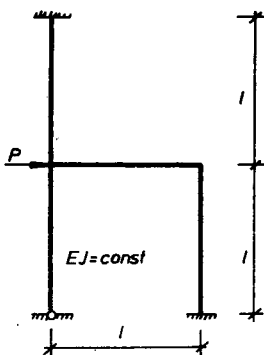
Rys. 73

150-152. Rozwiązać metodą deformacji poniższe ramy przesuwne o słupkach równoległych.

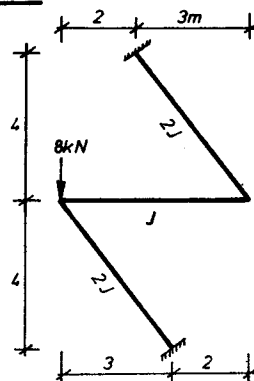
150



151



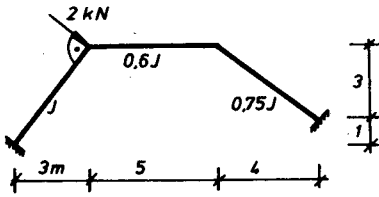
152



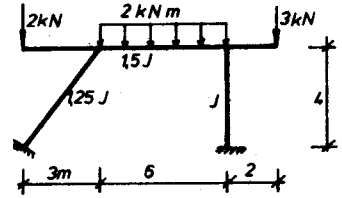
Rys. 74

153-155. Rozwiązać metodą deformacji dane ramy przesuwne o słupkach ukoś-
nych.

153

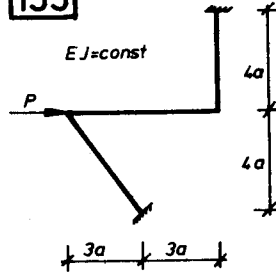


154



Rys. 75

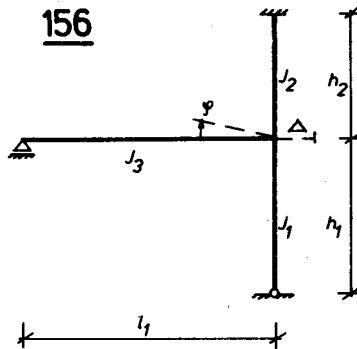
155



Rys. 76

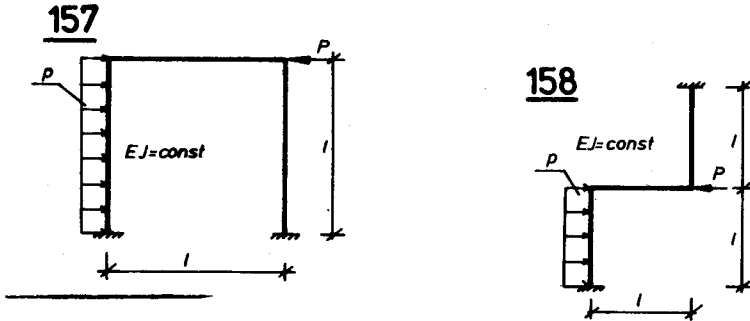
156. Dla jakich zależności geometrycznych ramy z rys. 77 układ równań ka-
nonicznych względem φ i Δ rozpada się na dwa niezależne równania?

156



Rys. 77

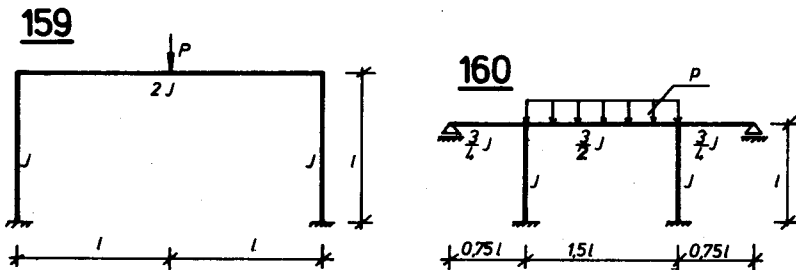
157-158. Dla jakiej wartości siły P przesuw poziomy rygla ramy jest równy zeru?



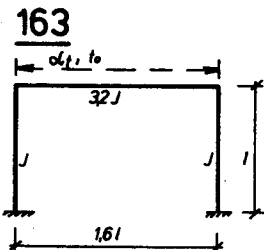
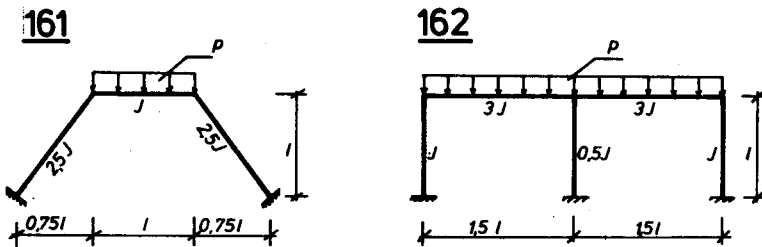
Rys.78

3.3. WYKORZYSTANIE SYMETRII USTROJU

159-163. Rozwiązać metodą deformacji poniższe ramy, wykorzystując symetrię ustroju i obciążenia.

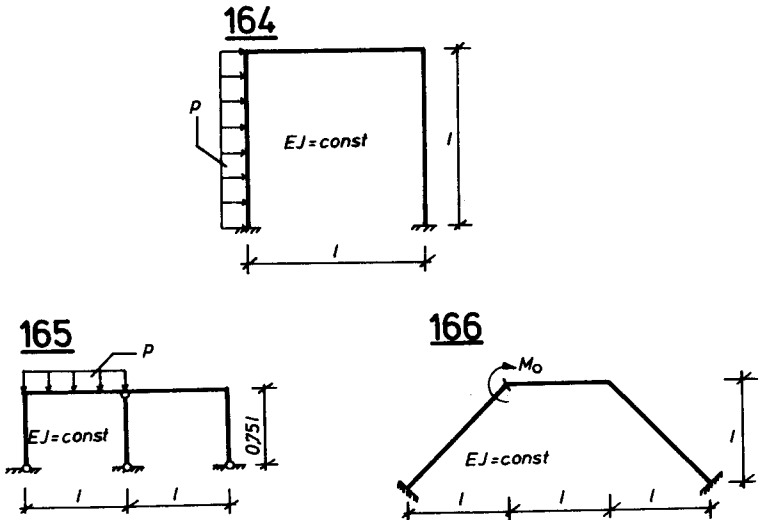


Rys.79



Rys.80

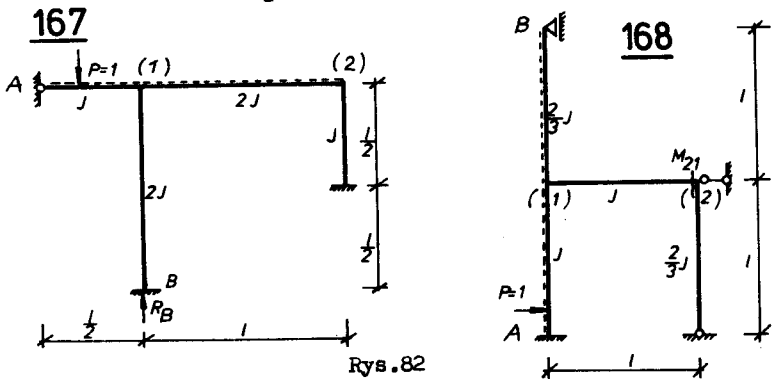
164-166. Rozwiązać dane ustroje wykorzystując symetrię układu. Obciążenie całkowite rozłożyć na sumę obciążeń: symetrycznego i antysymetrycznego. Przypadek symetrii rozwiązać metodą deformacji, antysymetrii - metodą sił.



Rys.81

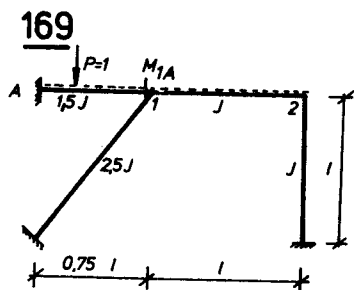
3.4. LINIE WPŁYWOWE

167-169. Dla danych ustroi wyznaczyć równania linii wpływowych zaznaczonych wielkości statycznych. Linie wpływowe wyznaczać jako linie ugięcia od odpowiednich wymuszeń geometrycznych - równania zapisywać przy pomocy funkcji $\omega_T(x)$



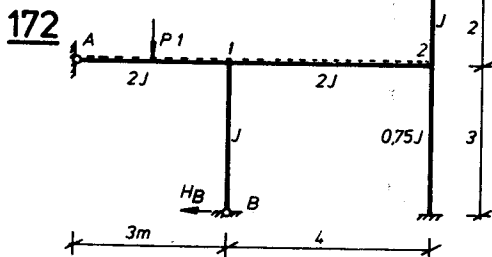
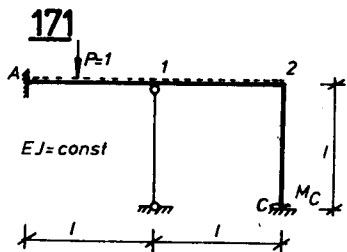
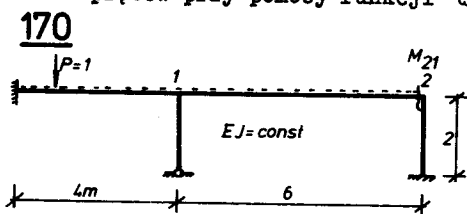
Rys.82

x) Funkcje ω_T występują w związkach opisujących linię ugięcia pręta, wyrażoną poprzez wartości momentów przywęzłowych, natomiast funkcje $\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ występują w tych samych związkach wyrażonych poprzez wartości przemieszczeń i obrotów podpór.

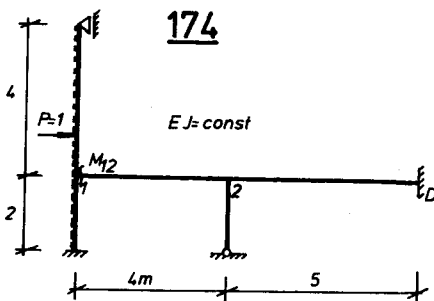
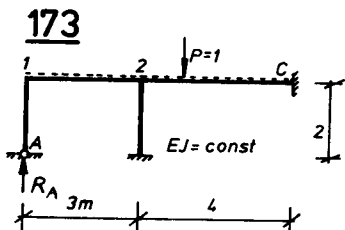


Rys.83

170-174. Wyznaczyć równania linii wpływowych zaznaczonych wielkości statycznych. Równania linii wpływowych zapisywać jako równania linii ugięcia odpowiednich prętów przy pomocy funkcji $\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$.^{x)}



Rys.84



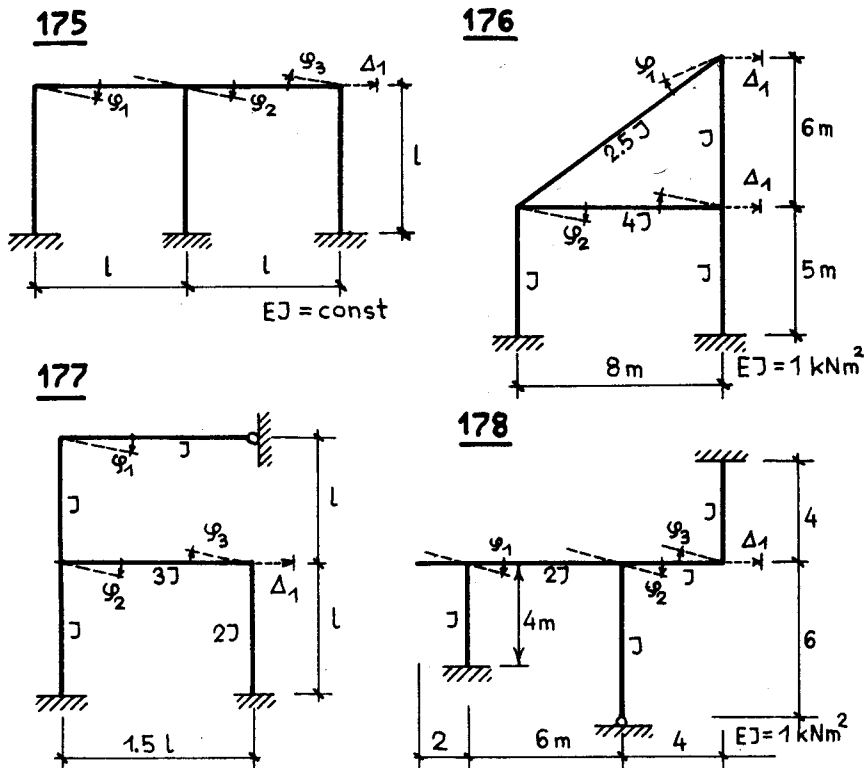
Rys.85

^{x)} Funkcje ω_t występują w związkach opisujących linię ugięcia pręta, wyrażoną poprzez wartości momentów przywęzłowych, natomiast funkcje $\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ występują w tych samych związkach wyrażonych poprzez wartości przemieszczeń i obrotów podpór.

3.5. METODY MACIERZOWE

175-178. Dla danych ustroji wyznaczyć macierz A układu równań klasycznej metody deformacji (bez uwzględnienia odkształceń podłużnych).

$$A\delta = P, \quad \text{gdzie} \quad \delta^T = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta_1]^T.$$



Rys.86

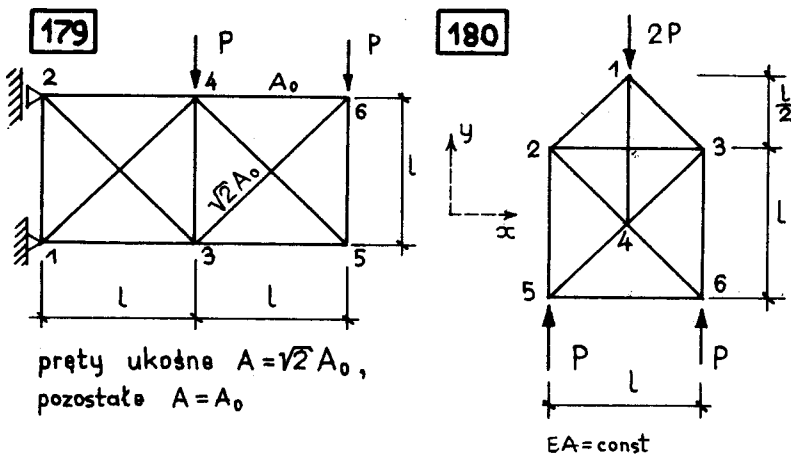
179-181.^{x)} Dla podanych schematów kratownic wyznaczyć globalną macierz sztywności K ustroju. Macierz tę przedstawić w postaci zredukowa-

^{x)} Zadania 179-189 z niniejszego podrozdziału dotyczą zunifikowanej macierzowej metody przemieszczeń, słusznej dla wszystkich typów ustrojów prętowych. Podstawową zależnością metody jest związek macierzowy

$$F = K\Delta + f, \quad (a)$$

gdzie: F jest wektorem czynnych i biernych obciążeń skupionych węzłów, Δ - wektorem przemieszczeń węzłów ustroju (zestawionym z wektorów przemieszczeń poszczególnych węzłów), f - wypadkowym wektorem sił przywęzłowych, zaś K jest globalną macierzą sztywności ustroju. Zależność (a) obowiązuje dla globalnego układu odniesienia i nie uwzględnia więzów podporowych. Uwzględnienie warunków podparcia polega na odrzuceniu równań w kierunku węzłów o znanych (zerowych) przemieszczeniach, co umożliwia obliczenie pozostałych elementów wektora Δ .

nej po uwzględnieniu warunków podporowych. W zadaniu 181 wykorzystać symetrię układu.



Rys.87

Odpowiednia zależność ma postać:

$$K^* \Delta^* = P^* , \quad (b)$$

$$\text{gdzie: } P^* = \overset{\circ}{F}^* - \overset{\circ}{f}^* . \quad (c)$$

Wektory i macierze oznaczone gwiazdką otrzymuje się z odpowiadających wielkości zdefiniowanych równaniem (a) przez proste usuwanie właściwych wierszy i kolumn. Przypadek zadanych niezerowych przemieszczeń węzłów (podpór) wymaga osobnego potraktowania.

Synteza macierzy K i wektora f polega na odpowiednim składaniu (agregacji) macierzy sztywności K^i i wektorów sił wyjściowych f^i poszczególnych prętów:

$$\begin{aligned} K &= \sum_i K^i & K^i &= (L^i)^T \bar{K}^i L^i \\ \overset{\circ}{f} &= \sum_i \overset{\circ}{f}^i & \overset{\circ}{f}^i &= (L^i)^T \overset{\circ}{f}^i \end{aligned} \quad (d)$$

Tu wielkości oznaczone kreską odnoszą się do lokalnego układu współrzędnych pręta (i). L^i jest macierzą transformacji dla i -tego pręta. Wektor przywęzłowych sił wewnętrznych działających na pręt oblicza się z zależności (w układzie lokalnym)

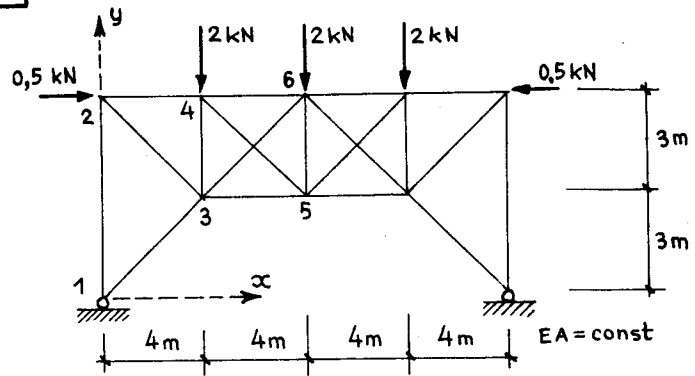
$$\bar{f}^i = \overset{\circ}{f}^i + \bar{K}^i \bar{D}^i , \quad (e)$$

gdzie wektor \bar{D}^i jest wektorem przemieszczenia pręta otrzymanym po przetransformowaniu do układu lokalnego wektora D^i wybranego z wektora Δ .

$$\bar{D}^i = L^i D^i \quad (f)$$

Poszczególne typy ustroji różnią się liczbą przemieszczeń w węzle (belki - (w, φ) , kratownice płaskie - (u, v) , kratownice przestrzenne - (u, v, w) , ramy płaskie - (u, v, φ) , ruszty - $(w, \varphi_x, \varphi_y)$). Ponadto w kratownicach nie występują wyjściowe siły przywęzłowe (dla czynnych obciążeń zewnętrznych), zaś dla belek macierz L^i jest macierzą jednostkową. Dodatnie zwroty przemieszczeń i sił przywęzłowych pokrywają się ze zwrotami osi układu współrzędnych. Dodatnie kąty φ i momenty zginające są zgodne z obrotem od osi „x” do osi „y”.

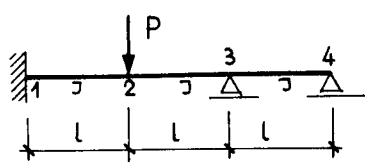
181



Rys.88

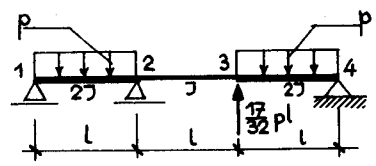
182-183. Wyznaczyć macierze K dla danych belek. Sprawdzić, że podane wektory Δ^* spełniają układ równań $K^* \Delta^* = P^*$. Obliczyć z równania (a) (patrz nota) wektor \bar{F} i podać interpretację jego elementów.

182



$$\Delta^* = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13L/240 \\ 1/80 \\ -1/20 \\ 1/40 \end{Bmatrix} \frac{Pl^2}{EJ}$$

183

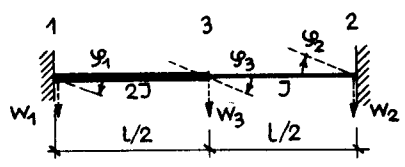


$$\Delta^* = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/384 \\ -1/64 \\ 0 \\ 1/64 \\ -7/384 \end{Bmatrix} \frac{pl^3}{EJ}$$

Rys.89

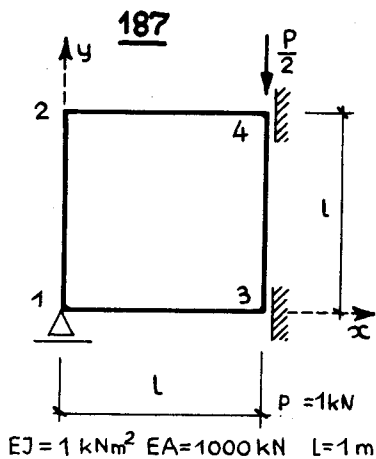
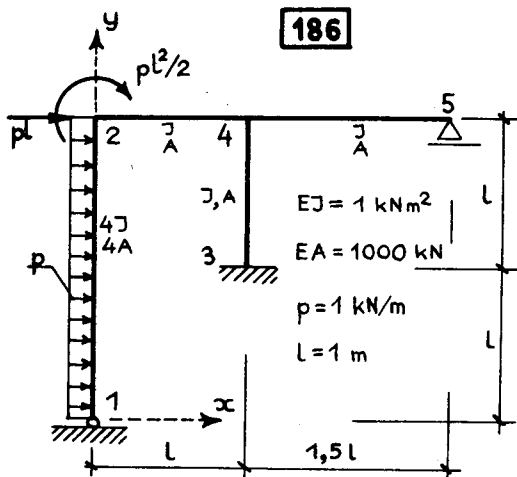
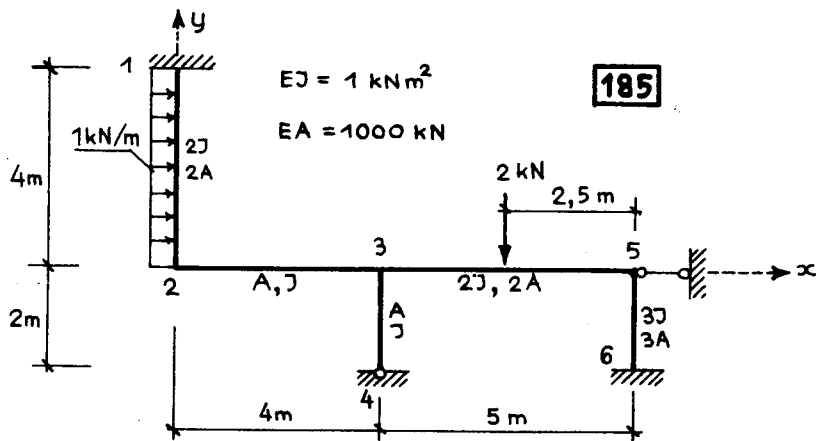
184. Wyznaczyć macierz sztywności układu dwóch prętów. Przeprowadzić kondensację otrzymanej macierzy do macierzy o wymiarze 4 x 4 związanej z niewiadomymi węzłów (1) i (2).

184



Rys.90

185-187. Dla danych schematów ram i danego obciążenia wyznaczyć globalne macierze sztywności K^* oraz wektory prawych stron P^* . Macierz K^* przedstawić w postaci zrezyfikowanej dla górnej części symetrycznej o liczbie kolumn równej szerokości półpasma układu równań. Warunki podporowe uwzględnić przez „skreślenie” wierszy i kolumn nie zmieniające liczby równań.

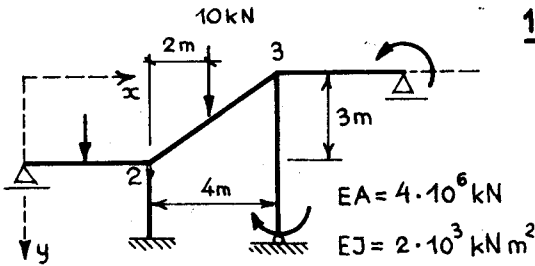


Rys.91

188-189. Dla pręta (2) - (3) ustroju znane jest obciążenie oraz wektor

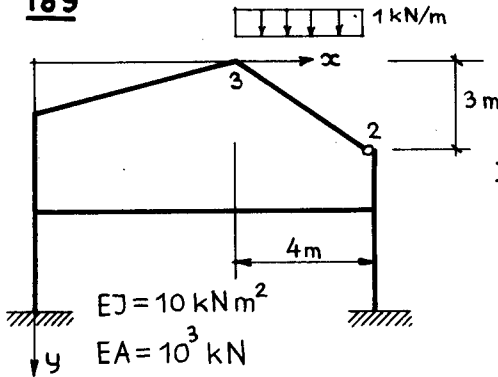
$D_{2-3} = [U_2, V_2, \varphi_2, U_3, V_3, \varphi_3]^T$ w globalnym układzie współrzędnych.

Obliczyć wektor sił przywęzłowych f_{2-3} w lokalnym układzie pręta (żądana dokładność - 3 cyfry znaczące).

**188**

$$D_{2-3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10^{-6} \\ 0,003 \\ -2 \cdot 10^{-6} \\ 3 \cdot 10^{-6} \\ -0,002 \end{Bmatrix}$$

Rys.92

189

$$D_{2-3} = \begin{Bmatrix} -0,05 \\ 0 \\ ** \\ -0,1068 \\ 0,0824 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$$

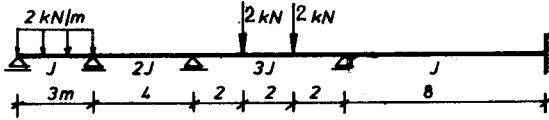
Rys.93

4. METODA CROSSA

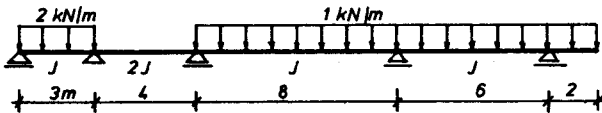
4.1. USTROJE NIEPRZESUWNE

190-192. Wyznaczyć wykresy momentów dla danych belek ciągłych.

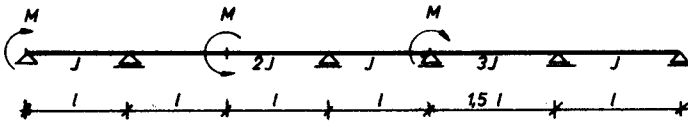
190



191



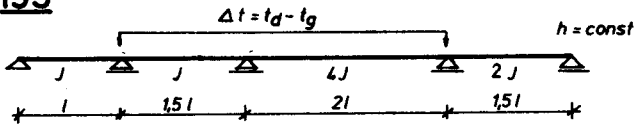
192



Rys.94

193. Środkowe przęsła belki ciągłej poddane są działaniu gradientu temperatury. Wyznaczyć wykres momentów.

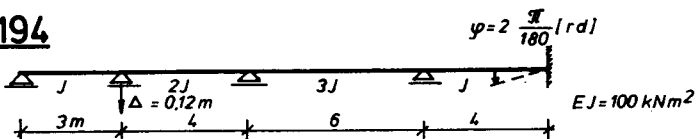
193



Rys.95

194. Belka ciągła z rys.96 poddana jest zaznaczonym osiadaniom podpór. Wyznaczyć wykres momentów.

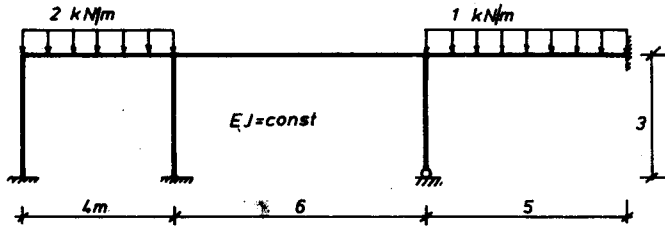
194



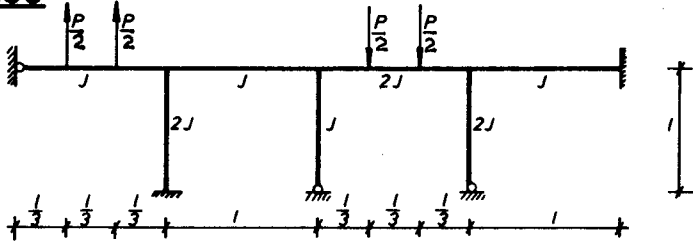
Rys.96

195-200. Dla danych ram nieprzesuwnych wyznaczyć wykresy momentów.

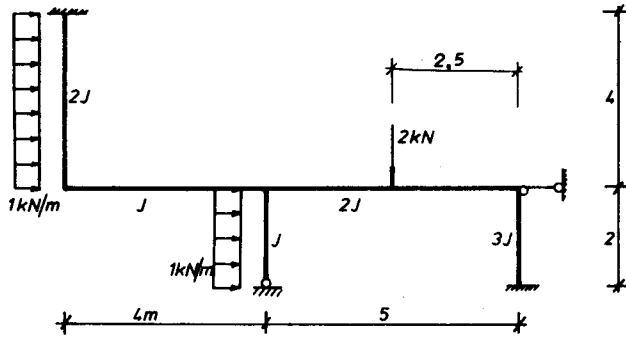
195



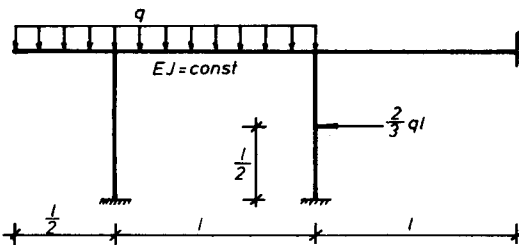
196



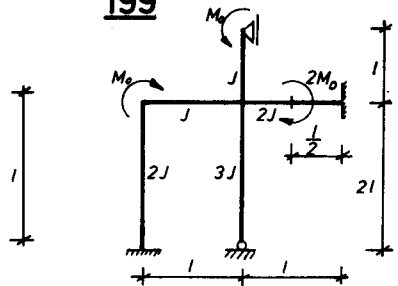
197



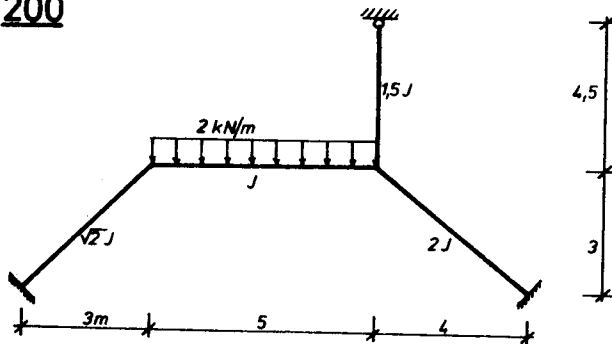
198



199

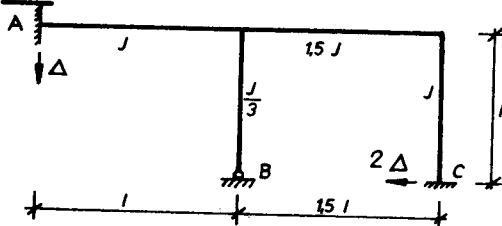


Rys. 98

200

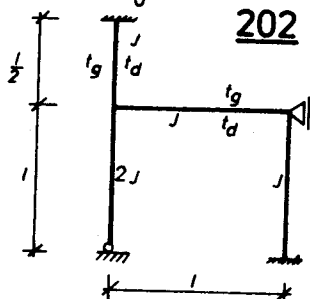
Rys.99

201. Rozwiązać daną ramę nieprzesuwną poddaną działaniu osiadania podpór ($\Delta_A = \Delta$, $\Delta_C = 2\Delta$).

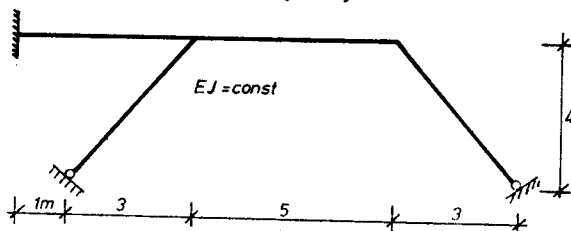
201

Rys.100

202-203. Rozwiązać dane ustroje obciążone termicznie. W zadaniu 202 obciążeniem jest gradient temperatury, w zadaniu 203 całą ramę ogrzano równomiernie do temperatury t_0 .

**202****203**

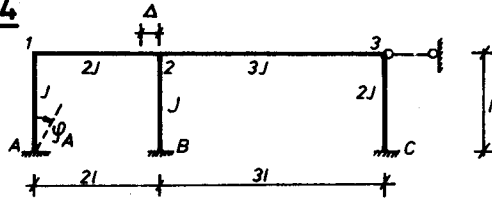
Równomierne ogrzanie całej ramy o t_0



Rys.101

204. W ramę przedstawioną na rys.102 pręt (2) - (3) wmontowano dłuższy o $\Delta = 0,05 l$, natomiast pręt na podpory A zmontowano w odchyleniu od pionu o kąt $\varphi_A = 0,35 \Delta/l$. Wyznaczyć wykres momentów.

204



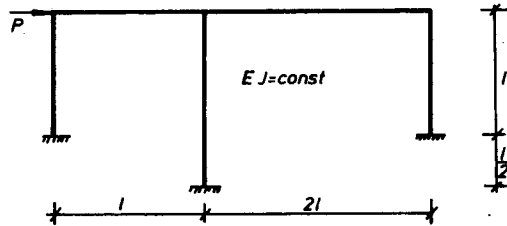
pręt 2-3 dłuższy o $\Delta = 0,05l$
 obrót podpory A o kąt $\varphi_A = 0,35 \frac{\Delta}{l}$

Rys.102

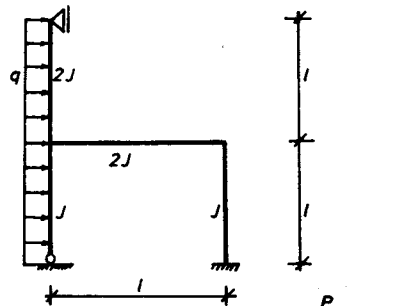
4.2. RAMY PRZESUWNE

205-210. Rozwiązać poniższe ustroje metodą Crossa. Zastosować sposób wieloetapowy.

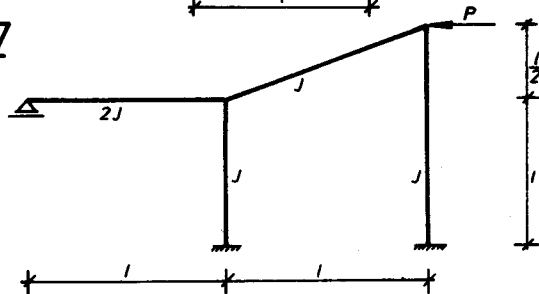
205



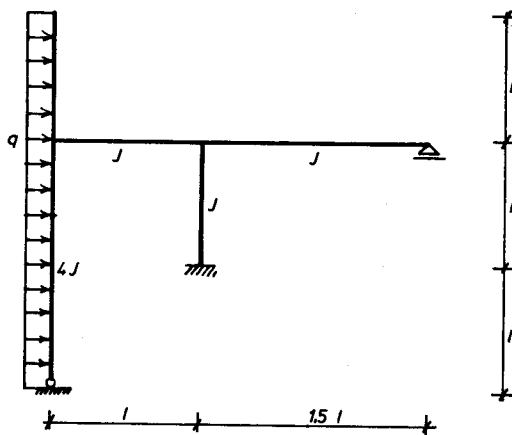
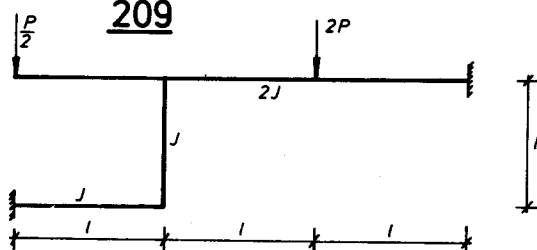
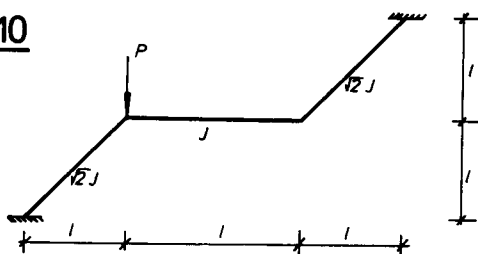
206



207



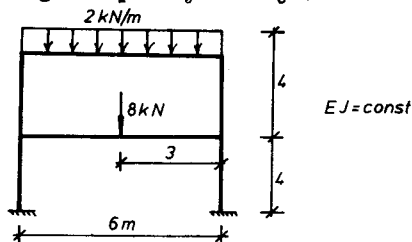
Rys.103

208**209****210**

Rys.104

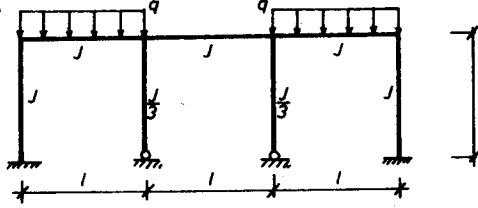
4.3. WYKORZYSTANIE SYMETRII USTROJU

211-213. Dla danych ustrojów symetrycznych obciążonych symetrycznie wyznaczyć wykresy momentów. Iterację metody Crossa przeprowadzać dla schematu uproszczonego do połowy ustroju.

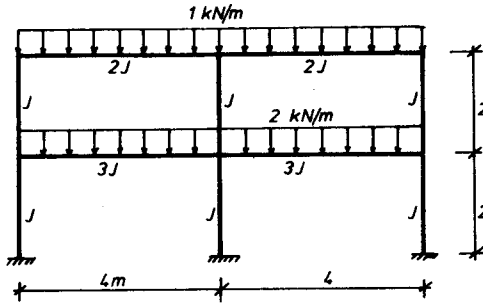
211

Rys.105

212



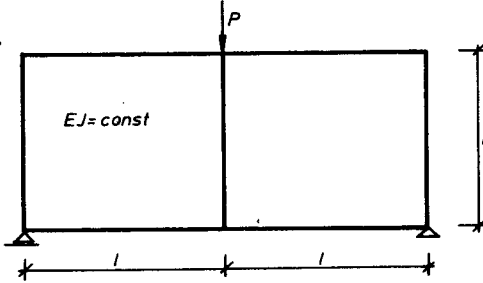
213



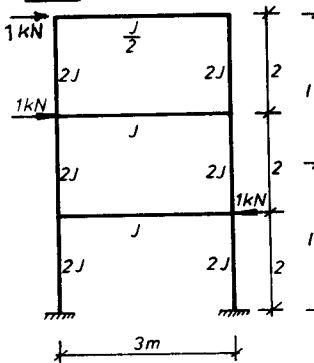
Rys.106

214-217. Dane ramy symetryczne obciążone są antysymetrycznie. Wyznaczyć wykresy momentów jednoetapowym wariantem metody Crossa (szczególny przypadek metody sztywności złożonych). Ramę z zadania 214 sprowadzić do antymetrii.

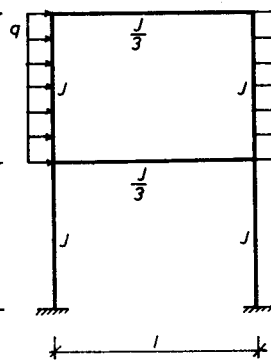
214



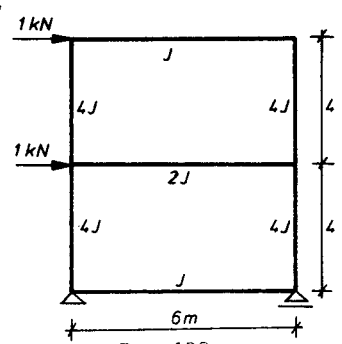
215



216



217



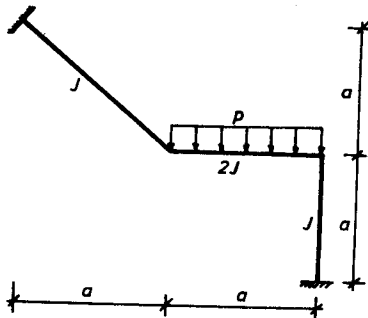
Rys.107

Rys.108

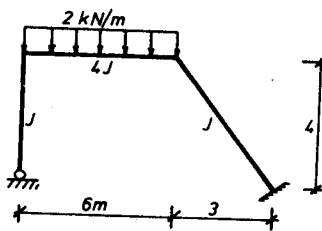
4.4. RAMY O NIEPROSTOKĄTNEJ SIATCE PRĘTÓW

218-223. Rozwiązać metodą Crossa dane ustroje zawierające ukośne słupki
 Użyć wieloetapowego sposobu metody Crossa.

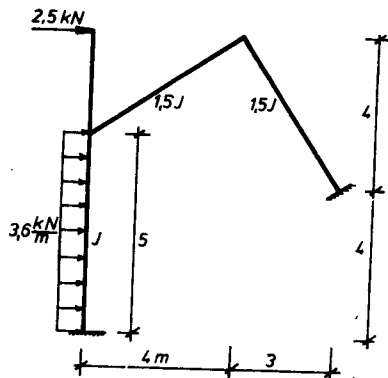
218



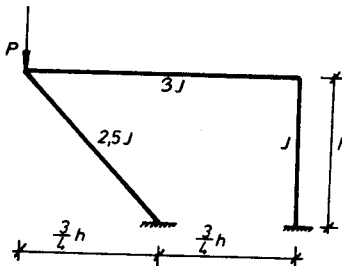
219



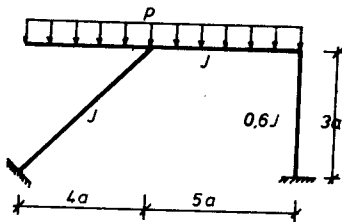
220



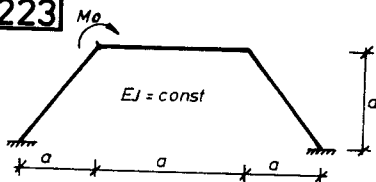
221



222



223

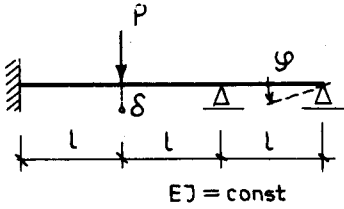
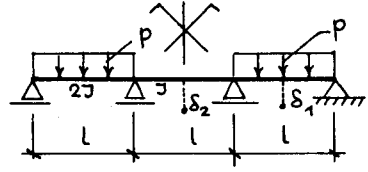
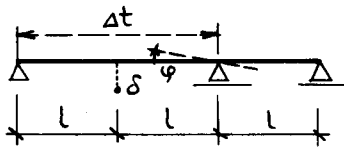


Rys. 109

5. PRZEMIESZCZENIA W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

5.1. TWIERDZENIA REDUKCYJNE

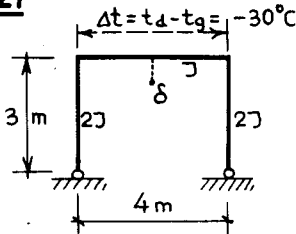
224-226. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia w danych belkach ciągłych.

224**225****226**

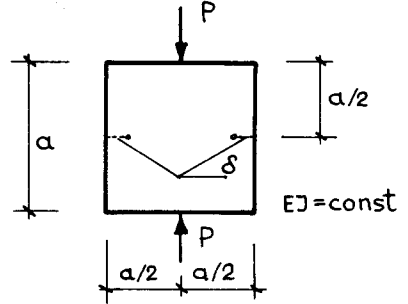
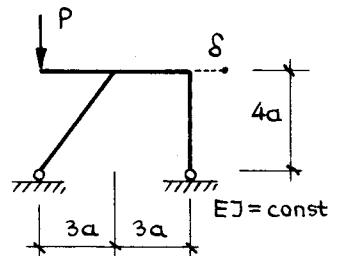
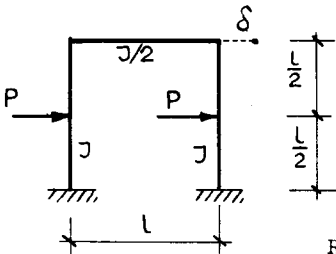
Dane:
 $\alpha_t, \Delta t$
 l, EJ, h

Rys.110

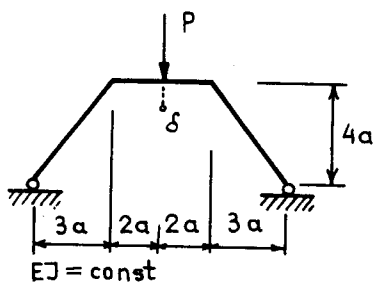
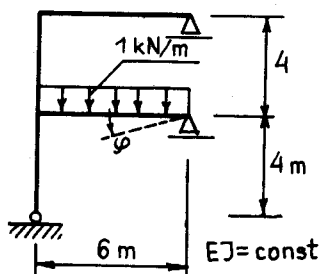
227-232. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia w poniższych układach ramowych.

227

$EJ = 15000 \text{ kNm}^2$
 $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$
 $h = 0,3 \text{ m}$

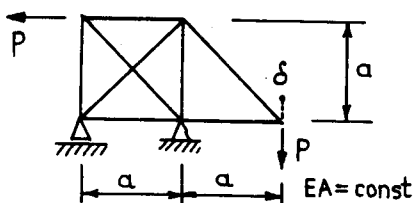
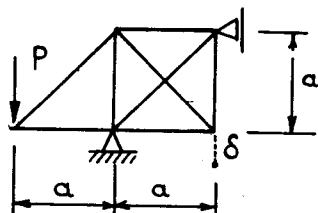
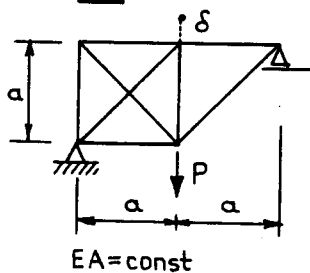
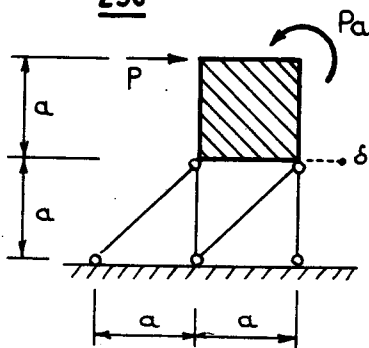
228**230****229**

Rys.111

231**232**

Rys.112

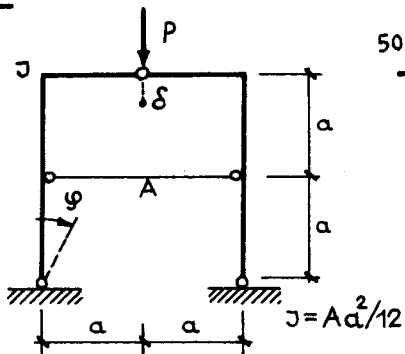
233-236. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia kratownic statycznie niewyznaczalnych.

233**234****235****236**

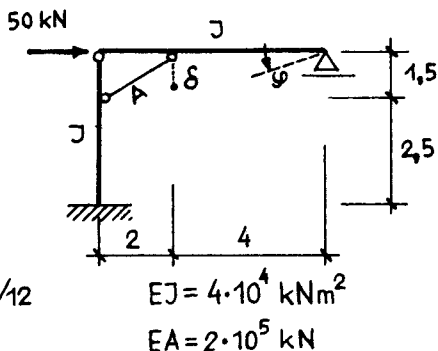
Rys.113

37-238. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia danych układów ramowo-kratowych. Uwzględnić odkształcalność prętów kratowych.

237



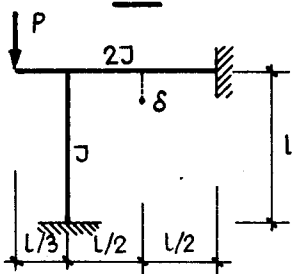
238



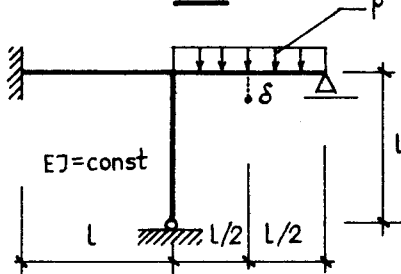
Rys.114

239-242. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia. Układy niewyznaczalne rozwiązywać metodą deformacji.

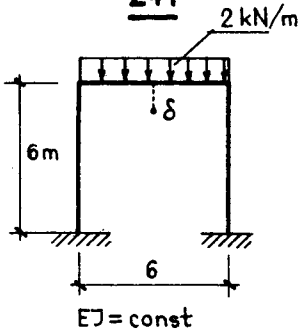
239



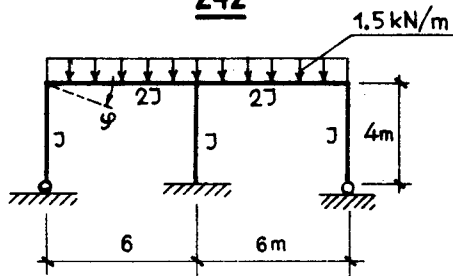
240



241



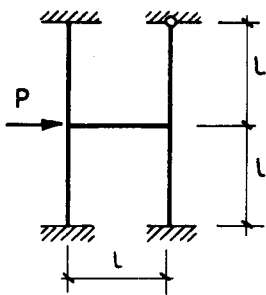
242



Rys.115

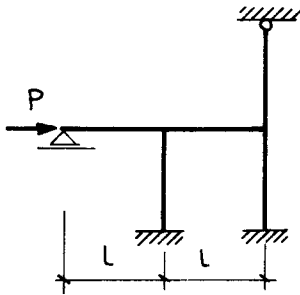
243-245. Obliczyć poziome przemieszczenia rygli ram.

243

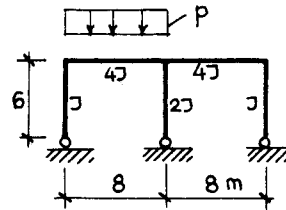


$EJ = \text{const}$

244



245

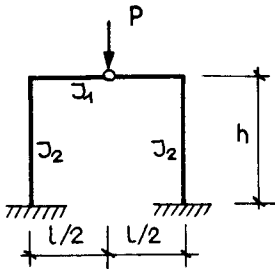


Rys.116

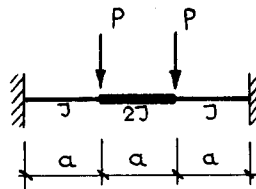
5.2. KONTROLE OBLICZEŃ STATYCZNYCH

246-249. Korzystając z reguł kontroli poprawności rozwiązań statycznych wyznaczyć wykresy momentów bez formalnego rozwiązywania danych układów.

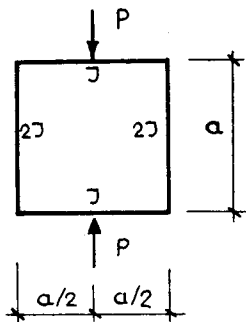
246



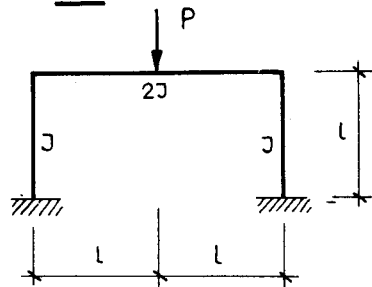
247



248

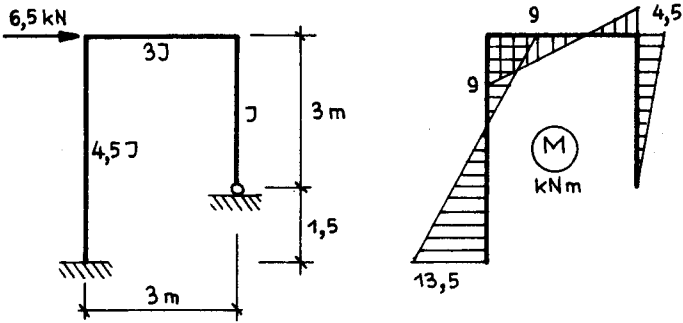
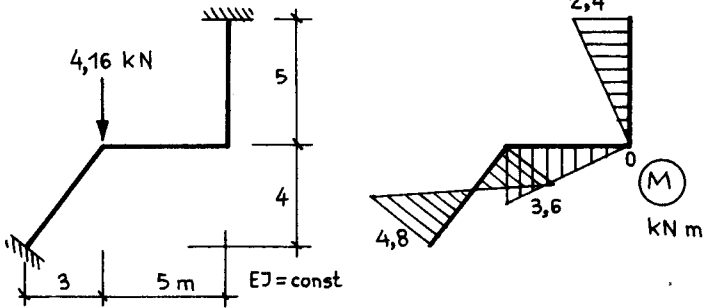
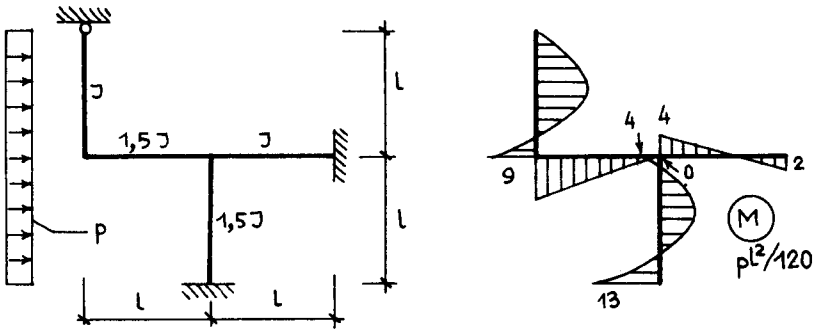


249



Rys.117

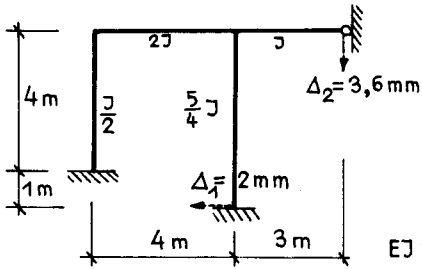
250-252. Sprawdzić poniższe rozwiązania poprzez całkowanie wykresu momentów z dowolnym wykresem od nadliczbowej w układzie podstawowym. Wyznaczyć wykresy sił tnących i normalnych.

250**251****252**

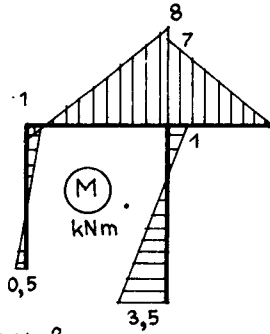
Rys. 118a

253-255. Sprawdzić poniższe rozwiązania poprzez całkowanie wykresu momentów po konturach zamkniętych lub między podporami utwierdzonymi. Wyznaczyć wykresy sił tnących i normalnych.

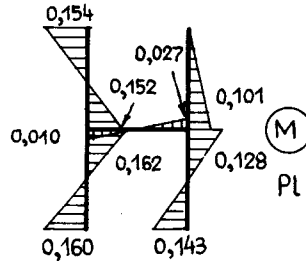
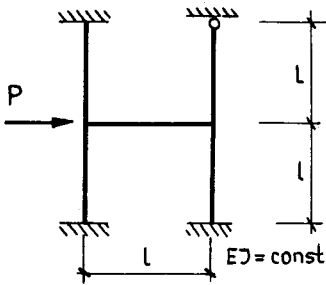
253



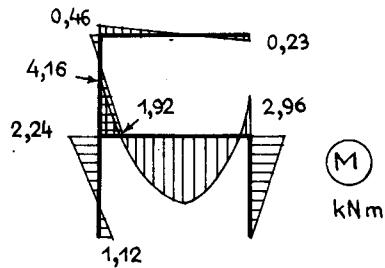
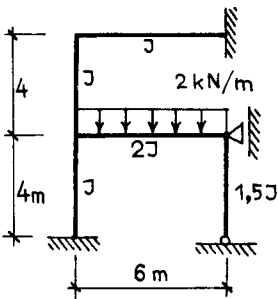
$$EJ = 10^4 \text{ kNm}^2$$



254



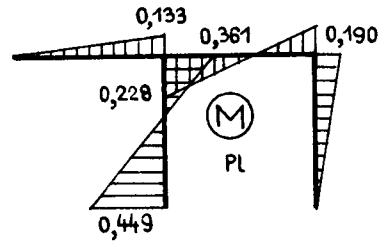
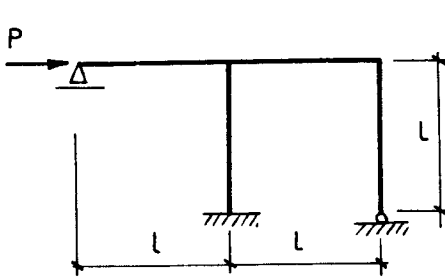
255



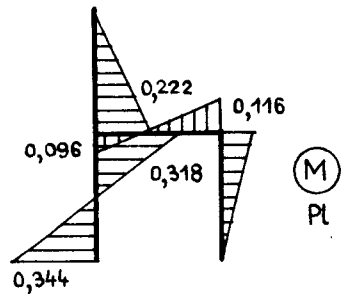
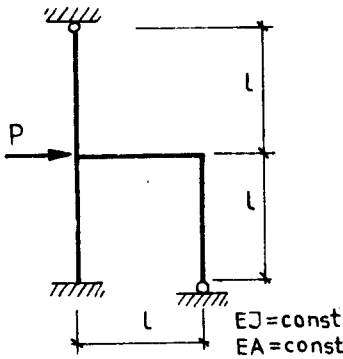
Rys. 118b

256-258. Dane rozwiązania uzyskano metodą Crossa. Sprawdzić równowagę węzłów i sił tnących w kierunku możliwych przesunięć. Wyznaczyć wykresy sił tnących i normalnych.

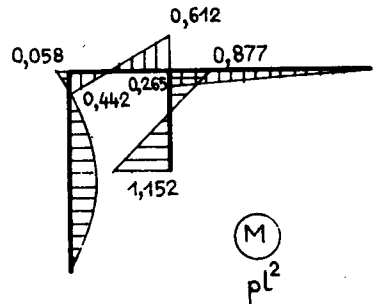
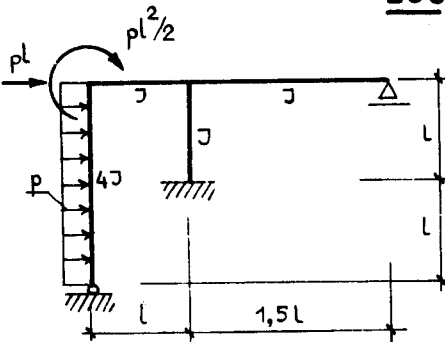
256



257

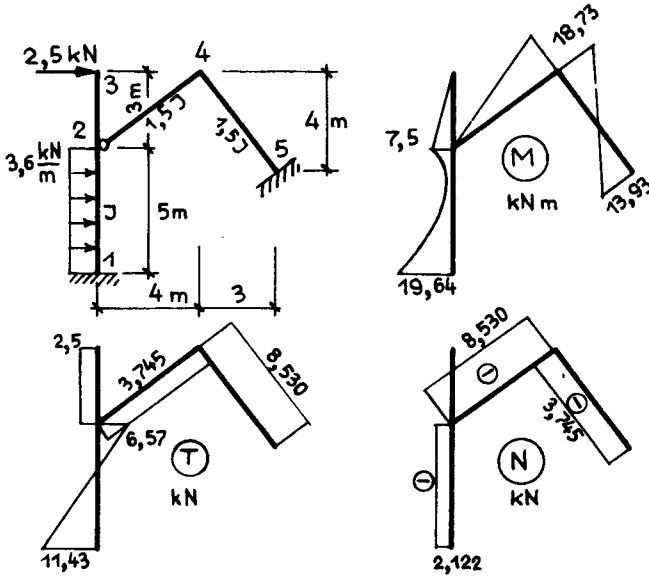


258

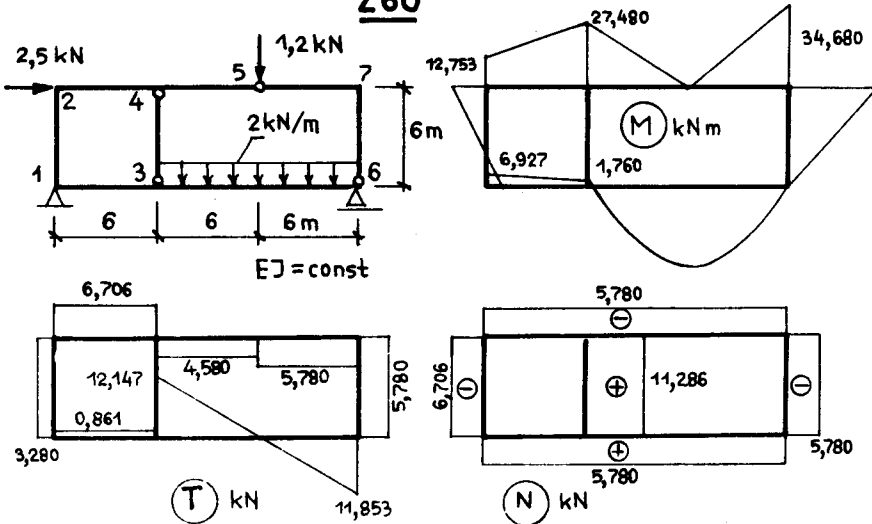


259-260. Poniższe rozwiązania otrzymano przez odczytanie tabulogramu wyników programu na EMC. Jedną z rzędnych na wykresie momentów nanie-siono z błędem. Wskazać błędną rzędną i obliczyć jej poprawną wartość.

259

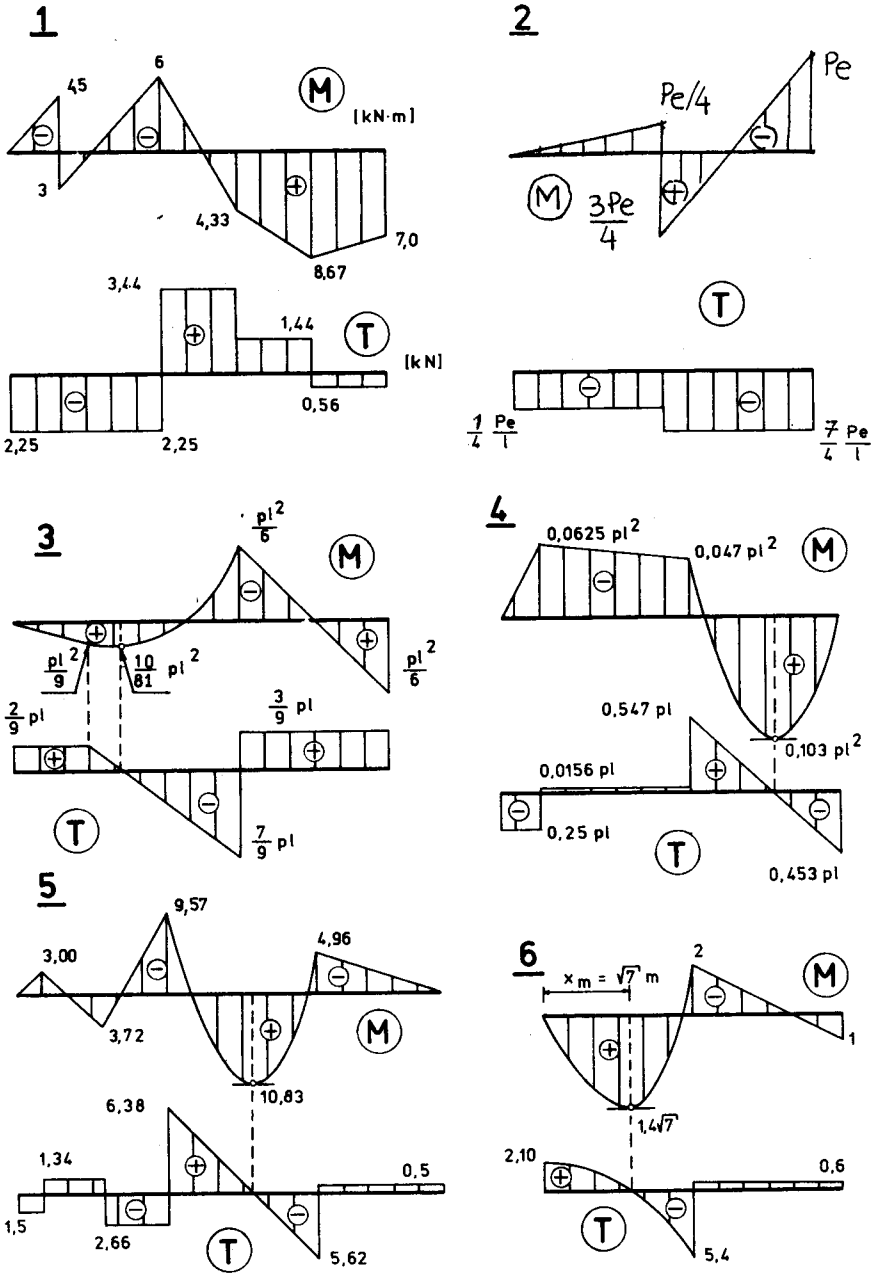


260



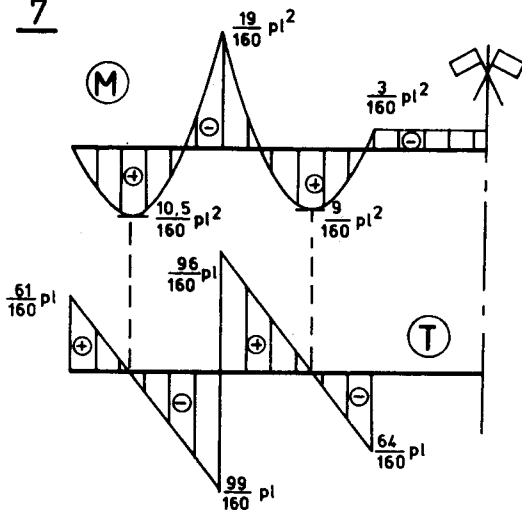
Rys.120

ODPOWIEDZI

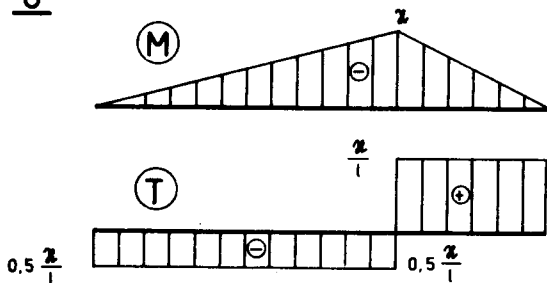


Rys. 121

7

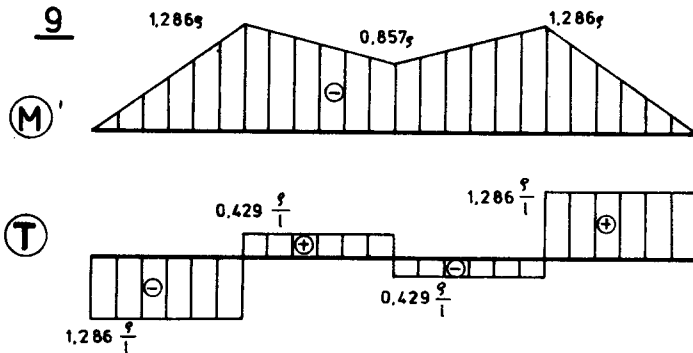


8



$$z = \alpha \frac{\Delta t}{h} EJ$$

9



$$g = \alpha \frac{\Delta t}{h} EJ$$

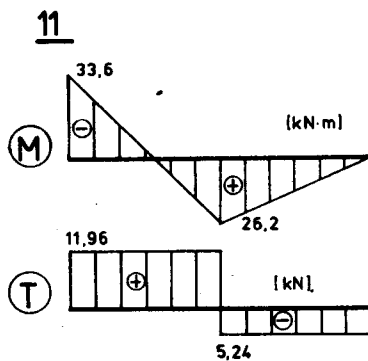
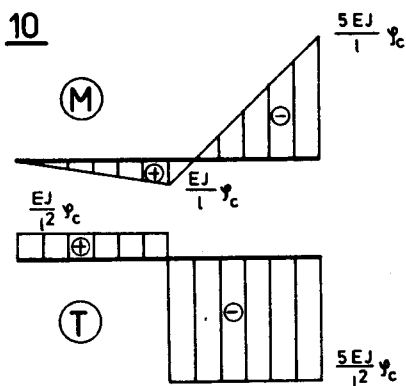


Рис. 123

12. $\delta < 1 \text{ cm.}$

13. lw. $M_A = -0,5 \text{ l} \cdot (\xi' - \xi'^3)$ 〈A - B〉

$\min M_A = -0,192 \text{ l} \quad (\xi' = 1/\sqrt{3})$

$M_{A(1)} = 0,5 \text{ a}$

14.

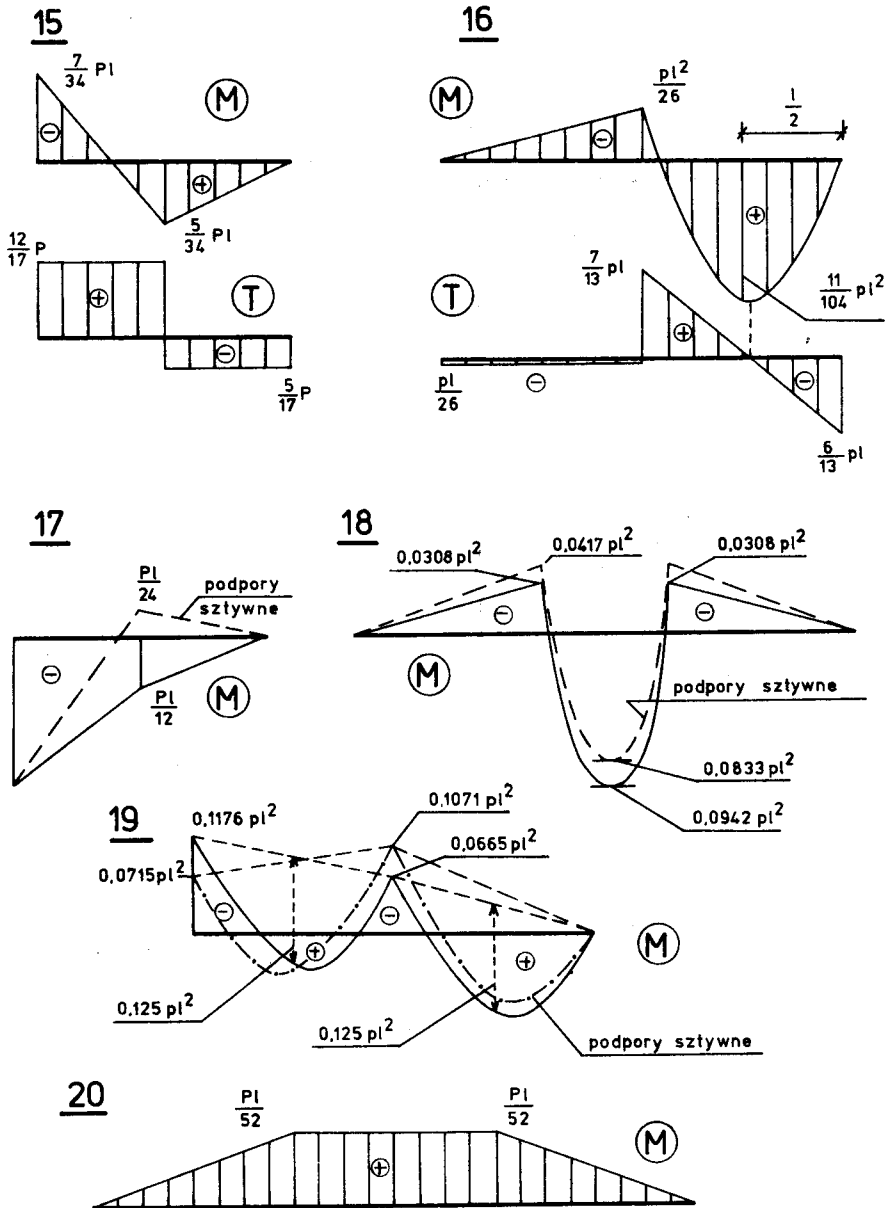
$$M_B = \begin{cases} -\frac{49}{30} (\xi' - \xi'^3) & \langle A - B \rangle \\ -\frac{64}{30} (\xi' - \xi'^3) & \langle B - C \rangle \end{cases}$$

$M_{\alpha(1)} = -0,230 \text{ m}$

$M_{\alpha(2)} = 1,200 \text{ m}$

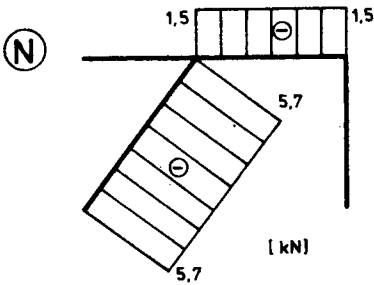
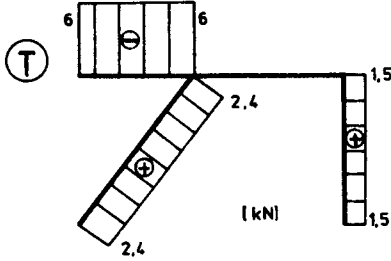
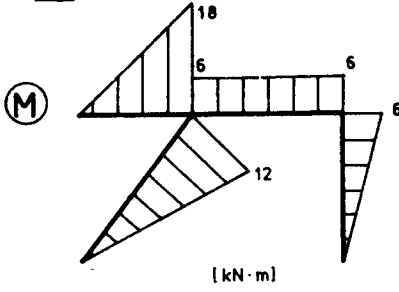
$T_{\alpha(1)} = 0,0765$

$T_{\alpha(2)} = -0,400$

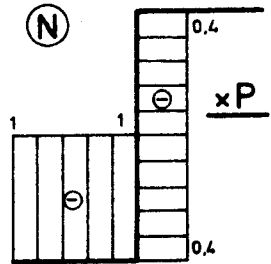
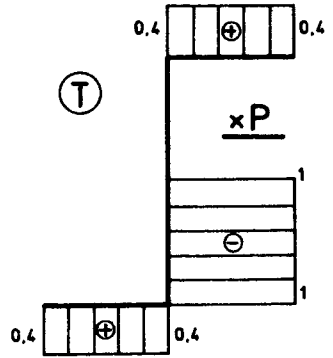
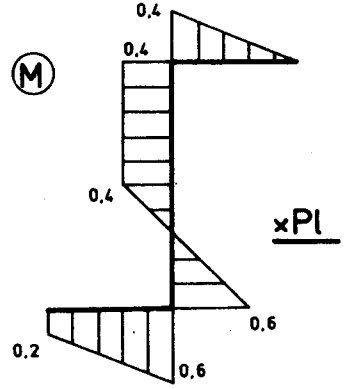


Rys. 124

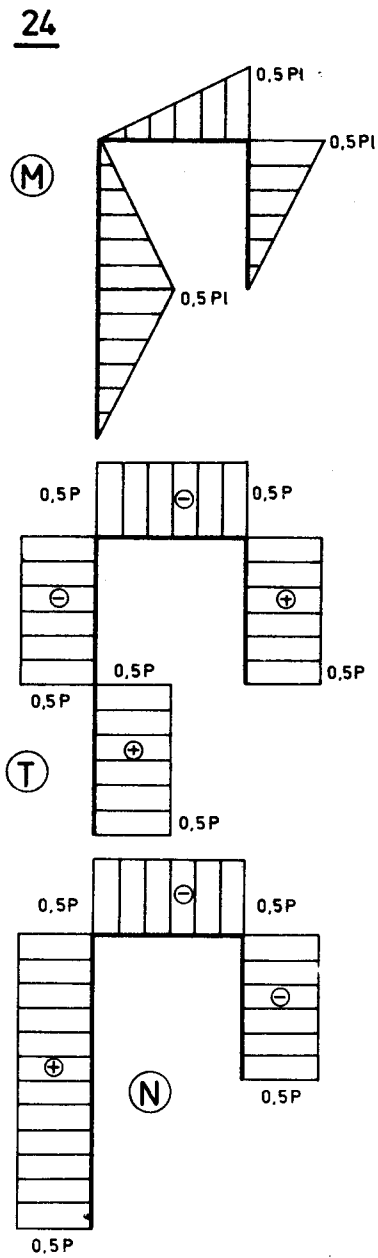
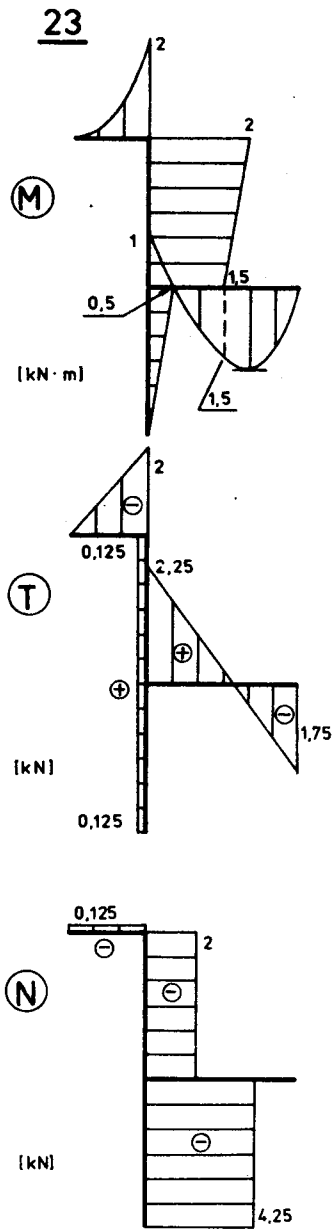
21



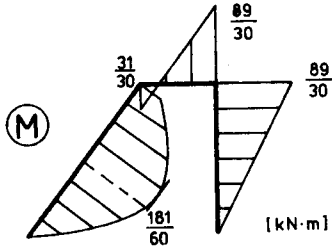
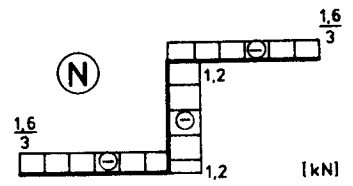
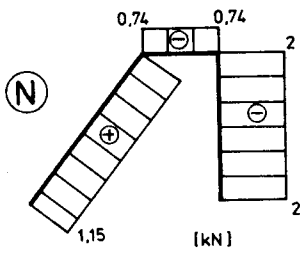
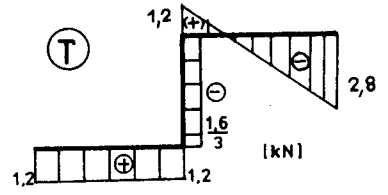
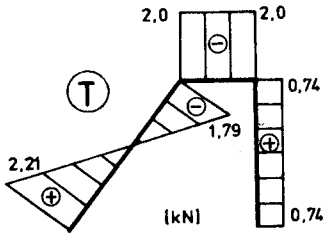
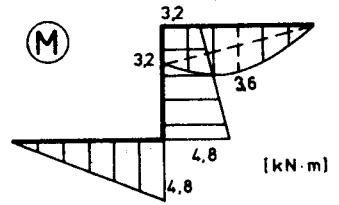
22



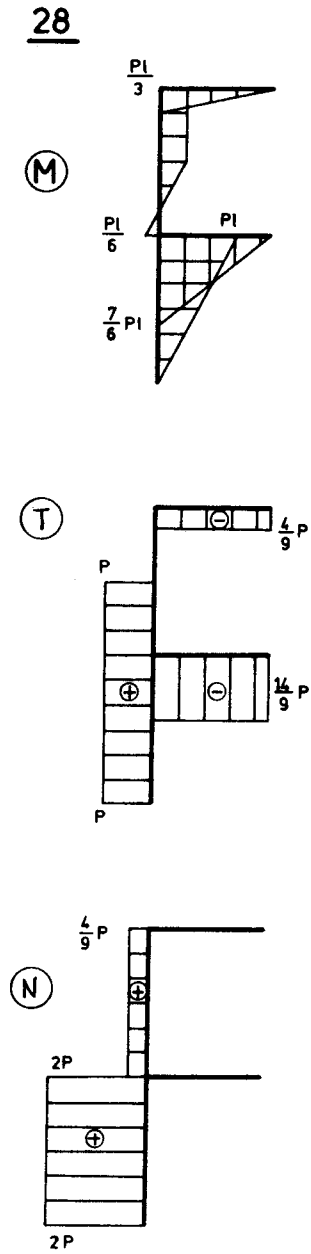
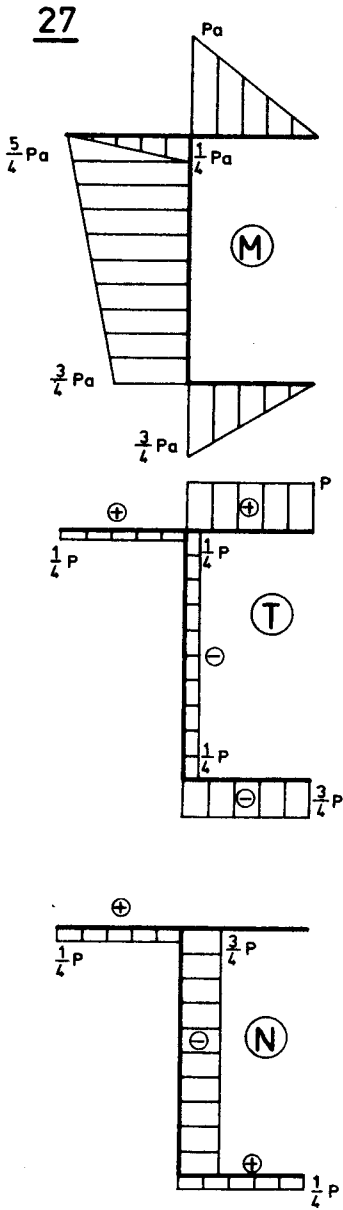
Rys. 125



Rys. 126

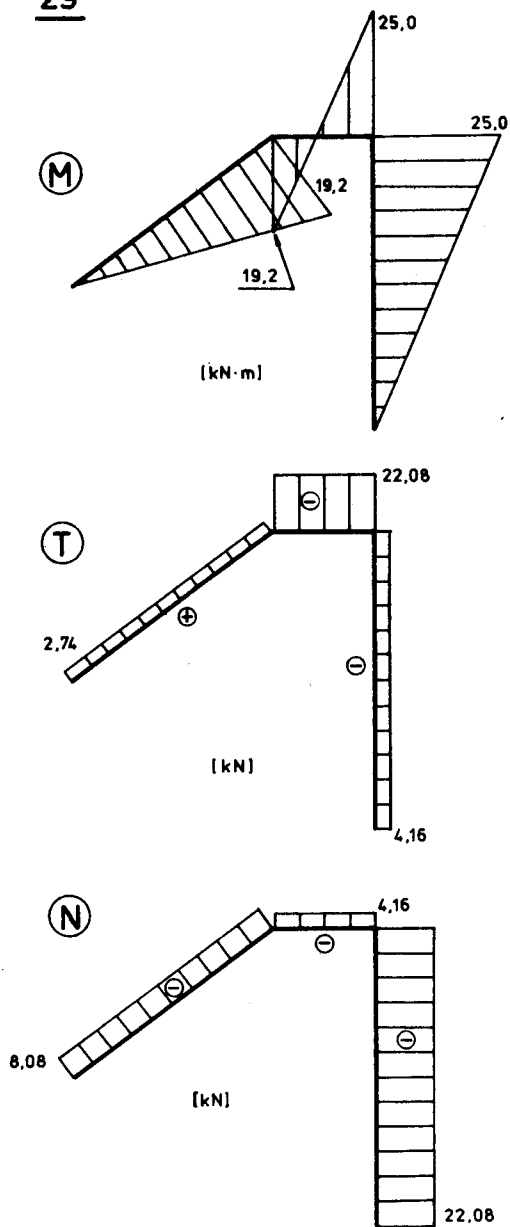
2526

Rys. 127



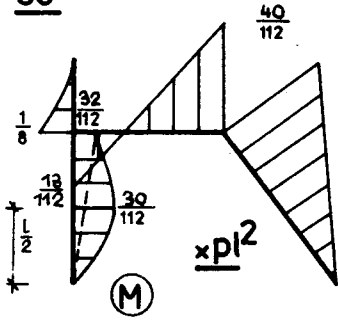
Rys. 128

29

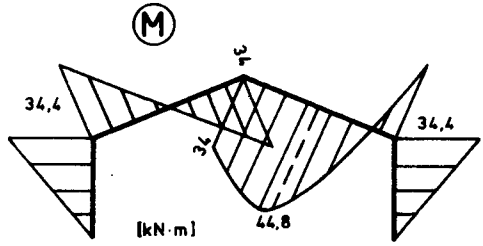


Rys. 129

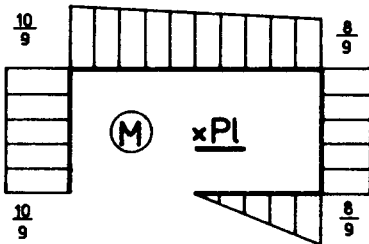
30



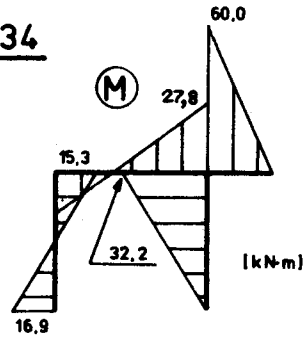
31



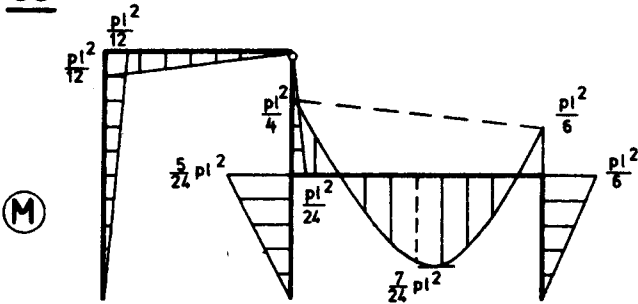
32



34

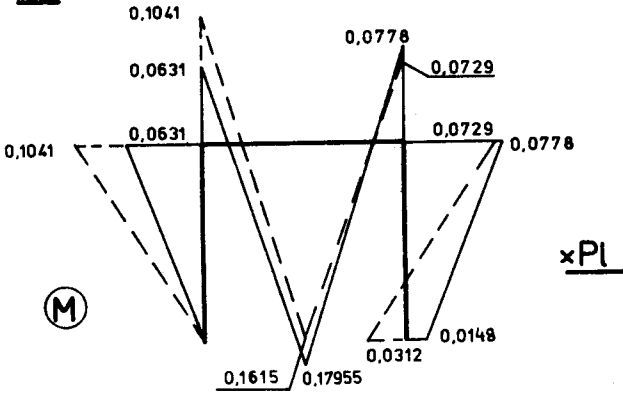


33

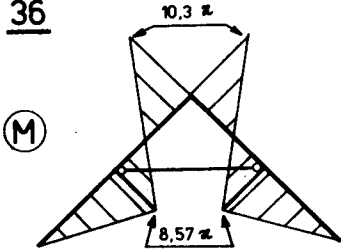


Rys. 130

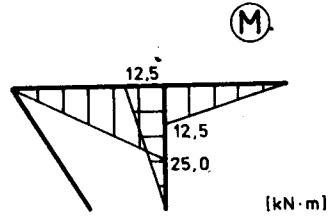
35



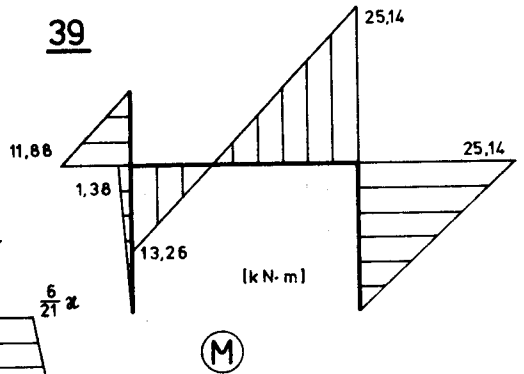
36



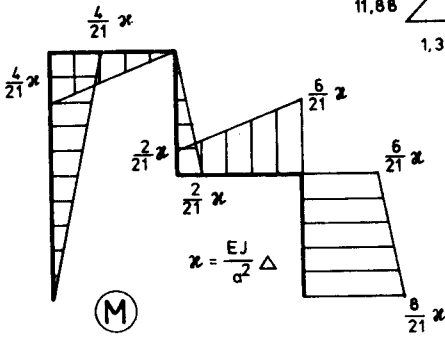
37

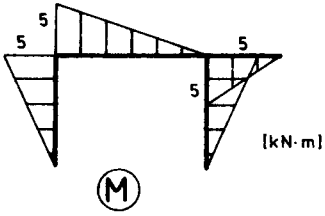
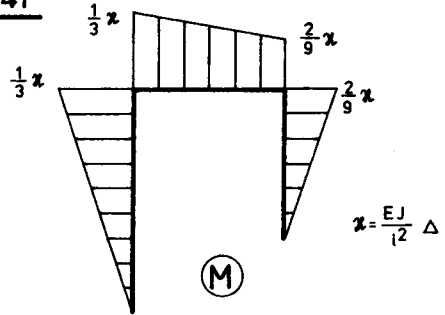
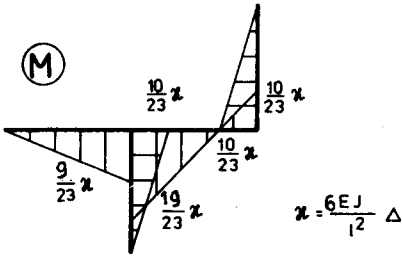
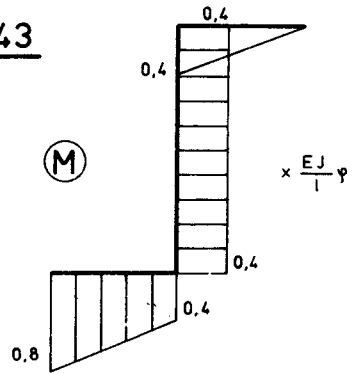
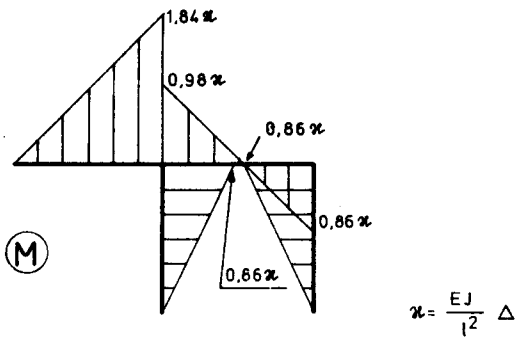


39



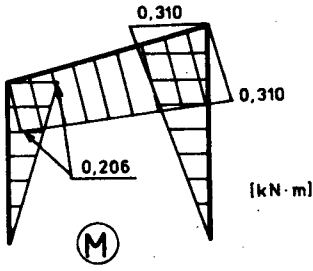
38



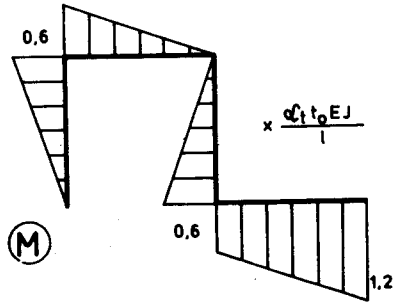
4041424344

Rys. 132

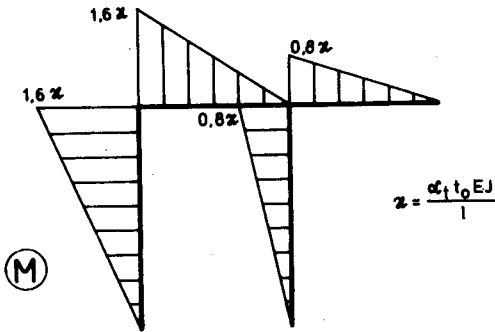
45



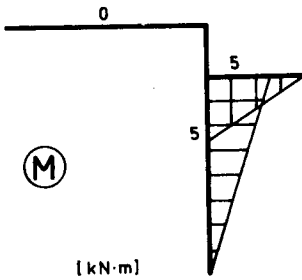
46



47

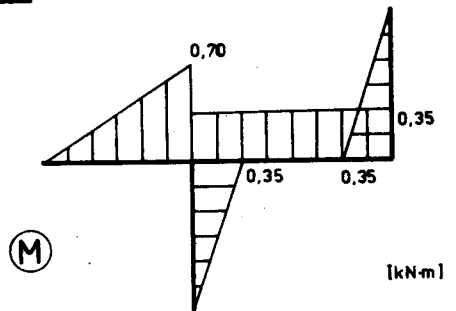


48

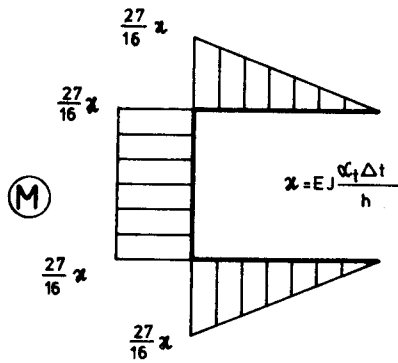


Rys. 133

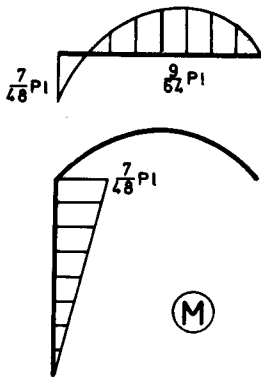
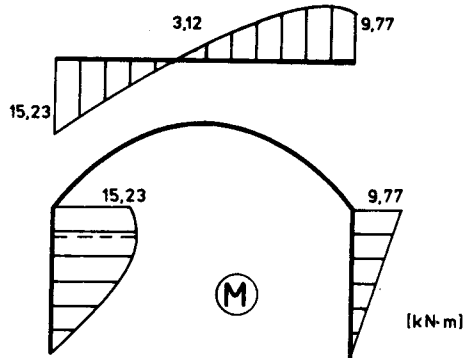
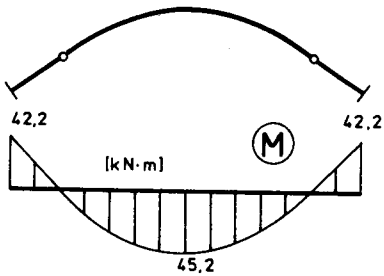
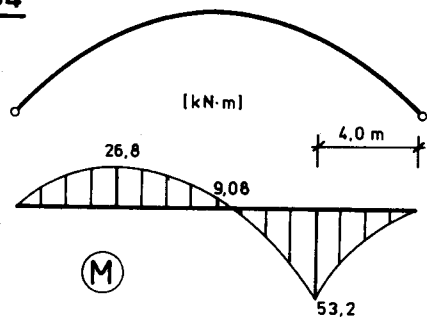
49



Rys. 134

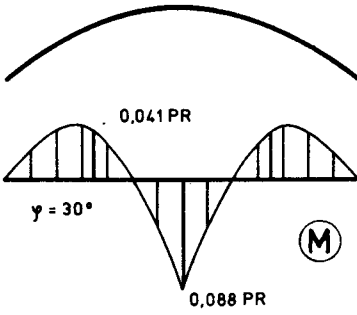
50

Rys. 135

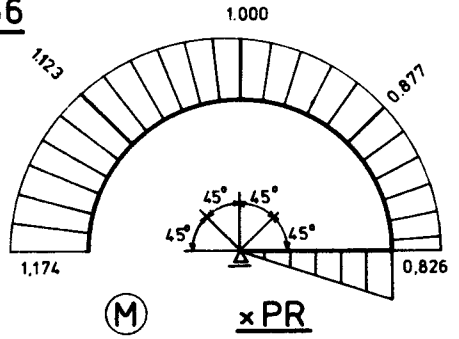
51525354

Rys. 136

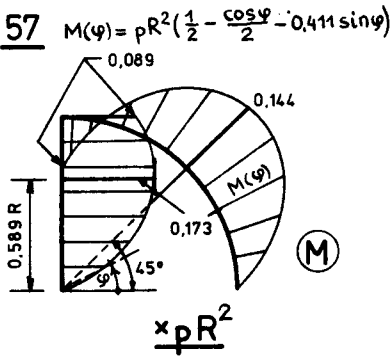
55



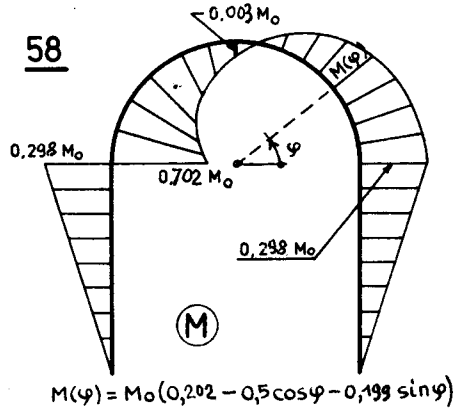
56



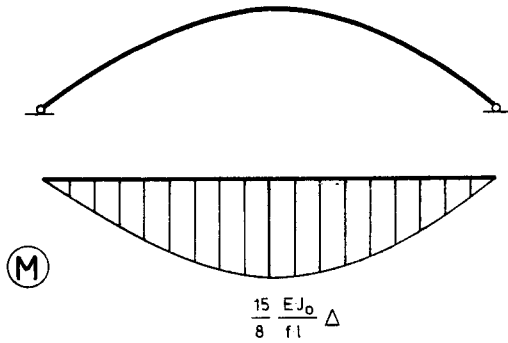
57



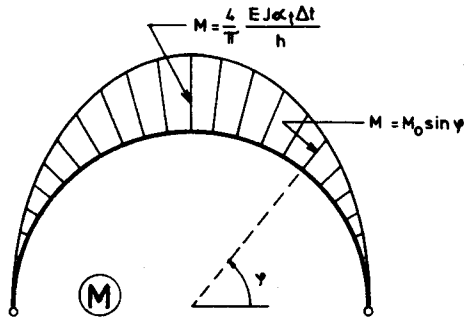
58



59

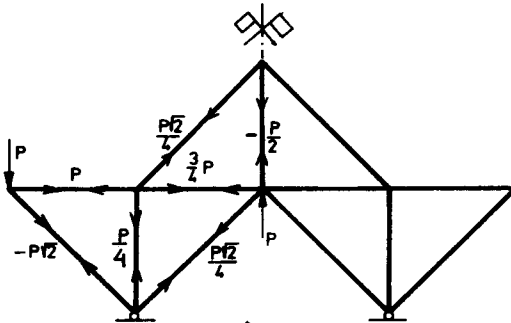


60

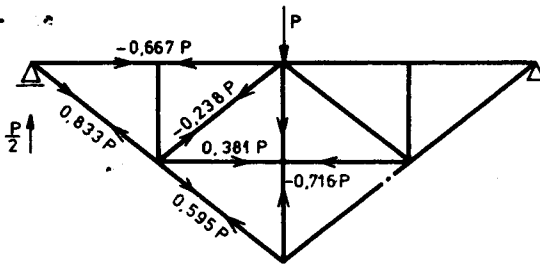


Rys. 138

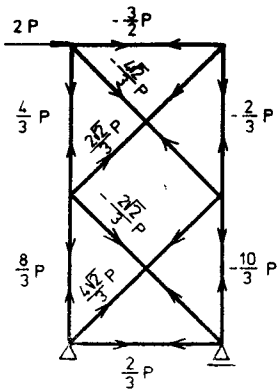
61



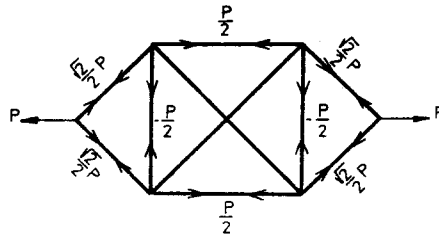
62



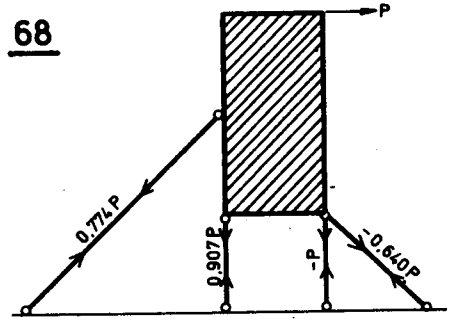
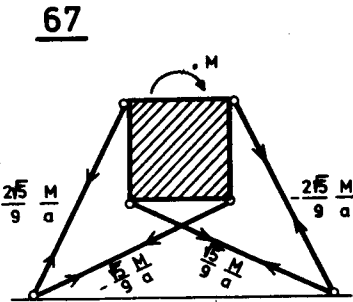
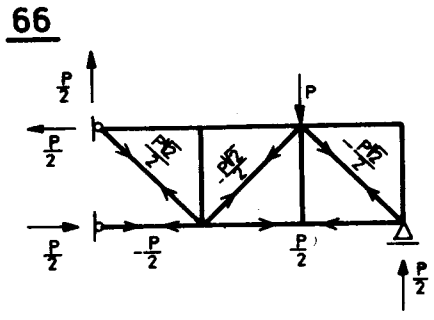
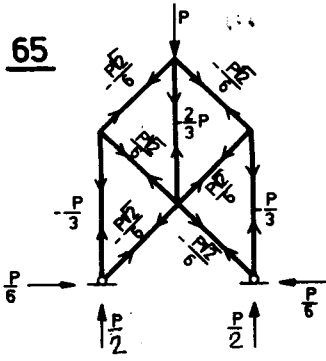
63



64



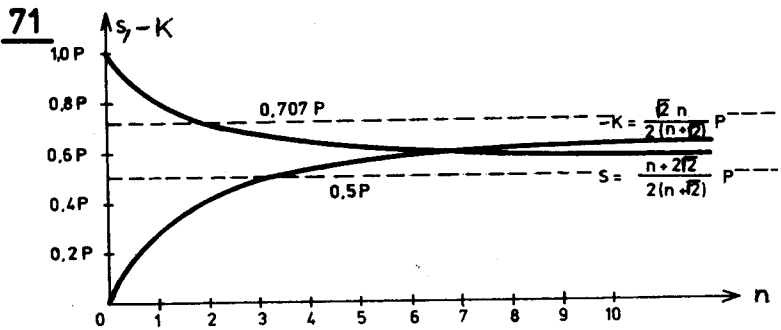
Rys. 139



Rys.140

69. $S = (13 - 2\sqrt{2}) P/23$

70. $S = -(2 - 1,5\sqrt{2}) P$



Rys.141

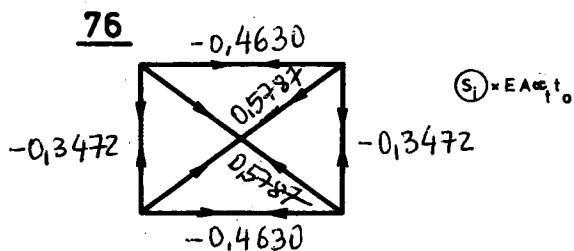
$$72. S_1 = -0,474 P$$

$$S_2 = 0,1703 P$$

$$73. S = -2,38 \text{ kN}$$

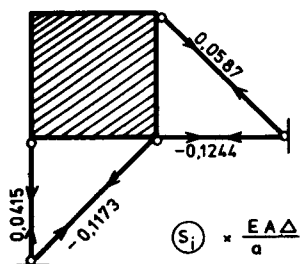
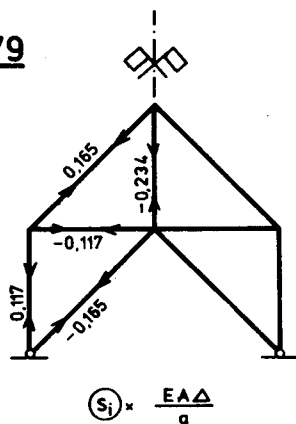
$$74. S = 0,547 P$$

$$75. S = 0$$



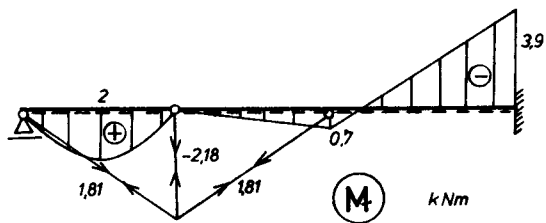
Rys. 142

$$77. S_1 = S_2 = -0,188 EA \alpha_t t_0$$

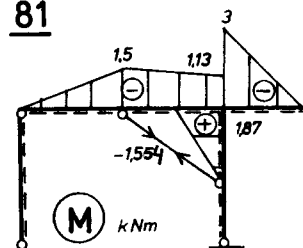
78**79**

Rys. 143

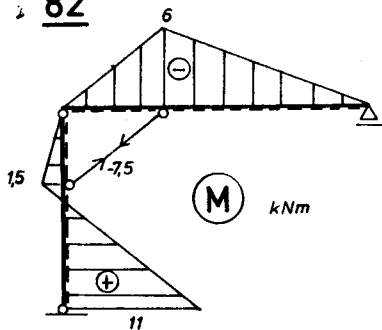
80



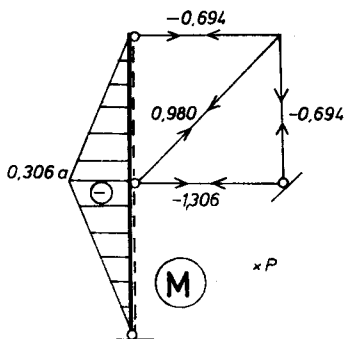
81



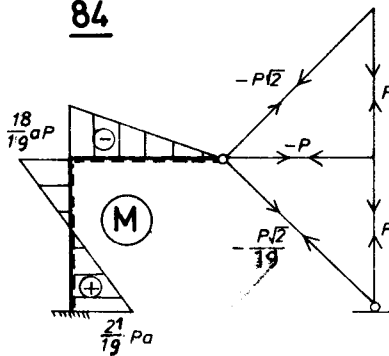
82

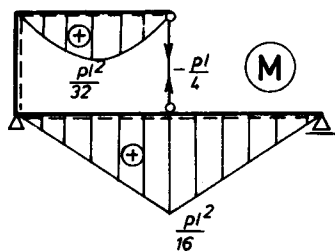
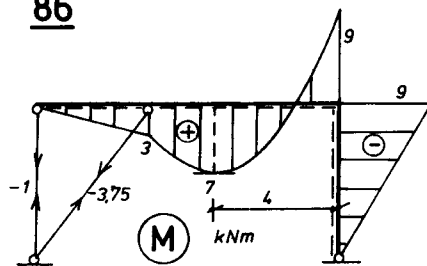
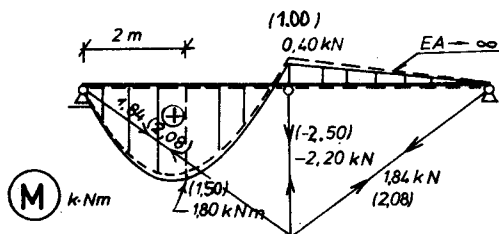
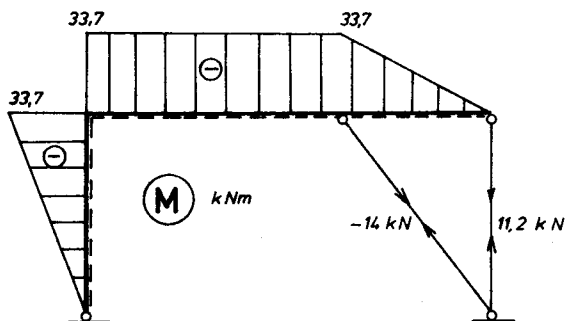


83

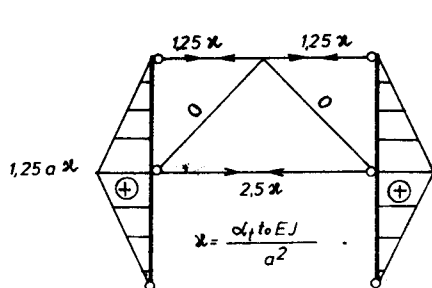


84

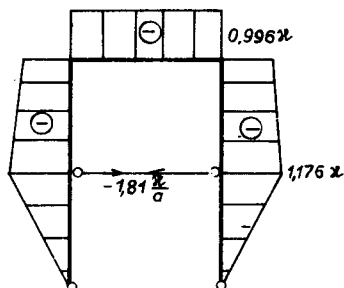


85**86****87****88****89**

Rys. 145

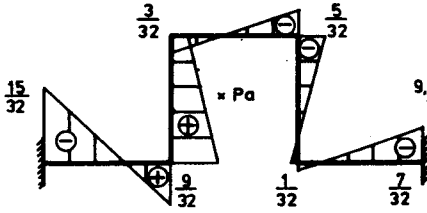
90

Rys. 146

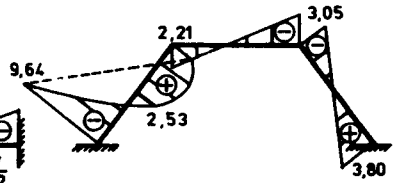


$$\alpha = \frac{\alpha_1 \Delta t E J}{h}$$

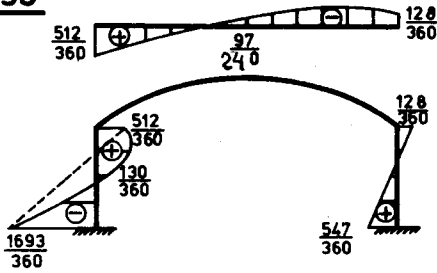
91



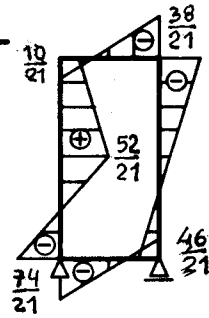
92



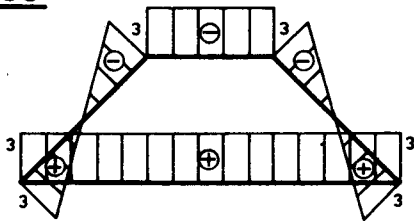
93



94

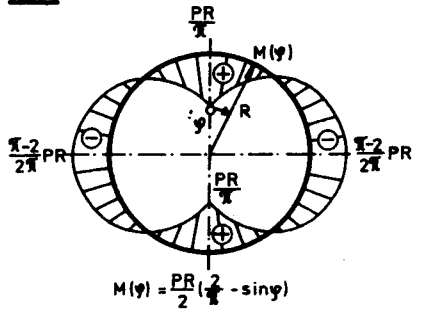


95



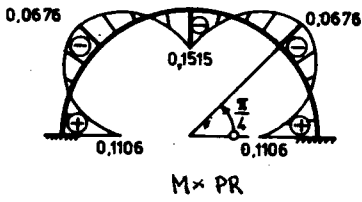
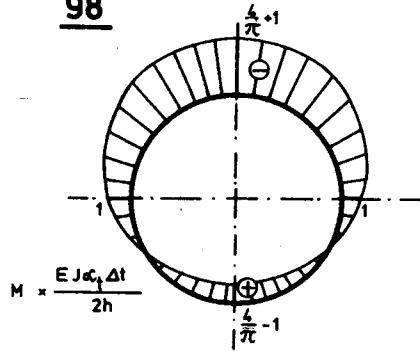
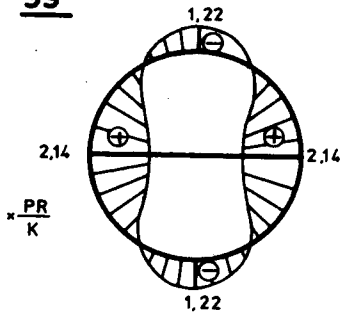
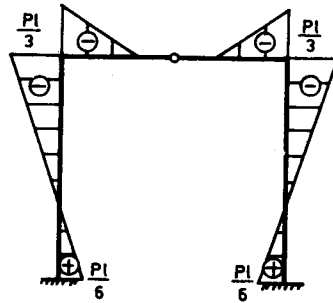
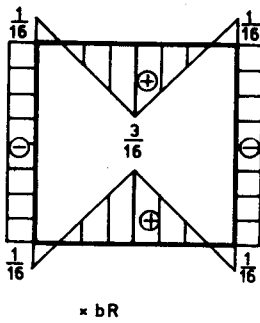
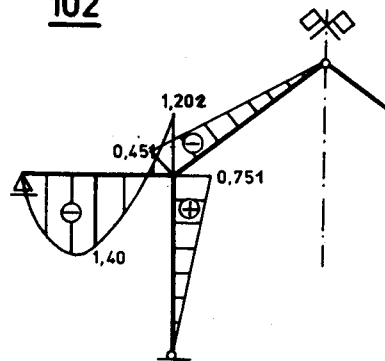
$$M \times \frac{E J \Delta}{a^2 (2 + 3)}$$

96



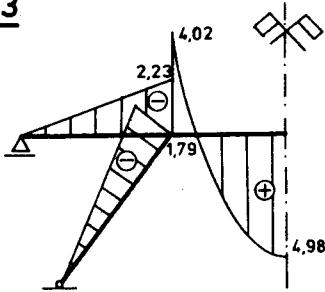
$$M(\varphi) = \frac{PR}{2} \left(\frac{2}{3} - \sin \varphi \right)$$

Rys. 147

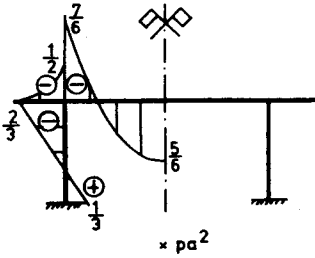
97**98****99****100****101****102**

Rys. 148

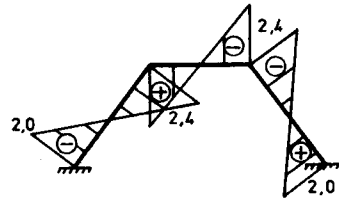
103



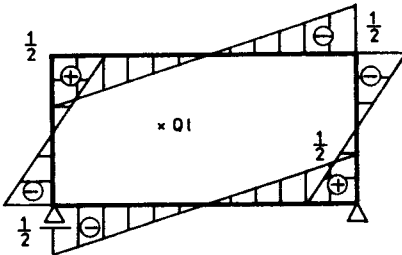
104



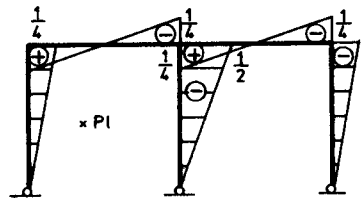
105

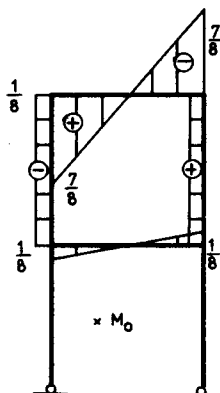
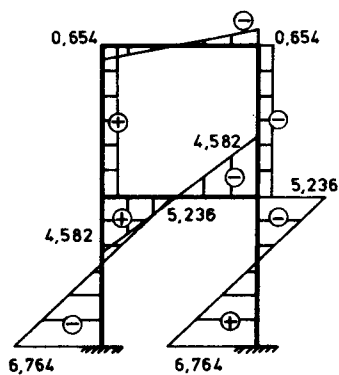
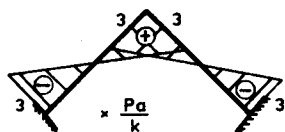
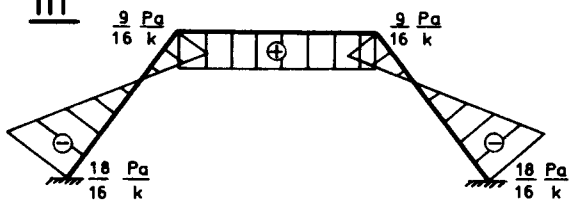
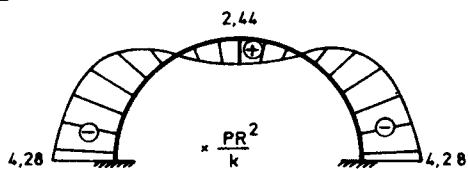


106

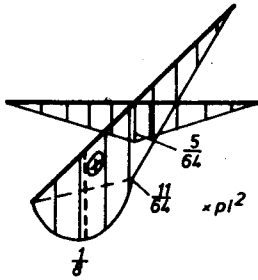
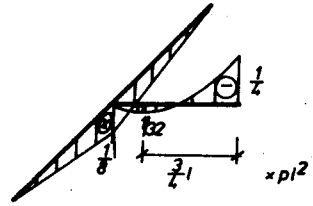
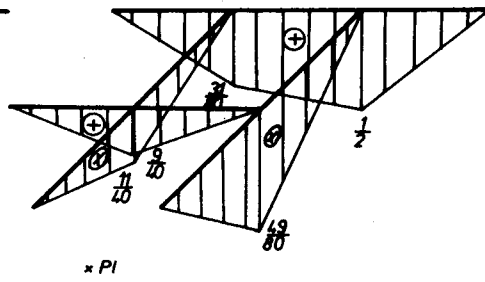
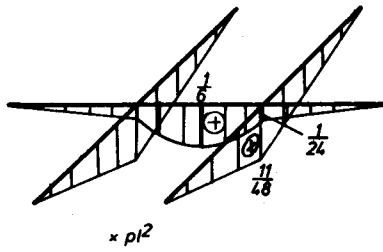


107



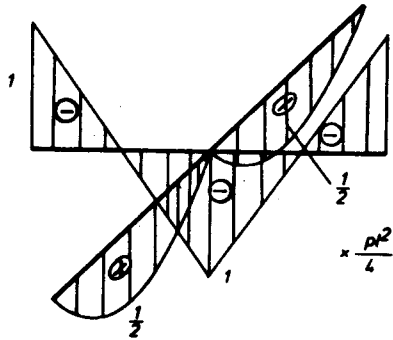
108**109****110****111****112**

Rys. 150

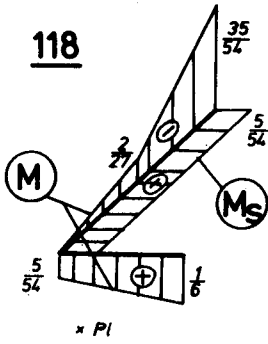
113114115116

Rys. 151

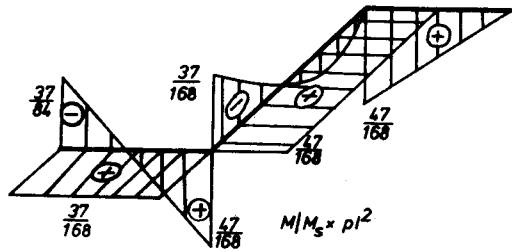
117



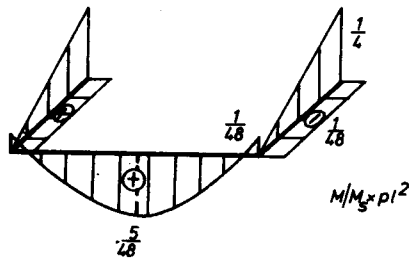
118



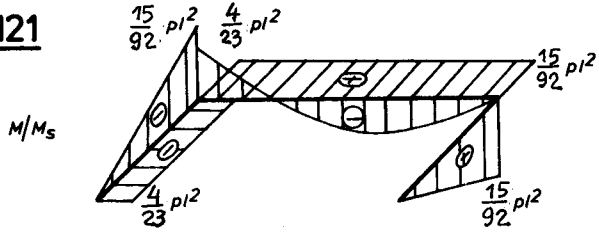
119



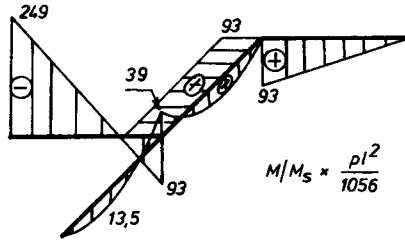
120



121



122



Rys.153

123. $M_1 = \xi/10 + 5 \xi^3/6.$

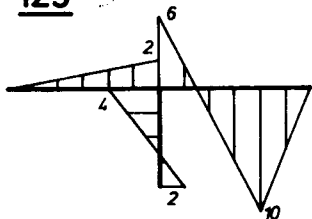
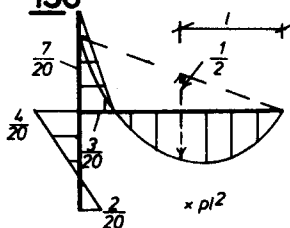
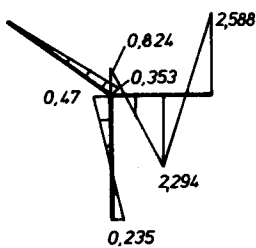
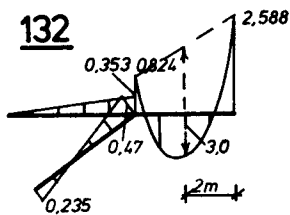
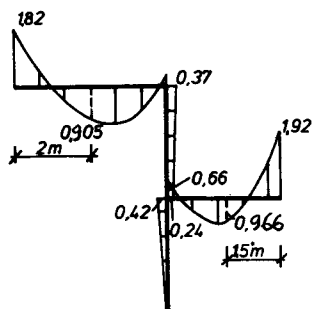
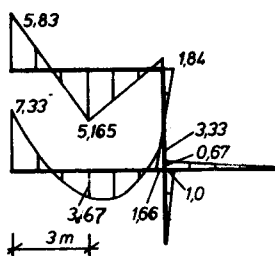
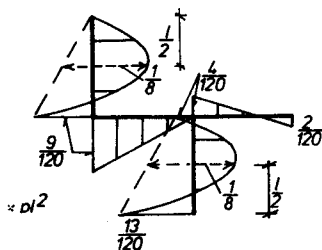
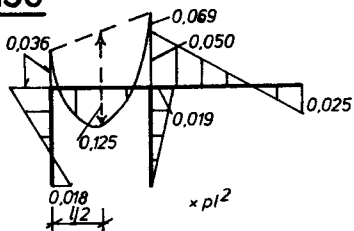
124. $R_B = (17\xi - 4\xi^3)/16; M = 1 (12 \xi^3 - 19\xi)/64.$

125. $R_B = (2 \xi^2 + 3\xi)/5.$

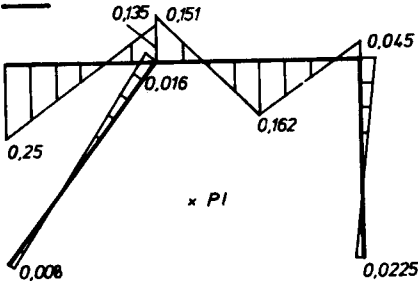
126. $S = \frac{2}{3} (\xi - \xi^3).$

127. $H = \frac{5}{24} (\xi^4 - 2\xi^3 - 3\xi^2 + 4\xi).$

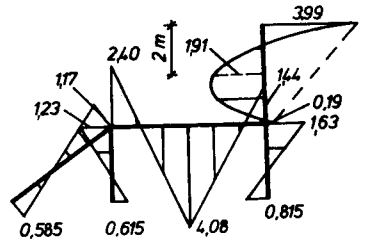
128. $M_1 = (0,105\xi + 0,150 \xi^3)R.$

129**130****131****132****134****133****135****136**

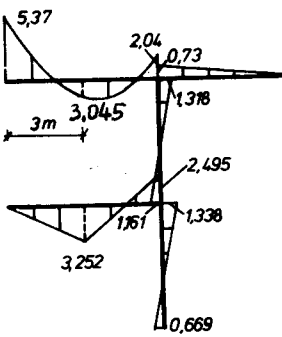
137



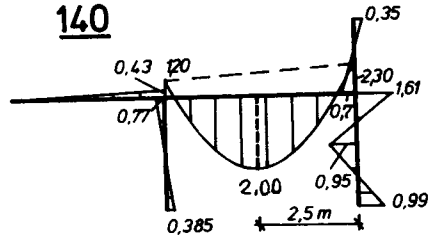
138



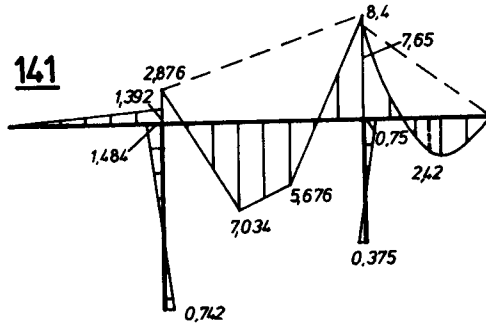
139



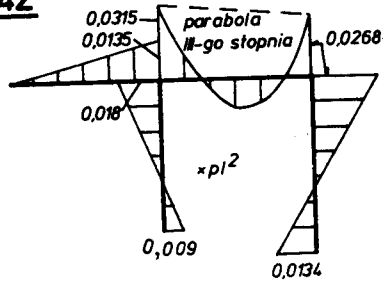
140



141

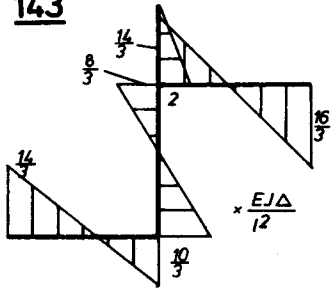


142

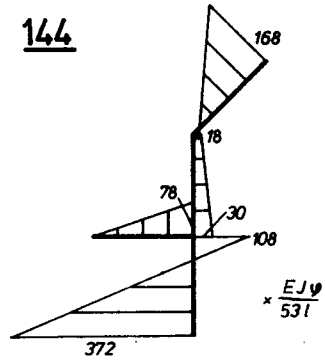


Rys. 155

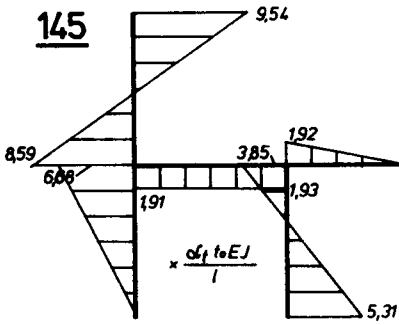
143



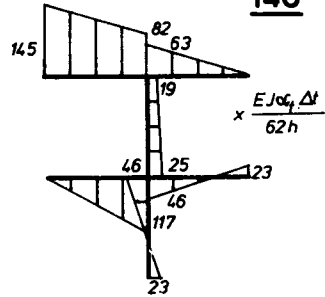
144



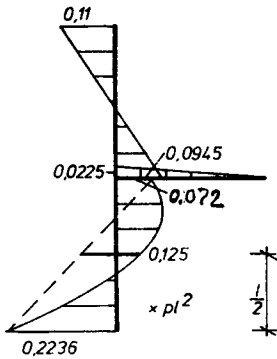
145



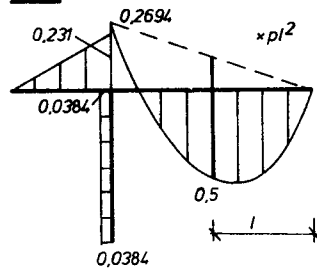
146



147

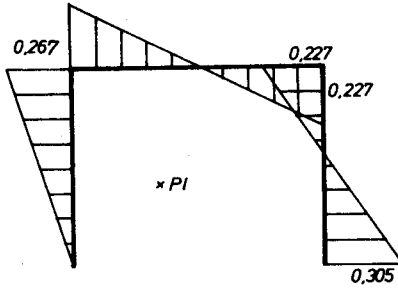


148

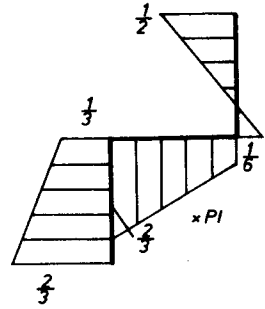


Rys. 156

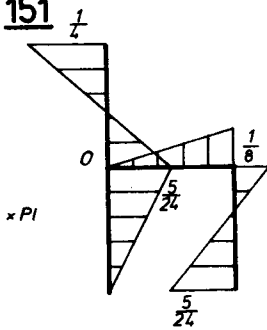
149



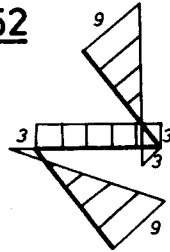
150



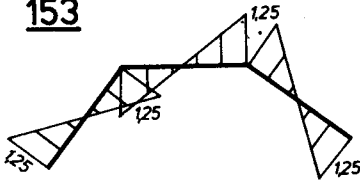
151



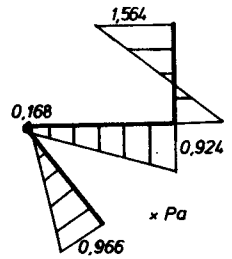
152



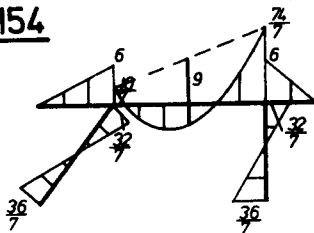
153



155



154



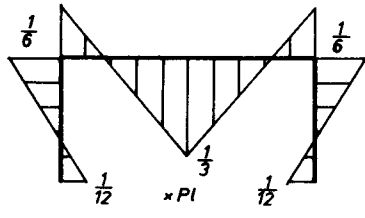
156.

$$2 \left(\frac{h_1}{b_2} \right)^2 - \frac{J_1}{J_2} = 0 .$$

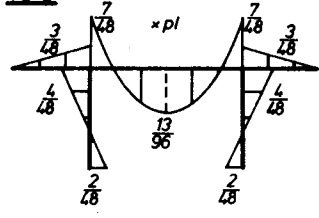
157. $P = \frac{9}{20} pl .$

158. $P = \frac{5}{12} pl .$

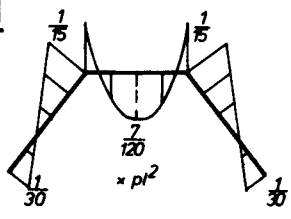
159



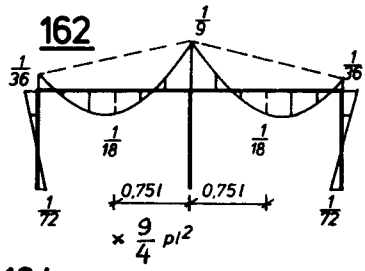
160



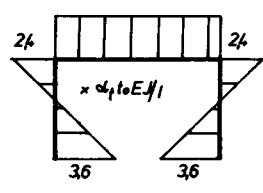
161



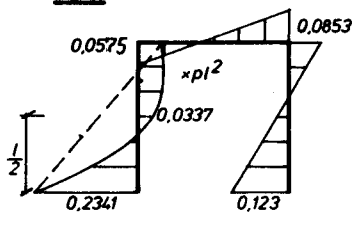
162



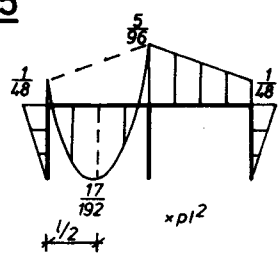
163



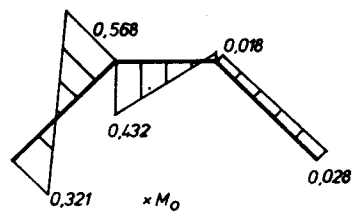
164



165



166



Rys. 158

167.

$$R_B = \begin{cases} 0,464 \omega_T(\xi) + \xi & \langle A - 1 \rangle \\ 0,833 \omega_T(\xi') - 0,524 \omega_T(\xi) + \xi' & \langle 1 - 2 \rangle \end{cases}$$

168.

$$M_{21} = \begin{cases} \frac{1}{42} [\omega_T(\xi') - 2 \omega_T(\xi)] & \langle A - 1 \rangle \\ \frac{1}{28} \omega_T(\xi') & \langle 1 - B \rangle \end{cases}$$

169.

$$M_{1A} = \begin{cases} 0,221 \text{ l} [-\omega_T(\xi') + 2 \omega_T(\xi)] & \langle A - 1 \rangle \\ 0,239 \text{ l} \omega_T(\xi') - 0,0684 \text{ l} \omega_T(\xi) & \langle 1 - 2 \rangle \end{cases}$$

170.

$$M_{21} = \begin{cases} -0,216 \omega_1(\xi') \text{ [m]} & \langle A - 1 \rangle \\ 0,324 \omega_1(\xi) + 4,542 \omega_1(\xi') \text{ [m]} & \langle 1 - 2 \rangle \end{cases}$$

171.

$$M_C = \begin{cases} 0,0662 \text{ l} \cdot \omega_1(\xi') & \langle A - 1 \rangle \\ -0,0662 \text{ l} \cdot \omega_1(\xi) - 0,265 \text{ l} \omega_1(\xi') & \langle 1 - 2 \rangle \end{cases}$$

172.

$$H_B = \begin{cases} 0,179 \omega_2(\xi') & \langle A - 1 \rangle \\ -0,239 \omega_1(\xi) - 0,0658 \omega_1(\xi') & \langle 1 - 2 \rangle \end{cases}$$

173.

$$R_A = \begin{cases} -0,621 \omega_1(\xi) + 0,366 \omega_1(\xi') + \varrho_1(\xi') & \langle 1 - 2 \rangle \\ -0,488 \omega_1(\xi) & \langle 2 - 3 \rangle \end{cases}$$

$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$1+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	-1	0	0	0	0	0	0
		$1+2\sqrt{2}$	0	-1	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0	0
			$1+2\sqrt{2}$	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	-1	0	0	0	0
				$1+2\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0	0
					$1+2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0	-1
						$2\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
							$1+2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
								$1+2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	0
									$1+\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	0	0
												$1+\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
													$1+\sqrt{2}/2$

K =

część symetryczna

U w a g a: Podana wyżej macierz K jest osobliwa (sprawdzić!).

W celu otrzymania rozwiązania należy na ustrój nałożyć trzy więzy uniemożliwiające ruch układu jako ciała sztywnego.

181.

$U_2 \quad V_2^* \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6$

$K^* =$

2268	-576	-768	576	-1500	0	0	0
	1432	576	-432	0	0	0	0
		3804	576	0	0	0	-576
			3296	0	-2000	0	-432
				3768	-576	576	0
część symetryczna					2432	-432	0
						1432	-1000
							1432

182.

$w_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4$

$K^* =$

$24/l^2$	0	$6/l$	0
0	8	2	0
$6/l$	2	8	2
0	0	2	4

$\frac{EJ}{I}$

$$F = \left[-\frac{23}{40} P, -\frac{3}{10} Fl, P, 0, -\frac{23}{40} P, 0, \frac{3}{20} P, 0 \right]^T$$

183.

$K = \frac{EJ}{I}$

$24/l^2$	$12/l$	$-24/l^2$	$12/l$				
$12/l$	8	$-12/l$	4				
$-24/l^2$	$-12/l$	$36/l^2$	$-6/l$	$-12/l^2$	$6/l$		
$12/l$	4	$-6/l$	12	$-6/l$	2		
		$-12/l^2$	$-6/l$	$36/l^2$	$6/l$	$-24/l^2$	$12/l$
		$6/l$	2	$6/l$	12	$-12/l$	4
				$-24/l^2$	$-12/l$	$24/l^2$	$-12/l$
				$12/l$	4	$-12/l$	8

F =

$-\frac{15}{32} pl$
0
$-\frac{17}{32} pl$
0
$-\frac{17}{32} pl$
0
$-\frac{15}{32} pl$
0

184.

$w_1 \quad \phi_1 \quad w_2 \quad \phi_2$

$K_{1-2} =$

$24/l^2$	$20/l$	$-24/l^2$	$28/l$
$20/l$	24	$-20/l$	16
$-24/l^2$	$-20/l$	$24/l^2$	$-28/l$
$28/l$	16	$-28/l$	40

$\frac{2 EJ}{11 I}$

187.

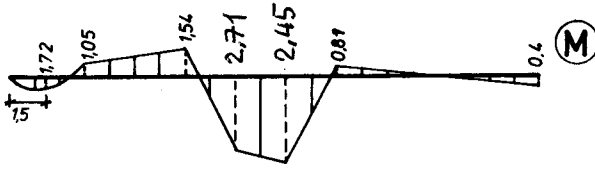
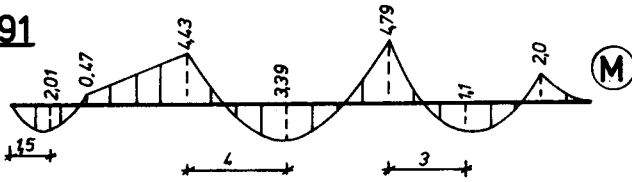
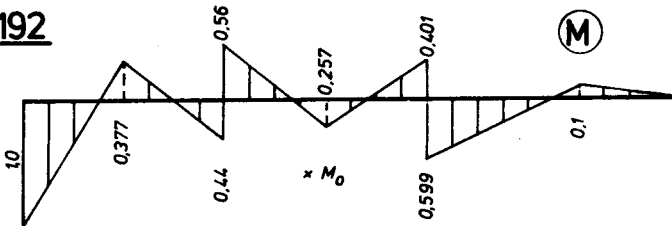
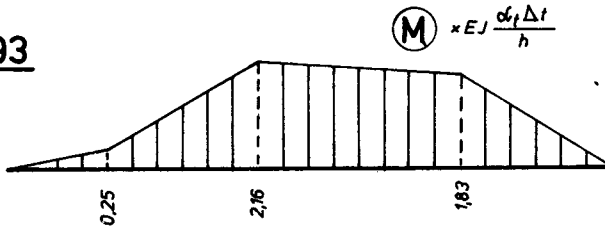
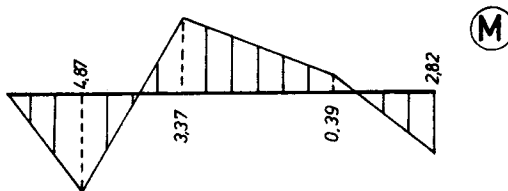
	1012	0	-6	-12	0	-6	0	0	0
(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	+6	0	2	0	-6	0	0	0
	1012	0	+6	0	0	0	0	0	0
(2)	1012	+6	0	0	0	0	-12	0	0
	8	0	0	0	0	-6	0	0	0
$K^* =$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(3)	1012	0	0	-1000	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(4)	1012	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

188.

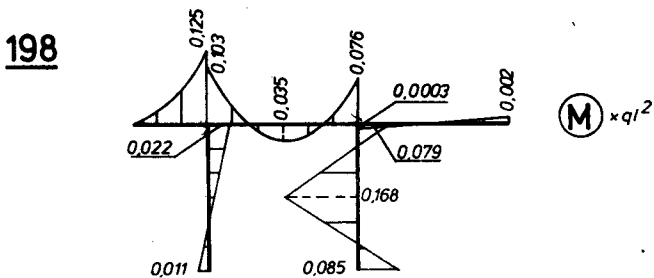
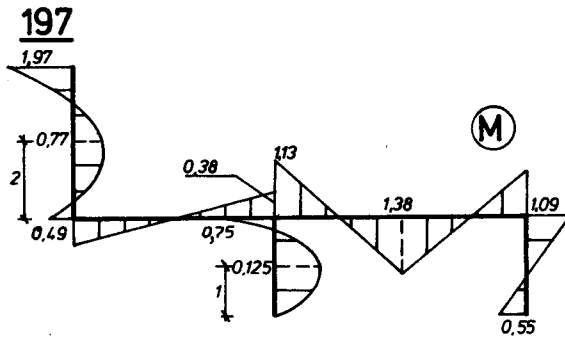
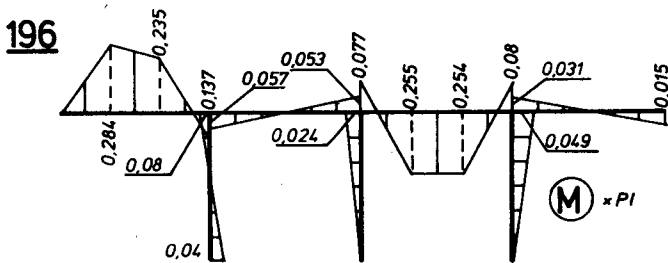
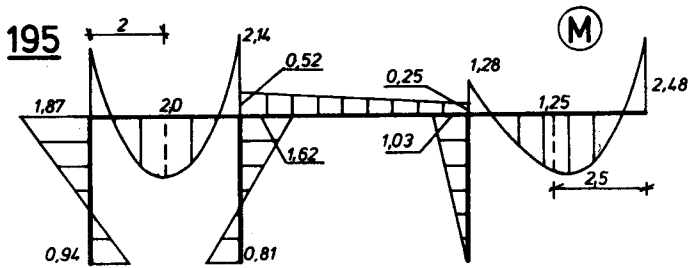
$$\bar{f}_{2-3} = [5,24, -3,52, -1,80, 0,76, -4,48, 4,20]^T$$

189.

$$\bar{f}_{2-3} = [2,0, 1,656, 0, 0,4, 1,544, 0,52]^T$$

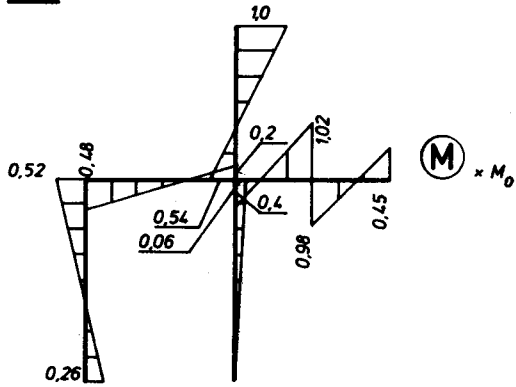
190**191****192****193****194**

rys.159

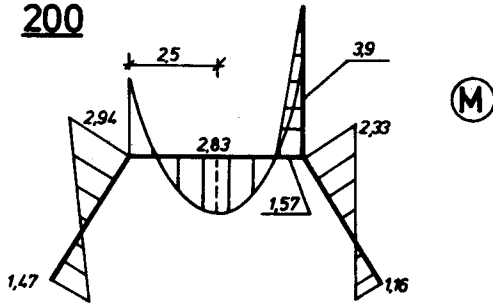


Rys. 160

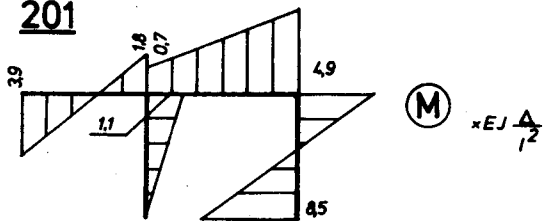
199



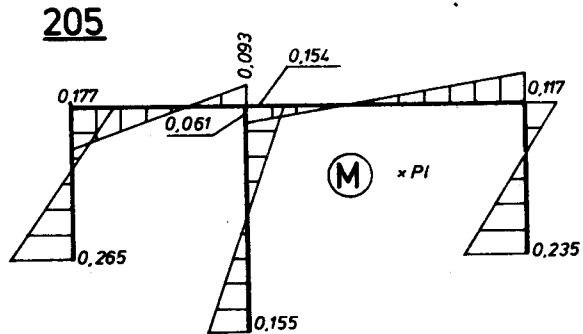
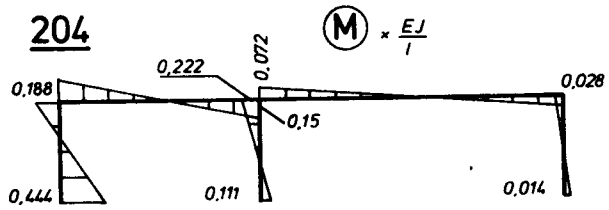
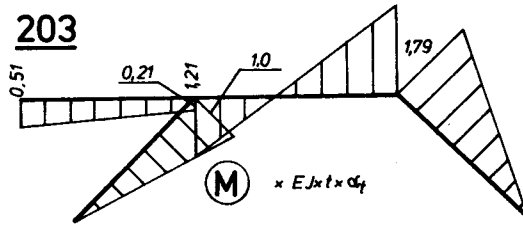
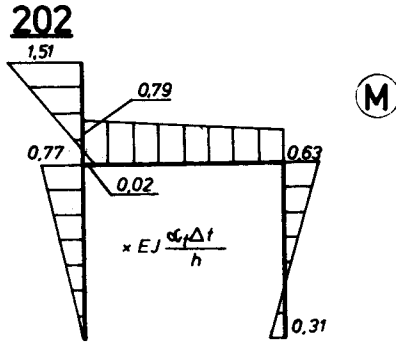
200



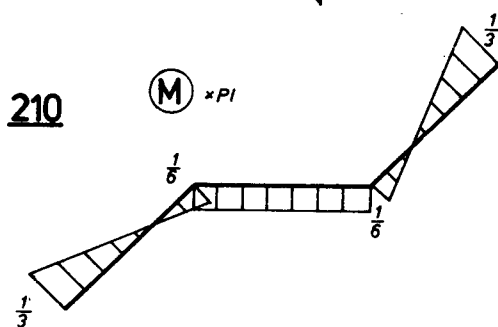
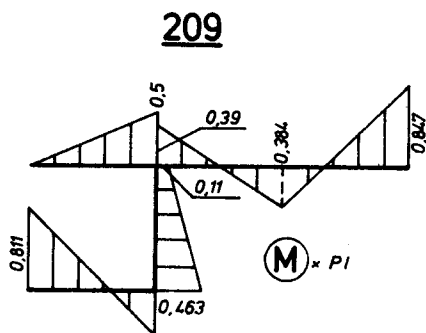
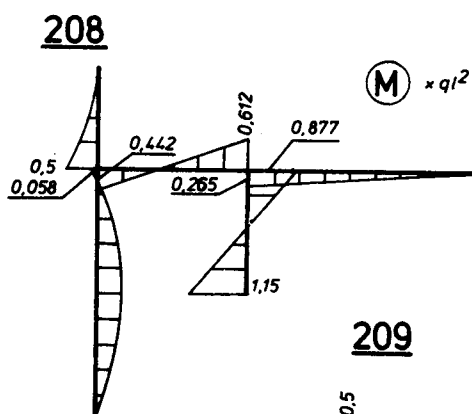
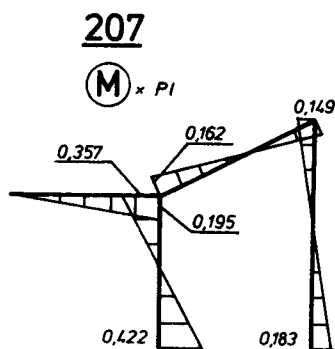
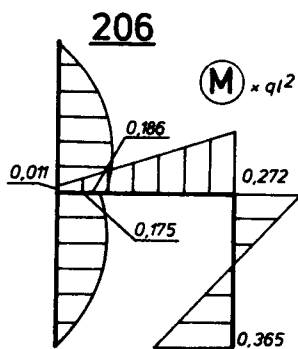
201



Rys. 161

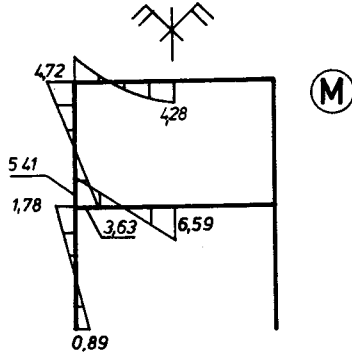


Rys. 162

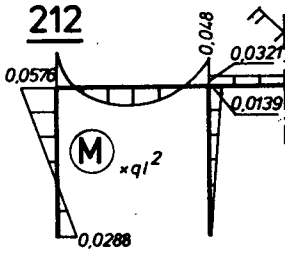


Rys. 163

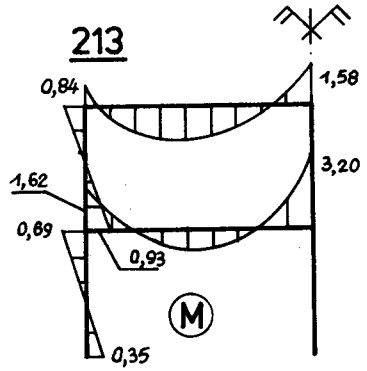
211



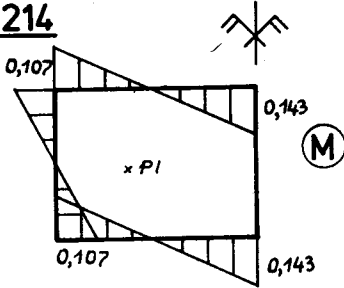
212



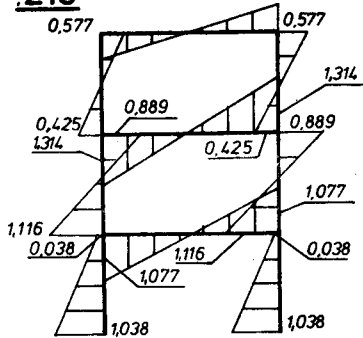
213



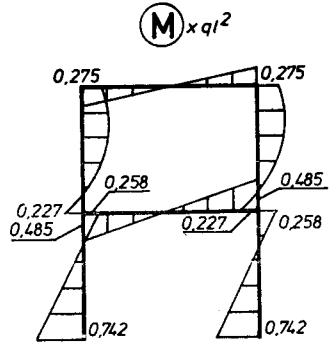
214



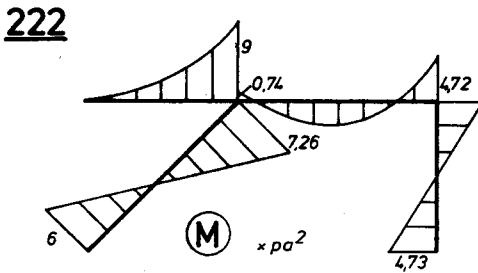
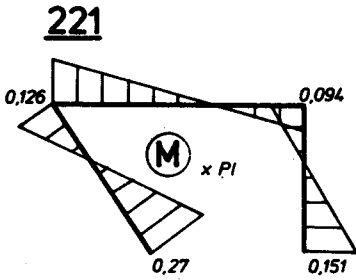
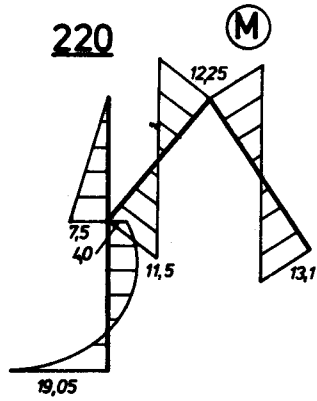
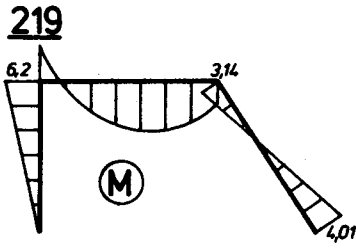
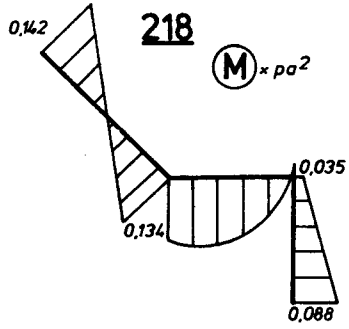
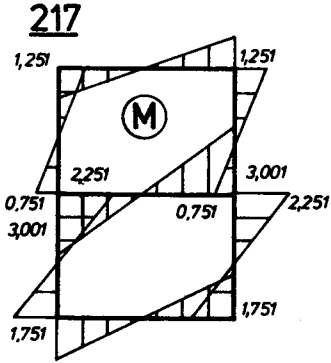
215



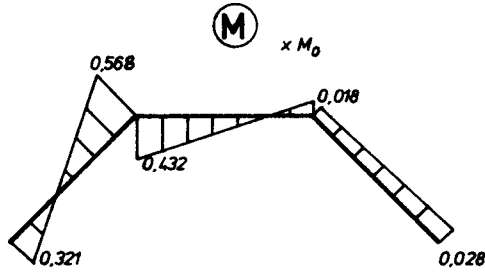
216



Rys. 164



Rys.165

223

Rys. 166

224.

$$\delta = \frac{13}{240} \frac{Fl^3}{EJ}, \quad \varphi = -\frac{Pl^2}{40 EJ}.$$

225.

$$\delta_1 = \frac{4,25}{384} \frac{pl^4}{EJ}, \quad \delta_2 = -\frac{pl^4}{256 EJ}.$$

226.

$$\delta = \frac{\alpha_t \Delta t l^2}{4 h}, \quad \varphi = -\frac{\alpha_t \Delta t \cdot l}{3 h}.$$

227.

$$\delta = -0,48 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

228.
$$\delta = \frac{-Fl^3}{64 EJ}.$$

229.

$$\delta = \frac{11}{192} \frac{Fl^3}{EJ}.$$

230.

$$\delta = \frac{85}{18} \frac{Pa^3}{EJ}.$$

231.

$$\delta = \frac{79}{66} \frac{Fa^3}{EJ}.$$

232.

$$EJ\varphi = \frac{63}{8} \text{ KN m}^2.$$

233.

$$\delta = -(3 + 2\sqrt{2}) \frac{Fa}{EA}$$

234.

$$\varphi = 0.$$

235.

$$\delta = - \frac{3\sqrt{2} - 1}{4} \frac{Pa}{EA} .$$

237.

$$\delta = \frac{3}{8} \frac{Pa^3}{EJ} ,$$

$$\varphi = - \frac{Pa^2}{24 EJ} .$$

239.

$$\delta = - \frac{Pl^3}{288 EJ} .$$

241.

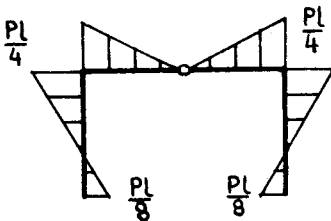
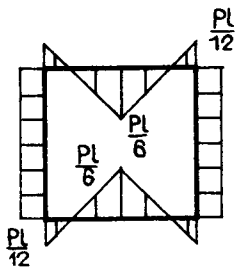
$$EJ\delta = \frac{63}{4} \text{ kNm}^3 .$$

243.

$$\Delta \cong 0,0262 \frac{Fl^3}{EJ} .$$

245.

$$\Delta = 0 .$$

246**248**236.

$$\delta = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} \frac{Pa}{EA} .$$

238.

$$\delta = 4 \text{ mm} ,$$

$$\varphi = 0,002 \text{ rd} .$$

240.

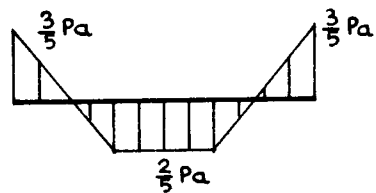
$$\delta = \frac{29}{3840} \cdot \frac{Pl^4}{EJ} .$$

242.

$$EJ\varphi = 2,16 \text{ kNm}^2 .$$

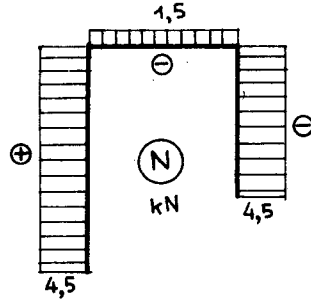
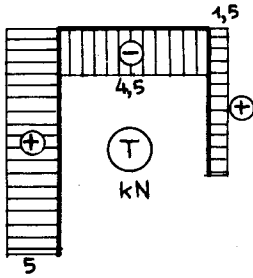
244.

$$\Delta \cong \frac{Fl^3}{23,5 EJ} .$$

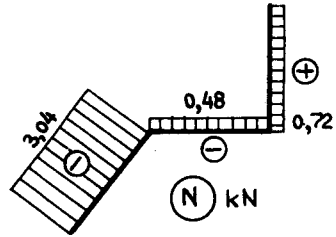
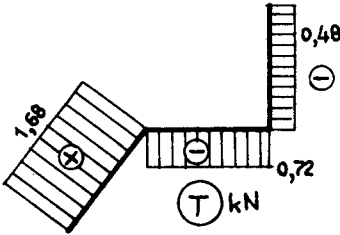
247

249. Patrz odpowiedź do zadania nr 159.

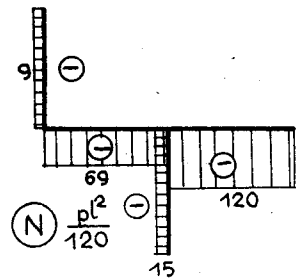
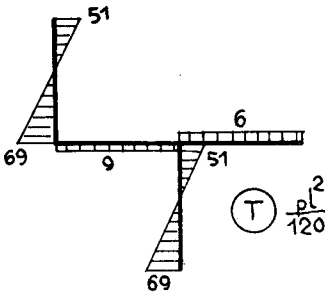
250



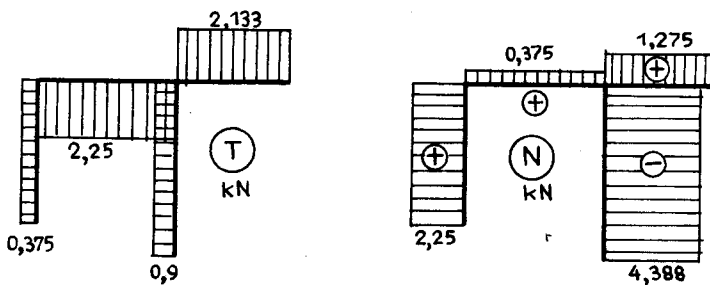
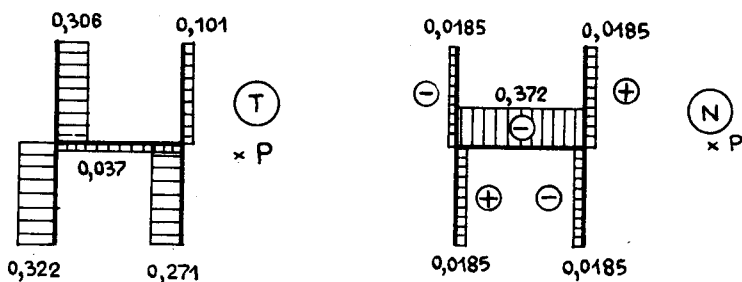
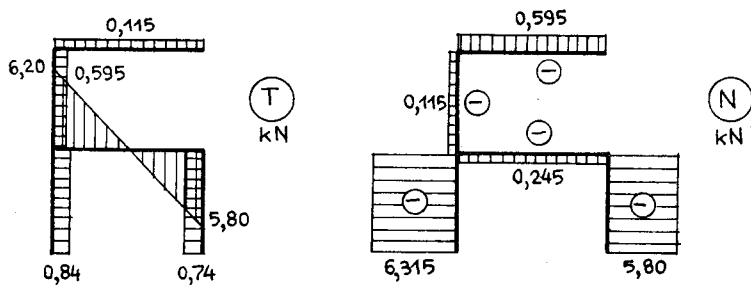
251

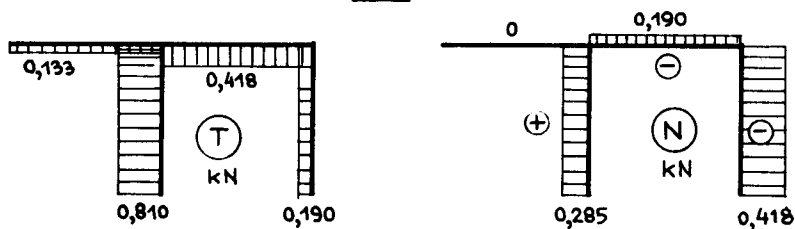
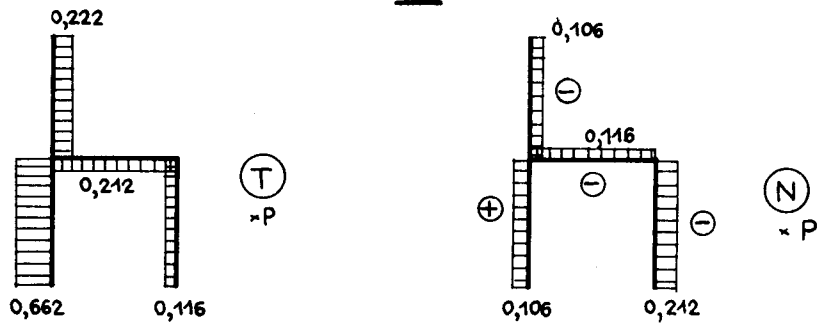
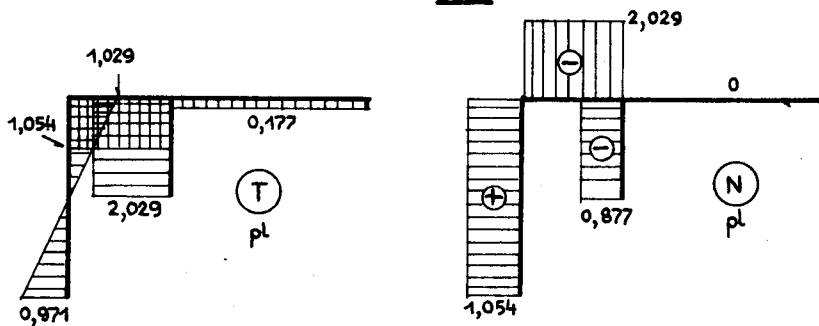


252



Rys.168

253254255

256**257****258**

Rys.170

259.

$$M_{54} = -23,93 \text{ kNm.}$$

260.

$$M_{45} = 27,480 \text{ kNm.}$$