



Katedra Mechaniki Budowli i Mostów  
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska  
Politechnika Gdańska

# Mechanika Budowli

## Układy Statycznie Niewyznaczalne

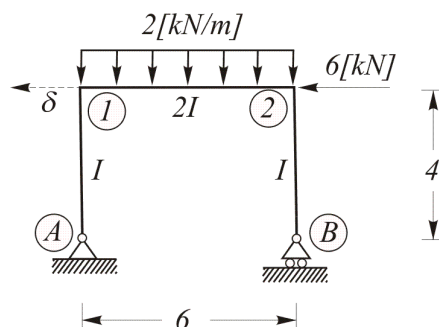
Materiały dydaktyczne do ćwiczeń  
opracowanie  
M.K.Jasina, M. Skowronek

Gdańsk 2010

## I. Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych

### 1. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 1.1. Obliczyć przemieszczenie poziome  $\delta$  rygla. Znana jest sztywność na zginanie  $EI=10\,000$  [kNm<sup>2</sup>].



Rys. 1.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym

TEORIA

Do obliczenia poszukiwanego przemieszczenia stosujemy zasadę prac wirtualnych dla układów odkształcalnych, z uwzględnieniem jedynie wpływu zginania.

Wpływ pozostałych sił wewnętrznych pomijamy, jako mały.

Wzór do obliczenia przemieszczenia ma postać:

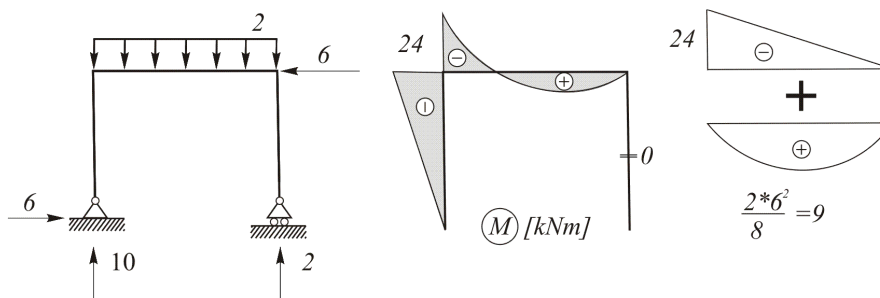
$$\delta \cdot \bar{1} \cong \delta(M) \cdot \bar{1} \quad , \quad \delta = \delta(M) \quad , \quad \delta = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds ;$$

gdzie:

$M$  – momenty zginające wywołane obciążeniem zadaniem,

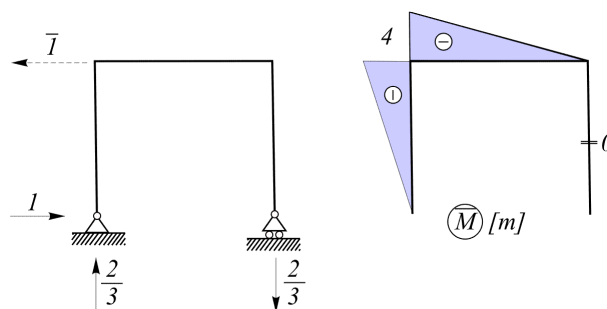
$\bar{M}$  – momenty zginające pochodzące od obciążenia jednostkowego wirtualnego.

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .



Rys. 1.2. Wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



Rys. 1.3. Wykres momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Stosując do dalszych obliczeń zasadę prac wirtualnych można wykorzystać tzw. „całkowanie graficzne” zgodnie ze wzorem

$$\int_l G(x) \cdot f(x) ds = A \cdot \eta^f ;$$

gdzie:

$G(x)$  – funkcja krzywoliniowa,

$f(x)$  – funkcja liniowa,

$A$  – pole pod funkcją krzywoliniową,

$\eta^f$  – rzędna funkcji liniowej odpowiadająca odciętej w miejscu środka ciężkości figury pod krzywą (spr. wzór Wereszczagina).

Całkowanie graficzne przeprowadza się w przedziałach w których funkcje  $M$  i  $\bar{M}$  są niezerowe.

Przedział (A-1) – wielkości pomocnicze):

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-24) = -48, \quad \eta_1 = \frac{2}{3} \cdot (-4) = -\frac{8}{3} .$$

Przedział (1-2) – wielkości pomocnicze):

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-24) = -72, \quad \eta_2 = \frac{2}{3} \cdot (-4) = -\frac{8}{3} ;$$

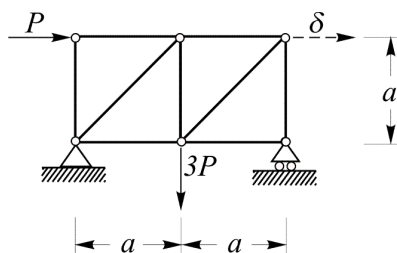
$$A_3 = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36, \quad \eta_3 = \frac{1}{2} \cdot (-4) = -2 .$$

Zgodnie ze wzorem Wereszczagina szukane przemieszczenie jest równe

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} A_1 \eta_1 + \frac{1}{2EI} (A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3) = 0.0188 [m] .$$

## 2. Zadanie

Dana jest swobodnie podparta kratownica przedstawiona na rysunku 2.1. Obliczyć zaznaczone przemieszczenie  $\delta$  węzła w pasie górnym. Sztywności wszystkich prętów są stałe  $EA = const$  .



Rys. 2.1. Dany układ kratowy z obciążeniem zewnętrznym

Przemieszczenia w kratownicach obliczamy stosując zasadę prac wirtualnych według wzoru

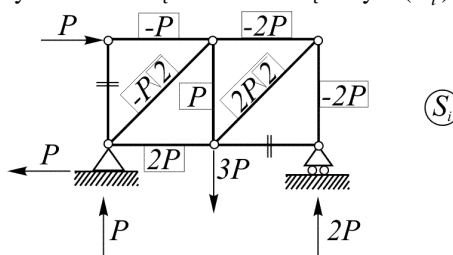
$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i ;$$

gdzie:

$n$  – liczba prętów,

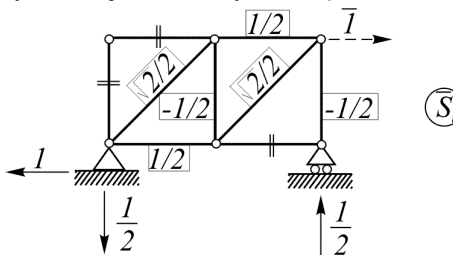
$S_i, \bar{S}_i$  – siły w prętach wywołane odpowiednio: obciążeniem zewnętrznym oraz jednostkowym obciążeniem wirtualnym.

- 1) Siły w prętach kratownicy wywołane obciążeniem zewnętrznym ( $S_i$ ).



Rys. 2.2. Siły w prętach od obciążenia zewnętrznego

- 2) Siły w prętach kratownicy wywołane jednostkowym obciążeniem wirtualnym ( $\bar{S}_i$ ).



Rys. 2.3. Siły w prętach od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Zgodnie ze wzorem  $\delta = \sum \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i = \\ &= \frac{1}{EA} \left[ (-P\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} + 2P \cdot \frac{1}{2} a + P \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a + (-2P) \cdot \frac{1}{2} \cdot a + 2P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} + (-2P) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a \right] = \\ &= \frac{Pa}{2EA} [2\sqrt{2} + 1] \end{aligned}$$

### 3. Zadanie

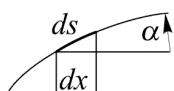
Dany jest łuk paraboliczny o zmiennym przekroju. Obliczyć kąt obrotu przekroju poprzecznego w podporze (B) (identyczny jest kąt obrotu stycznej do osi łuku w punkcie podporowym). W obliczeniach uwzględnić jedynie wpływ momentów zginających. Moment bezwładności przekroju zmienia się zgodnie ze wzorem  $I = \frac{I_0}{\cos \alpha}$ , gdzie  $EI_0 = 1\,000$  [kNm<sup>2</sup>] zaś  $\alpha$  oznacza kąt nachylenia stycznej do osi łuku w danym przekroju.

T  
E  
O  
R  
I  
A

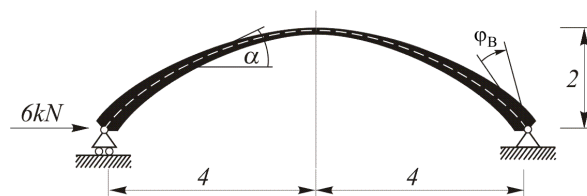
Stosując zasadę prac wirtualnych przy uwzględnieniu jedynie momentu zginającego szukany kąt obrotu (przesunięcie uogólnione) obliczymy ze wzoru

$$\varphi_B = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds .$$

Zmienne podcałkowa (s) przebiega wzdłuż łuku (rys. 3.1.a) zatem jej różniczka przyjmuje postać  $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$ .



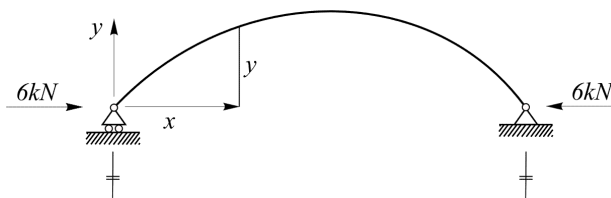
a) Zamiana zmiennych



b) Obciążenie łuku

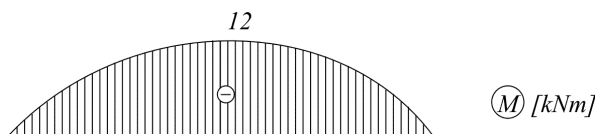
Rys. 3.1. Dany układ z obciążeniem zewnętrznym

1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .



Rys. 3.2. Dany układ z obciążeniem siłą skupioną i równoważącą reakcją

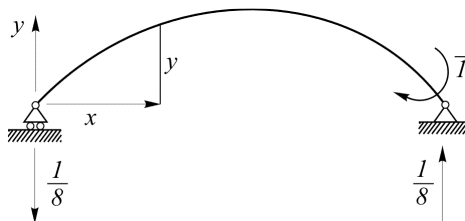
$$M(x) = -6y \text{ [kNm]}$$



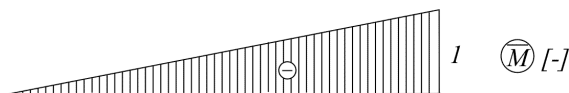
Rys. 3.3. Wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia (w przypadku poszukiwania kąta obrotu jest to jednostkowy moment skupiony, obie wielkości tworzą parę sprzężoną); wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .

$$\bar{M}(x) = \frac{1}{8}x$$



Rys. 3.4. Dany układ z obciążeniem jednostkowym wirtualnym i równoważącymi reakcjami



Rys. 3.5. Wykres momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Zmienna podcałkowa  $s$  przebiega wzdłuż łuku. Podstawiając  $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$  całka przyjmuje postać

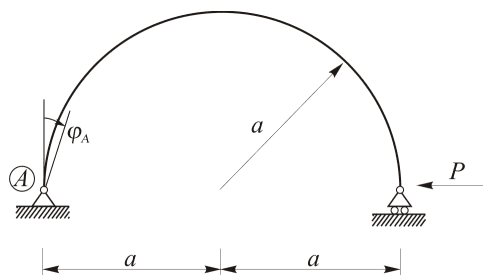
$$\varphi_B = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \int_0^8 \frac{M \cdot \bar{M}}{E \frac{I_0}{\cos \alpha}} \cdot \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{1}{EI_0} \int_0^8 M \cdot \bar{M} dx .$$

Całkowanie graficzne

$$\int_0^8 M \bar{M} dx = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot (-12) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 32 \text{ [kNm}^3\text{]}, \text{ zatem } \varphi_B = \frac{1}{1000} \cdot 32 = 1^\circ 50' .$$

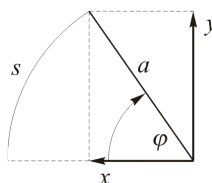
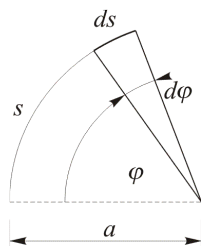
#### 4. Zadanie

Dany jest łuk kołowy przedstawiony na rysunku 4.1. Obliczyć kat obrotu  $\varphi_A$  przekroju w punkcie podporem (A). Dana jest sztywność na zginanie  $EI=10\,000 \text{ [kNm}^2\text{]}$ .



Rys. 4.1. Dany łuk kołowy z obciążeniem zewnętrznym

Rozwiązanie przeprowadzimy całkując analitycznie w biegunowym układzie współrzędnych. Zmienną podcałkową  $s$  przebiegającą wzdłuż łuku zastąpimy współrzędną kątową  $\varphi$  (rys. 4.2) przyjmując  $ds = a \cdot d\varphi$ .



Rys. 4.2. Zamiana zmiennych

Zakładając  $d\varphi$  jako małe można przyjąć, że  $d\varphi \cong \text{tg}(d\varphi)$

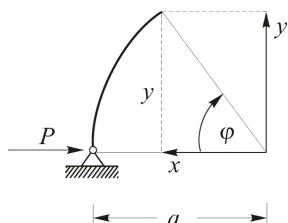
$$\text{tg}(d\varphi) = \frac{ds}{a} \Rightarrow ds = a \cdot d\varphi ,$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{a} , \cos \varphi = \frac{x}{a} .$$

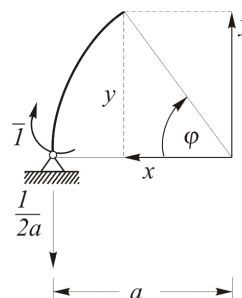
1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .

$$M(\varphi) = -P \cdot y = -Pa \sin \varphi.$$

2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



Rys. 4.3. Działanie obciążenia zewnętrznego



Rys. 4.4. Działanie obciążenia jednostkowego wirtualnego

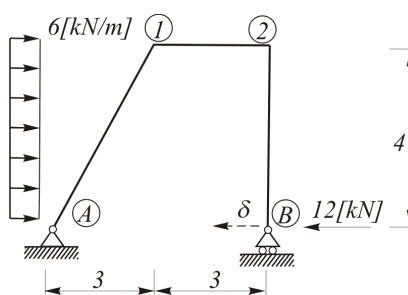
$$\bar{M}(\varphi) = 1 - \frac{1}{2a}(a - x) = 1 - \frac{1}{2a}(1 - \cos \varphi)a = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi).$$

W wyniku całkowania po łuku (zamieniamy zmienną  $ds = a \cdot d\varphi$ ) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_l \frac{M(\varphi) \cdot \bar{M}(\varphi)}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^\pi (-Pa \sin \varphi) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) \cdot a d\varphi = -\frac{Pa^2}{2EI} \int_0^\pi \sin \varphi (1 + \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{Pa^2}{2EI} \int_0^\pi [\sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi] d\varphi = -\frac{Pa^2}{2EI} \left[ -\cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^\pi = -\frac{Pa^2}{2EI} [ -(-1) + 0 - (-1) + 0 ] = \\ &= -\frac{Pa^2}{EI} \end{aligned}$$

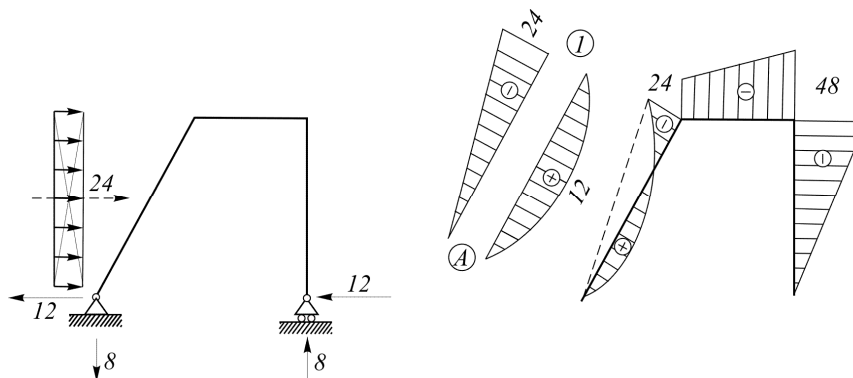
## 5. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 5.1. Obliczyć poziome przemieszczenie  $\delta$  punktu podporowego (B). Znała jest sztywność na zginanie  $EI=8\,000$  [kNm<sup>2</sup>].



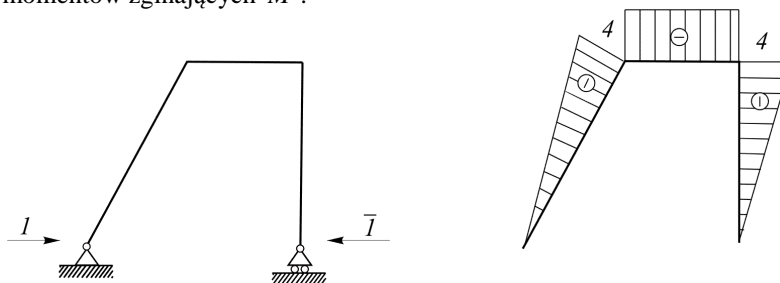
Rys. 5.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym

1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ . Na odcinku (A-1) wykres  $M$  rozkładamy na dwie części: liniową i paraboliczną – według rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



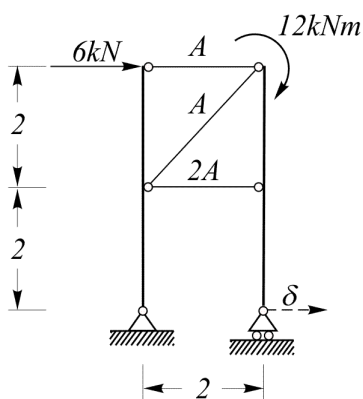
Rys. 5.3. Wykres momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

W wyniku całkowania graficznego wykresów  $M$  i  $\bar{M}$  otrzymujemy szukane przemieszczenie

$$\delta = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{8000} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-24) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) + 3 \cdot (-4) \cdot (-36) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-48) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) \right] = 0.096[m] = 9.6[cm].$$

## 6. Zadanie

Dany jest układ ramowo-kratowy przedstawiony na rysunku 6.1. Obliczyć poziome przemieszczenie  $\delta$  prawej podpory. Dla danego układu przyjąć  $EI=2\,000$  [kNm<sup>2</sup>] i  $EA=1\,500$  [kN].



Rys. 6.1. Dany układ ramowo-kratowy z obciążeniem zewnętrznym



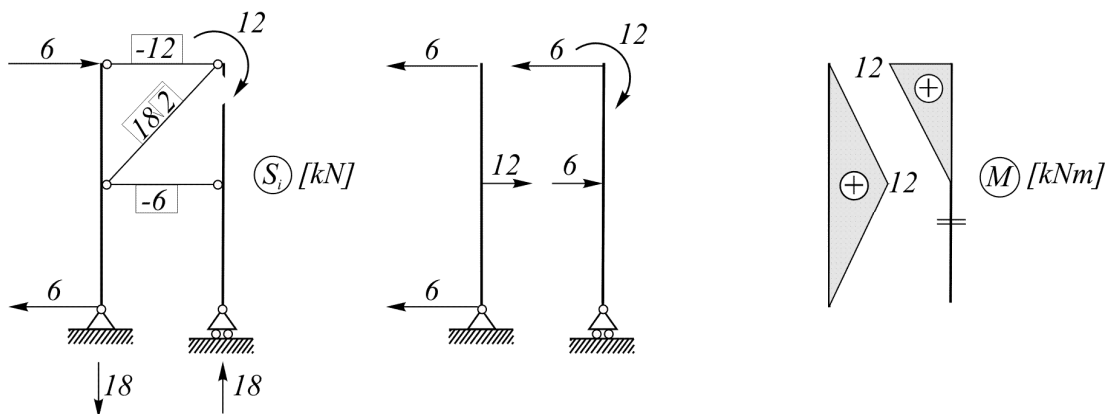
## TEORIA

Wzór służący do obliczania przemieszczeń w układach ramowo-kratowych ma postać

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \sum_{i=1}^n \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i.$$

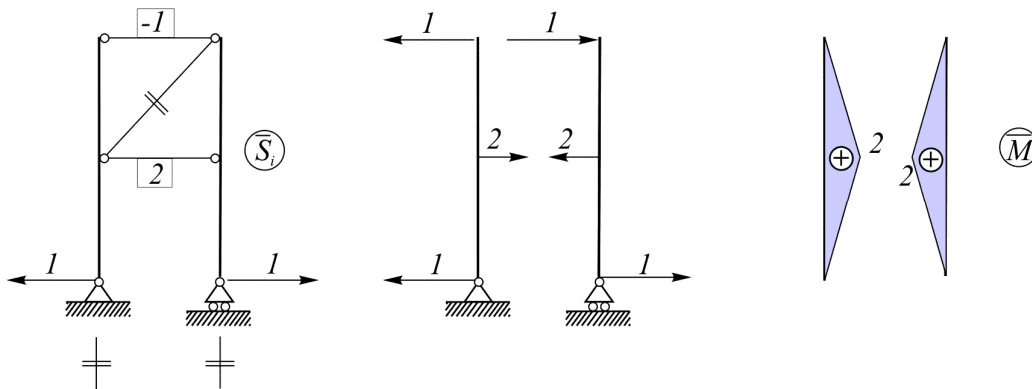
Wzór ten wynika z założenia, że w elementach ramowych układu uwzględnia się jedynie wpływ momentów zginających, zaś w prętach kratowych wpływ sił normalnych.

1) Siły wewnętrzne wywołane obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 6.2. Wyznaczenie sił wewnętrznych od obciążenia zewnętrznego

2) Siły wewnętrzne wywołane jednostkowym obciążeniem wirtualnym.



Rys. 6.3. Wyznaczenie sił wewnętrznych od obciążenia jednostkowego wirtualnego

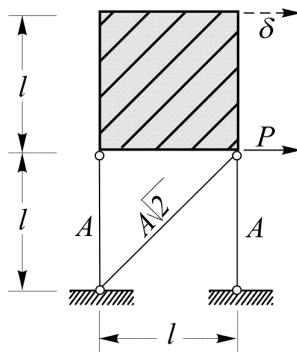
Przemieszczenie obliczamy korzystając z uprzednio podanego wzoru

$$\begin{aligned} \delta &= \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \sum \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA} \left[ (-12) \cdot (-1) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-6) \cdot 2 \cdot 2 \right] = \\ &= \frac{1}{2000} \cdot 40 + \frac{1}{1500} \cdot 12 = 0.028 [m] = 2.8 [cm]. \end{aligned}$$

## 7. Zadanie

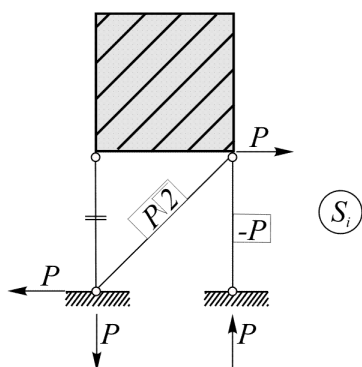
Dana jest sztywna tarcza podparta trzema prętami kratowymi przedstawiona na rysunku 7.1. Obliczyć poziome przemieszczenie  $\delta$  zaznaczonego punktu tarczy. Założyć, że odkształceniom ulegają tylko pręty

kratowe (tarcza jest nieskończenie sztywna). Zgodnie z powyższymi założeniami szukane przemieszczenie obliczamy stosując wzór dla kratownic. Pola powierzchni przekroju prętów podano na rysunku.

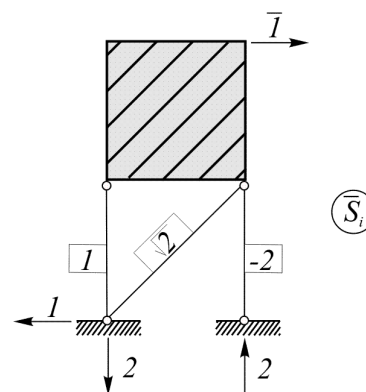


Rys. 7.1. Dana tarcza podparta prętami z obciążeniem zewnętrznym

- 1) Obciążenie zewnętrzne, siły w prętach kratowych (rys. 7.2).
- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; siły w prętach (rys. 7.3).



Rys. 7.2. Siły w prętach od obciążenia zewnętrznego



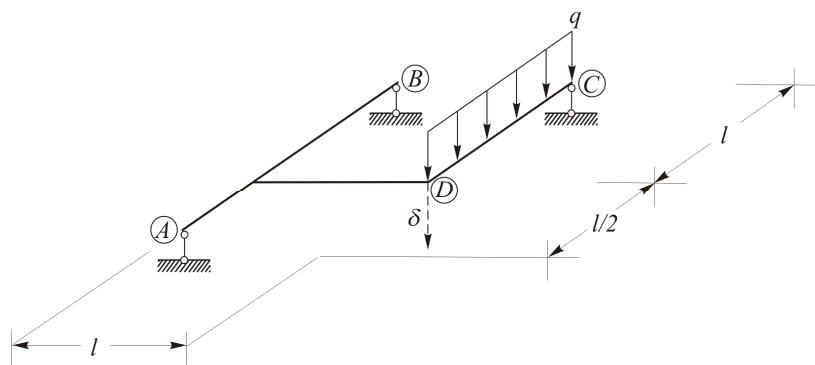
Rys. 7.3. Siły w prętach od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie poszukiwanego przemieszczenia

$$\delta = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i \cdot \bar{S}_i}{EA_i} l_i = 0 + \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{EA\sqrt{2}} \cdot l\sqrt{2} + \frac{(-P) \cdot (-2)}{EA} l = \frac{4Pl}{EA}.$$

## 8. Zadanie

Dany jest dźwigar załamany w płanie przedstawiony na rysunku 8.1. Obliczyć pionowe przemieszczenie  $\delta$  punktu (D). Przyjąć, że sztywności na zginanie i skręcanie są stałe w całym układzie i wiążę je zależność  $GI_s = 3EI$ .



Rys. 8.1. Dany dźwigar załamany w planie z obciążeniem zewnętrznym

Stosując zasadę prac wirtualnych przy uwzględnieniu momentu zginającego i skręcającego szukane przemieszczenie obliczymy ze wzoru

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \int_l \frac{M_s \cdot \bar{M}_s}{GI_s} ds = \delta_z + \delta_s ;$$

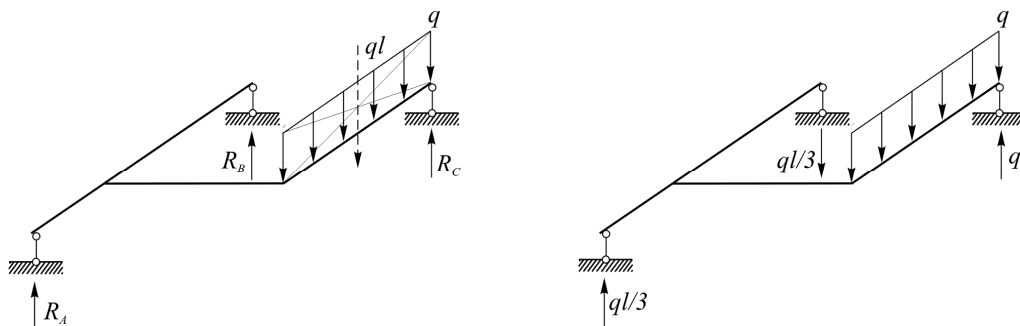
gdzie:

$M, M_s$  – momenty zginające i skręcające wywołane obciążeniem zewnętrznym,

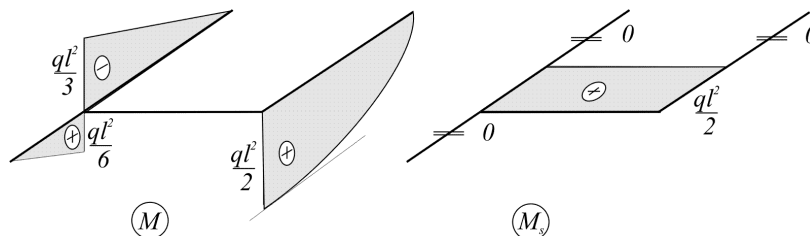
$\bar{M}, \bar{M}_s$  – momenty zginające i skręcające wywołane wirtualnym obciążeniem jednostkowym.

1) Obciążenie zewnętrzne. Wyznaczenie reakcji podporowych; wykresy  $M$  i  $M_s$ .

$$\sum M_{AB} = 0 \Rightarrow R_C = ql; \quad \sum M_{BC} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{3} ql; \quad \sum M_{CD} = 0 \Rightarrow R_B = -\frac{1}{3} ql$$



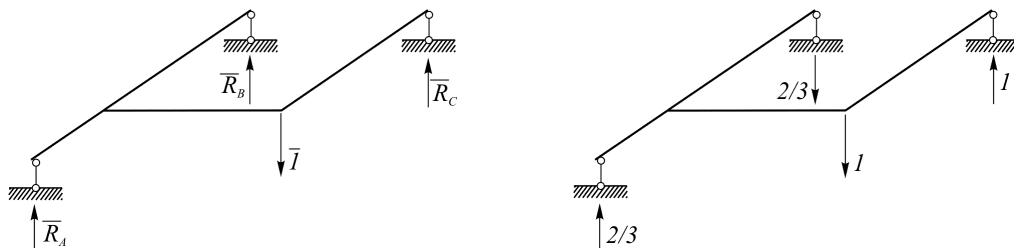
Rys. 8.2. Wyznaczenie reakcji od obciążenia zewnętrznego



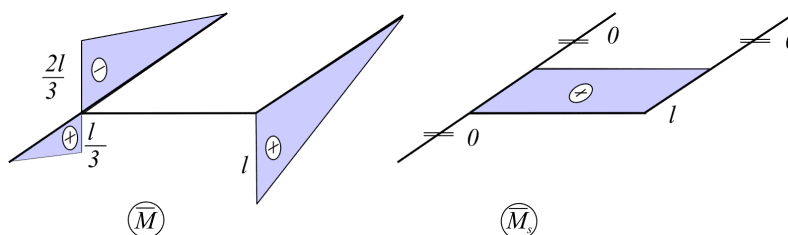
Rys. 8.3. Wykresy momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego

2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Wyznaczenie reakcji podporowych, wykresy  $\bar{M}$  i  $\bar{M}_s$ .

$$\sum M_{AB} = 0 \Rightarrow \bar{R}_C = 1; \quad \sum M_{BC} = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{2}{3}; \quad \sum M_{CD} = 0 \Rightarrow \bar{R}_B = -\frac{2}{3}$$



Rys. 8.4. Wyznaczenie reakcji od obciążenia jednostkowego wirtualnego



Rys. 8.5. Wykresy momentów zginających i skręcających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia (osobno podana jest składowa wynikająca ze zginania i skręcania)

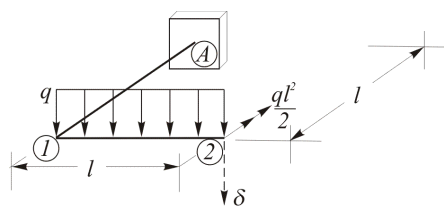
$$\delta_Z = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{3} \cdot l \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot l \right] = \frac{63}{216} \frac{ql^4}{EI},$$

$$\delta_S = \int_l \frac{M_s \cdot \bar{M}_s}{GI_s} ds = \frac{1}{GI_s} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot l = \frac{ql^4}{2GI_s} = \frac{ql^4}{6EI},$$

$$\delta = \delta_Z + \delta_S = \frac{99}{216} \frac{ql^4}{EI} = \frac{11}{24} \frac{ql^4}{EI}.$$

## 9. Zadanie

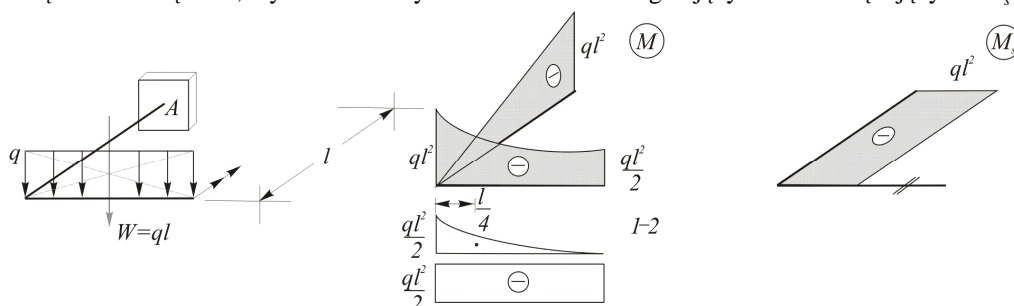
Dany jest dźwigar załamany w płanie przedstawiony na rysunku 9.1. Obliczyć pionowe przemieszczenie  $\delta$  punktu 2. Przyjąć, że sztywności na zginanie i skręcanie są stałe w całym układzie i wiąże je zależność  $GI_s = 4EI$ .



Rys. 9.1. Dany dźwigar załamany w płanie z obciążeniem zewnętrznym

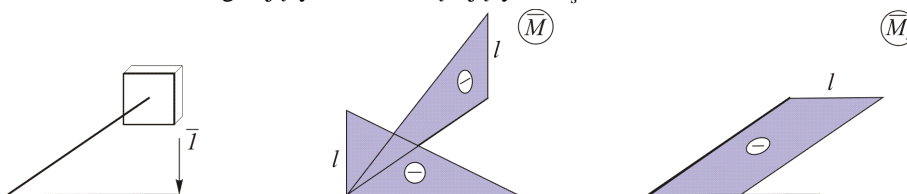
Przemieszczenie  $\delta$  obliczymy korzystając z zasady prac wirtualnych dla układów odkształcalnych z uwzględnieniem wpływu momentów zginających i skręcających.

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresów momentów zginających  $M$  i skręcających  $M_s$ .



Rys. 9.2. Wyznaczenie wykresów momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia, wyznaczenie wykresów momentów zginających  $\bar{M}$  i skręcających  $\bar{M}_s$ .



Rys. 9.3. Wyznaczenie wykresów momentów zginających i skręcających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia:

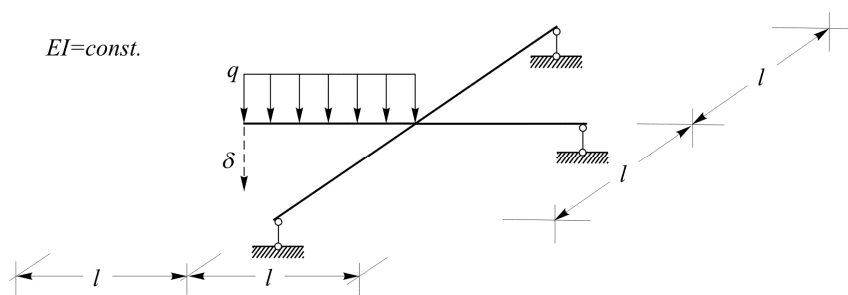
$$\delta_Z = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot (-l) + \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot (-l) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left( -ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) \right] = \frac{17}{24} \frac{ql^4}{EI},$$

$$\delta_S = \int_l \frac{M_s \cdot \bar{M}_s}{GI_s} ds = \frac{1}{GI_s} \cdot \left( -ql^2 \right) \cdot l \cdot (-l) = \frac{ql^4}{GI_s} = \frac{ql^4}{4EI},$$

$$\delta = \delta_Z + \delta_S = \frac{23}{24} \frac{ql^4}{EI}.$$

## 10. Zadanie

Dany jest ruszt belkowy przedstawiony na rysunku 10.1. Obliczyć pionowe przemieszczenie  $\delta$  punktu końcowego wspornika. Przyjąć sztywność na zginanie  $EI = const$ .

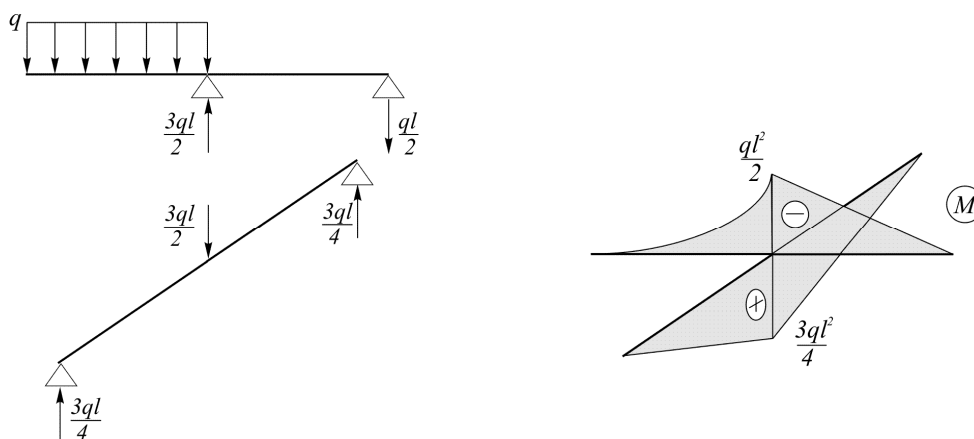


Rys. 10.1. Dany ruszt belkowy z obciążeniem zewnętrznym

Stosując zasadę prac wirtualnych przy uwzględnieniu momentu zginającego szukane przemieszczenie obliczymy ze wzoru

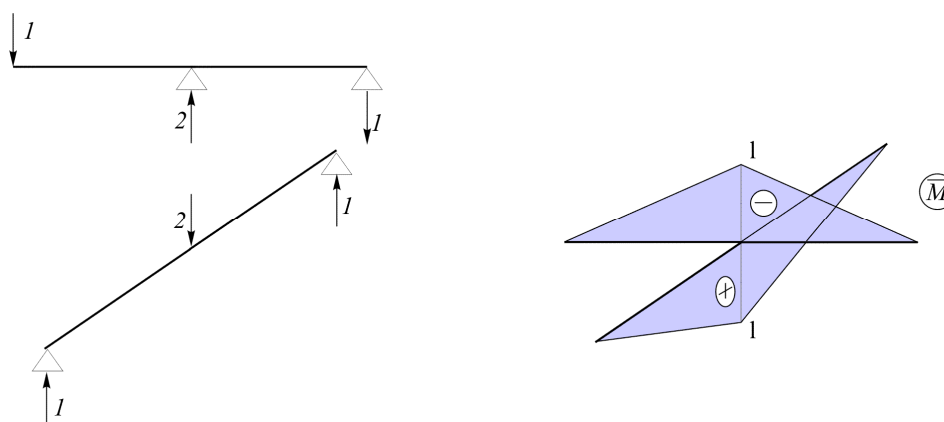
$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds.$$

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .



Rys. 10.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



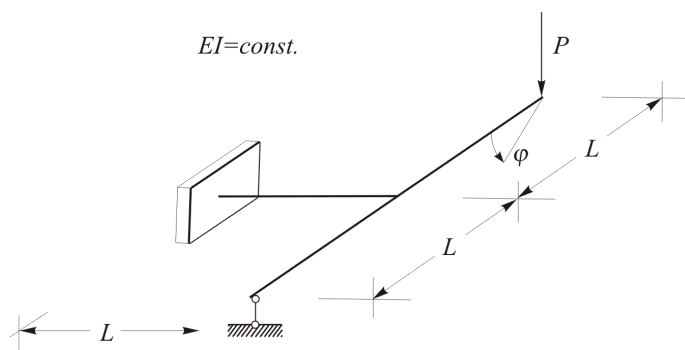
Rys. 10.3. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia  $\delta$

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot l \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{19}{24} \frac{ql^4}{EI}.$$

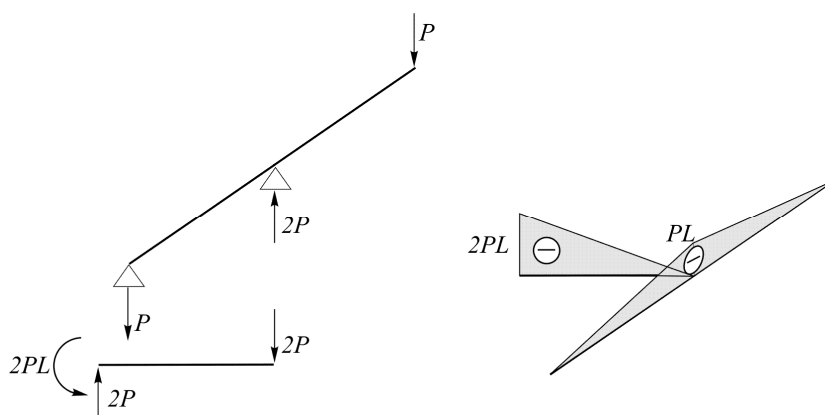
## 11. Zadanie

Dany jest ruszt belkowy przedstawiony na rysunku 11.1. Obliczyć kąt obrotu  $\varphi$  przekroju na końcu wspornika. Przyjąć sztywność na zginanie  $EI = const$ .



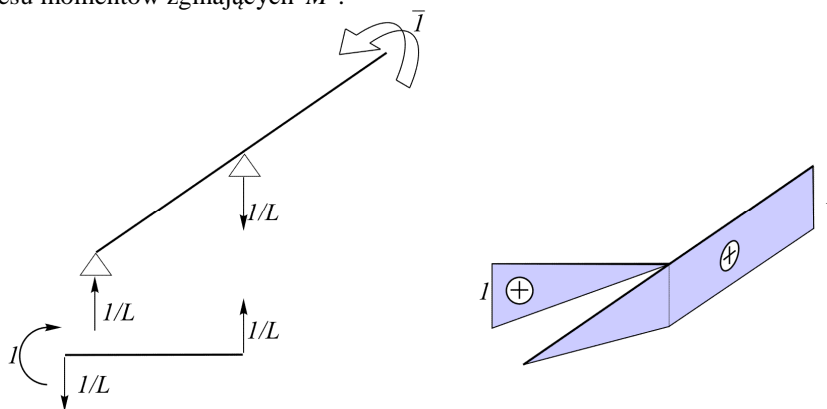
Rys. 11.1. Dany ruszt belkowy z obciążeniem zewnętrznym

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .



Rys. 11.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



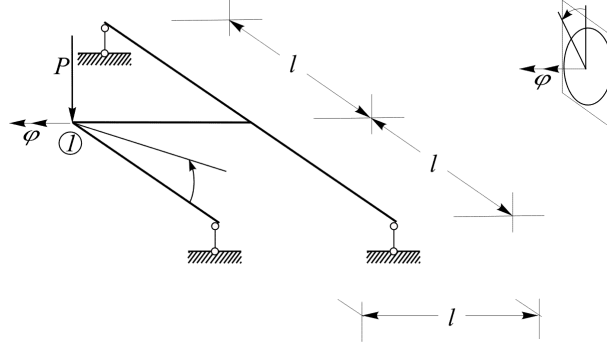
Rys. 11.3. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie kąta obrotu

$$\varphi = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot l \cdot (-Pl) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot (-Pl) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot l \cdot (-2Pl) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{3}{2} \frac{Pl^2}{EI}$$

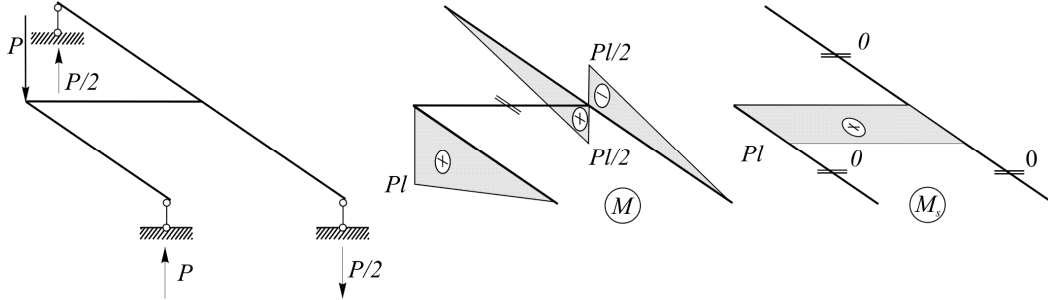
## 12. Zadanie

Dany jest dźwigar załamany w planie w przedstawiony na rysunku 12.1. Obliczyć zaznaczony kąt  $\varphi$  obrotu w punkcie (1). Przyjąć  $GI_s = 4EI$ .



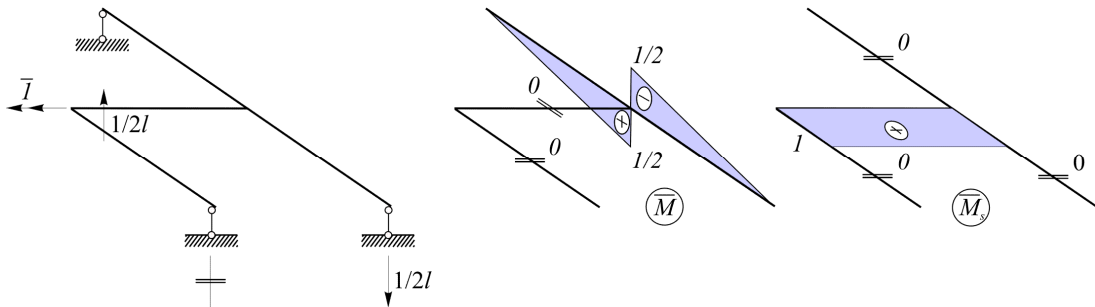
Rys. 12.1. Dany dźwigar załamany w planie z obciążeniem zewnętrznym

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresów momentów zginających  $M$  i skręcających  $M_s$ .



Rys. 12.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$  i skręcających  $\bar{M}_s$ .



Rys. 12.3. Wyznaczenie wykresu momentów zginających i skręcających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie kąta obrotu  $\varphi = \varphi_Z + \varphi_S$ .

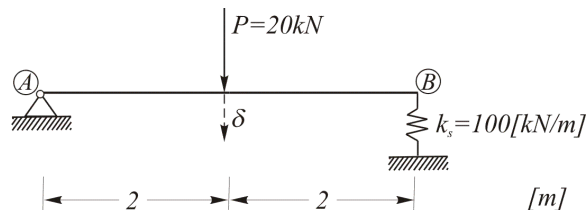
$$\varphi_Z = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{6EI}, \quad \varphi_S = \int_l \frac{M_s \cdot \bar{M}_s}{GI_s} ds = \frac{1}{GI_s} \cdot P \cdot l \cdot l \cdot 1 = \frac{Pl^2}{GI_s} = \frac{Pl^2}{4EI};$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{EI} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{12} \frac{Pl^2}{EI}.$$



### 13. Zadanie

Dana jest belka z jednej strony podparta z jednej strony na podporze sprężystej przedstawiona na rysunku 13.1. Obliczyć przemieszczenie  $\delta$  punktu leżącego w środku przęsła. Znana jest sztywność na zginanie  $EI=1\ 000[kNm^2]$



Rys. 13.1. Dany układ z obciążeniem zewnętrznym

Przemieszczenie  $\delta$  obliczymy ze wzoru wynikającego z zasady prac wirtualnych

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \delta_B \cdot \bar{R}_B;$$

gdzie:

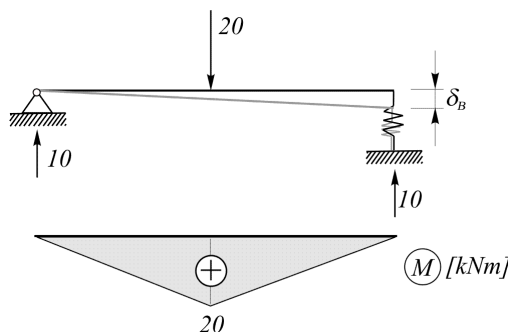
$\delta_B$  – przemieszczenie podpory sprężystej wywołane obciążeniem zewnętrznym  $\delta_B = \delta_s \cdot R_B$ ,

$\delta_s = \frac{1}{k_s}$  – podatność sprężyny (odwrotność sztywności,

$k_s$  – siła, jaka powstaje w sprężynie po wydłużeniu/ skróceniu jej o wielkość  $\delta = 1[m]$ ),

$\bar{R}_B$  – reakcja w podporze sprężystej wywołana jednostkowym obciążeniem w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.

1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .

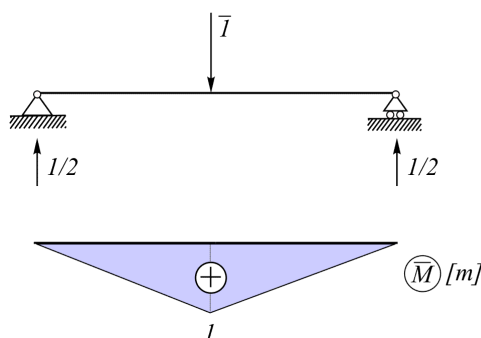


Rys. 13.2. Wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

Przemieszczenie podpory sprężystej od obciążenia zewnętrznego

$$\delta_B = \delta_s \cdot R_B = \frac{1}{k_s} \cdot R_B = \frac{1}{100} \cdot 10 = 0,1[m].$$

2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



Rys. 13.3. Wykres momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Reakcja podpory sprężystej od jednostkowego obciążenia wirtualnego

$$\bar{R}_B = \frac{1}{2} [-]$$

Obliczenie przemieszczenia w układzie z podporą sprężystą:

- wpływ zginania belki

$$\delta_1 = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{1000} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{300} = 2,667 \text{ [cm]};$$

- wpływ przemieszczenia podpory sprężystej

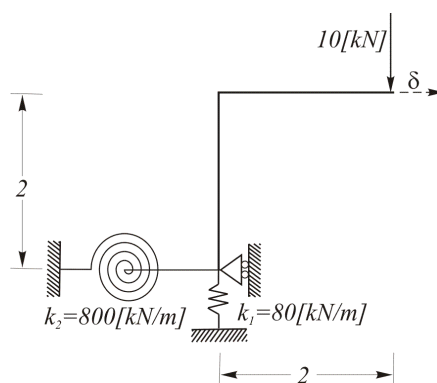
$$\delta_2 = \delta_B \cdot \bar{R}_B = 0,1 \cdot \frac{1}{2} = 0,05 \text{ [m]}.$$

Przemieszczenie sumaryczne

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 7,667 \text{ [cm]}$$

#### 14. Zadanie

Dany jest układ ramowy podparty na podporach sprężystych przedstawiony na rysunku 14.1. Obliczyć poziome przemieszczenie końca wspornika  $\delta$ . Dana jest sztywność na zginanie  $EI=2000 \text{ [kNm}^2\text{]}$ .

Rys. 14.1. Dany układ z obciążeniem zewnętrznym ( $k_1, k_2$  jednostka)

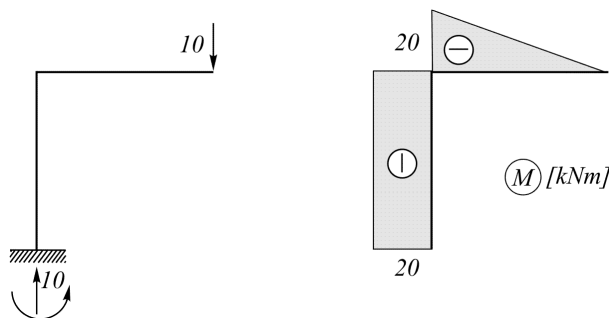
T  
E  
O  
R  
I  
A

Przemieszczenie  $\delta$  obliczymy ze wzoru wynikającego z zasady prac wirtualnych dla układów z podporami sprężystymi (patrz zadanie poprzednie).

$$\delta = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \sum_i \delta_i \cdot \bar{R}_i .$$

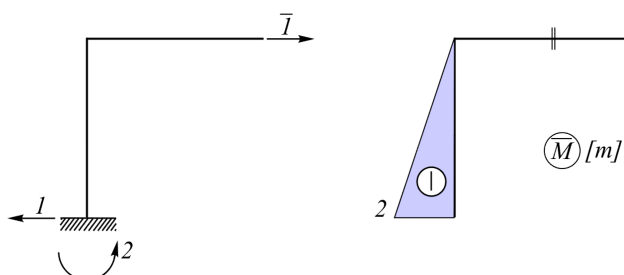
Drugi składnik prawej strony opisuje przemieszczenie  $i$  podpór sprężystych.

- 1) Obciążenie zewnętrzne, wyznaczenie wykresu momentów zginających  $M$ .



Rys. 14.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

- 2) Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



Rys. 14.3. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia:

- wpływ zginania

$$\delta_1 = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{2000} \cdot (-20) \cdot 2 \cdot (-1) = 0,02 [m] ;$$

- wpływ przemieszczenia podpór sprężystych

$$\delta_2 = \frac{1}{k_1} R_A \cdot \bar{R}_A + \frac{1}{k_2} M_A \cdot \bar{M}_A = \frac{1}{800} \cdot 20 \cdot 2 = 0,05 [m] .$$

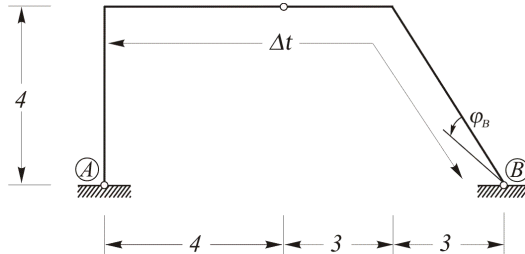
Przemieszczenie sumaryczne

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0,07 [m] .$$

### 15. Zadanie

Dany jest układ ramowy trójprzegubowy przedstawiony na rysunku 15.1. Obliczyć kąt  $\varphi_B$  obrotu przekroju pręta przy węźle (B). Przemieszczenie wywołane jest przyrostem temperatury  $\Delta t$  (nierównomiernym ogrzaniem) w zaznaczonych elementach.

Dane liczbowe:  $\Delta t = t_d - t_g = 30 [^\circ C]$ ,  $\alpha_t = 10^{-5} [\text{deg}^{-1}]$ ,  $h = 0,2 [m] = \text{const}$ .



Rys. 15.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym (temperatura)

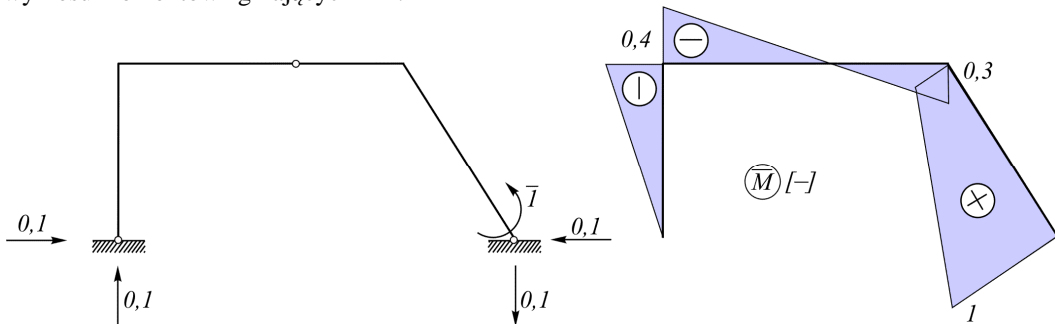
Szukany kąt obrotu oblicza się ze wzoru

$$\varphi_B = \int_l \bar{M} \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds$$

gdzie:

- $\Delta t$  – przyrost temperatury po wysokości przekroju poprzecznego pręta,
- $\alpha_t$  – współczynnik rozszerzalności termicznej,
- $h$  – wysokość przekroju,
- $\bar{M}$  – moment zginający od jednostkowego obciążenia wirtualnego na odcinkach poddanych obciążeniu termicznemu.

Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia; wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



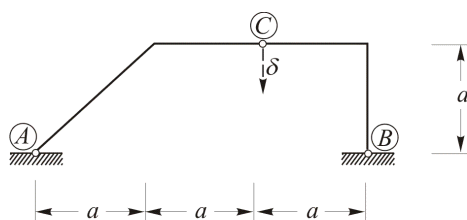
Rys. 15.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie kąta obrotu

$$\varphi_B = \int_l \bar{M} \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds = \frac{10^{-5} \cdot 30}{0,2} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,4) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,3 + \frac{1+0,3}{2} \cdot 5 \right] = 4,35 \cdot 10^{-3} [\text{rad}] = 14'57''.$$

### 16. Zadanie

Dany jest układ ramowy trójprzegubowy przedstawiony na rysunku 16.1. Obliczyć pionowe przemieszczenie punktu (C). Przemieszczenie wywołane jest równomiernym ogrzaniem wszystkich elementów układu o wielkość  $t_0$  względem temperatury montażu. Dane są wielkości:  $a$ ,  $\alpha_t$ ,  $t_0$ .



Rys. 16.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym (temperatura)

TEORIA

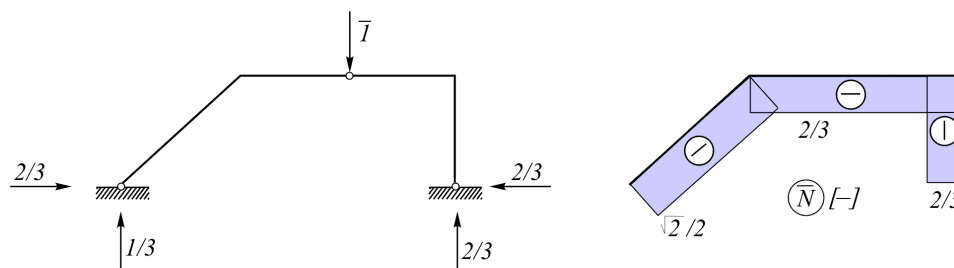
Przemieszczenie obliczymy ze wzoru wynikającego zasady prac wirtualnych przy obciążeniu w postaci równomiernego ogrzania

$$\delta = \int_l \bar{N} \cdot \alpha_t \cdot t_0 \, ds ;$$

gdzie:

- $t_0$  – przyrost temperatury w osi pręta,
- $\alpha_t$  – współczynnik rozszerzalności termicznej,
- $\bar{N}$  – siły normalne od jednostkowego obciążenia wirtualnego na odcinkach poddanych obciążeniu termicznemu.

Obciążenie jednostkowe wirtualne w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Wyznaczenie wykresu momentów zginających  $\bar{M}$ .



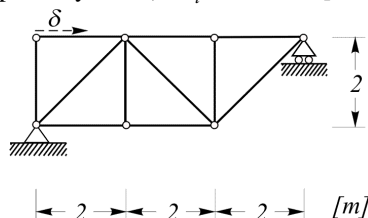
Rys. 16.2. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia

$$\delta = -\alpha_t \cdot t_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} + \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{2}{3} \cdot a \right) = -3a \cdot \alpha_t \cdot t_0 .$$

## 17. Zadanie

Dana jest kratownica przedstawiony na rysunku 17.1. Obliczyć poziome przemieszczenie węzła  $\delta$  wywołane równomiernym ogrzaniem zewnętrznych prętów kratownicy o wielkość  $t_0 = 20 [^{\circ}C]$  względem temperatury montażu (przyrost temperatury w osi),  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} [^{\circ}C^{-1}]$ .



Rys. 17.1. Dany układ kratowy z obciążeniem zewnętrznym (temperatura)

Przemieszczenie wywołane równomiernym ogrzaniem obliczamy ze wzoru  $\delta = \int_l \bar{N} \cdot \alpha_t \cdot t_0 ds$ ;

w przypadku kratownic wzór przedstawimy w postaci  $\delta = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \cdot \alpha_{t_i} \cdot t_{0_i} \cdot l_i$ ;

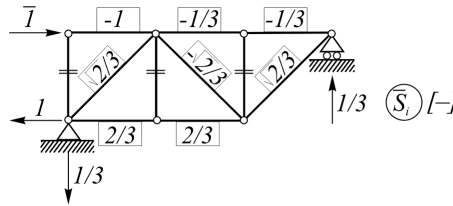
gdzie:

$n$  – liczba prętów,

$\alpha_{t_i}, t_{0_i}, l_i$  – wielkości związane z danym prętem,

$\bar{S}_i$  – siła w danym pręcie od obciążenia wirtualnego.

Siły w prętach wywołane jednostkowym obciążeniem wirtualnym.



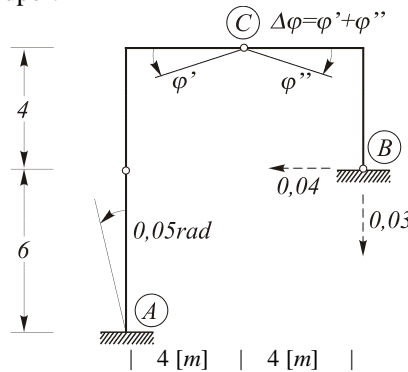
Rys. 17.2. Siły w prętach od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie przemieszczenia

$$\delta = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \cdot \alpha_{t_i} \cdot t_{0_i} \cdot l_i = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \left[ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \right] = 1,6 \cdot 10^{-4} [m].$$

## 18. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 18.1. Obliczyć wzajemny kąt obrotu przekrojów poprzecznych (osi) prętów schodzących się w przegubie (C) wywołaną zadanymi wymuszeniami kinematycznymi – przemieszczeniami podpór.



Rys. 18.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym (wymuszenia kinematyczne)

Zmianę kąta obrotu  $\Delta\varphi$  obliczymy ze wzoru wynikającego z zasady prac wirtualnych

w przypadku działania wymuszonych przemieszczeń podpór  $\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot \bar{R}_i$ ;

gdzie:

$\Delta_i$  – zadane przemieszczenie (osiadanie) podpory,

$\bar{R}_i$  – reakcja przy jednostkowym obciążeniu wirtualnym.

Zadane przemieszczenia podpór (osiadanie):

$$\Delta_1 = \varphi_A = 0,05 \text{ [rad]},$$

$$\Delta_2 = u_B = -0,04 \text{ [m]},$$

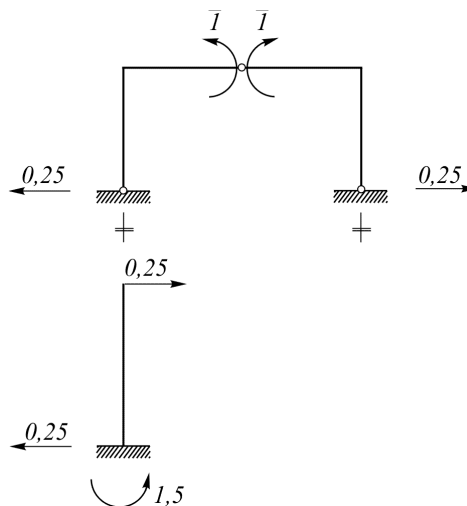
$$\Delta_3 = v_B = -0,03 \text{ [m]}.$$

Reakcje podporowe wywołane jednostkowym obciążeniem wirtualnym.

$$\bar{R}_1 = \bar{M}_A = 1,5 \text{ [m]}$$

$$\bar{R}_2 = \bar{H}_B = 0,25 \text{ [-]}$$

$$\bar{R}_3 = \bar{V}_B = 0 \text{ [-]}$$



Rys. 18.2. Wyznaczenie reakcji od obciążenia jednostkowego wirtualnego

Obliczenie zmiany kąta obrotu  $\Delta\varphi$  przekrojów z lewej i prawej strony punktu (C).

$$\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^3 \Delta_i \cdot \bar{R}_i = -[1,5 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot (-0,04)] = -0,065 \text{ [rad]} = -3^\circ 43'.$$

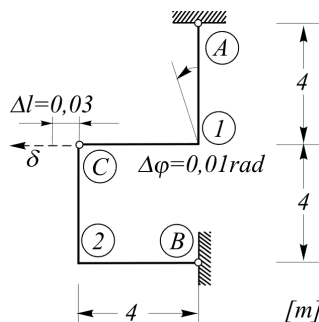
## 19. Zadanie

Dany jest układ ramowy trójprzegubowy przedstawiony na rysunku 19.1. Obliczyć przemieszczenie  $\delta$  powstałe w wyniku zaznaczonych błędów montażowych

Imperfekcje (niedokładności) geometryczne:

$$\Delta l = 0,03 \text{ [m]},$$

$$\Delta\varphi = 0,01 \text{ [rad]}.$$



Rys. 19.1. Dany układ z obciążeniem zewnętrznym (przyjąć spody)

TEORIA

Przemieszczenie  $\delta$  obliczymy ze wzoru (zasada prac wirtualnych, przypadek błędów montażu – imperfekcji geometrycznych)

$$\delta = \sum (\Delta l_i \cdot \bar{N}_i + \Delta\varphi_i \cdot \bar{M}_i);$$

gdzie:

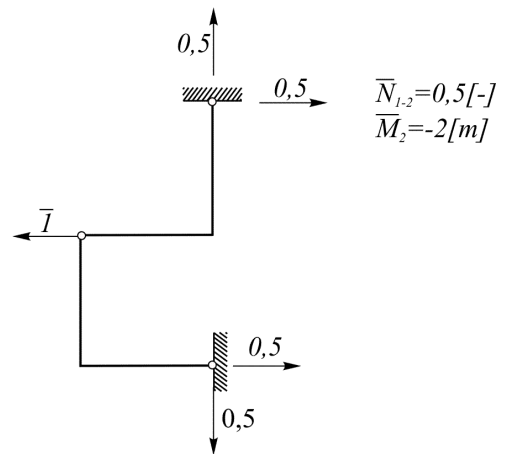
$\Delta l_i, \Delta\varphi_i$  – imperfekcje geometryczne (tu rozumiane jako błędy montażowe),

$\bar{N}_i, \bar{M}_i$  – siły wewnętrzne w miejscu i na kierunku danej imperfekcji geometrycznej.

Stan jednostkowego obciążenia wirtualnego i odpowiadające mu wielkości statyczne (sprężone z zadanymi imperfekcjami).

Obliczenie przemieszczenia

$$\begin{aligned}\delta &= \Delta l_{C-1} \cdot \bar{N}_{C-1} + \Delta \varphi_1 \cdot \bar{M}_1 = \\ &= 0,03 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot (-2) = -0,005 [m]\end{aligned}$$



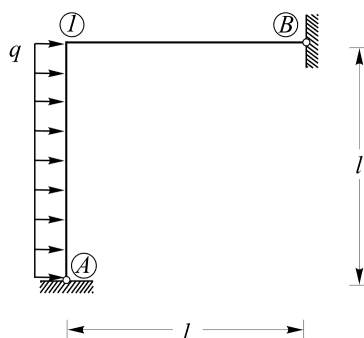
Rys. 19.2. Wyznaczenie reakcji ( $N_{C-1}$ ,  $M_1$ )



## II. Metoda Sił

### 20. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 20.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych. Sztywność prętów na zginanie jest taka sama  $EI = const.$

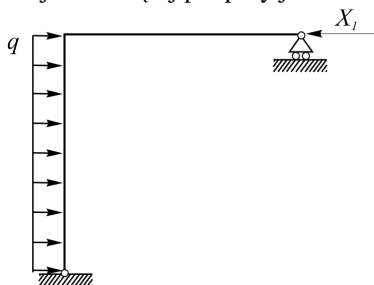


Rys. 20.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny ( $n=1$ ).

Poprzez usunięcie jednego z więzów podporowych tworzymy układ statycznie wyznaczalny – Układ Podstawowy Metody Sił (UPMS).

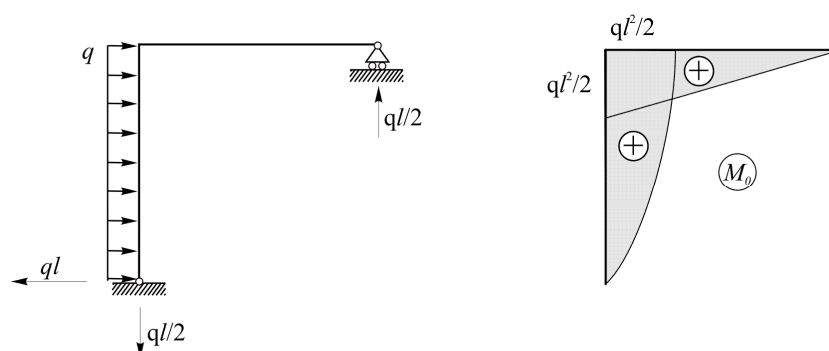
Siła  $X_1$  będąca odpowiednikiem reakcji z usuniętej podpory jest niewiadomą, tzw. nadliczbową.



Rys. 20.2. Układ podstawowy metody sił z obciążeniem zewnętrznym i nadliczbową

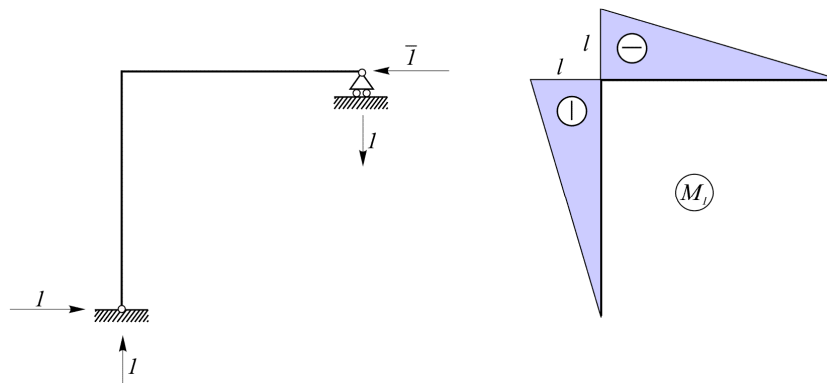
W układzie podstawowym metody sił (UPMS) rozpatrywane są dwa niezależne stany obciążenia.

a) Działa obciążenie zewnętrzne – wyznaczenie reakcji podporowych i momentów zginających.



Rys. 20.3. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

b) Działa nadliczbowa  $X_1 = 1$  – wyznaczenie reakcji podporowych i momentów zginających  $M_1$ .

Rys. 20.4. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkową nadliczbową  $X_1 = 1$ 

1

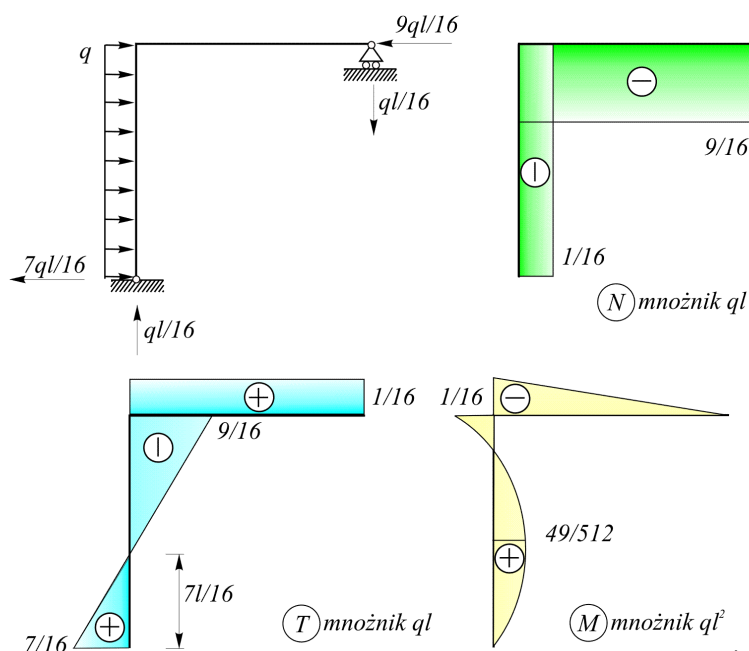
Przemieszczenia w układzie podstawowym:

- przemieszczenie poziome w punkcie (B) wywołane obciążeniem zewnętrznym

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_o M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{5}{8} \cdot (-l) + \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) \right] = -\frac{3ql^4}{8EI},$$

- przemieszczenie poziome w punkcie (B) wywołane jednostkową nadliczbową  $X_1 = 1$ 

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-l) \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-l) = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI}.$$

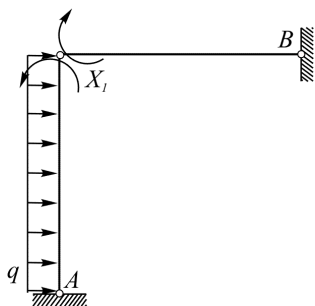
Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = \frac{9}{16} ql$ .Rozwiązanie końcowe uzyskujemy poddając układ podstawowy działaniu obciążenia zewnętrznego oraz nadliczbowej  $X_1$  o rzeczywistej wartości (wynik końcowy jest superpozycją wyników składowych).

Rys. 20.5. Wyznaczenie wynikowych wykresów sił wewnętrznych

*Uwaga:*

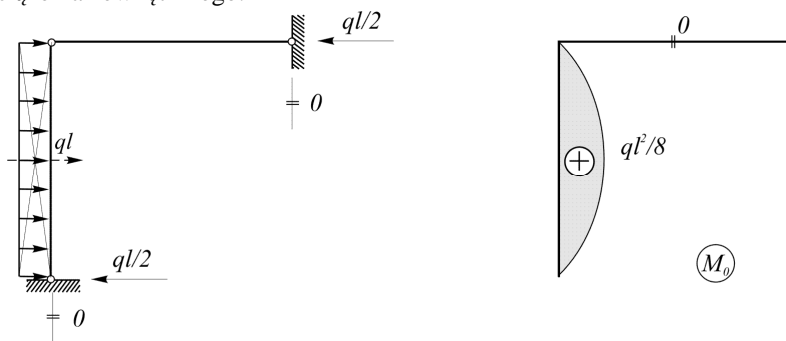
Powyższe zadanie można rozwiązać przyjmując w inny sposób układ podstawowy metody sił (UPMS) – usuwamy więz wewnętrzny pozwalający na wzajemny obrót przekrojów sąsiadujących w punkcie (1) (jest to równoważne z wprowadzeniem przegubu wewnętrznego). Nadliczbową  $X_1$  jest w tym przypadku moment zginający w (1), który w układzie podstawowym ma postać dwóch momentów skupionych  $X_1$ .

Układ podstawowy metody sił.



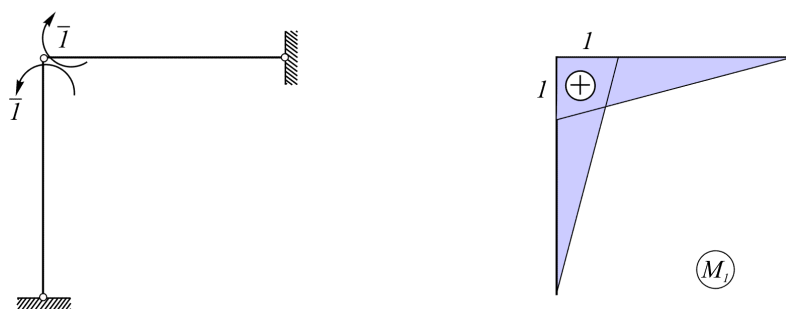
Rys. 20.6. Układ podstawowy metody sił z obciążeniem zewnętrznym i nadliczbową

a) Działanie obciążenia zewnętrznego.



Rys. 20.7. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia zewnętrznego

b) Działanie nadliczbowej  $X_1 = 1$ .



Rys. 20.8. Wyznaczenie wykresu momentów zginających od obciążenia jednostkową nadliczbową  $X_1 = 1$

Przemieszczenia uogólnione w układzie podstawowym:

- zmiana kąta obrotu w p.1 wywołana obciążeniem zewnętrznym

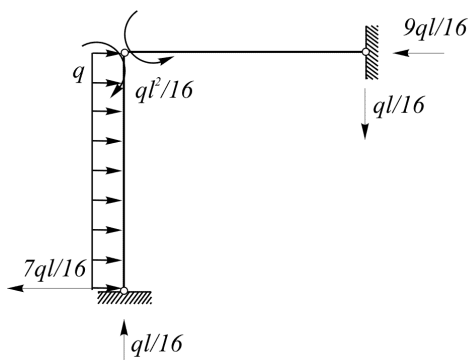
$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_o M_1}{EI} ds = \frac{ql^3}{24EI}$$

- zmiana kąta obrotu w p.1 wywołana nadliczbową  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{2}{3} \frac{l}{EI}$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = -\frac{ql^2}{16}$ .

Rozwiązanie – układ podstawowy poddany działaniu obciążenia zewnętrznego i nadliczbowej.

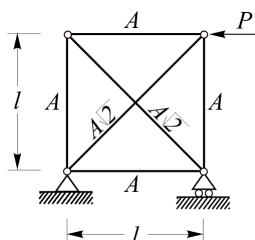


Rys. 20.9. Układ podstawowy metody sił obciążony obciążeniem zewnętrznym i rzeczywistą nadliczbową

Pomimo, iż schemat statyczny układu podstawowego metody sił jest inny, niż w pierwszym wariantcie rozwiązania, to końcowe wykresy sił wewnętrznych są oczywiście takie same.

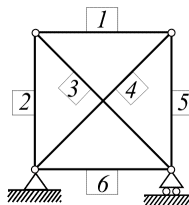
## 21. Zadanie

Dana jest kratownica przedstawiona na rysunku 21.1. Obliczyć siły w prętach. Przyjąć, że pręty ukośne mijają się nawzajem. Dane:  $P$ ,  $l$ ,  $E$ ,  $A$ . Pola przekroju poprzecznego prętów są zróżnicowane.



Rys. 21.1. Dany układ kratowy z obciążeniem zewnętrznym

Przyjętą numerację prętów zaznaczono na poniższym rysunku.

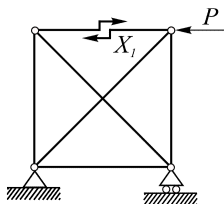


Rys. 21.2. Numeracja prętów kratownicy

Stopień statycznej niewyznaczalności układu obliczono według wzoru

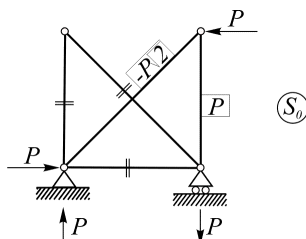
$$n = r + p - 2w = 3 + 6 - 8 = 1.$$

Układ podstawowy metody sił tworzymy przez „rozcięcie” pręta nr 1, przy takim założeniu nadliczbową jest siła normalna  $S_1$  w tym pręcie.



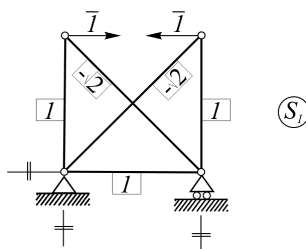
Rys. 21.3. Układ podstawowy metody sił obciążony obciążeniem zewnętrznym i nadliczbową

Siły w prętach układu podstawowego wywołane obciążeniem zewnętrznym ( $S_{0i}$ ,  $i = 1, 6$ ).



Rys. 21.4. Wyznaczenie sił w prętach od obciążenia zewnętrznego

Siły w prętach układu podstawowego wywołane obciążeniem  $X_1 = 1$  ( $S_{1i}$ ,  $i = 1, 6$ ).



Rys. 21.5. Wyznaczenie sił w prętach od obciążenia jednostkową nadliczbową nie

Obliczenie przemieszczeń można uporządkować przy pomocy poniższej tabeli.

$i$	$S_{0i}$	$S_{1i}$	$l_i$	$A_i$	$\frac{S_{0i} \cdot S_{1i} \cdot l_i}{A_i}$	$\delta_{11}$
1	-	1	1	A	-	$l/A$
2	-	1	1	A	-	$l/A$
3	-	$-\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$A\sqrt{2}$	-	$2l/A$
4	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$A\sqrt{2}$	$2Pl/A$	$2l/A$
5	P	1	1	A	$Pl/A$	$l/A$
6	-	1	1	A	-	$l/A$
					<b><math>3Pl/A</math></b>	<b><math>8l/A</math></b>

Przemieszczenie uogólnione w układzie podstawowym – zmiana odległości między końcami rozciętego pręta (1), wywołane odpowiednio:

– obciążeniem zewnętrznym

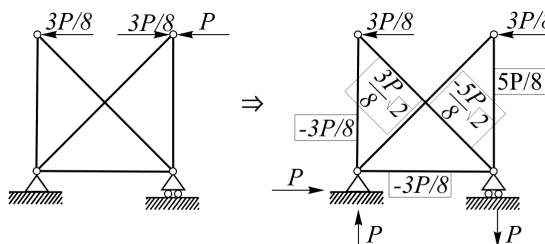
$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^6 \frac{S_{0i} S_{1i}}{EA_i} l_i = \frac{3Pl}{EA};$$

– nadliczbową  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^6 \frac{S_{li} S_{li}}{EA_i} l_i = \frac{8l}{EA}.$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = -\frac{3}{8} P$ .

Rozwiązanie otrzymujemy obciążając układ podstawowy obciążeniem zewnętrznym wraz z nadliczbową.



Rys. 21.6. Wyznaczenie sił w prętach (z prawej powinno być  $5P/8$ )

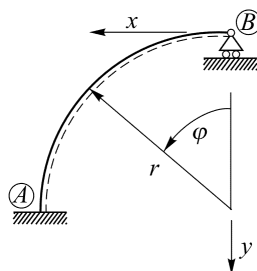
Siły w prętach kratownicy można uzyskać drogą superpozycji  $S_i = S_{0i} + S_{li} \cdot X_1$  – patrz tabela poniżej.

$i$	$S_{0i}$	$S_{li}$	$S_{li} \cdot X_1$	$S_i$
1	-	1	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{3}{8} P$
2	-	1	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{3}{8} P$
3	-	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{8} P \sqrt{2}$	$\frac{3}{8} P \sqrt{2}$
4	$-P \sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{8} P \sqrt{2}$	$-\frac{5}{8} P \sqrt{2}$
5	P	1	$-\frac{3}{8} P$	$\frac{5}{8} P$
6	-	1	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{3}{8} P$

## 22. Zadanie

Dany jest łuk kołowy przedstawiony na rysunku 22.1. Wyznaczyć funkcję (względem kąta  $\varphi$ ) i narysować wykres momentów zginających. Łuk jest poddany nierównomiernemu ogrzaniu.  $\Delta t = t_d - t_g$ .

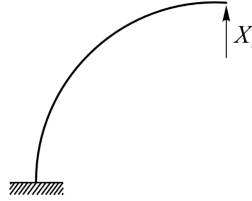
Dane :  $\Delta t = 40 [^{\circ} C]$ ,  $\alpha_t = 10^{-5} [\text{deg}^{-1}]$ ,  $h = 0,2 [m]$ ,  $r = 2 [m]$ ,  $EI = (2000\pi) [kNm^2]$ .



Rys. 22.1. Dany układ – łuk kołowy z obciążeniem zewnętrznym

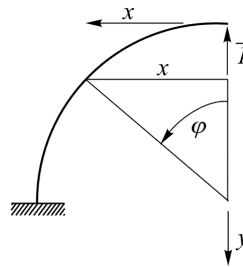
Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Układ podstawowy metody sił przyjęto na rysunku poniżej.



Rys. 22.2. Układ podstawowy metody sił z nadliczbową

Momenty zginające wywołane działaniem nadliczbowej  $X_1 = 1$ ,  $M_1(\varphi) = 1 \cdot x = r \cdot \sin \varphi$ .



Rys. 22.3. Układ podstawowy metody sił z nadliczbową – zaznaczono układy współrzędnych

Przemieszczenia w układzie podstawowym:

- przemieszczenie pionowe punktu (B) wywołane przyrostem temperatury (oddziaływanie zewnętrzne),

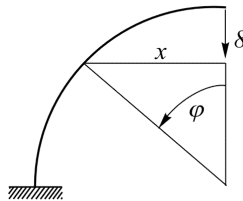
$$\delta_{10} = \int_L M_1 \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1(\varphi) \cdot r d\varphi = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} r^2 = \frac{10^{-5} \cdot 40}{0,2} \cdot 2^2 = 0,008 [m]$$

- przemieszczenie pionowe punktu (B) wywołane działaniem nadliczbowej  $X_1 = 1$ ,

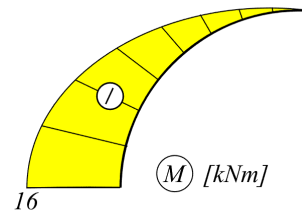
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [M_1(\varphi)]^2 \cdot r d\varphi = \frac{r^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{r^3}{EI} \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi r^3}{4EI} = \frac{\pi \cdot 2^3}{4 \cdot 2000 \cdot \pi} = 0,001 \left[ \frac{m}{kN} \right] \end{aligned}$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = -8 [kN]$

Rozwiązanie



Wynik



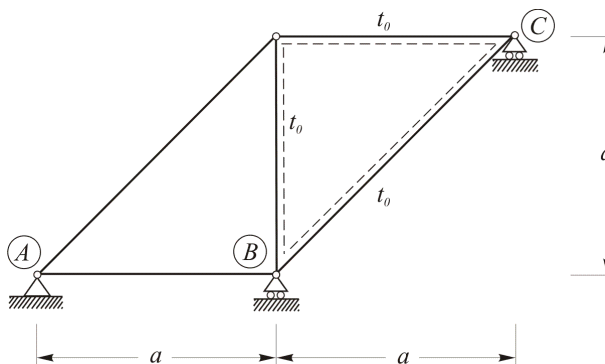
$$M(\varphi) = -8 \cdot x = -16 \cdot \sin \varphi [kNm]$$

Rys. 22.4. Wyznaczenie wykresu momentów zginających

### 23. Zadanie

Dana jest kratownica przedstawiona na rysunku 23.1. Obliczyć siły w prętach powstałe na skutek równomiernego ogrzania zaznaczonych prętów o wielkość  $t_0$  względem temperatury montażu. Pola przekrojów prętów poziomych i pionowych równe są  $A$ , prętów ukośnych  $A\sqrt{2}$ .

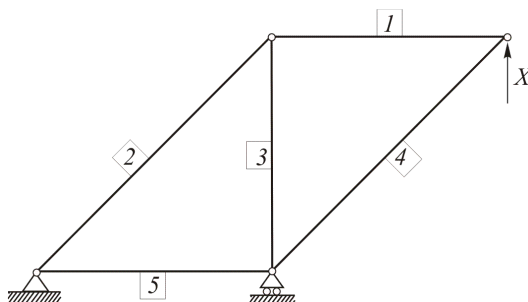
Dane :  $t_0 = 30 [^{\circ}\text{C}]$ ,  $\alpha_t = 2 \cdot 10^{-4} [\text{deg}^{-1}]$ ,  $EA = 7000 [\text{kN}]$ ,  $a = 3 [\text{m}]$ .



Rys. 23.1. Dany układ kratowy z obciążeniem zewnętrznym (temperatura)

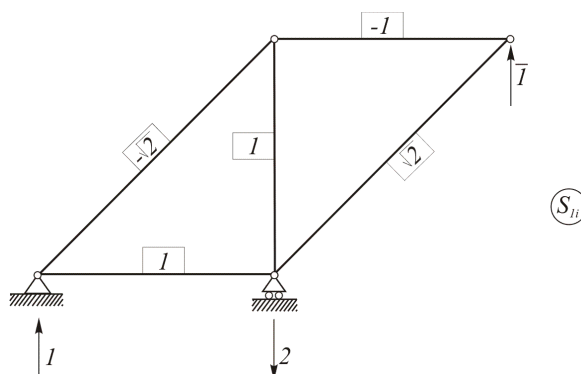
Likwidujemy więz podporowy w punkcie (C) i wprowadzamy nadliczbową na miejscu i kierunku działania reakcji związanej z usuniętym więzem (układ wyjściowy jest zewnętrznie statycznie niewyznaczalny, zaś wewnętrznie wyznaczalny).

Układ podstawowy metody sił (UPMS) przyjęto na rysunku 23.2. (podano numerację prętów).



Rys. 23.2. Układ podstawowy metody sił obciążony nadliczbową

Siły w prętach układu podstawowego wywołane obciążeniem  $X_1 = 1$ .



Rys. 23.3. Wyznaczenie sił w prętach UPMS od jednostkowej nadliczbowej



Obliczenie przemieszczenia w układzie podstawowym przeprowadzamy w tabeli.

$i$	$A_i$	$l_i$	$t_{0i}$	$S_{li}$	$S_{li} \cdot t_{0i} \cdot l_i$	$S_{li}^2$	$\frac{S_{li}^2 \cdot l_i}{A_i}$
1	$A$	3	30	-1	-90	1	$3/A$
2	$A\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-	2	$6/A$
3	$A$	3	30	1	90	1	$3/A$
4	$A\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	30	$\sqrt{2}$	180	2	$6/A$
5	$A$	3	0	1	-	1	$3/A$
					180		$21/A$

Przemieszczenie pionowe punktu (C) wywołane równomiernym ogrzaniem,

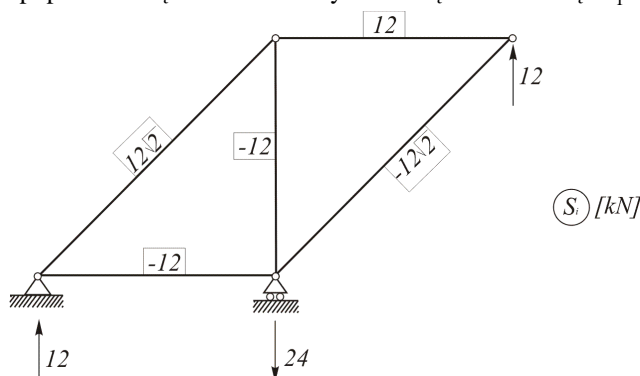
$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^5 S_{li} \cdot \alpha_{ti} \cdot t_{0i} l_i = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 180 = 0,036 [m].$$

Przemieszczenie pionowe punktu C wywołane obciążeniem  $X_1 = 1$ ,

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^5 \frac{S_{li}^2}{EA_i} \cdot l_i = \frac{21}{EA} = 0,003 \left[ \frac{m}{kN} \right].$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = -12 [kN]$ .

Rozwiązanie otrzymane poprzez obciążenie UPMS wyznaczoną nadliczbową  $X_1 = -12$ .



Rys. 23.4. Wyznaczenie sił w prętach UPMS od rzeczywistej nadliczbowej

Rozwiązanie można również uzyskać ze wzoru:  $S_i = S_{0i} + S_{li} \cdot X_1$ .

w przypadku oddziaływania poza statycznego (temperatury) zachodzi  $S_{0i} = 0$ ,

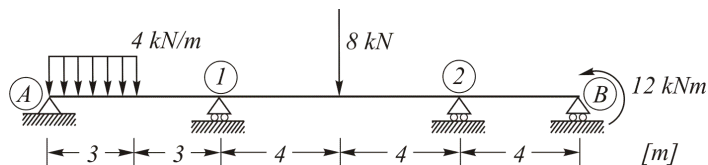
więc  $S_i = S_{li} \cdot X_1 = -12 S_{li} [kN]$

*Wniosek*

Siły w prętach kratownicy (rozwiązanie końcowe zadania) są proporcjonalne do sił otrzymanych w układzie podstawowym przy obciążeniu  $X_1 = 1$ .

## 24. Zadanie

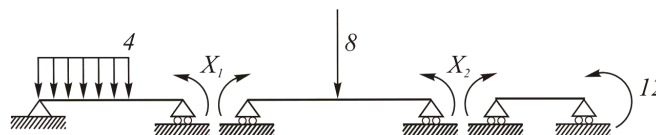
Dana jest belka ciągła przedstawiona na rysunku 24.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 24.1. Dana belka ciągła z obciążeniem zewnętrznym (1-2) 2EI

Układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.

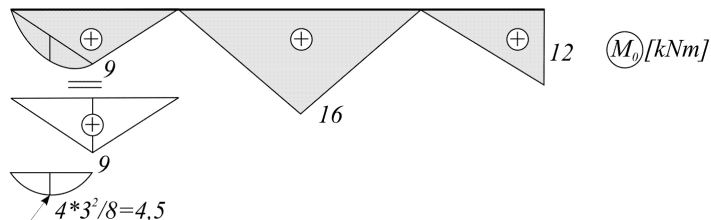
Układ podstawowy metody sił (UPMS) przyjmujemy w sposób podany na rysunku poniżej.



Rys. 24.2. Układ podstawowy metody sił obciążony obciążeniem zewnętrznym i nadliczbowymi

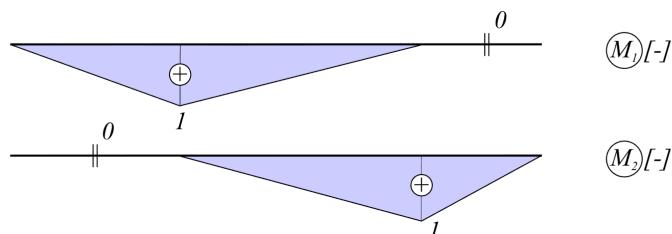
Momenty zginające w układzie podstawowym w poszczególnych stanach obciążenia:

a) stan obciążenia zewnętrznego,



Rys. 24.3. Wykres momentów w UPMS od obciążenia zewnętrznego

b) stan obciążenie jednostkową nadliczbową  $X_1 = 1$ ,



Rys. 24.4. Wykresy momentów w UPMS od obciążeń jednostkowymi nadliczbowymi

Równania zgodności przemieszczeń – układ równań kanonicznych 1):

- zmiana kąta obrotu w p.1 :  $\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0$ ,

- zmiana kąta obrotu w p.2 :  $\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0$ .

Wyznaczenie współczynników układu równań:

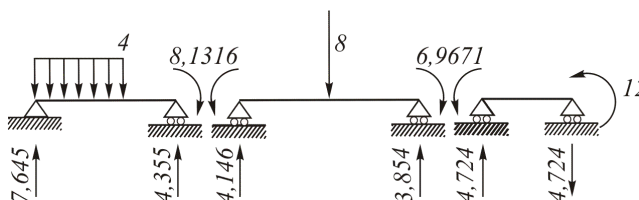
$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_o M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = \frac{31,75}{EI};$$

$$\delta_{20} = \int_L \frac{M_o M_2}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{24}{EI};$$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{10}{3EI} \quad ; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{2}{3EI} \quad ; \quad \delta_{22} = \int_L \frac{M_2 M_2}{EI} ds = \frac{8}{3EI} .$$

Z układu równań 1) otrzymujemy:  $X_1 = -8,1316 [kNm]$ ,  $X_2 = -6,9671 [kNm]$ .

Rozwiązanie



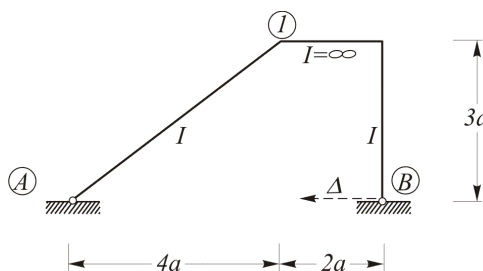
Rys. 24.5. UPMS obciążony obciążeniem zewnętrznym i rzeczywistymi nadliczbowymi

Na tej podstawie można wyznaczyć końcowe wykresy sił wewnętrznych  $M$  i  $T$ .

## 25. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 25.1. Sporządzić wykres momentów zginających powstałych w układzie pod wpływem wymuszonego przemieszczenia podpory B. Jeden z prętów układu ma znacznie większą sztywność na zginanie niż pozostałe pręty (przyjąć w tym elemencie  $EI = \infty$ )

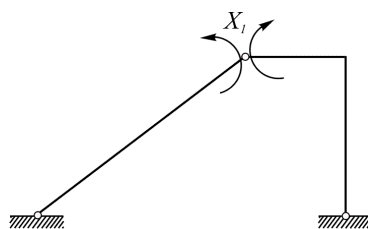
Dane są wielkości:  $a, \Delta, EI$ .



Rys. 25.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym (wymuszenie kinematyczne)

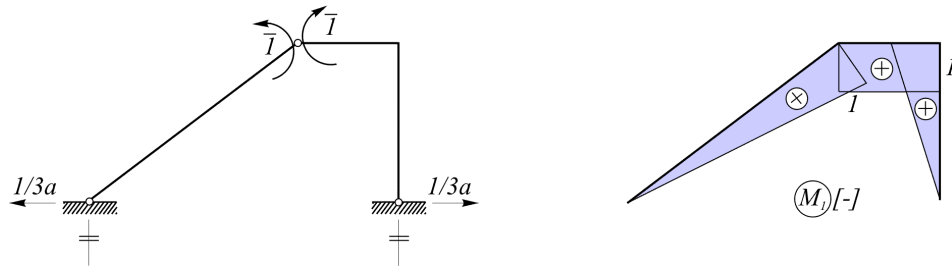
Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Układ podstawowy metody sił (UPMS) przedstawiono na rys. 25.2 – nadliczbową jest moment zginający w węźle 1.



Rys. 25.2. Układ podstawowy metody sił obciążony nadliczbową

Momenty zginające w układzie podstawowym wywołane działaniem nadliczbowej  $X_1 = 1$ .



Rys. 25.3. Wyznaczenie wykresu momentów od jednostkowej nadliczbowej

Przemieszczenia uogólnione w układzie podstawowym:

- zmiana kąta obrotu w węźle 1 wywołana wymuszonym przemieszczeniem podpory,

$$\delta_{10} = -\sum_i \Delta_i R_{1i} = -\Delta \cdot \left(-\frac{1}{3a}\right) = \frac{\Delta}{3a};$$

- zmiana kąta obrotu w p.1 wywołana działaniem nadliczbowej  $X_1 = 1$ ,

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{8a}{3EI}.$$

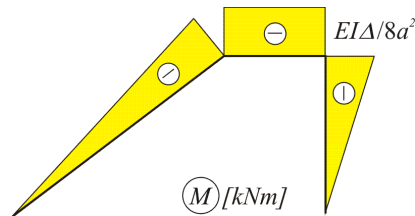
Z równania zgodności przemieszczeń wyznaczamy  $X_1 = -\frac{EI \cdot \Delta}{8a^2}$ .

Rozwiązanie  $M = M_0 + M_1 X_1$ ;

$M_0$  – momenty wywołane oddziaływaniem zewnętrznym – zerowe,

$M_1$  – momenty wywołane obciążeniem  $X_1 = 1$ .

$$\text{Stąd } M = M_1 \cdot X_1 = \frac{-EI\Delta}{8a^2} M_1.$$

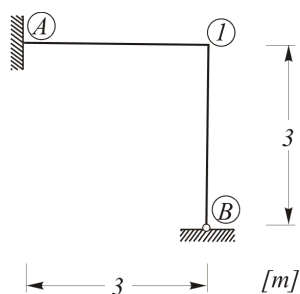


Rys. 25.4 Końcowy wykres momentów zginających

## 26. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 26.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych powstałych w układzie na skutek wmontowania pręta (A-1) dłuższego o  $\Delta l = 3 [cm]$ . Przyjąć

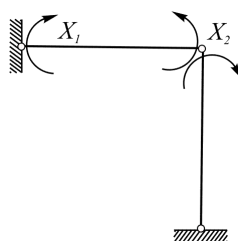
$$EI = 1400 [kNm^2].$$



Rys. 26.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym w postaci błędu montażu (dłuższy pręt A-1)

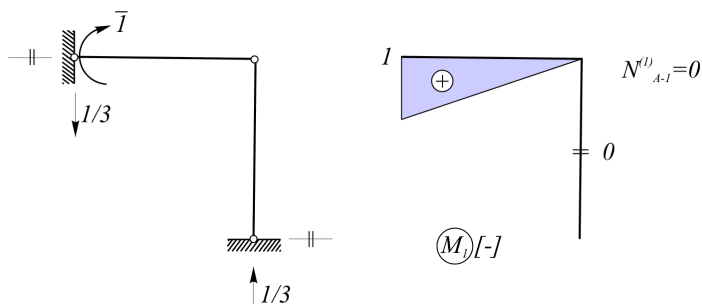
Stopień statycznej niewyznaczalności układu  $n=2$ .

Układ podstawowy metody sił (UPMS) przyjęto jak na rysunku poniżej.

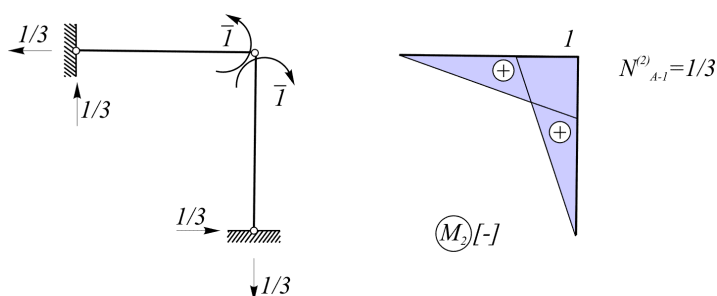


Rys. 26.2. Układ podstawowy metody sił z nadliczbowymi

Układ podstawowy poddany działaniu nadliczbowej  $X_1 = 1$ .

Rys. 26.3. Wyznaczenie wykresu momentów w UPMS od jednostkowej nadliczbowej  $X_1$ 

Układ podstawowy poddany działaniu nadliczbowej  $X_2 = 1$ .

Rys. 26.4. Wyznaczenie wykresu momentów w UPMS od jednostkowej nadliczbowej  $X_2$ 

Kąt obrotu przekroju pręta z prawej strony przy węźle (A) w poszczególnych stanach:

- oddziaływanie zewnętrzne (imperfekcja):  $\delta_{10} = \Delta l \cdot N_{A-1}^{(1)} = 0$  ;

$$\text{- stan } X_1 = 1: \delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{EI};$$

$$\text{- stan } X_2 = 1: \delta_{12} = \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2EI};$$

Zmiana kąta obrotu przekrojów prętów schodzących się w węźle (1) w poszczególnych stanach:

$$\text{- oddziaływanie zewnętrzne (imperfekcja) } \delta_{20} = \Delta l \cdot N_{A-1}^{(2)} = 0,03 \cdot \frac{1}{3} = 0,01 [m],$$

$$\text{- } X_1 = 1: \delta_{21} = \int_L \frac{M_2 M_1}{EI} ds = \frac{1}{2EI},$$

$$\text{- } X_2 = 1: \delta_{22} = \int_L \frac{M_2 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{EI}.$$

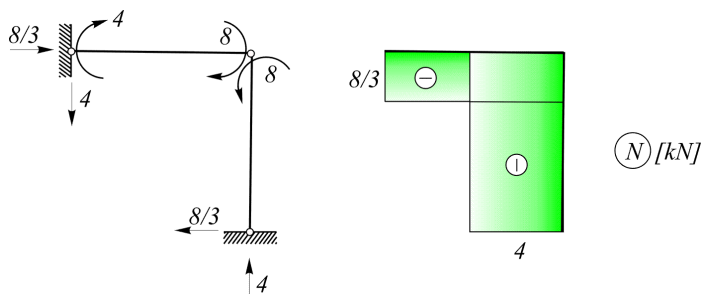
Równania zgodności przemieszczeń:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 + X_2 = 0, \quad (1)$$

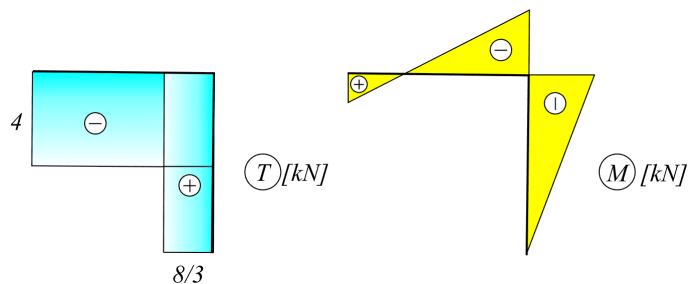
$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \Rightarrow X_1 + 4X_2 = -28, \quad (2)$$

stąd  $X_1 = 4 [kNm]$ ,  $X_2 = -8 [kNm]$ .

Rozwiązanie otrzymujemy analizując układ podstawowy poddany jedynie działaniu nadliczbowych o wartościach rzeczywistych (brak zewnętrznego obciążenia czynnego).



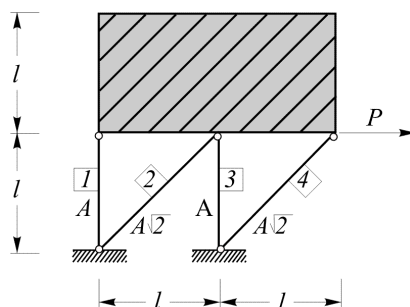
Rys. 26.5. Wyznaczenie wykresów końcowych – siły normalne



Rys. 26.6. Wykresy sił tnących i momentów zginających

## 27. Zadanie

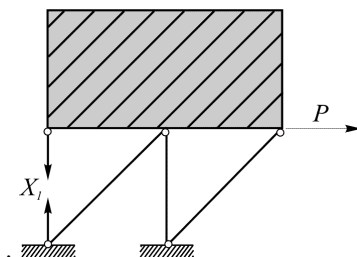
Dana jest sztywna tarcza podparta na prętach przedstawiona na rysunku 27.1. Obliczyć siły w prętach podpierających sztywną tarczę.



Rys. 27.1. Dana sztywna tarcza podparta prętami kratowymi z obciążeniem zewnętrznym

Każdą tarczę opisują trzy równania równowagi. Tarcza z zadania jest podparta na czterech prętach (na układ „narzucono” cztery więzy, co w rezultacie daje cztery niewiadome siły w prętach podpierających tarczę), stąd wnioskujemy, że układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

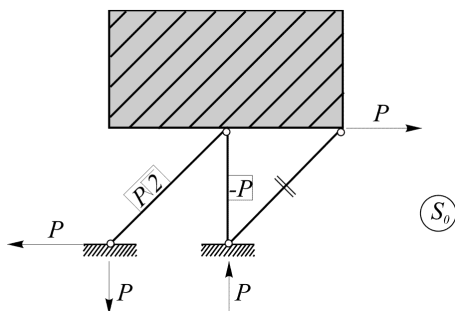
Układ podstawowy metody sił.



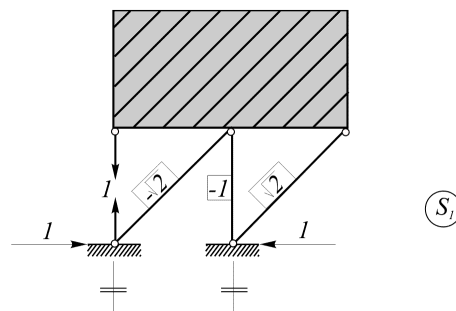
Rys. 27.2. Przyjęcie układu podstawowego metody sił wraz z nadliczbową

Rozwiązania w układzie podstawowym:

- siły w prętach układu podstawowego wywołane obciążeniem zewnętrznym,
- siły w prętach układu podstawowego wywołane obciążeniem  $X_1 = 1$



Rys. 27.3. UPMS obciążony obc. zewnętrznym



Rys. 27.4. UPMS obciążony jednostkową nadliczbową

Obliczenie przemieszczeń w układzie podstawowym przy pomocy tabeli

$i$	$S_{0i}$	$S_{1i}$	$l_i$	$A_i$	$\frac{S_{0i} \cdot S_{1i} \cdot l_i}{A_i}$	$\frac{S_{1i} \cdot S_{1i} \cdot l_i}{A_i}$
1	0	1	$l$	$A$	0	$l/A$
2	$P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$A\sqrt{2}$	$2Pl/A$	$2l/A$
3	$-P$	-1	$l$	$A$	$Pl/A$	$l/A$

4	0	$\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$A\sqrt{2}$	0	$2l/A$
					$-Pl/A$	$6l/A$

Przeszczenia w układzie podstawowym – odległość między rozciętymi końcami pręta (1), wywołana odpowiednio:

- obciążeniem zewnętrznym,

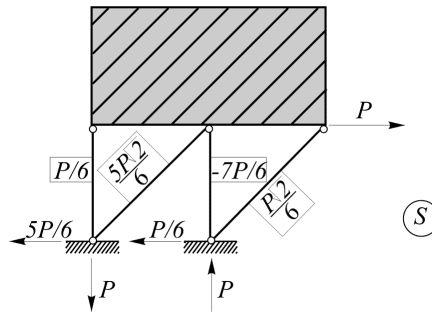
$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^4 \frac{S_{oi} S_{1i}}{EA_i} l_i = -\frac{Pl}{EA},$$

- nadliczbową  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^4 \frac{S_{1i} S_{1i}}{EA_i} l_i = \frac{6l}{EA}.$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = \frac{P}{6}$ .

Rozwiązanie



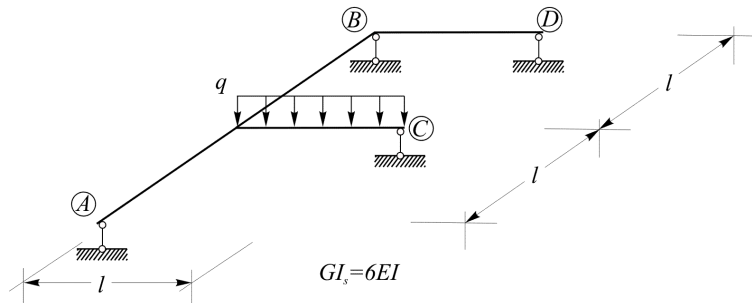
Rys. 27.5. Końcowe siły w prętach

Rozwiązanie można otrzymać z superpozycji  $S_i = S_{0i} + S_{1i} \cdot X_1$ ;

$$S_1 = \frac{P}{6}, \quad S_2 = P\sqrt{2} - \frac{P}{6} \cdot \sqrt{2} = \frac{5}{6} P\sqrt{2}, \quad S_3 = -P - \frac{P}{6} \cdot 1 = -\frac{7}{6} P, \quad S_4 = \frac{P}{6} \sqrt{2}.$$

## 28. Zadanie

Dany jest dźwigar załamany w planie przedstawiony na rysunku 28.1. Sporządzić wykresy momentów zginających  $M$  i skręcających  $M_s$  w dźwigrze załamany w planie. Przyjąć zależność  $GI_s = 6EI$ .

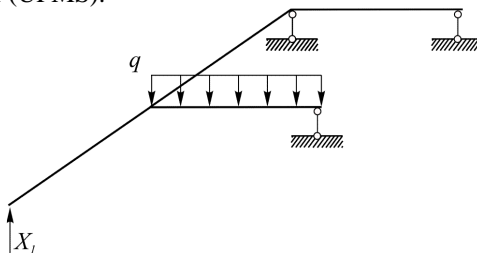


Rys. 28.1. Dany dźwigar załamany w planie z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.



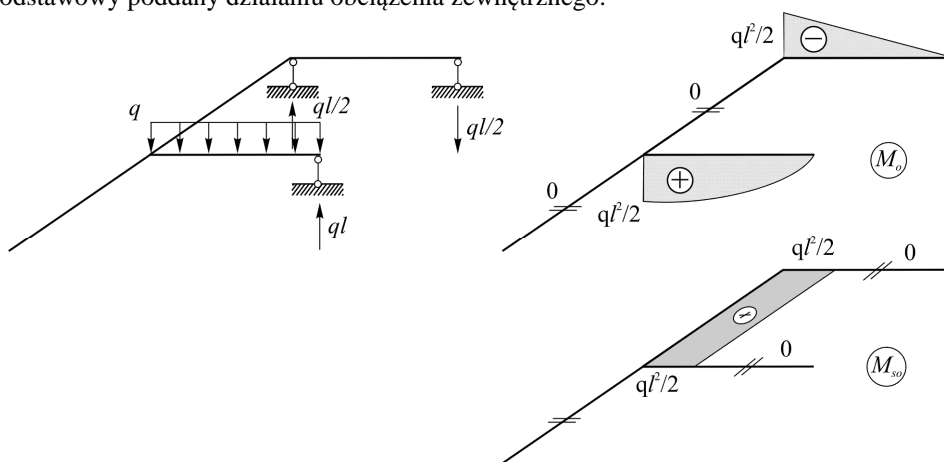
Układ podstawowy metody sił (UPMS).



Rys. 28.2. Układ podstawowy metody sił z przyjętą nadliczbową

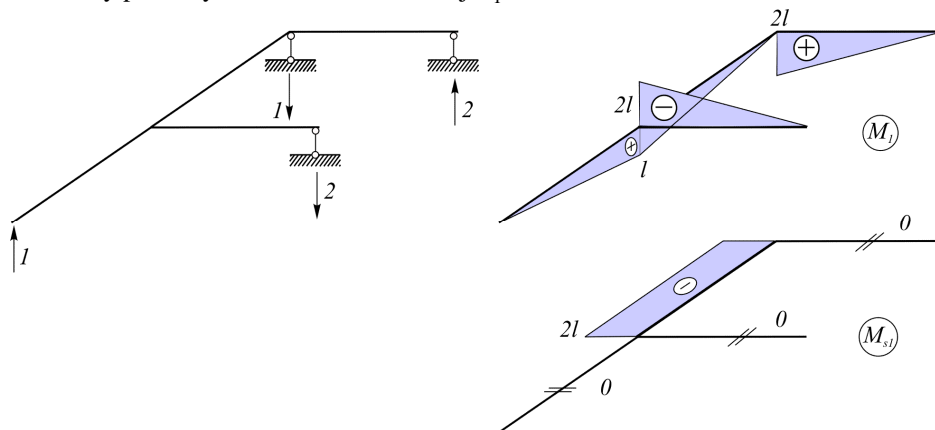
Rozwiązanie w układzie podstawowym.

Układ podstawowy poddany działaniu obciążenia zewnętrznego.



Rys. 28.3. UPMS wykresy od obciążenia zewnętrznego

Układ podstawowy poddany działaniu nadliczbowej  $X_1 = 1$ .



Rys. 28.4. UPMS wykresy od jednostkowej nadliczbowej

Ugięcie w punkcie A w układzie podstawowym:  
- wywołane obciążeniem zewnętrznym:

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds + \int_L \frac{M_0 M_1}{GI_s} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{5}{8} \cdot (-2l) + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right] + \frac{1}{GI_s} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot (-2l) =$$

$$= -\frac{gl^4}{EI} \left( \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \right) - \frac{ql^4}{6EI} = -\frac{11}{12} \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

- wywołane nadliczbowa  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds + \int_L \frac{M_1 M_1}{GI_s} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right] + \frac{1}{GI_s} \cdot 2l \cdot l \cdot 2l =$$

$$= \frac{l^3}{EI} \left( \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) + \frac{4l^3}{6EI} = \frac{4l^3}{EI}$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = \frac{11}{48} ql$ .

Reakcje podporowe uzyskujemy z superpozycji:

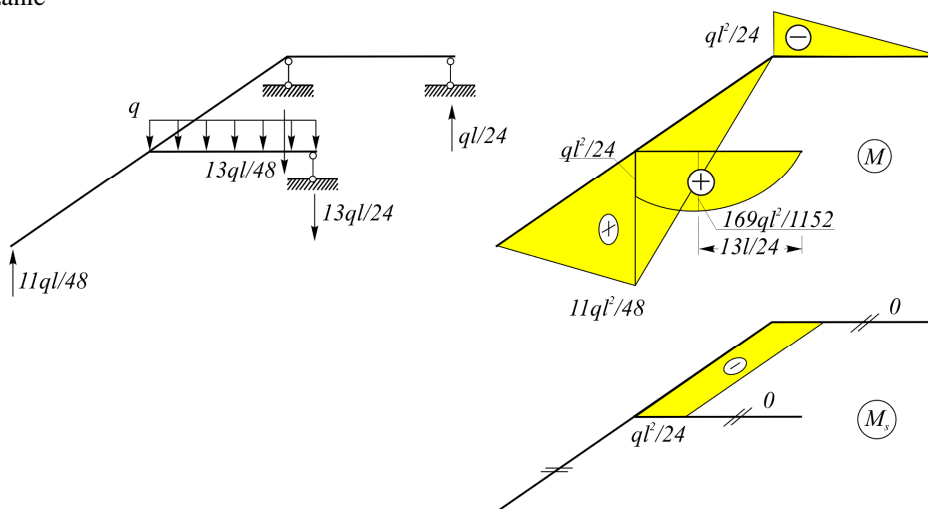
$$R_A = \frac{11}{48} ql,$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - \frac{11}{48} ql = \frac{13}{48} ql,$$

$$R_C = ql - \frac{11}{24} ql = \frac{13}{24} ql,$$

$$R_D = -\frac{ql}{2} + \frac{11}{24} ql = -\frac{1}{24} ql.$$

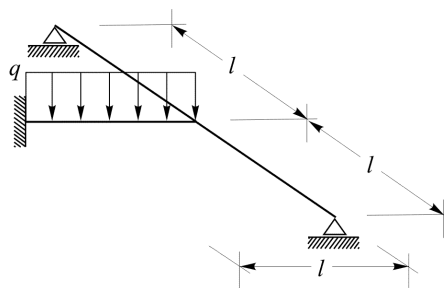
Rozwiązanie



Rys. 28.5. Wyznaczenie końcowych wykresów momentów zginających i skręcających

## 29. Zadanie

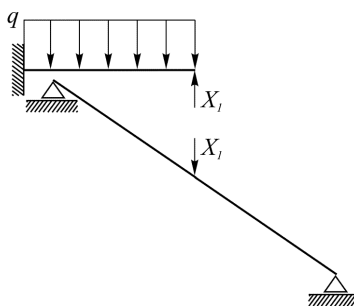
Dany jest ruszt belkowy przedstawiony na rysunku 29.1. Sporządzić wykresy momentów zginających. Przyjąć  $EI = const$ .



Rys. 29.1. Dany ruszt belkowy z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

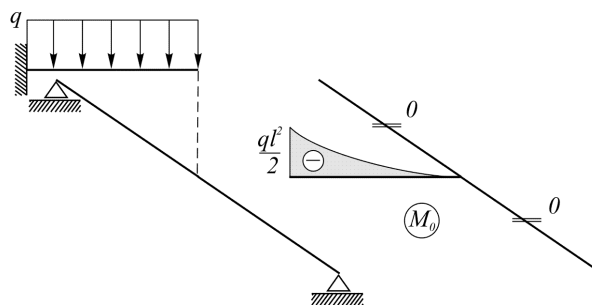
Układ podstawowy metody sił tworzymy przez rozdelenie obu części rusztu, siła wzajemnego oddziaływania (reakcja) jest nadliczbową  $X_1$ .



Rys. 29.2. Układ podstawowy metody sił (belki proste) z zaznaczoną nadliczbową

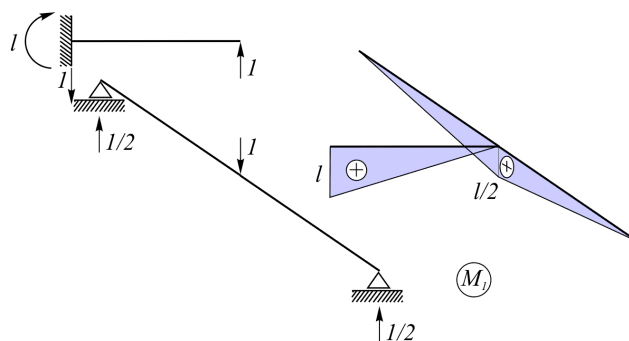
Rozwiązanie w układzie podstawowym:

- układ podstawowy poddany działaniu obciążenia zewnętrznego,



Rys. 29.3. UPMS obciążony obciążeniem zewnętrznym – wykres momentów

- układ podstawowy poddany działaniu nadliczbowej  $X_1 = 1$



Rys. 29.4. UPMS obciążony jednostkową nadliczbową – wykres momentów

Przemieszczenia w układzie podstawowym:

- wywołane obciążeniem zewnętrznym

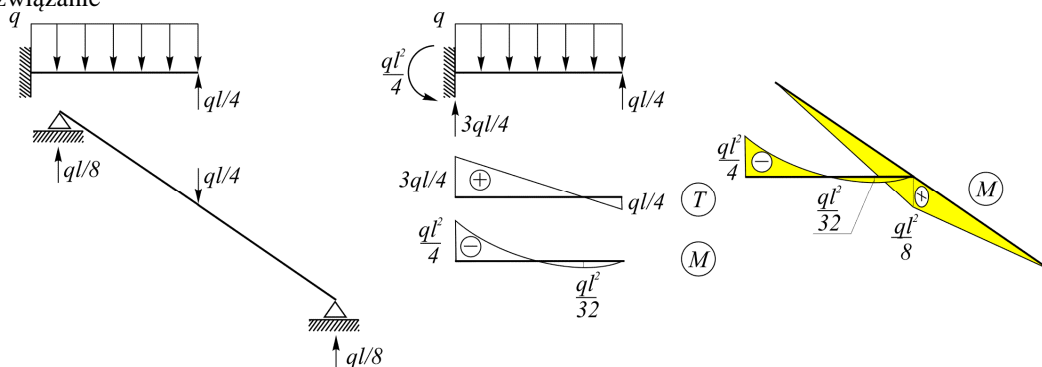
$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

- wywołane nadliczbową  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{l^3}{2EI}$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = \frac{ql}{4}$ .

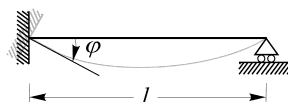
Rozwiązanie



Rys. 29.5. wyznaczenie końcowego wykresu momentów zginających

### 30. Zadanie

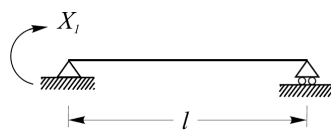
Dana jest belka (rys. 30.1), którą obciążono wymuszając obrót lewej podpory o kąt  $\varphi$ . Stosując metodę sił sporządzić wykresy sił wewnętrznych  $M$  i  $T$ .



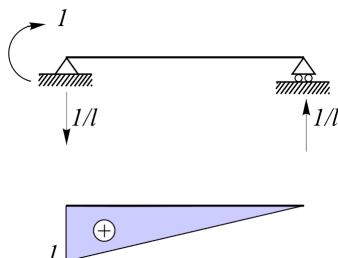
Rys. 30.1. Dana belka obciążona obrotem podpory

Stopień statycznej niewyznaczalności układu  $n = 1$ .

Przyjmujemy układ podstawowy metody sił (UPMS) wg rysunku



Rys. 30.2. Układ podstawowy metody sił z nadliczbową

Stan  $X_1 = 1$ 

Rys. 30.3. Wyznaczenie wykresu momentów od nadliczbowej jednostkowej

Przemieszczenia w układzie podstawowym:

- wywołane obciążeniem zewnętrznym

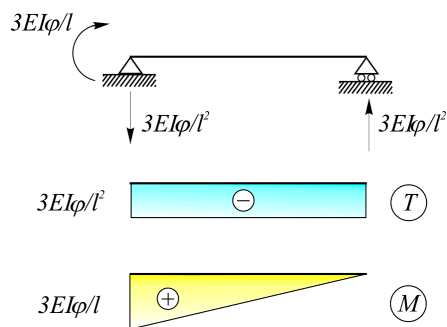


Rys. 30.4. Obciążenie zewnętrzne (wymuszenie kinematyczne) w UPMS

w układach statycznie wyznaczalnych obciążenie w postaci wymuszenia kąta obrotu (obrotu podpory o dany kąt) nie generuje sił wewnętrznych i co ważniejsze deformacji, zatem  $\delta_{10} = 0$ .

- wywołane nadliczbową  $X_1 = 1$   $\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}$

Po rozwiązaniu równania kanonicznego  $\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = \delta_1 = \varphi$  otrzymujemy  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l} \varphi$ .

Rys. 30.5 Końcowe wykresy sił wewnętrznych  $T$  i  $M$

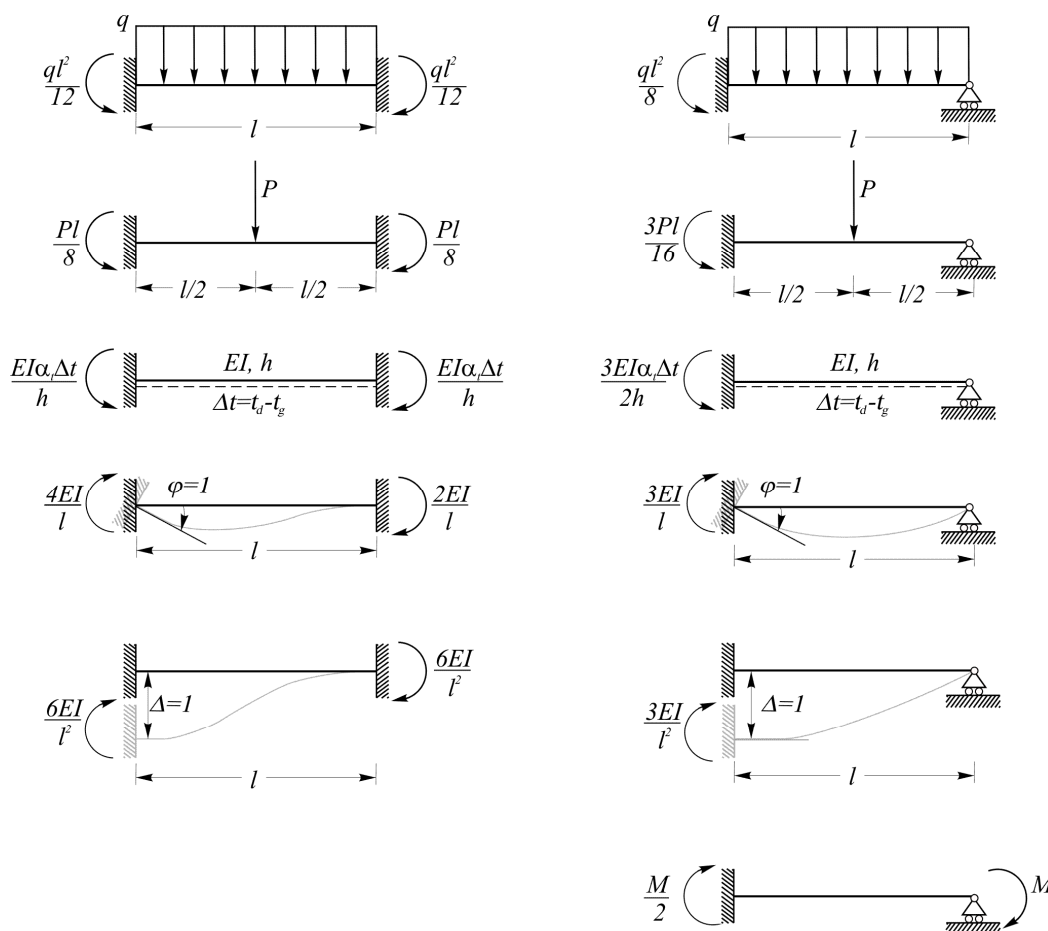
### III. Metoda przemieszczeń

#### 31. Przywęzłowe momenty wyjściowe metody przemieszczeń

Zestawienie momentów utwierdzenia – „momentów wyjściowych” w belkach, przy różnych schematach obciążenia (lewa kolumna – obustronne utwierdzenie, prawa kolumna – jednostronne utwierdzenie), na rysunkach pokazano rzeczywiste zwroty momentów przywęzłowych. Warto odnieść je sobie do dodatnich momentów przyjmowanych zgodnie z konwencją znaków metody przemieszczeń.

*Uwaga:*

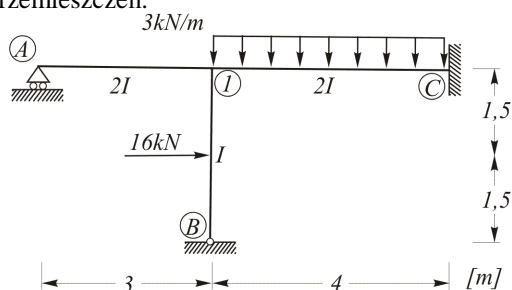
Wyjściowe siły tnące można wyznaczyć każdorazowo z warunków równowagi pręta.



Rys. 31.1. Wyjściowe momenty przywęzłowe metody przemieszczeń

### 32. Zadanie

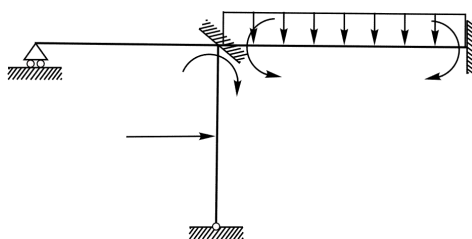
Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 32.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych N, T, M. Zadanie rozwiązać metodą przemieszczeń.



Rys. 32.1. Dany układ prętowy z obciążeniem

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny, nieprzesuwny  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Układ podstawowy metody przemieszczeń (UPMP) – schemat geometrycznie wyznaczalny po wprowadzeniu fikcyjnego więzu w węźle (1) – z przyłożonym obciążeniem zewnętrznym przedstawiono na rysunku 32.2, zaznaczono rzeczywiste zwroty wyjściowych momentów przywęzłowych od danego obciążenia.



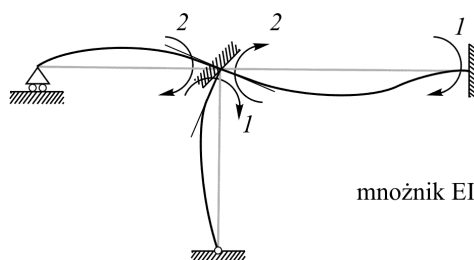
Rys. 32.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe (wywołane obciążeniem zewnętrznym):

$$M_{1C}^0 = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ [kNm]}, \quad M_{C1}^0 = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4 \text{ [kNm]}$$

$$M_{1B}^0 = \frac{3}{16} \cdot 16 \cdot 3 = 9 \text{ [kNm]}.$$

Momenty przywęzłowe w UPMP wywołane wymuszeniem – kątem obrotu  $\varphi = 1$  węzła (1).



Rys. 32.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe (od obciążenia zewnętrznego i obrotu w węźle):

$$M_{1A} = 2EI\varphi, \quad M_{1B} = 9 + EI\varphi, \quad M_{1C} = -4 + 2EI\varphi, \quad M_{C1} = 4 + EI\varphi.$$

Niewiadomą metody przemieszczeń, kąt obrotu  $\varphi$  węzła 1, obliczymy z równania równowagi – zerowania się reakcji w fikcyjnym więzie. Równanie to można tu rozumieć jako zerowania się sumy momentów w przekrojach przywęzłowych prętów wychodzących z węzła (1)  $\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0$ .

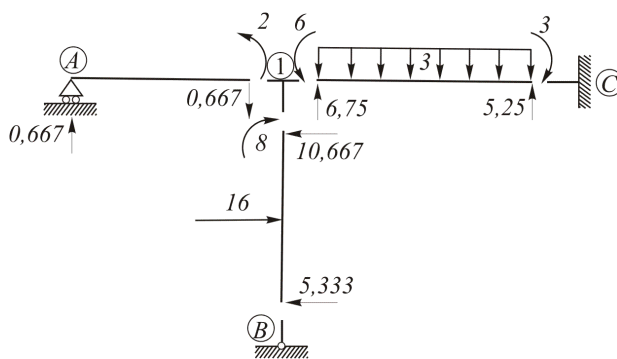
$$\text{Stąd } 5 + 5EI\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{EI}.$$

Podstawiając za  $\varphi$  rzeczywistą wielkość wyznaczmy wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{1A} = -2EI \cdot \frac{1}{EI} = -2 \text{ [kNm]}, \quad M_{1B} = 9 + EI \left( -\frac{1}{EI} \right) = 8 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C} = -4 + 2EI \left( -\frac{1}{EI} \right) = -6 \text{ [kNm]}, \quad M_{C1} = 4 + EI \left( -\frac{1}{EI} \right) = 3 \text{ [kNm]}.$$

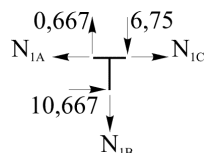
Wykresy sił przywęzłowych najłatwiej sporządzić analizując równowagę każdego elementu osobno.



Rys. 32.4. Układ obciążony momentami przywęzłowymi wraz z wyznaczonymi siłami poprzecznymi

Powyższy schemat umożliwi sporządzenie wykresów sił tnących i momentów zginających.

Celem sporządzenia wykresu sił normalnych zapisujemy równania równowagi wyciętego węzła (1).



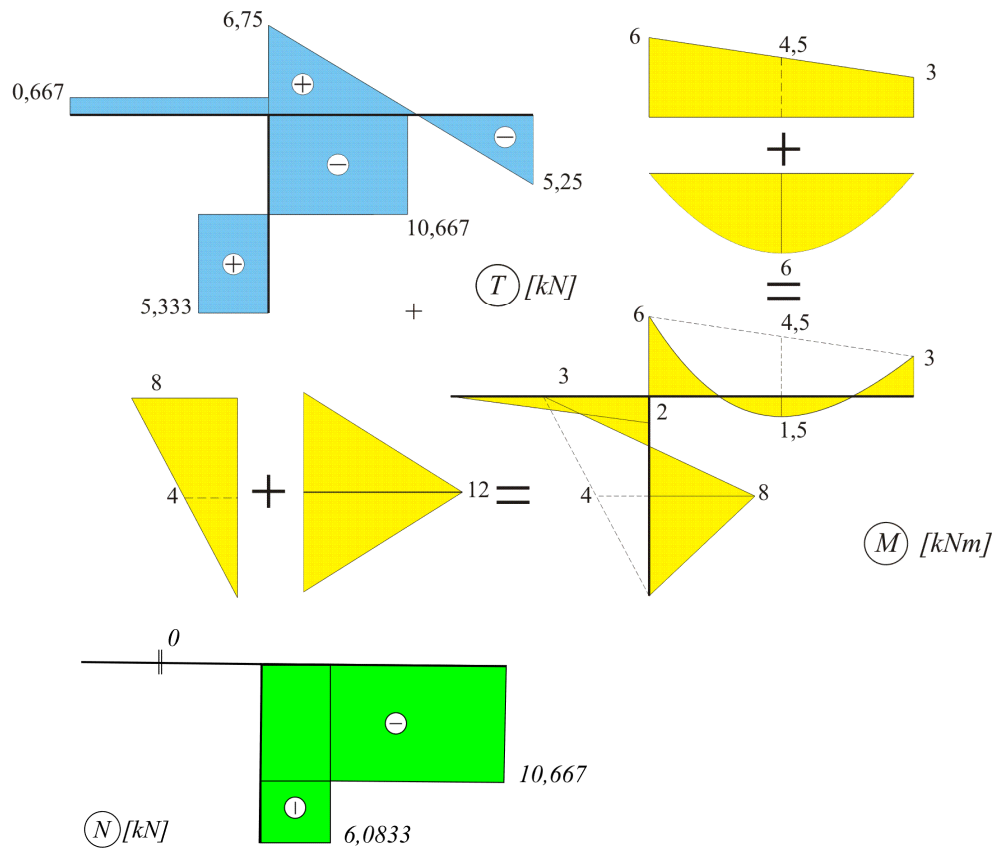
Rys. 32.5. Sprawdzenie warunku równowagi sił normalnych i tnących w węzle (1)

$$N_{1A} = 0,$$

$$\Sigma P_y = 0 \Rightarrow N_{1B} = -6,75 + 0,667 = -6,0833 \text{ [kN]},$$

$$\Sigma P_x = 0 \Rightarrow N_{1C} = -10,667 \text{ [kN]}.$$

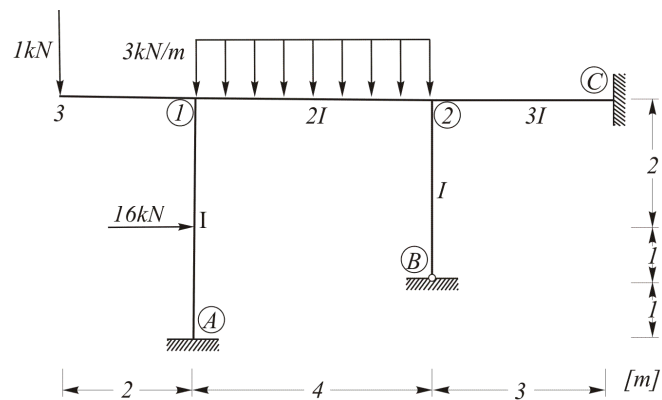




Rys. 32.6. Wykresy sił wewnętrznych

**33. Zadanie**

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 33.1. Sporządzić wykresy momentów zginających.

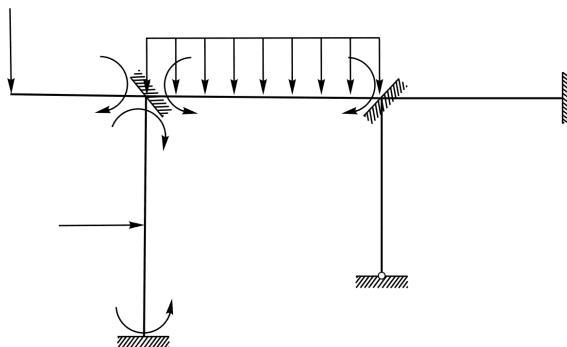


Rys. 33.1. Dany układ ramowy z obciążeniem

Układ jest dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny, nieprzesuwny  $n_g = n_\varphi = 2$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Układ podstawowy metody przemieszczeń (UPMP) – schemat geometrycznie wyznaczalny po wprowadzeniu fikcyjnych więzów w węzłach (1) i (2) – z przyłożonym obciążeniem zewnętrznym przedstawiono

na rysunku 33.2, zaznaczono rzeczywiste zwroty wyjściowych momentów przywęzłowych od danego obciążenia.



Rys. 33.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe:

$$M_{13}^0 = 2 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1A}^0 = \frac{8 \cdot 4}{8} = 4 \text{ [kNm]}, \quad M_{A1}^0 = -4 \text{ [kNm]},$$

$$M_{12}^0 = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ [kNm]}, \quad M_{21}^0 = 4 \text{ [kNm]}$$

Przywęzłowe momenty zginające w układzie geometrycznie wyznaczalnym wywołane jednostkowymi wymuszonymi kątami obrotu  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , odpowiednio węzłów (1) i (2) (patrz rys. 33.3).

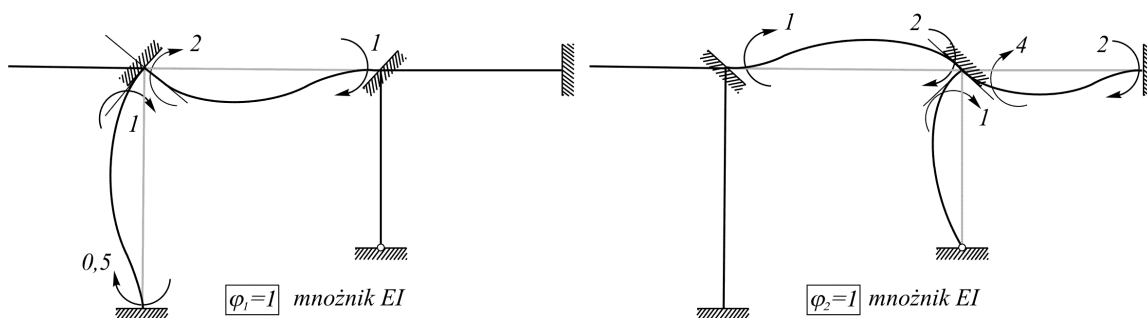
$$M_{13} = 2,$$

$$M_{1A} = 4 + EI\varphi_1, \quad M_{A1} = -4 + \frac{1}{2}EI\varphi_1,$$

$$M_{12} = -4 + 2EI\varphi_1 + EI\varphi_2, \quad M_{21} = 4 + EI\varphi_1 + 2EI\varphi_2,$$

$$M_{2B} = EI\varphi_2,$$

$$M_{2C} = 4EI\varphi_2, \quad M_{C2} = 2EI\varphi_2$$



Rys.33.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi_1 = 1$  i  $\varphi_2 = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Równania zerowania się reakcji w fikcyjnych więzach – równania równowagi, zapisano poniżej

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{12} + M_{13} = 0 \Rightarrow 2 + 3EI\varphi_1 + EI\varphi_2 = 0 \Rightarrow 3\varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{2}{EI} \quad (\text{węzeł 1})$$

$$\Sigma M_2 = M_{21} + M_{2B} + M_{2C} = 0 \Rightarrow 4 + EI\varphi_1 + 7EI\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 + 7\varphi_2 = -\frac{4}{EI} \quad (\text{węzeł 2})$$

Z rozwiązania powyższego układu równań kanonicznych metody przemieszczeń otrzymamy

$$\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{1}{2EI}.$$

Wartości momentów przywęzłowych otrzymujemy z superpozycji trzech stanów obciążenia:

$$M_{13} = 2 \text{ [kNm]},$$

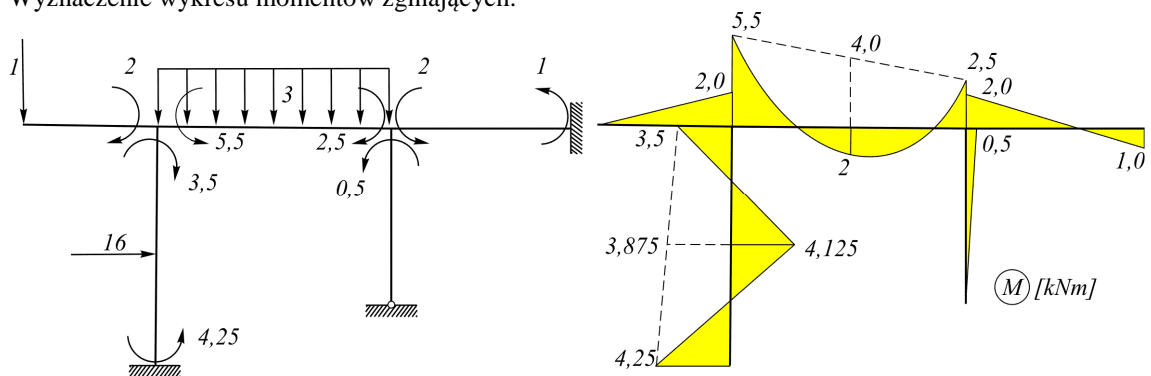
$$M_{1A} = 4 + 0,5 = 3,5 \text{ [kNm]}, \quad M_{A1} = -4 - 0,25 = -4,25 \text{ [kNm]},$$

$$M_{12} = -4 - 1 - 0,5 = -5,5 \text{ [kNm]}, \quad M_{21} = 4 - 0,5 - 1 = 2,5 \text{ [kNm]},$$

$$M_{2B} = -0,5 \text{ [kNm]},$$

$$M_{2C} = -2 \text{ [kNm]}, \quad M_{C2} = -1 \text{ [kNm]}.$$

Wyznaczenie wykresu momentów zginających.

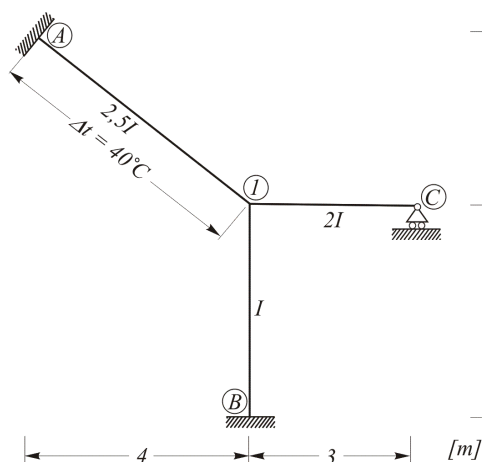


Rys.33.4. Układ obciążony momentami przywęzłowymi oraz wykres momentów zginających

#### 34. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 34.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych N, T, M dla układu poddanego nierównomiernemu ogrzaniu pręta (A-1). Dane:  $\Delta t = t_d - t_g = 40 \text{ [}^\circ\text{C]}$ ,

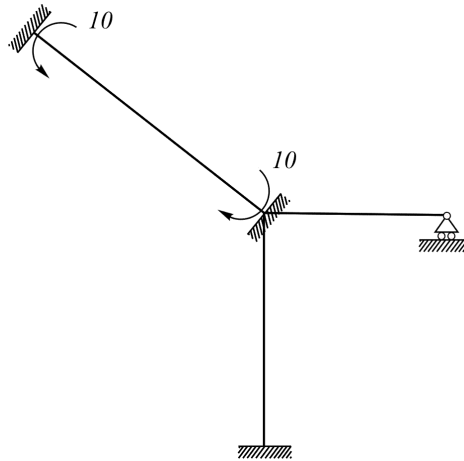
$\alpha_t = 10^{-5} \text{ [deg}^{-1}\text{]}$ ,  $EI = 2000 \text{ [kNm}^2\text{]}$ ,  $h = 0,2 \text{ [m]}$ .



Rys. 34.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym (temperatura)

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny, nieprzesuwany.  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Układ podstawowy metody przemieszczeń (UPMP) – schemat geometrycznie wyznaczalny po wprowadzeniu fikcyjnego więzu blokującego możliwość obrotu węzła 1 – z momentami przywęzłowymi będącymi skutkiem działania przyłożonego obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 34.2, zaznaczono rzeczywiste zwroty wyjściowych momentów przywęzłowych od danego obciążenia.



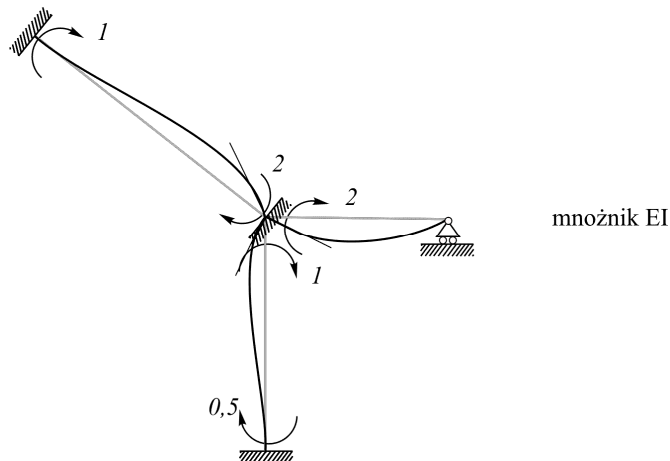
Rys. 34.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe:

$$M_{A1}^0 = -2,5EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = -5000 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 40}{0,2} = -10 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1A}^0 = 10 \text{ [kNm]}.$$

Momenty przywęzłowe w UPMP wywołane jednostkowym wymuszeniem – kątem obrotu  $\varphi = 1$  węzła 1.



Rys. 34.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe

$$M_{1A} = 10 + 2EI\varphi, \quad M_{A1} = -10 + EI\varphi,$$

$$M_{1B} = EI\varphi, \quad M_{B1} = 0,5EI\varphi,$$

$$M_{1C} = 2EI\varphi.$$

Równanie zerowania się reakcji w fikcyjnym więzie – równowagi  $\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0$ .

$$\text{Stąd } 10 + 5EI\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{2}{EI}.$$

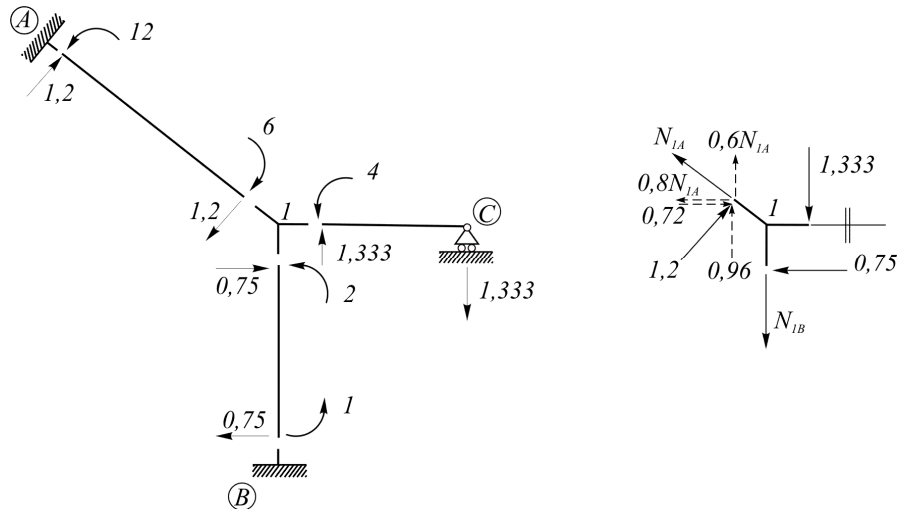
Wartości momentów przywęzłowych po podstawieniu rzeczywistej wielkości  $\varphi$

$$M_{1A} = 10 - 4 = 6 \text{ [kNm]}, \quad M_{A1} = -10 - 2 = -12 \text{ [kNm]},$$

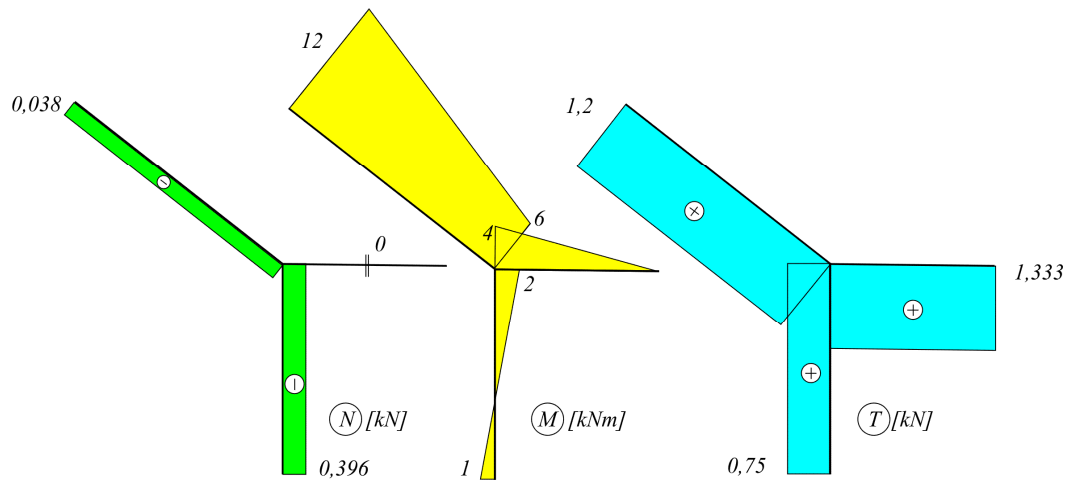
$$M_{1B} = -2 \text{ [kNm]}, \quad M_{B1} = -1 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C} = -4 \text{ [kNm]}$$

Wyznaczenie wykresów.



Rys. 34.4. Układ obciążony momentami przywęzłowymi oraz równowaga w węźle (1)



Rys. 34.5. Wykresy sił wewnętrznych

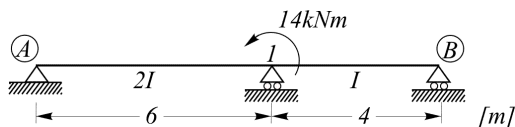
Siły normalne w elementach (1-A) i (1-B) obliczamy rozpatrując równowagę węzła (1).

$$\Sigma P_X = 0 \Rightarrow 0,75 - 0,72 + 0,8N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = -0,038 \text{ [kN]},$$

$$\Sigma P_Y = 0 \Rightarrow 0,6N_{1A} + 0,96 - 1,333 - N_{1B} = 0 \Rightarrow N_{1B} = -0,396 \text{ [kN]}.$$

### 35. Zadanie

Dana jest belka ciągła przedstawiona na rysunku 35.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych. Zadanie rozwiązać metodą przemieszczeń a następnie sprawdzić metodą sił.



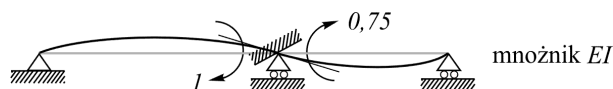
Rys. 35.1. Dana belka ciągła z obciążeniem zewnętrznym

#### Metoda przemieszczeń

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Momenty wyjściowe są zerowe (brak obciążeń przęsłowych).

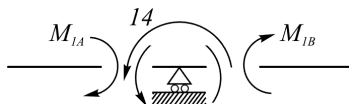
Momenty przywęzłowe pochodzące od kąta obrotu  $\varphi = 1$ .



Rys. 35.2. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe:  $M_{1A} = EI\varphi$ ,  $M_{1B} = 0,75EI\varphi$ .

Równanie równowagi.



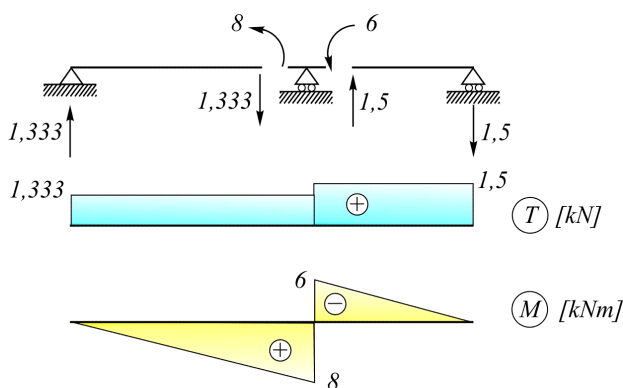
Rys. 35.3. Równowaga w węźle (1)

$$\Sigma M = M_{1A} + M_{1B} + 14 = 0 \Rightarrow 1,75EI\varphi + 14 = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{8}{EI}$$

Wartości końcowych momentów przywęzłowych

$$M_{1A} = -8 \text{ [kNm]}, \quad M_{1B} = -6 \text{ [kNm]}.$$

Wykresy

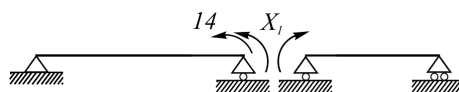


Rys. 35.4. Układ obciążony momentami przywęzłowymi – wykresy sił wewnętrznych

#### Metoda sił

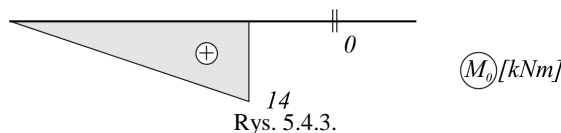
Stopień statycznej niewyznaczalności układu  $n = 1$ .

Przyjmujemy układ podstawowy metody sił (UPMS) odrzucając więź wewnętrzną – powstaje przegub.

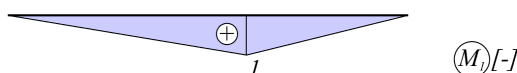
Rys. 35.5. UPMS obciążony obciążeniem zewnętrznym oraz nadliczbową  $X_1$ 

Zakładamy, że obciążenie zewnętrzne (moment skupiony przyłożony w węźle 1) działa po lewej stronie przegubu powstałego po przyjęciu UPMS.

Stan obciążenia zewnętrznego



Stan  $X_1 = 1$

Rys. 35.6. UPMS – wykresy momentów od obciążenia zewnętrznego oraz od jednostkowej nadliczbowej  $X_1 = 1$ 

Przemieszczenia w układzie podstawowym:

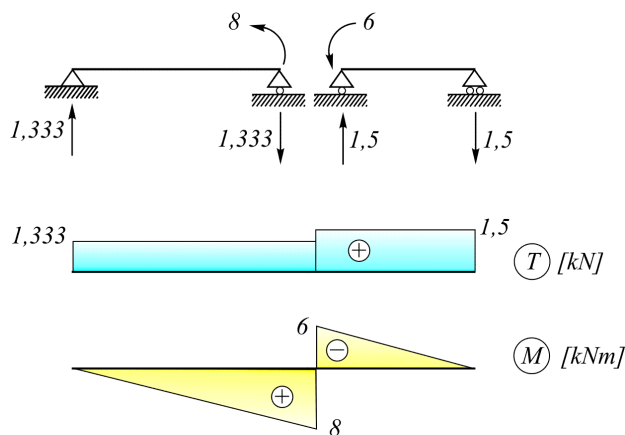
- wywołane obciążeniem zewnętrznym

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{14}{EI}$$

- wywołane nadliczbową  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3EI}$$

Z równania zgodności przemieszczeń  $\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$  otrzymujemy  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -6$  [kNm].

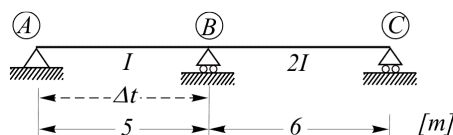


Rys. 35.7. Wyznaczenie wykresów sił wewnętrznych

### 36. Zadanie

Dana jest belka ciągła przedstawiona na rysunku 36.1. Rozwiązać układ stosując metodę przemieszczeń.

Dane:  $\Delta t_{A-B} = t_d - t_g = 20$  [°C],  $\alpha_t = 10^{-5}$  [deg<sup>-1</sup>],  $h = 0,2$  [m],  $EI = 40000$  [kNm<sup>2</sup>].



Rys. 36.1. Dana belka ciągła z obciążeniem (temperatura)

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny  $n_g = n_\varphi = 1$ .

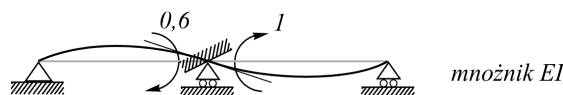
Układ podstawowy metody przemieszczeń (UPMP) – schemat geometrycznie wyznaczalny po wprowadzeniu fikcyjnego więzu w węźle (B) – z momentem przywęzłowym będącym skutkiem działania przyłożonego obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 36.2, zaznaczono rzeczywisty zwrot wyjściowego momentu przywęzłowego od danego obciążenia.



Rys. 36.2. UPMP z zaznaczonym momentem przywęzłowym od obciążenia zewnętrznego

$$\text{Moment wyjściowy } M_{BA}^0 = \frac{3}{2} EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = 6000 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 20}{0,2} = 60 \text{ [kNm]}.$$

Momenty przywęzłowe wywołane jednostkowym wymuszeniem  $\varphi = 1$ .

Rys. 36.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

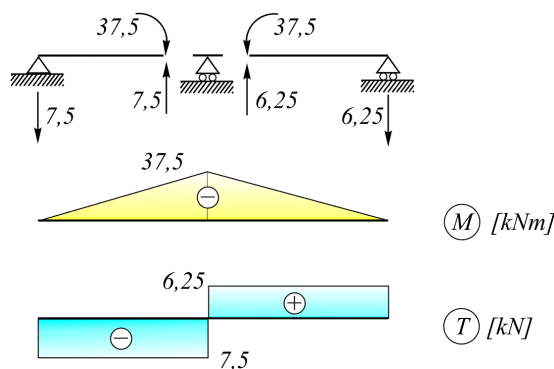
Sumaryczne momenty przywęzłowe:  $M_{BA} = 60 + 0,6 \cdot EI\varphi$ ,  $M_{BC} = EI\varphi$ .

Równanie zerowania się reakcji w fikcyjnym więzie – równanie równowagi w węźle (1)

$$\Sigma M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow 60 + 1,6EI\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{37,5}{EI},$$

Wartości momentów przywęzłowych po podstawieniu rzeczywistej wielkości  $\varphi$ :

$$M_{BA} = 60 - 22,5 = 37,5 \text{ [kNm]}, \quad M_{BC} = -37,5 \text{ [kNm]}.$$

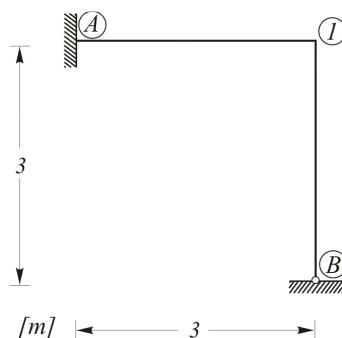


Rys. 36.4. Układ obciążony momentami przywęzłowymi – wykresy sił wewnętrznych

### 37. Zadanie

Wyznaczyć siły wewnętrzne w układzie z rysunku 37.1 powstałe na skutek wmontowania pręta (A-1) dłuższego o  $\Delta l = 3 \text{ [cm]}$ . Przyjąć  $EI = 1400 \text{ [kNm}^2\text{]}$ .

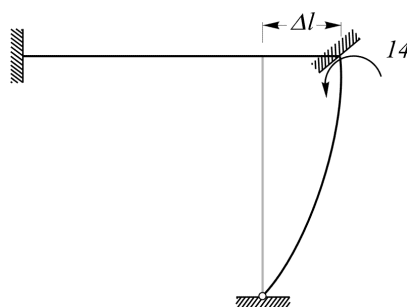




Rys. 37.1. Dany układ ramowy obciążony wmontowaniem dłuższego pręta (A-1)

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Układ podstawowy metody przemieszczeń (UPMP) – układ geometrycznie wyznaczalny.

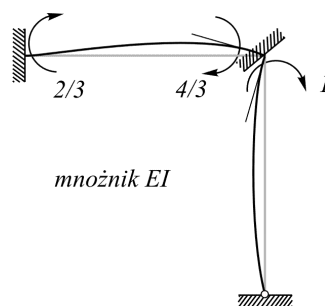


Rys. 37.2. UPMP z zaznaczonym momentem przywęzłowym od obciążenia zewnętrznego

Moment wyjściowy

$$M_{1B}^0 = -\frac{3 \cdot EI}{3^2} \cdot \Delta l = -\frac{3 \cdot 1400}{3^2} \cdot 0,03 = -14 \text{ [kNm]}$$

Momenty przywęzłowe w układzie geometrycznie wyznaczalnym powstałe na skutek wymuszenia obrotu węzła o kąt  $\varphi = 1$ .

Rys. 37.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{1A} = \frac{4}{3} EI \varphi, \quad M_{1B} = -14 + EI \varphi, \quad M_{A1} = \frac{2}{3} EI \varphi$$

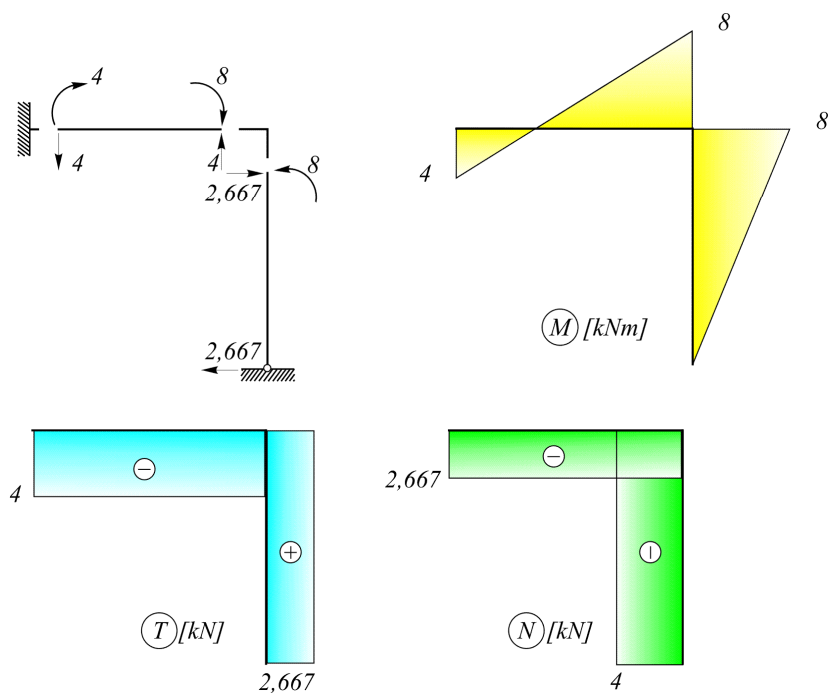
Równanie równowagi  $\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 0$ ,

$$\text{stąd } -14 + \frac{7}{3}EI\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{6}{EI}.$$

Wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{1A} = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \text{ [kNm]}, \quad M_{1B} = -14 + 6 = -8 \text{ [kNm]}, \quad M_{A1} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ [kNm]}.$$

Wyznaczenie wykresów

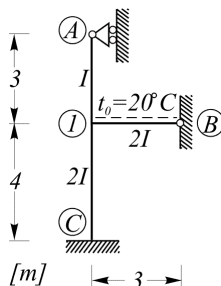


Rys. 37.5. Układ obciążony momentami przywęzłowymi – wykresy sił wewnętrznych

### 38. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 38.1. Wyznaczyć siły wewnętrzne powstałe na skutek równomiernego ogrzania jednego z elementów o wielkość  $t_0$  względem temperatury montażu.

Dane:  $\alpha_t = 10^{-5} [\text{deg}^{-1}]$ ,  $EI = 10000 \text{ [kNm}^2]$ .



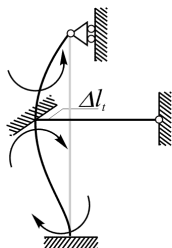
Rys. 38.1. Dany układ ramowy z obciążeniem (temperatura)

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Swobodne wydłużenie termiczne elementu (1-B)

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot t_0 \cdot l = 10^{-5} \cdot 20 \cdot 3 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ [m]}$$

Układ podstawowy metody przemieszczeń (geometrycznie wyznaczalny).



Rys. 38.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe:

$$M_{1A}^0 = -\frac{3 \cdot EI}{3^2} \cdot \Delta l_t = -\frac{3 \cdot 10000}{9} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = -2 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C}^0 = M_{C1}^0 = \frac{6E \cdot 2I}{4^2} \cdot \Delta l_t = \frac{6 \cdot 20000}{16} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 4,5 \text{ [kNm]}.$$

Momenty przywęzłowe (wykonać rysunek):

$$M_{1A} = -2 + \frac{3EI}{3} \varphi = -2 + EI \varphi,$$

$$M_{1B} = \frac{3E \cdot 2I}{3} \varphi = 2EI \varphi,$$

$$M_{1C} = 4,5 + \frac{4E \cdot 2I}{4} \varphi = 4,5 + 2EI \varphi, \quad M_{C1} = 4,5 + \frac{2E \cdot 2I}{4} \varphi = 4,5 + EI \varphi.$$

Równanie równowagi  $\sum M_1 = M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0$ .

$$\text{Stąd } 2,5 + 5EI \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{2EI}.$$

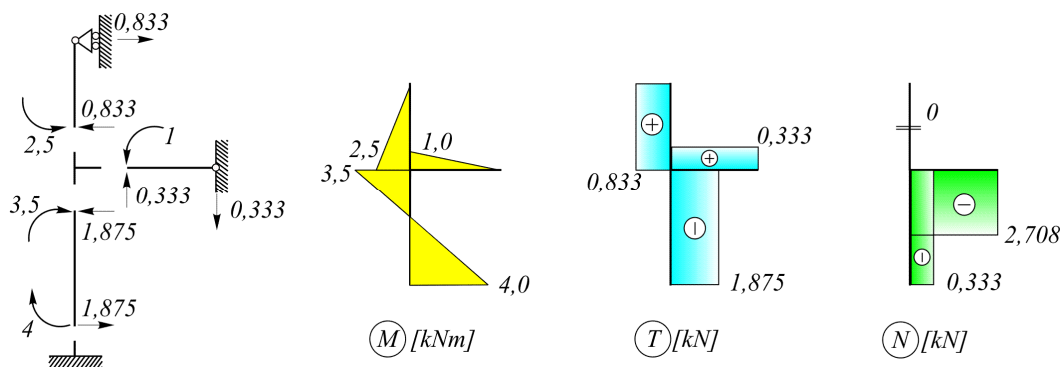
Wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{1A} = -2 - 0,5 = -2,5 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1B} = -1 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C} = 4,5 - 1 = 3,5 \text{ [kNm]}, \quad M_{C1} = 4,5 - 0,5 = 4 \text{ [kNm]}$$

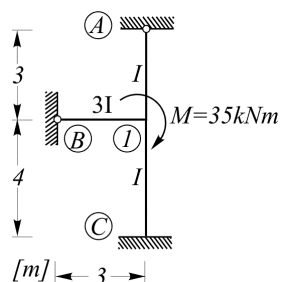
Wyznaczenie wykresów.



Rys. 38.3. Układ obciążony momentami przywęzłowymi – wykresy sił wewnętrznych

## 39. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 39.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych  $M$ ,  $T$ ,  $N$ .

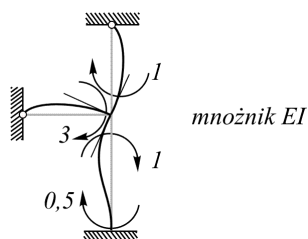


Rys.39.1. Dany ramowy prętowy z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Ponieważ jedynym obciążeniem jest moment skupiony przyłożony w węźle, wyjściowe momenty przywęzłowe są zerowe.

Wpływ wymuszenia – kąt obrotu  $\varphi = 1$ .

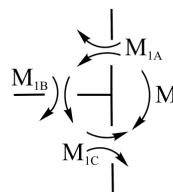


Rys. 39.2. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Moment przywęzłowe pochodzące od kąta obrotu  $\varphi = 1$ :

$$M_{1A} = EI\varphi, \quad M_{1B} = 3EI\varphi, \quad M_{1C} = EI\varphi, \quad M_{C1} = \frac{1}{2}EI\varphi.$$

Równanie równowagi wyciętego węzła (1) – suma momentów przywęzłowych oraz skupionego momentu węzłowego jest równa zero.



Rys. 39.3. Równowaga w węźle (1) – zewnętrzny moment skupiony działa bezpośrednio na węzeł

$$\Sigma M_1 = -M_{1A} - M_{1B} - M_{1C} + M = 0 \quad \text{lub} \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = M$$

$$\text{Stąd} \quad 5EI\varphi - 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{7}{EI}.$$

Możliwa jest także inna interpretacja.

Dodatkowy element (1-3) obciążony momentem skupionym  $M$ , w elemencie tym powstaje moment wyjściowy  $M_{13} = -M$ .



Rys. 39.4. Równowaga w węźle (1) – inna interpretacja obciążenia momentem

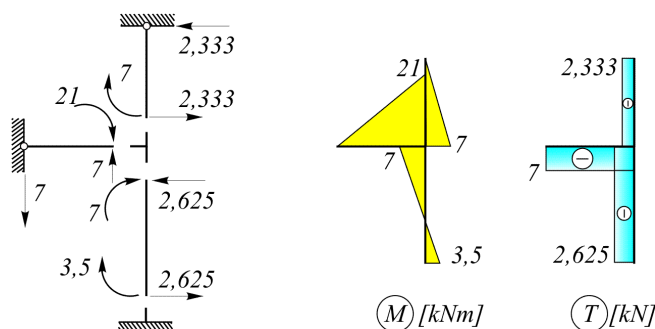
Wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{1A} = 7 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1B} = 21 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C} = 7 \text{ [kNm]}, \quad M_{C1} = 3,5 \text{ [kNm]}$$

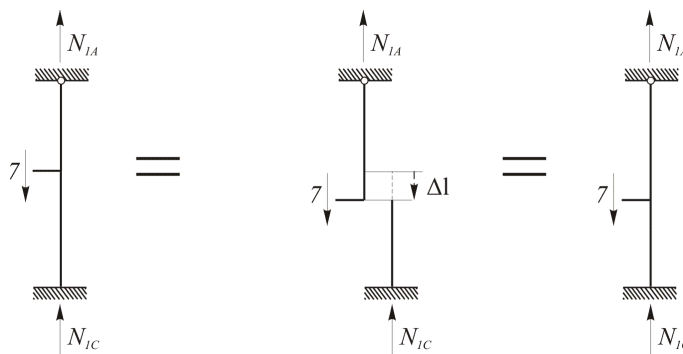
Wyznaczenie wykresów



Rys. 39.5. Układ obciążony momentami przywęzłowymi – wykresy sił wewnętrznych

Obliczenie sił normalnych w elementach (A-1) i (1-C).

Przyjmujemy że siła  $N_{1A}$  jest rozciągająca, zaś siła  $N_{1C}$  ściskająca.



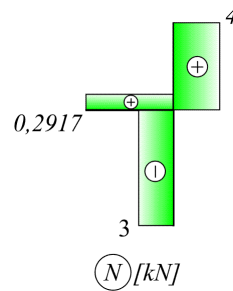
Rys. 39.6. Analiza obciążenia pręta (A-1-C)

$$\text{Równanie równowagi } \sum P_y = 0 \Rightarrow N_{1A} + N_{1C} = 7 \text{ [kN]}$$

$$\text{Warunek zgodności przemieszczeń } |\Delta l_{1A}| = |\Delta l_{1C}| \Rightarrow \frac{N_{1A} \cdot 3}{EA} = \frac{N_{1C} \cdot 4}{EA} \quad 3N_{1A} = 4N_{1C}$$

Z powyższych równań otrzymamy  $N_{1A} = 4 \text{ [kN]}$ ,  $N_{1C} = 3 \text{ [kN]}$ ,

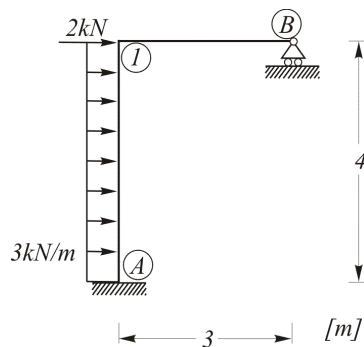
$$\text{dodatkowo } N_{1B} = 2,625 - 2,333 = 0,2917 \text{ [kN]}$$



Rys. 39.7. Wykres sił normalnych

**40. Zadanie**

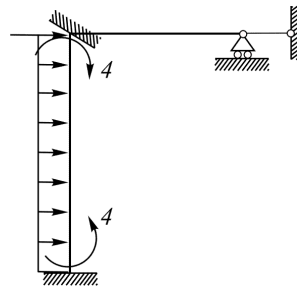
Dany jest układ ramowy – rysunek 40.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych. Przyjąć  $EI = \text{const.}$



Rys. 40.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny, przesuwny  $n_g = n_\varphi + n_\Delta = 1 + 1 = 2$ .

Układ podstawowy metody przemieszczeń – geometrycznie wyznaczalny.



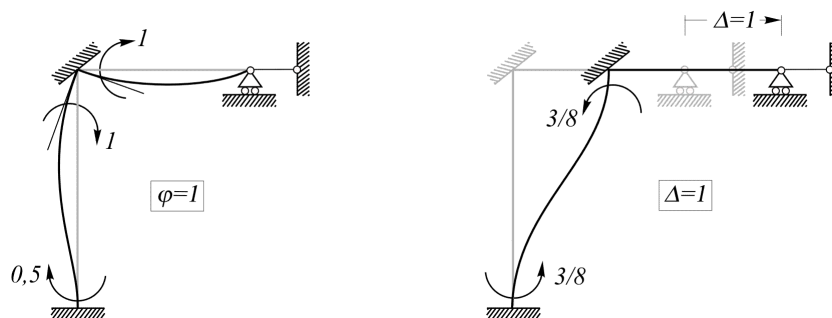
Rys. 40.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe:

$$M_{A1}^0 = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ [kNm]}, \quad M_{1A}^0 = 4 \text{ [kNm]}.$$

W obliczeniach poniżej przyjmujemy  $EI = 1$ .

Momenty zginające w układzie geometrycznie wyznaczalnym wywołane jednostkowymi wymuszeniami  $\varphi = 1$  i  $\Delta = 1$ .

Rys. 40.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi = 1$  i  $\Delta = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{A1} = -4 + 0,5\varphi - \frac{3}{8}\Delta, \quad M_{1A} = 4 + \varphi - \frac{3}{8}\Delta,$$

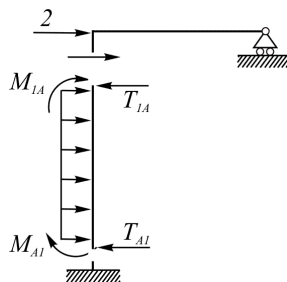
$$M_{1B} = \varphi.$$

Poniżej zapisano odpowiednie równania równowagi.

1) Suma momentów w węźle (1).

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 0 \Rightarrow 2\varphi - \frac{3}{8}\Delta + 4 = 0 \Rightarrow 16\varphi - 3\Delta = -32 \quad (\text{równanie równowagi węzła - 1})$$

2) Równowaga sił działających na wycięty element (1-B).



Rys. 40.4. Równowaga wyciętego elementu (1-B), zaznaczono siły przywęzłowe w przecię (1-A)

Przywęzłowe siły tnące:

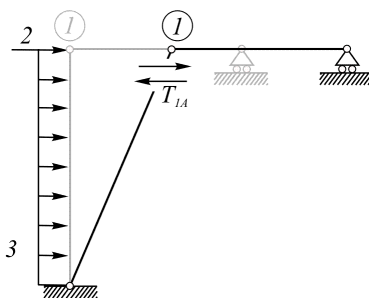
$$T_{1A} = \frac{M_{A1} + M_{1A}}{4} + T_{1A}^0, \quad T_{1A}^0 = 6 \quad (\text{od obciążenia zewnętrznego});$$

$$T_{1A} = \frac{3}{8}\varphi - \frac{3}{16}\Delta + 6.$$

Równanie równowagi

$$\Sigma P_x = 0 \Rightarrow T_{1A} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}\varphi - \frac{3}{16}\Delta + 8 = 0 \Rightarrow 6\varphi - 3\Delta = -128 \quad (\text{równ. równ. rygła - 2})$$

Równanie (2) można otrzymać inną drogą – tworząc układ przegubowy (mechanizm) i zadając w nim przemieszczenie wirtualne  $\Delta=1$ .



Rys. 40.5. Układ przegubowy (mechanizm) służący do wyznaczenia równowagi pręta (1-B)

Równanie równowagi wyciętego elementu (1-B)  $\sum P_x = 0 \Rightarrow T_{1A} \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$ ,  
 $T_{1A}$  - od strony węzła (1).

Po podstawieniu  $T_{1A} = \frac{M_{1A} + M_{A1}}{4} + 6$  otrzymujemy równanie (2).

Do tego samego rezultatu można dojść wprowadzając wielkość kąta obrotu pręta (A-1):  $\Psi_{A-1} = \frac{1}{h} = \frac{1}{4}$  i zapisując równanie pracy wirtualnej

$$\Psi_{A-1} \cdot (M_{1A} + M_{A1}) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 6\varphi - 3\Delta = -128. \quad (\text{równ. równ. rygla - 2})$$

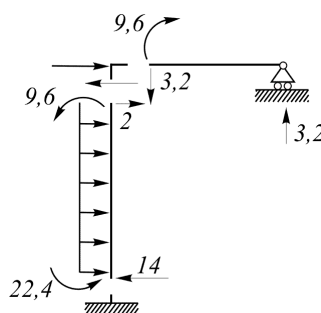
Z układu równań (1) i (2) otrzymujemy  $\varphi = 9,6$ ,  $\Delta = 61,8667$ .

Wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{A1} = -4 + 4,8 - 23,2 = -22,4 \text{ [kNm]}, \quad M_{1A} = 4 + 9,6 - 23,2 = -9,6 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1B} = -9,6 \text{ [kNm]}.$$

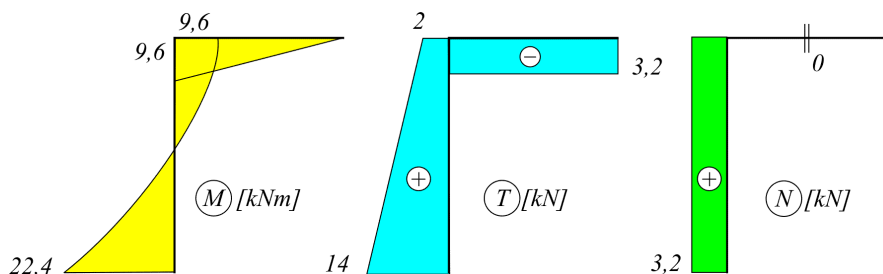
Wyznaczenie sił przywęzłowych.



Rys. 40.6. Układ obciążony momentami przywęzłowymi

Wykresy sił wewnętrznych.

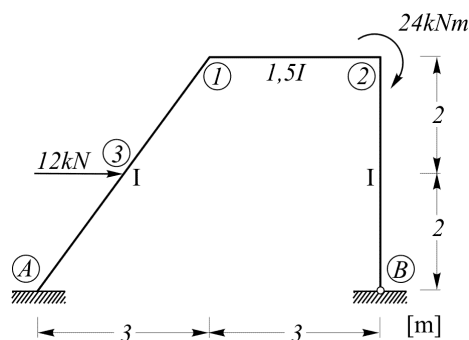




Rys. 40.7. Wykresy sił wewnętrznych

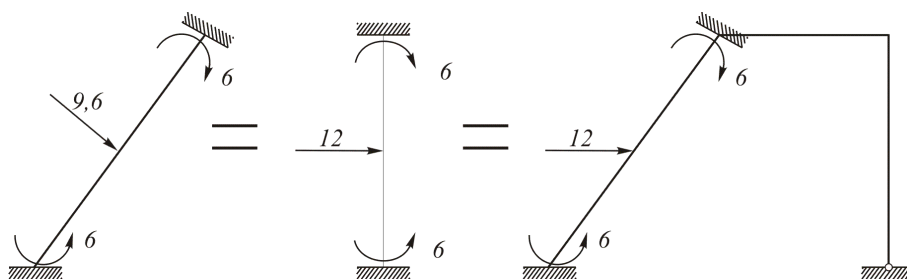
#### 41. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 41.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 41.1. Dany układ ramowy z obciążeniem zewnętrznym

Układ jest trzykrotnie geometrycznie niewyznaczalny, przesuwany  $n_g = n_\varphi + n_\Delta = 2 + 1 = 3$ .

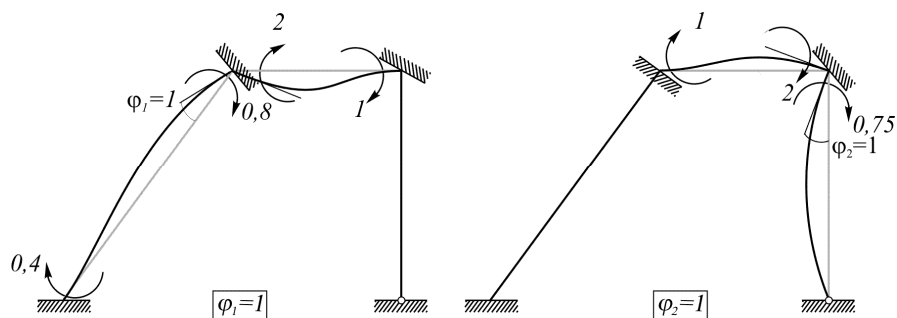
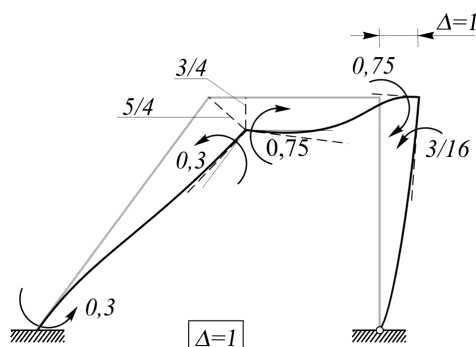


Rys. 41.2. UPMP z zaznaczonymi momentami przywęzłowymi od obciążenia zewnętrznego

Momenty wyjściowe:

$$M_{A1}^0 = -\frac{12 \cdot 4}{8} = -6 \text{ [kNm]}, \quad M_{1A}^0 = 6 \text{ [kNm]}.$$

Momenty przywęzłowe w układzie geometrycznie wyznaczalnym wywołane wymuszeniami:  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = 1$ ,  $\Delta = 1$ .

Rys.41.3. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\varphi_1 = 1$  i  $\varphi_2 = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłoweRys. 41.4. UPMP zdeformowany w wyniku obciążenia  $\Delta = 1$ , zaznaczono momenty przywęzłowe

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{A1} = -6 + 0,4\varphi_1 - 0,3\Delta, \quad M_{1A} = 6 + 0,8\varphi_1 - 0,3\Delta;$$

$$M_{12} = 2\varphi_1 + \varphi_2 + 0,75\Delta, \quad M_{21} = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 0,75\Delta;$$

$$M_{2B} = 0,75\varphi_2 - \frac{3}{16}\Delta.$$

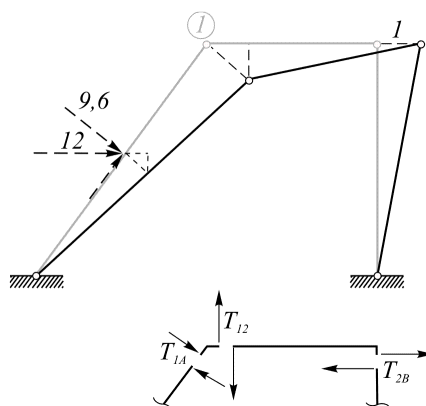
Równania równowagi.

a) Sumy momentów w węzłach (1) i (2).

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{12} = 0 \Rightarrow 2,8\varphi_1 + \varphi_2 + 0,45\Delta = -6, \quad (\text{równanie równowagi węzła 1})$$

$$\Sigma M_2 = M_{21} + M_{2B} = M = 24 \Rightarrow \varphi_1 + 2,75\varphi_2 + \frac{9}{16}\Delta = 24. \quad (\text{równanie równowagi węzła 2})$$

b) Równanie równowagi rygła czyli wyciętego pręta (1-2) sumy rzutów sił na kierunek przesuwu – by je otrzymać, tworzymy układ przegubowy (mechanizm) i zadajemy przemieszczenie wirtualne  $\Delta = 1$ .



Rys. 41.5. Rzutowanie sił na kierunek przesuwu oraz oznaczenie sił poprzecznych na końcach prętów

Przywęzłowe siły tnące:

$$T_{1A} = \frac{M_{1A} + M_{A1}}{5} + 4,8 = 0,24\varphi_1 - 0,12\Delta + 4,8,$$

$$T_{12} = \frac{M_{12} + M_{21}}{3} = \varphi_1 + \varphi_2 + 0,5\Delta,$$

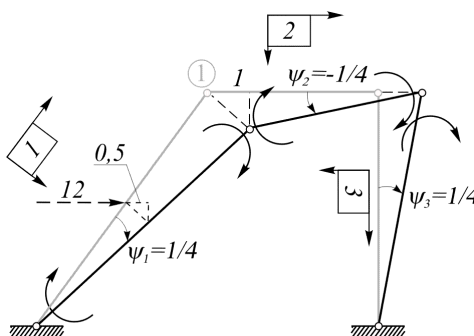
$$T_{2B} = \frac{M_{2B}}{4} = \frac{3}{16}\varphi_2 - \frac{3}{64}\Delta.$$

Równanie pracy wirtualnej można zapisać w postaci  $T_{1A} \cdot \frac{5}{4} - T_{12} \cdot \frac{3}{4} + T_{2B} \cdot 1 = 0$ .

W równaniu tym zwroty sił przyjmujemy zgodnie z konwencją znaków – od węzłów. W przypadku braku obciążenia działającego bezpośrednio w węzłach można podstawić siły  $T$  od strony prętów. Po podstawieniu otrzymujemy

$$0,45\varphi_1 + \frac{9}{16}\varphi_2 + \frac{183}{320}\Delta = 6. \quad (\text{równanie równowagi rygla czyli elementu (1-2) - 3})$$

Inny sposób wyznaczenia równania (3). Obliczamy kąty obrotu poszczególnych prętów układu przegubowego (mechanizmu).



Rys. 41.6. Wyznaczenie prac wirtualnych za pomocą schematu kinematycznego

Równanie pracy wirtualnej:

$$\frac{1}{4}(M_{A1} + M_{1A}) - \frac{1}{4}(M_{21} + M_{12}) + \frac{1}{4}M_{2B} + 12 \cdot 0,5 = 0,$$

$$\frac{1}{4}(M_{A1} + M_{1A} - M_{21} - M_{12} + M_{2B}) + 6 = 0,$$

$$\Rightarrow 0,45 \varphi_1 + \frac{9}{16} \varphi_2 + \frac{183}{320} \Delta = 6. \quad (3)$$

Po rozwiązaniu układu równań (1), (2), (3) otrzymujemy:

$$\varphi_1 = -6,64506,$$

$$\varphi_2 = 9,92489,$$

$$\Delta = 5,95861.$$

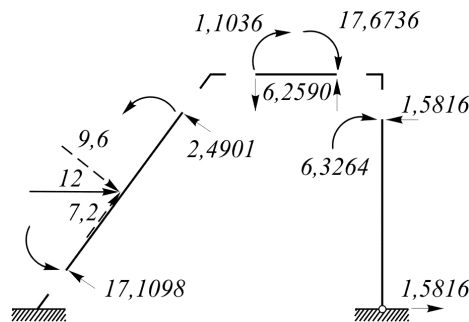
Momenty przywęzłowe:

$$M_{A1} = -10,4456 [kNm], \quad M_{1A} = -1,1036 [kNm];$$

$$M_{12} = 1,1036 [kNm], \quad M_{21} = 17,6736 [kNm];$$

$$M_{2B} = 6,3264 [kNm].$$

Wyznaczenie sił tnących.



Rys. 41.7. Wyznaczenie sił tnących na podstawie równowagi prętów

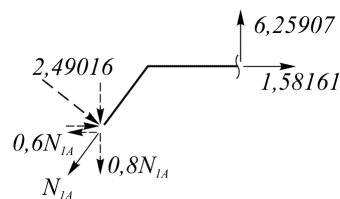
Siły normalne w prętach (2-B) i (1-2) uzyskujemy z równowagi węzła (2).

$$\sum P_y = 0 \Rightarrow N_{2B} = -6,25907 [kN],$$

$$\sum P_x = 0 \Rightarrow N_{12} = 1,58161 [kN].$$

Siłę normalną  $N_{1A}$  uzyskujemy z równowagi węzła (1).

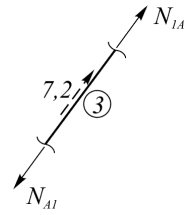
$$\sum P_x = 0 \Rightarrow -0,6N_{1A} + 0,8 \cdot 2,49016 + 1,58161 = 0 \Rightarrow N_{1A} = 5,9562 [kN]$$



Rys. 41.8. Równowaga w węźle (1)

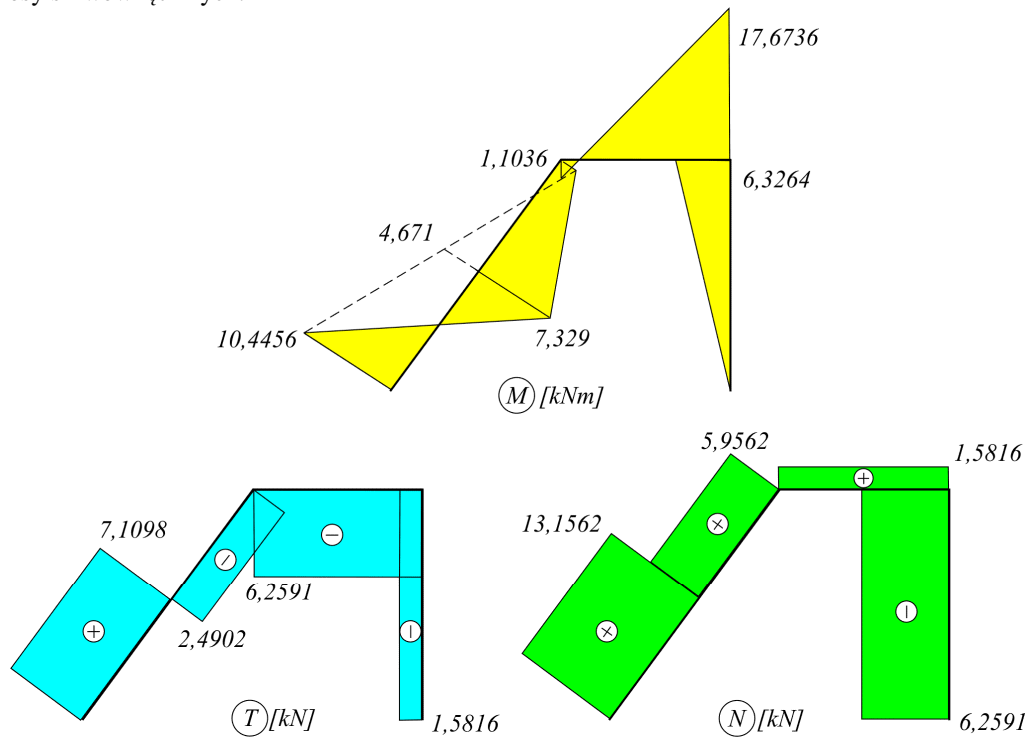
Sprawdzenie –  $\sum P_y = 0$ .

Z równowagi w punkcie (3) otrzymujemy siłę normalną  $N_{A1} = N_{1A} + 7,2 = 13,1562 [kN]$ .



Rys. 41.9. Równowaga w punkcie (3)

Wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 41.10. Końcowe wykresy sił wewnętrznych

## IV. Linie wpływu i obwiednie

### Wyznaczanie linii wpływu metodą kinematyczną

Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń (tw. Mullera-Breslau) stanowi podstawę metody kinematycznej wyznaczania linii wpływu wielkości statycznych.

Linia wpływu pewnej wielkości statycznej (reakcji podporowej, siły przekrojowej) ma kształt linii ugięcia (bądź odpowiedniego fragmentu tej linii) osi prętów danego układu, powstałej pod wpływem wymuszenia kinematycznego, sprzężonego z tą pewną wielkością statyczną, i równego  $-1$  (wymuszenie skierowane przeciwnie do poszukiwanej wielkości statycznej).

Uwagi:

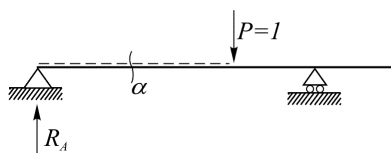
a)  $\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = 1 \cong \Delta\varphi$  (zał. o małych kątach).

b) Na rysunkach oznaczono zwrot osi  $x$  oraz znaki (+) i (–) odnośnie wartości linii wpływu.

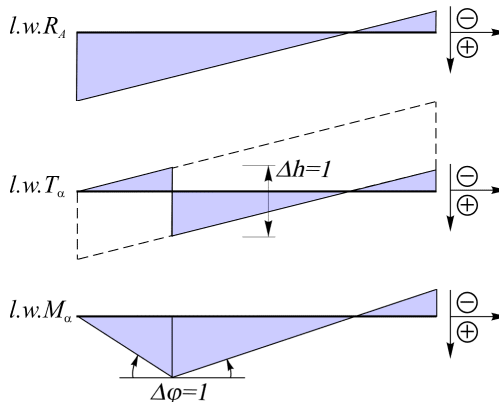
### 42. Zadanie

Dana jest belka swobodnie podparta obciążona jednostkową siłą skupioną poruszającą się na długości belki. Wyznaczyć linie wpływu  $R_A$ ,  $T_\alpha$  i  $M_\alpha$ .

Belka jest statycznie wyznaczalna – wykresy są liniowe w przedziałach.



Rys. 42.1. Dana belka obciążona obciążeniem „ruchomym”

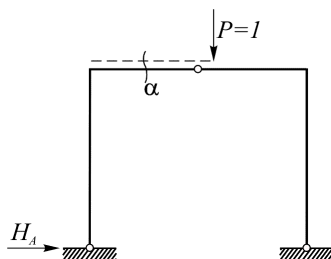


Rys. 42.2. Linie wpływu wyznaczone metodą kinematyczną

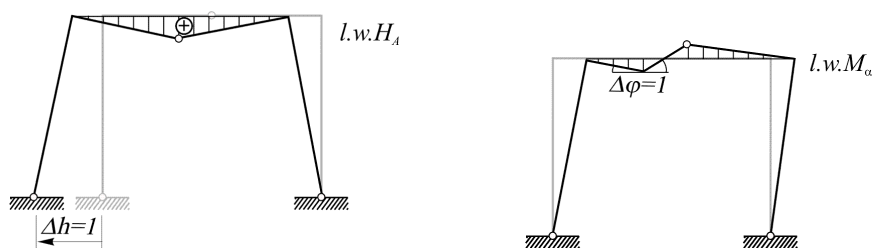
### 43. Zadanie

Dana jest rama trójprzegubowa (rys. 43.1) obciążona jednostkową siłą skupioną poruszającą się po ryglu. Wyznaczyć linie wpływu  $H_A$  i  $M_\alpha$ .

Układ jest statycznie wyznaczalny – wykresy są liniowe w przedziałach.



Rys. 43.1. Dana rama trójprzegubowa obciążona obciążeniem „ruchomym” (na ryglu)

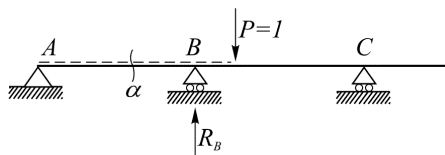


Rys. 43.2. Linie wpływu wyznaczone metodą kinematyczną (zakreskowane)

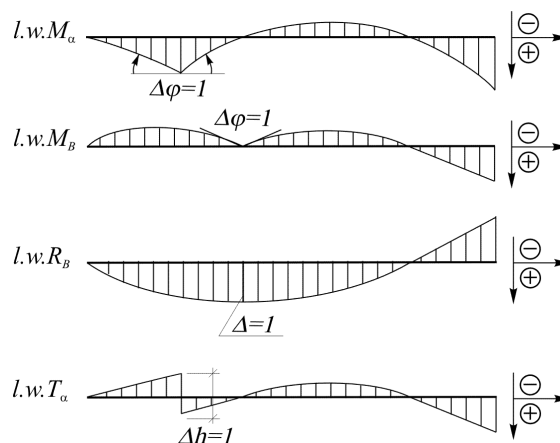
#### 44. Zadanie

Dana jest belka dwuprzęsłowa (rys. 44.1) z jednostkowym obciążeniem „ruchomym” na całej jej długości. Wyznaczyć linie wpływu  $M_\alpha$ ,  $M_B$ ,  $R_B$  i  $T_\alpha$ .

Belka jest statycznie niewyznaczalna, wykresy w ogólności nie są liniowe (liniowe są jedynie w niektórych przedziałach, należy zauważyć z czego to wynika).



Rys. 44.1. Dana belka ciągła obciążona obciążeniem „ruchomym”

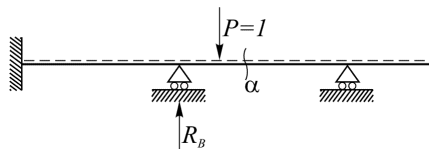


Rys. 44.2. Linie wpływu wyznaczone metodą kinematyczną

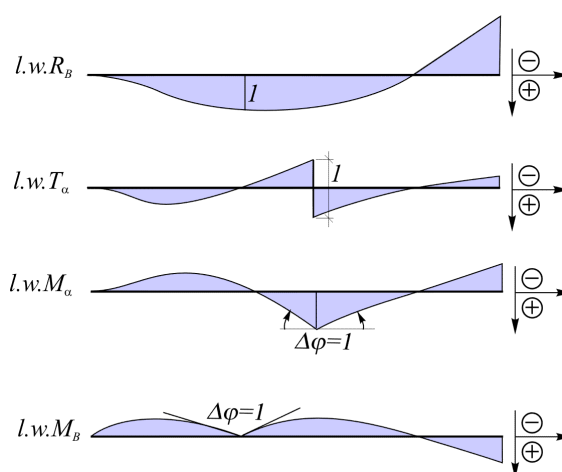
**45. Zadanie**

Dana jest belka dwuprzęsłowa (rys. 45.1) obciążona jednostkowym obciążeniem „ruchomym” na całej jej długości. Wyznaczyć linie wpływu  $R_B$ ,  $T_\alpha$ ,  $M_\alpha$  i  $M_B$ .

Belka jest statycznie niewyznaczalna, wykresy nie są liniowe; jedynie w niektórych przedziałach (należy zauważyć dlaczego tak jest).



Rys. 7.4.1. Dana belka ciągła obciążona obciążeniem „ruchomym”

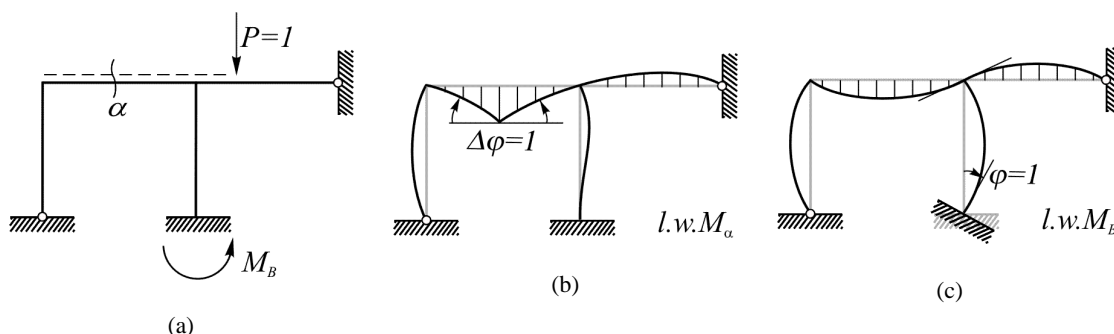


Rys. 7.4.2. Linie wpływu wyznaczone metodą kinematyczną

**46. Zadanie**

Dany jest układ ramowy (rys. 46.1.a), którego rygiel obciążony jest poruszającą się siłą jednostkową. Wyznaczyć linie wpływu  $M_\alpha$  i  $M_B$ .

Układ jest statycznie niewyznaczalny, wykresy są nieliniowe.



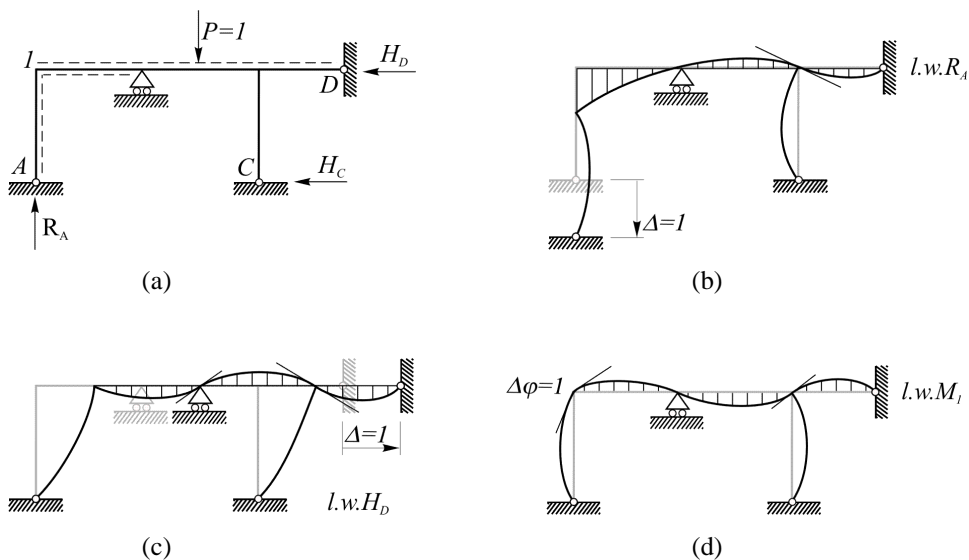
Rys. 46.1. Dana rama oraz otrzymane metodą kinematyczną linie wpływu

**47. Zadanie**

Dany jest układ ramowy (rys. 47.1.a), którego rygiel obciążony jest poruszającą się siłą jednostkową. Wyznaczyć linie wpływu  $R_A$ ,  $H_D$  i  $M_1$ .



Układ jest statycznie niewyznaczalny, wykresy są nieliniowe.

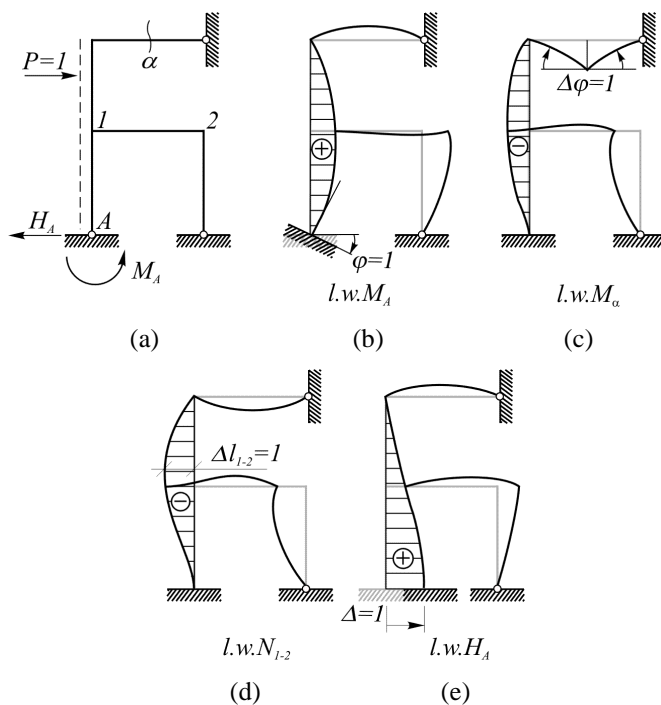


Rys. 7.6.1. Dana rama oraz otrzymane metodą kinematyczną linie wpływu

#### 48. Zadanie

Dany jest układ ramowy (rys. 48.1.a), którego lewy słup obciążony jest poruszającą się siłą jednostkową skierowaną w prawo. Wyznaczyć linie wpływu  $M_A$ ,  $M_\alpha$ ,  $N_{1-2}$ ,  $H_D$ .

Układ jest statycznie niewyznaczalny, wykresy są nieliniowe.



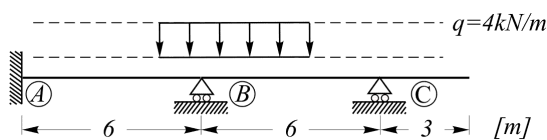
Rys. 48.1. Dana rama oraz otrzymane metodą kinematyczną linie wpływu

### Wyznaczanie obwiedni – obciążanie linii wpływu

Szkic linii wpływowych sił wewnętrznych ( $M$ ) w wybranych (niekorzystnych) przekrojach układu może posłużyć do ustalenia ekstremalnych schematów obciążeń i narysowania obwiedni sił wewnętrznych.

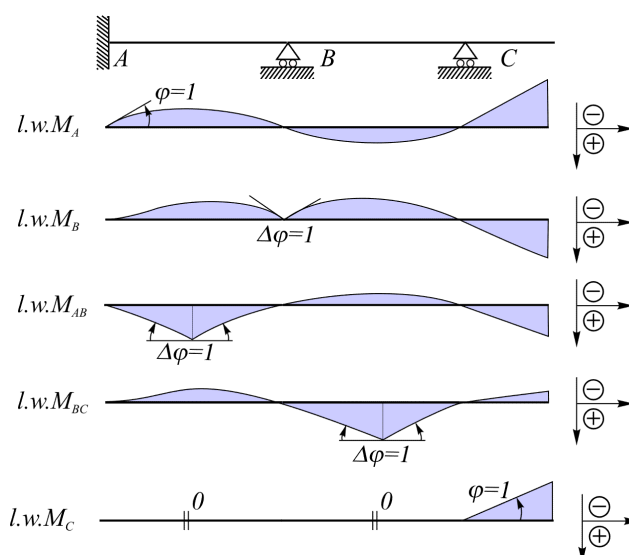
#### 49. Zadanie

Wyznaczyć i narysować obwiednie momentów zginających w belce ciągłej przedstawionej na rysunku 49.1. Założyć, że obciążenie równomiernie rozłożone działa na odcinku (odcinkach) o dowolnej długości.



Rys. 49.1. Dana belka ciągła

Aby określić niekorzystne ustawienia obciążenia ciągłego szkicujemy linie wpływu momentów w przekrojach przęsłowych  $M_{AB}$ ,  $M_{BC}$  oraz momentów w przekrojach podporowych  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$ .

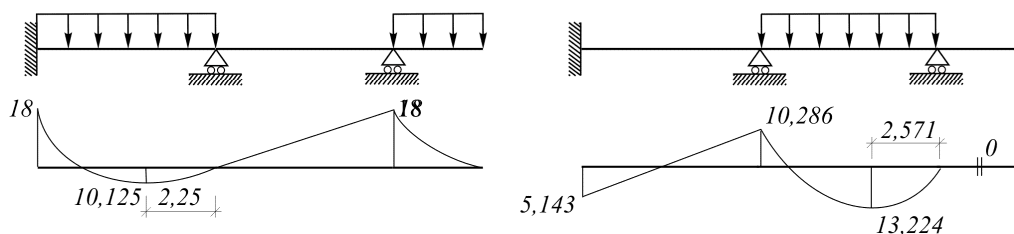


Rys. 49.2. Wykresy (szkice) linii wpływu odpowiednich momentów

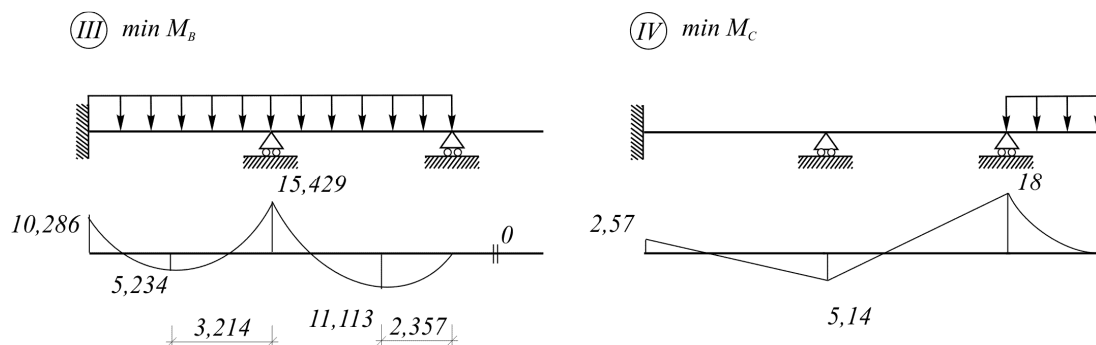
Niekorzystnym ustawieniom obciążenia ciągłego (I), (II), (III) i (IV) odpowiadają ekstremalne wartości momentów w przekrojach przęsłowych lub przekrojach podporowych (uwaga na niniejszym wykresie brak jest proporcji rzędnych, rysunek należy samodzielnie przerysować zachowując proporcje).

(I)  $\max M_{AB}, \min M_{BC}$   
 $\min M_A, \min M_C$

(II)  $\min M_{AB}, \max M_{BC}$   
 $\max M_A$

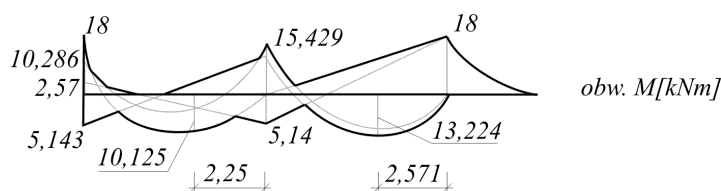


Rys. 49.3. Wykresy momentów zginających w przypadkach obciążeń (I), (II)



Rys. 49.4. Wykresy momentów zginających w przypadkach obciążeń (III), (IV)

Obwiednię otrzymujemy nakładając na siebie poszczególne wykresy od obciążeń (I), (II), (III), (IV)

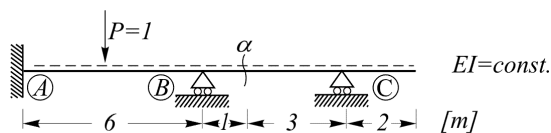


Rys. 49.5. Wynikowa obwiednia momentów zginających

### 50. Zadanie - Wyznaczanie linii wpływu z definicji (zastosowanie metody sił)

Belka przedstawiona na rysunku 50.1 obciążona jest poruszającą się siłą jednostkową.

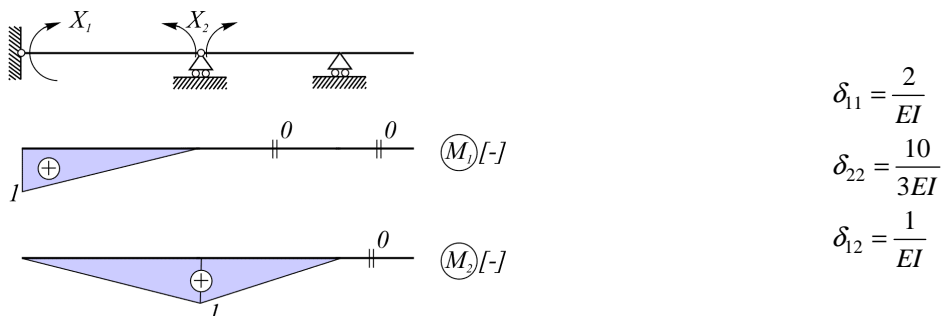
Wyznaczyć linie wpływu momentów przekrojach podporowych  $M_A$  i  $M_B$  oraz  $R_B$ ,  $M_\alpha$ ,  $T_\alpha$ .



Rys.50.1. Dana belka ciągła obciążona obciążeniem ruchomym

Dany układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny  $n_s = 2$ . Usuwając więzy wewnętrzne w przekrojach podporowych (A) i (B) otrzymujemy układ podstawowy metody sił pokazany na rysunku 50.2.

Obliczenie współczynników  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  i  $\delta_{12}$  (nie zależą od obciążenia zewnętrznego).



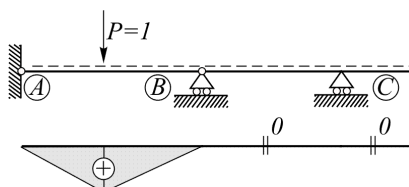
Rys.50.2. Układ podstawowy metody sił (UPMS) oraz wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych

Celem wyznaczenia współczynników  $\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds$  i  $\delta_{20} = \int_L \frac{M_0 M_2}{EI} ds$

należy wyznaczyć momenty zginające  $M_0$ .

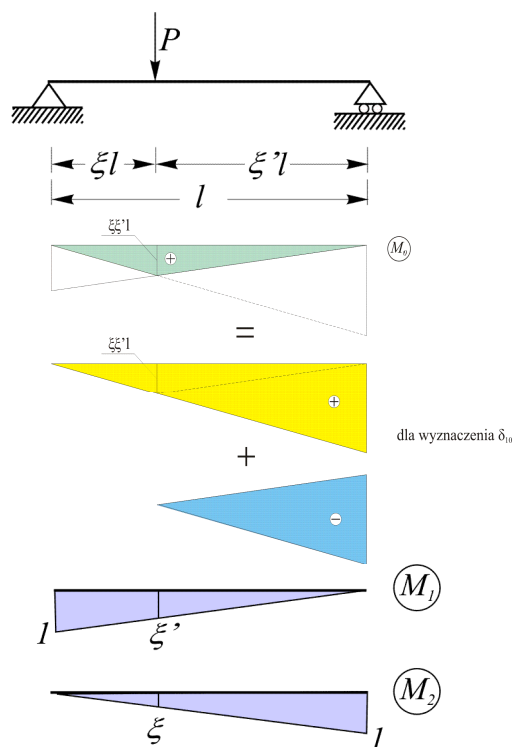
Ze względu na to, że siła skupiona  $P=1$  zmienia swoje położenie, trzeba rozpatrzyć trzy przypadki położenia siły w poszczególnych przedziałach (A-B), (B-C), z prawej strony punktu (C).

1) Siła w przedziale (A-B).



Rys.50.3. Wykres  $M_0$ , siła w przedziale (A-B)

Przypadek ogólny.



Rys.50.4. Wykresy  $M_0$ ,  $M_1$  i  $M_2$  przygotowane do całkowania graficznego

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} l \xi' l \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{2} \xi' l (-\xi' l) \frac{1}{3} \xi' \right] = \frac{l^2}{6EI} (\xi' - \xi'^3),$$

$$\delta_{20} = \int_L \frac{M_0 M_2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} l \xi l \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{2} \xi l (-\xi l) \frac{1}{3} \xi \right] = \frac{l^2}{6EI} (\xi - \xi^3).$$

Wprowadzamy pomocnicze oznaczenia  $\omega_T(\xi) = \xi - \xi^3$ ,  $\omega_T(\xi') = \xi' - \xi'^3$ .

Dzięki czemu otrzymamy

$$\delta_{10} = \frac{l^2}{6EI} \omega_T(\xi'), \quad \delta_{20} = \frac{l^2}{6EI} \omega_T(\xi).$$

Uwzględniając dane liczbowe  $l=6$  [m] otrzymujemy

$$\delta_{10} = \frac{6}{EI} \omega_T(\xi'), \quad \delta_{20} = \frac{6}{EI} \omega_T(\xi).$$

Po rozwiązaniu układu równań kanonicznych metody sił obliczymy

$$X_1 = \frac{18}{17} \omega_T(\xi) - \frac{60}{17} \omega_T(\xi'), \quad X_2 = \frac{-36}{17} \omega_T(\xi) + \frac{18}{17} \omega_T(\xi').$$

2) Siła w przedziale (B-C).

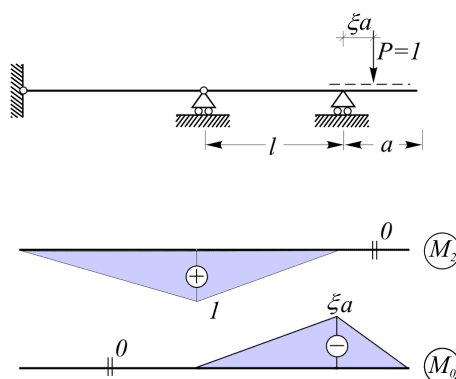
$$\delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = \frac{4^2}{6EI} \omega_T(\xi') = \frac{8}{3EI} \omega_T(\xi').$$

Po rozwiązaniu układu równań kanonicznych metody sił obliczymy

$$X_1 = \frac{18}{17} \omega_T(\xi'), \quad X_2 = \frac{-16}{17} \omega_T(\xi').$$

3) Siła w przedziale z prawej strony punktu (C).

Uwaga:  $M_1 = \text{const} = 0$ .



Rys.50.5. Wykresy  $M_2$  i  $M_0$ ; siła z prawej strony punktu (C)

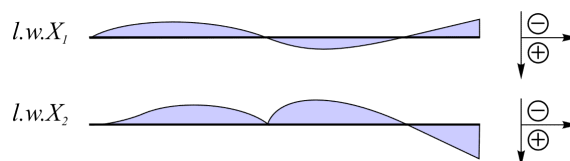
$$\delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\xi a) = -\frac{1}{6EI} \xi l a.$$

Uwzględniając dane liczbowe  $l = 4$  [m],  $a = 2$  [m] otrzymamy  $\delta_{20} = -\frac{4}{3EI} \xi$ .

Po rozwiązaniu układu równań kanonicznych metody sił obliczymy

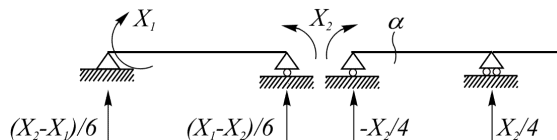
$$X_1 = -\frac{4}{17} \xi, \quad X_2 = \frac{8}{17} \xi.$$

Szkic linii wpływu nadliczbowych przedstawia rysunek 50.6 (wielkości rzędnych na rysunku zostały celowo przeskalowane i nie oddają rzeczywistych proporcji linii ugięć).



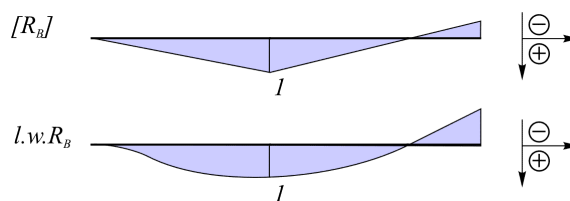
Rys.50.6. Szkic linii wpływu nadliczbowych

Końcowe wykresy linii wpływu otrzymujemy drogą superpozycji dwóch stanów obciążenia działających na UPMS. Działanie wyznaczonych nadliczbowych + bezpośrednie działanie obciążenia  $P = 1$ .

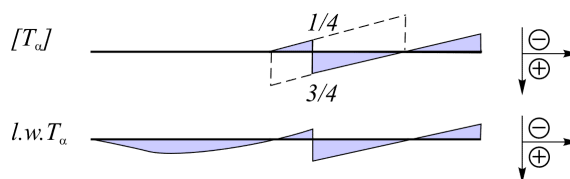


Rys.50.7. Układ podstawowy metody sił (UPMS) obciążony nadliczbowymi

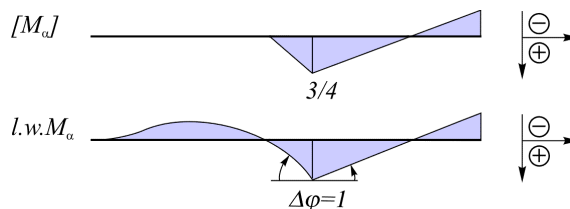
Stąd otrzymujemy  $R_B = \frac{1}{6}X_1 - X_2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) + [R_B]$ ,  $T_\alpha = -\frac{X_2}{4} + [T_\alpha]$ ,  $M_\alpha = \frac{3}{4}X_2 + [M_\alpha]$ .



Rys.50.8. Wyznaczenie (sumowanie) linii wpływu reakcji podpory  $R_B$



Rys.50.9. Wyznaczenie (sumowanie) linii wpływu  $T_\alpha$

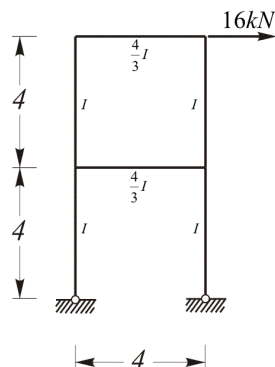


Rys.50.10. Wyznaczenie (sumowanie) linii wpływu  $M_\alpha$

## V. Symetryczne układy prętowe

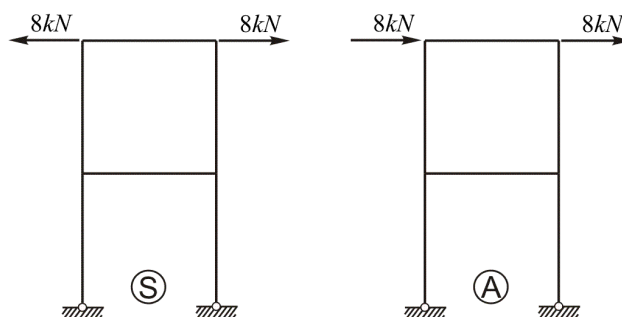
### 51. Zadanie

Dany jest układ ramowy posiadający oś symetrii (symetryczny) przedstawiony na rysunku 51.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .



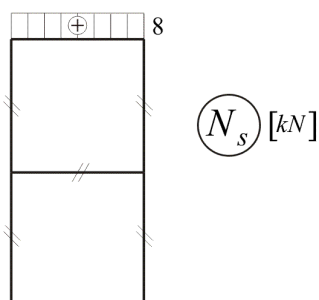
Rys. 51.1. Dany symetryczny układ ramowy z obciążeniem

Obciążenia rozkładamy na składowe obciążenia – część symetryczną (S) i antysymetryczną (A).



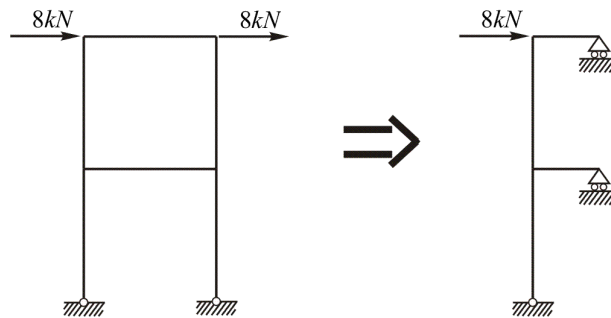
Rys. 51.2. Obciążenie symetryczne i antysymetryczne w sumie dają obciążenie wyjściowe

Obciążenie symetryczne (S) wywołuje jedynie siły normalne w górnym ryglu (obowiązuje założenie o braku odkształcalności podłużnej prętów), można zatem zapisać  $T_S = M_S = 0$ .



Rys. 51.3. Wykres sił normalnych od obciążenia symetrycznego (S)

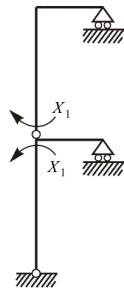
Do analizy wpływu antysymetrycznej części obciążenia (A) przyjmujemy schemat zredukowany. W układzie zredukowanym należy przyjąć warunki brzegowe (podporowe) na osi symetrii układu wyjściowego w taki sposób aby zapewnione były identyczne przemieszczenia (deformacje) w układzie wyjściowym i zredukowanym.



Rys. 51.4. Przyjęcie zredukowanego schematu połowy układu obciążonego obciążeniem antysymetrycznym (A)

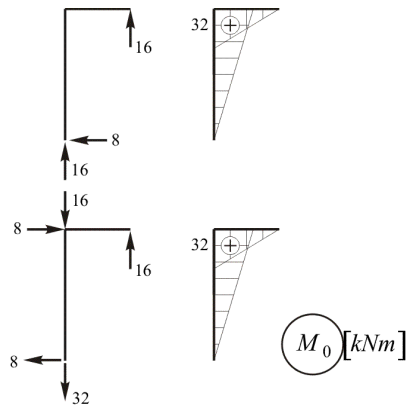
Następnie prowadzimy rozwiązanie układu zredukowanego metodą sił.

Układ podstawowy.



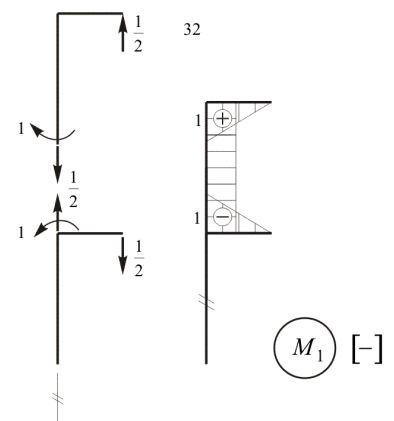
Rys. 51.5. UPMS

Momenty od obc. zewnętrznego.



Rys. 51.6. Stan obc. zewnętrznego

Momenty od obciążenia  $X_1 = 1$ .

Rys. 51.7. Stan obc.  $X_1=1$ 

Całkując graficznie można obliczyć współczynniki równania kanonicznego:

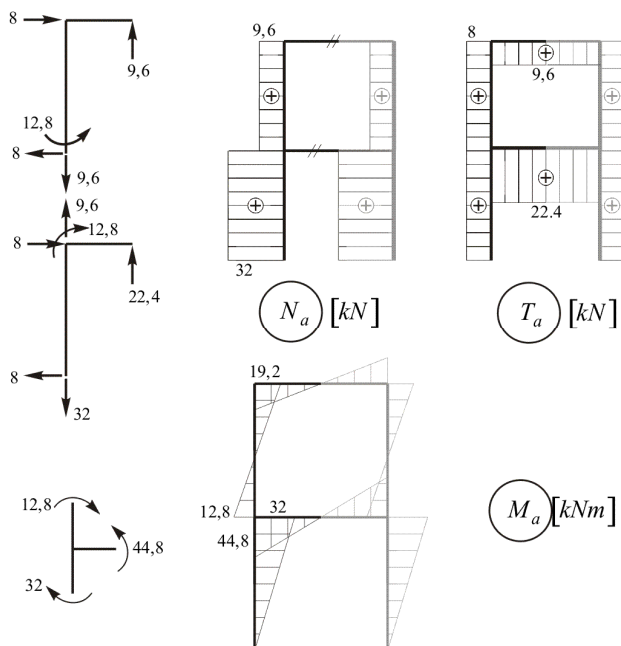
$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{64}{EI},$$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{EI} \cdot (4 + 1) = \frac{5}{EI}.$$

$$\text{Dzięki czemu obliczymy } X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{64}{5} = -12,8 \text{ [kNm]}.$$

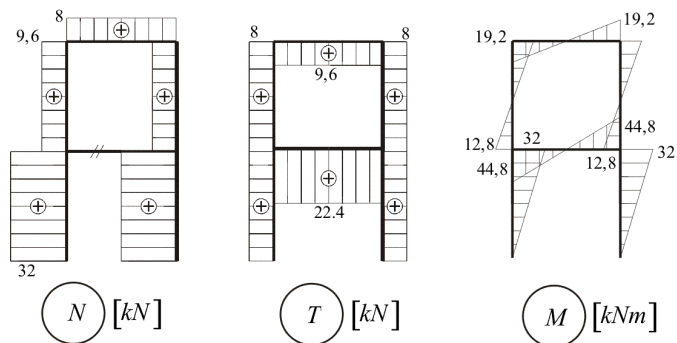


Rozwiązanie od części antysymetrycznej obciążenia (A).



Rys. 51.8. Wyznaczenie wykresów od obciążenia antysymetrycznego (A)

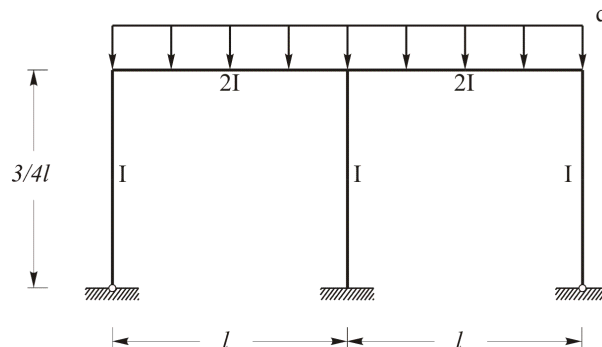
Rozwiązanie – sumaryczne wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 51.9. Końcowe wykresy sił wewnętrznych ((S) + (A))

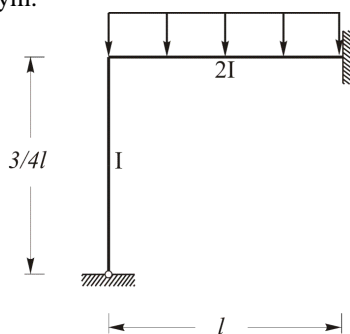
## 52. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 52.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych  $N$ ,  $T$ ,  $M$ .



Rys. 52.1. Dany symetryczny układ prętowy z obciążeniem symetrycznym

Układ prętowy jest symetryczny. Obciążenie jest symetryczne – do dalszej analizy przyjmujemy schemat zredukowany. W układzie zredukowanym należy przyjąć warunki brzegowe (podporowe) na osi symetrii układu wyjściowego w taki sposób aby zapewnione były identyczne przemieszczenia (deformacje) w układzie wyjściowym i zredukowanym.



Rys. 52.2. Układ zredukowany

Rozwiązanie przeprowadzimy metodą przemieszczeń,  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Momenty wyjściowe:

$$M_{1B}^0 = -\frac{ql^2}{12}, \quad M_{B1}^0 = \frac{ql^2}{12}.$$

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{1A} = \frac{3EI}{\frac{3}{4}l} \varphi = \frac{4EI}{l} \varphi,$$

$$M_{1B} = \frac{4E \cdot 2I}{l} \varphi - \frac{ql^2}{12} = \frac{8EI}{l} \varphi - \frac{ql^2}{12}, \quad M_{B1} = \frac{2E \cdot 2I}{l} \varphi + \frac{ql^2}{12} = \frac{4EI}{l} \varphi + \frac{ql^2}{12}.$$

Zapisujemy równanie równowagi

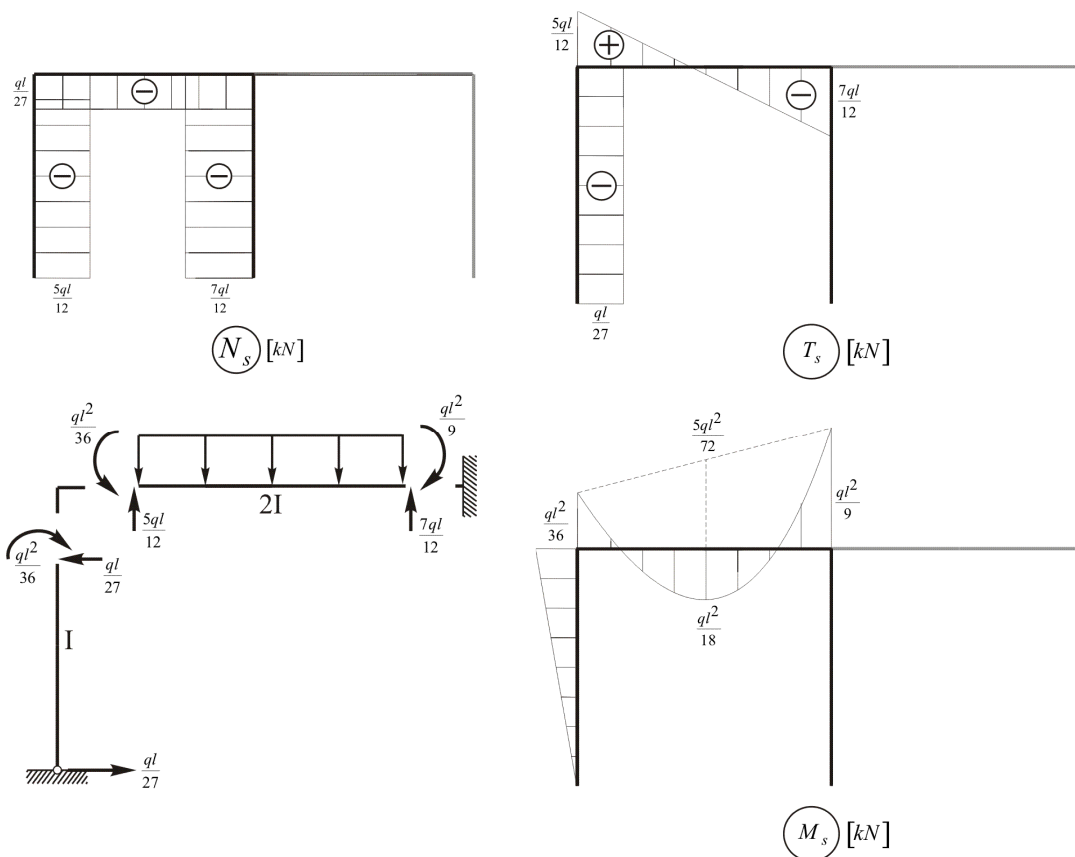
$$\sum M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 0 \Rightarrow \frac{12EI}{l} \varphi - \frac{ql^2}{12} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{ql^3}{144EI}.$$

Wartości momentów przywęzłowych:

$$M_{1A} = \frac{ql^2}{36},$$

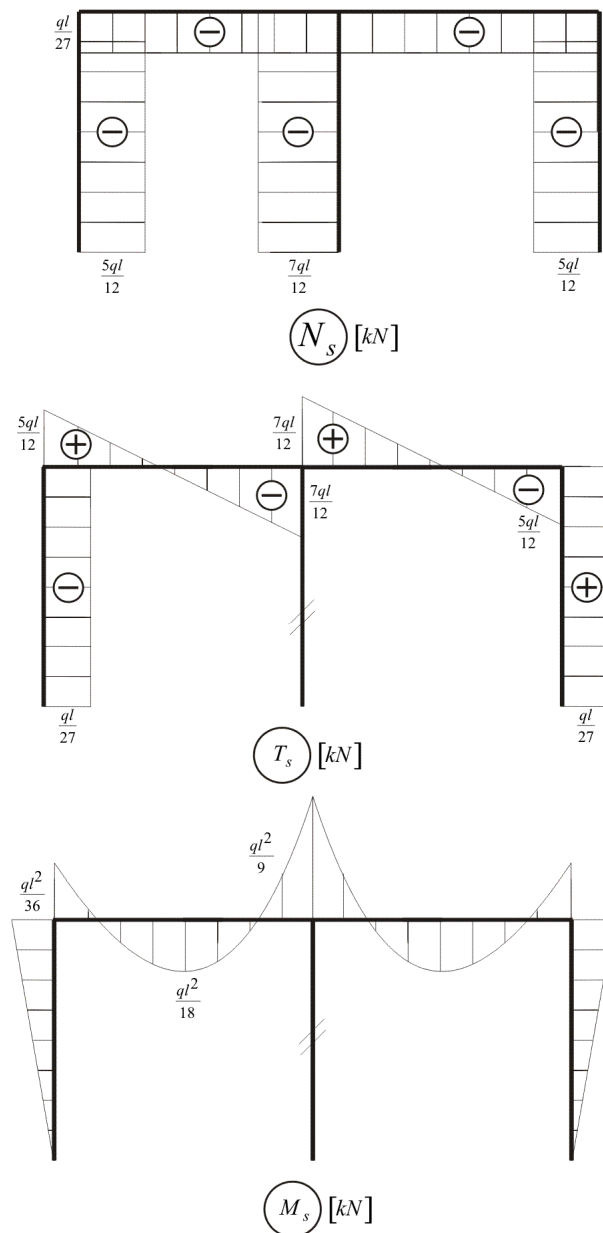
$$M_{1B} = \frac{ql^2}{18} - \frac{ql^2}{12} = -\frac{ql^2}{36}, \quad M_{B1} = \frac{ql^2}{36} + \frac{ql^2}{12} = \frac{ql^2}{9}.$$

Rozwiązanie – wykresy sił wewnętrznych w układzie zredukowanym.



Rys. 52.3. Wyznaczenie wykresów sił wewnętrznych w układzie zredukowanym

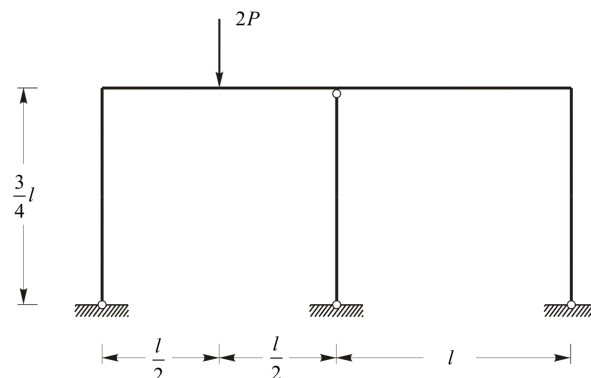
Rozwiązanie układu wyjściowego (całego). Wykres sił normalnych i momentów zginających jest symetryczny (podobnie reakcje) a wykres sił tnących antysymetryczny.



Rys. 52.4. Wykresy sił wewnętrznych w układzie wyjściowym

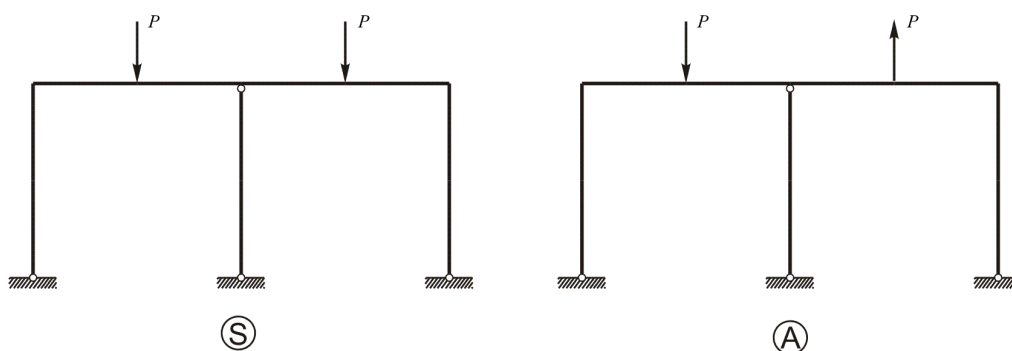
**53. Zadanie**

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 53.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych. Przyjąć  $EI = const$ .



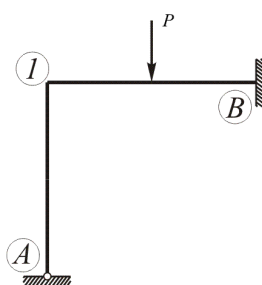
Rys. 53.1. Dany symetryczny układ ramowy z obciążeniem

Rozkład obciążenia na część symetryczną (S) i antysymetryczną (A).



Rys. 53.2. Rozkład obciążenia na symetryczne (S) i antysymetryczne (A)

Obciążenie symetryczne (S) – przyjmujemy schemat zredukowany spełniający warunki przemieszczeniowe na osi symetrii.



Rys. 53.3. Układ zredukowany dla przypadku obciążenia symetrycznego (S)

Rozwiązanie przeprowadzimy metodą przemieszczeń.

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny  $n_g = n_\varphi = 1$ .

Momenty wyjściowe:

$$M_{1B}^0 = -\frac{Pl}{8}, \quad M_{B1}^0 = \frac{Pl}{8}$$

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{1A} = \frac{3EI}{\frac{3}{4}l} \varphi = \frac{4EI}{l} \varphi, \quad M_{1B} = \frac{4EI}{l} \varphi - \frac{Pl}{8}, \quad M_{B1} = \frac{2EI}{l} \varphi + \frac{Pl}{8}$$

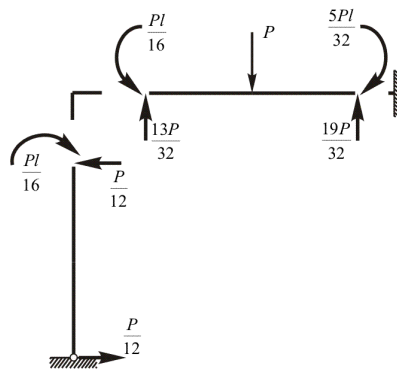
Możemy zapisać równanie równowagi

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 0 \Rightarrow \frac{8EI}{l} \varphi - \frac{Pl}{8} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{Pl^2}{64EI}$$

Wartości momentów przywęzłowych:

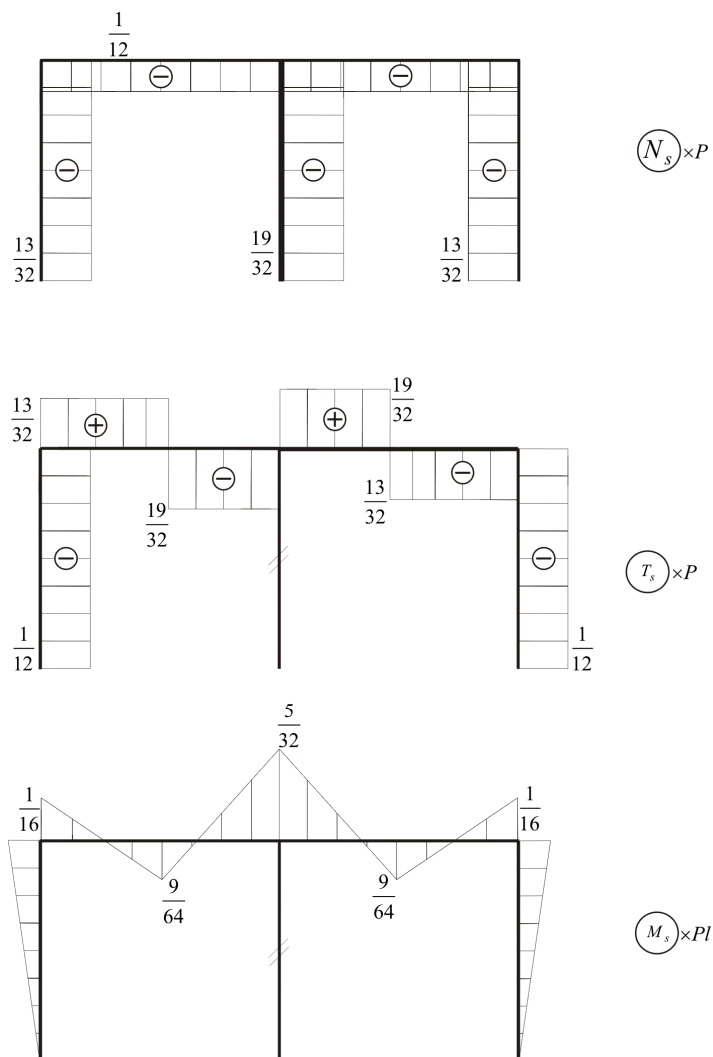
$$M_{1A} = \frac{Pl}{16}, \quad M_{1B} = \frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{16}, \quad M_{B1} = \frac{Pl}{32} + \frac{Pl}{8} = \frac{5Pl}{32}$$

Momenty przywęzłowe zaznaczono na poniższym rysunku.



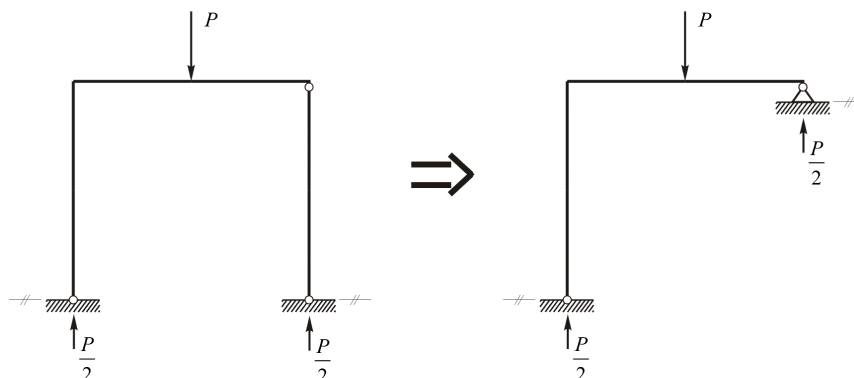
Rys. 53.4. Wyjściowe momenty przywęzłowe wraz z odpowiadającymi siłami tnącymi

Rozwiązanie dla części symetrycznej obciążenia.



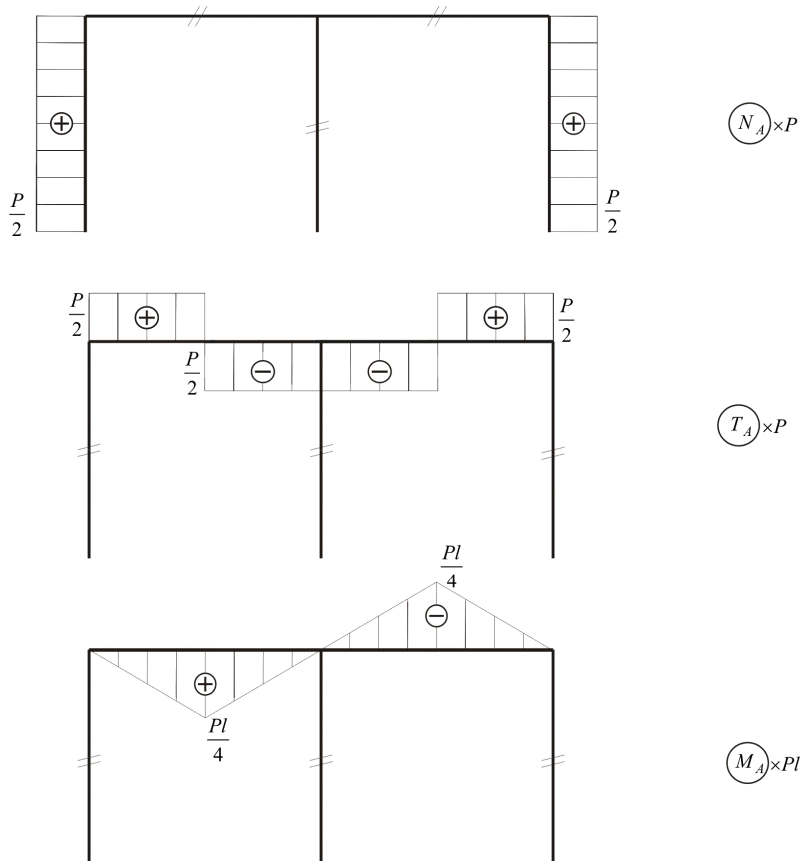
Rys. 53.5. Wykresy sił wewnętrznych w układzie wyjściowym od obciążenia symetrycznego (S)

Obciążenie antysymetryczne (A) – przyjmujemy schemat zredukowany spełniający warunki przemieszczeniowe na osi symetrii. W tym przypadku układ zredukowany jest statycznie wyznaczalny.



Rys. 53.6. Układ zredukowany dla przypadku obciążenia antysymetrycznego (A)

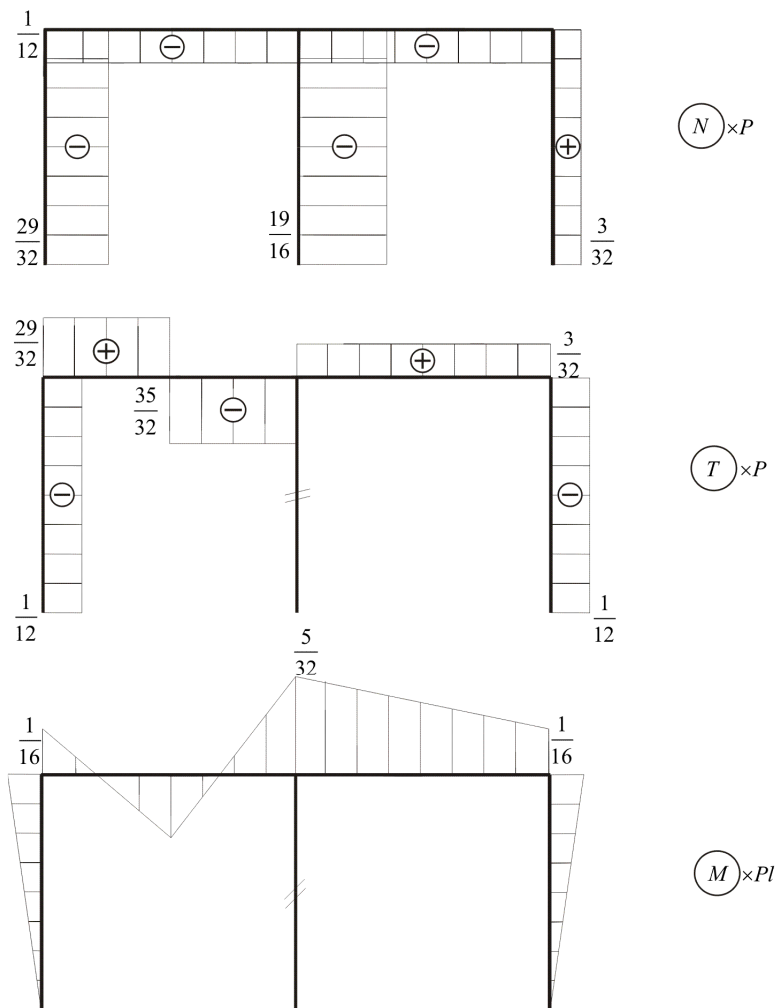
Rozwiązanie od części antysymetrycznej obciążenia (A).



Rys. 53.7. Wykresy sił wewnętrznych w układzie wyjściowym od obciążenia antysymetrycznego (A)



Rozwiązanie końcowe układu od obciążenia wyjściowego (S) + (A).

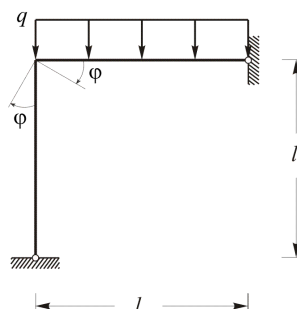


Rys. 53.8. Wykresy sił wewnętrznych w układzie wyjściowym od zadanego obciążenia

## VI. Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych - twierdzenia redukcyjne

### 54. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 54.1. Obliczyć zaznaczony kąt obrotu  $\varphi$ .



Rys. 54.1. Dany układ prętowy z obciążeniem

Układ jest statycznie niewyznaczalny, w rozwiązaniu skorzystamy z twierdzeń redukcyjnych.

**TEORIA**

Przemieszczenia w układach statycznie niewyznaczalnych obliczamy korzystając z twierdzeń redukcyjnych.

I twierdzenie redukcyjne 
$$\delta = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}_P}{EI} ds ;$$

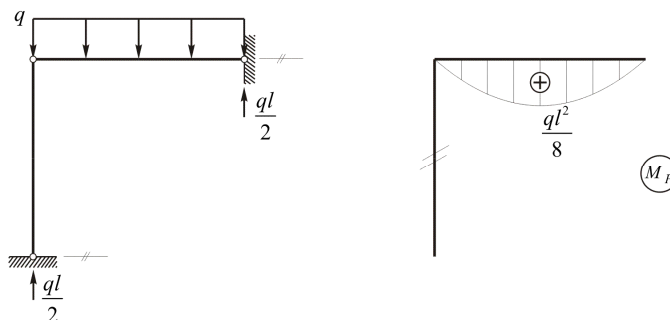
II twierdzenie redukcyjne 
$$\delta = \int_L \frac{M_P \cdot \bar{M}}{EI} ds ;$$

gdzie:

- $M_P$  – stan obciążenia zewnętrznego w układzie podstawowym metody sił,
- $\bar{M}$  – stan jednostkowego obciążenia wirtualnego w układzie statycznie niewyznaczalnym,
- $M$  – stan obciążenia zewnętrznego w układzie statycznie niewyznaczalnym,
- $\bar{M}_P$  – stan jednostkowego obciążenia wirtualnego w układzie podstawowym metody sił

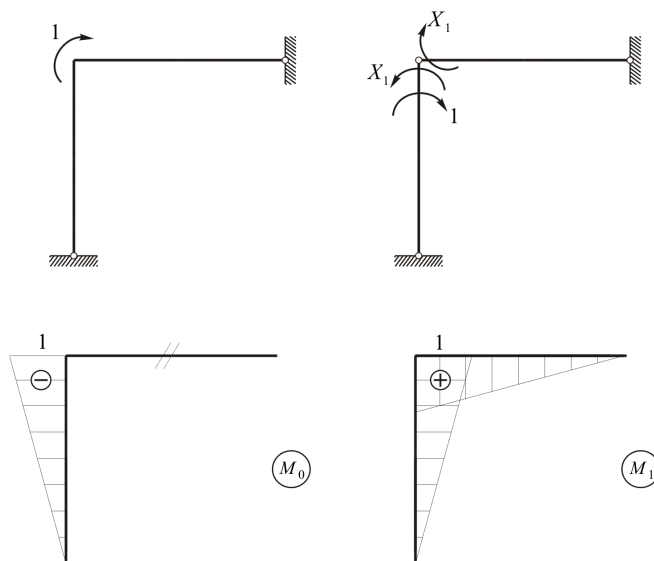
Skorzystamy z II twierdzenia redukcyjnego 
$$\varphi = \int_L \frac{M_P \cdot \bar{M}}{EI} ds .$$

Rozwiązanie  $M_P$  – stan obciążenia zewnętrznego w pewnym ( $P_1$ ) układzie podstawowym metody sił.

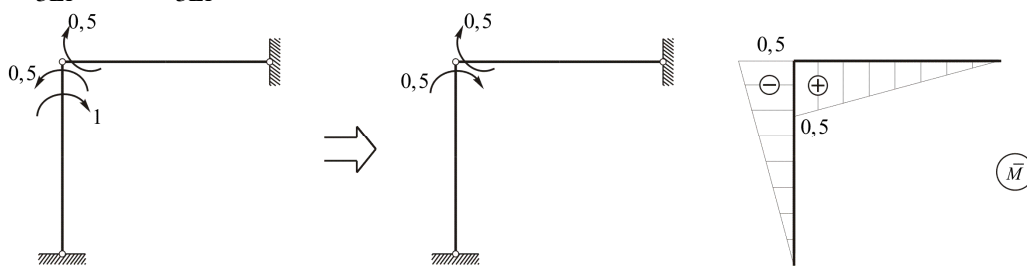


Rys. 54.2. Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego w UPMS (wariant  $P_1$ )

Rozwiązanie  $\bar{M}$  – jednostkowe obciążenie wirtualne w układzie statycznie niewyznaczalnym – zastosujemy rozwiązanie metodą sił.

Rys. 54.3. Rozwiązanie od obciążenia jednostkowego wirtualnego w miejscu i na kierunku  $\varphi$ 

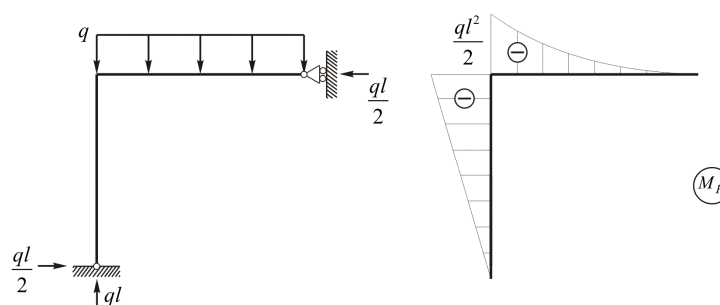
$$\delta_{10} = -\frac{l}{3EI}, \quad \delta_{11} = \frac{2l}{3EI} \Rightarrow X_1 = 0,5 [-]$$



Rys. 54.4. Wyznaczenie wykresu momentów od obciążenia jednostkowego wirtualnego

$$\varphi = \int_L \frac{M_{P_1} \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^3}{48EI}$$

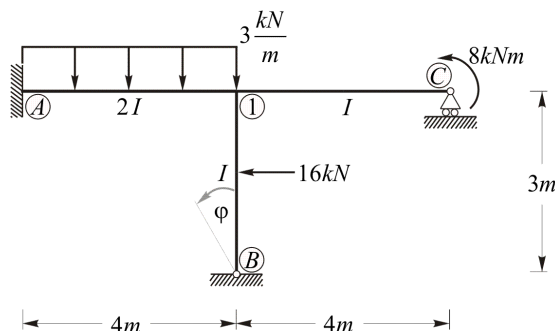
Inny przykładowy układ podstawowy  $P_2$  (ze stanem obciążenia zewnętrznego):

Rys. 54.5. Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego w UPMS (wariant  $P_2$ )

$$\varphi = \int_L \frac{M_{P_2} \cdot \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{ql^3}{EI} \left( -\frac{1}{16} + \frac{1}{12} \right) = \frac{ql^3}{48EI}$$

## 55. Zadanie

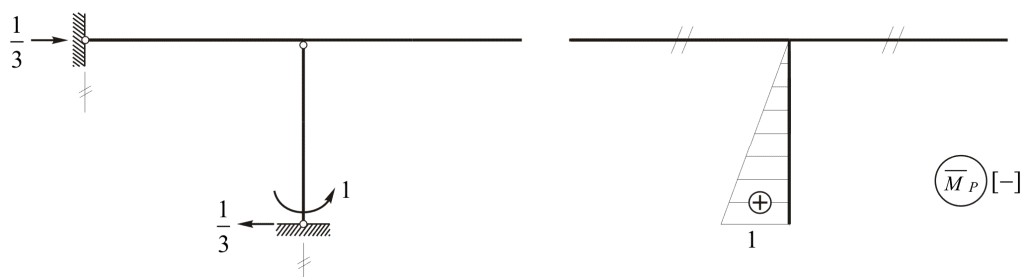
W danym układzie ramowym przedstawionym na rys. 55.1 obliczyć zaznaczony kąt obrotu osi pręta  $\varphi$ .



Rys. 55.1. Dany układ ramowy z obciążeniem

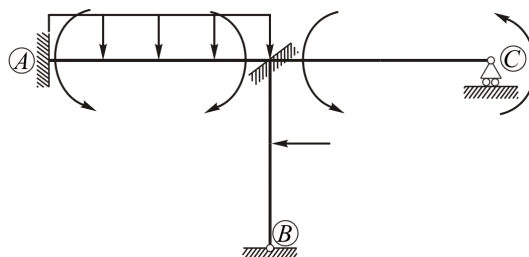
Skorzystamy z I twierdzenia redukcyjnego  $\varphi = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}_P}{EI} ds$ .

Jednostkowe obciążenie wirtualne w układzie podstawowym metody sił – według poniższego rysunku.



Rys. 55.2. Wykres momentów od obciążenia jednostkowego wirtualnego w UPMS

Obciążenie zewnętrzne w układzie niewyznaczalnym – rozwiązanie metodą przemieszczeń ( $n_g = 1$ ).



Rys. 55.3. Metoda przemieszczeń, momenty wyjściowe

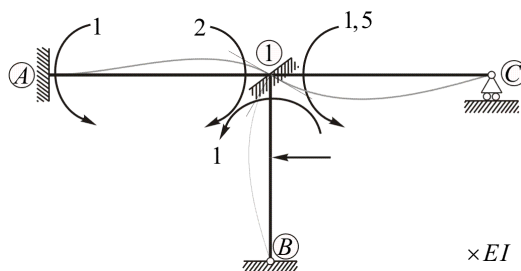
Moment wyjściowy:

$$M_{A1}^0 = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ [kNm]}, \quad M_{1A}^0 = 4 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1B}^0 = -\frac{3}{16} \cdot 16 \cdot 3 = -9 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C}^0 = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4 \text{ [kNm]}.$$

Sumaryczne momenty przywęzłowe.

Rys. 55.4. Metoda przemieszczeń, wymuszenie  $\varphi = 1$ 

$$M_{A1} = -4 + EI\varphi, \quad M_{1A} = 4 + 2EI\varphi,$$

$$M_{1B} = -9 + EI\varphi,$$

$$M_{1C} = -4 + 1,5EI\varphi.$$

Równanie równowagi w węźle (1)

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0 : -9 + 4,5EI\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2}{EI}.$$

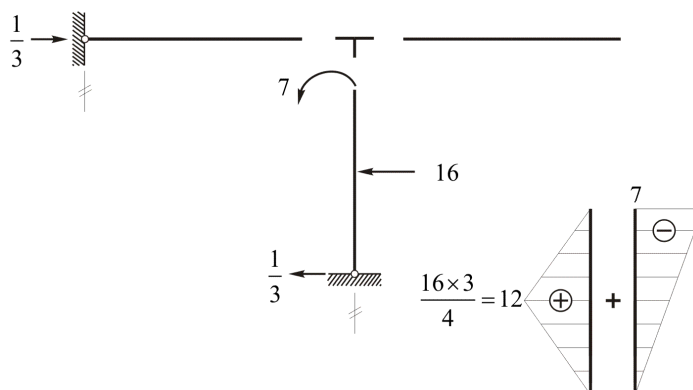
Podstawiając obliczoną wartość  $\varphi$  wyznaczamy wielkości momentów przywęzłowych.

$$M_{A1} = -4 + 2 = -2 \text{ [kNm]}, \quad M_{1A} = 4 + 4 = 8 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1B} = -9 + 2 = -7 \text{ [kNm]},$$

$$M_{1C} = -4 + 3 = -1 \text{ [kNm]}.$$

W dalszej części rozwiązania potrzebny jest jedynie fragment wykresu  $M$  na odcinku (1-B).



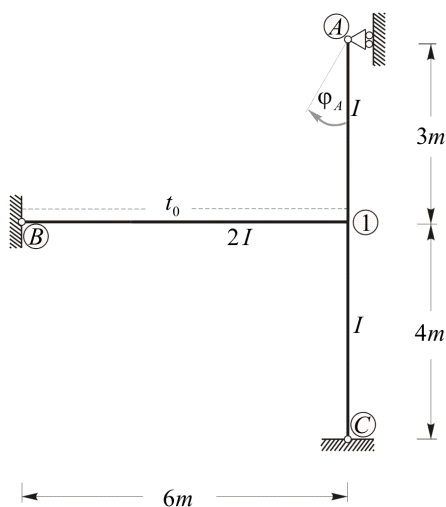
Rys. 55.4. Analiza wykresu momentów na odcinku (1-B)

$$\varphi = \int_L \frac{\bar{M}_p \cdot M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-7) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right] = \frac{5,5}{1000} = 0,0055 \text{ [rad]} = 18'55''$$

## 56. Zadanie

W danym układzie ramowym obliczyć kąt obrotu  $\varphi_A$  wywołany równomiernym ogrzaniem elementu

$$(B-1) \text{ o wielkość } t_0 = 24^\circ C, \quad \alpha_t = 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$$



Rys. 56.1. Dany układ ramowy z obciążeniem temperaturą

Z zasady prac wirtualnych wynika wzór

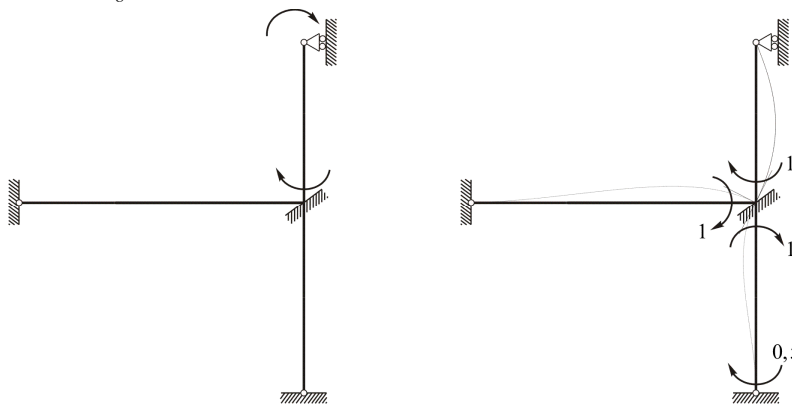
$$\varphi_A = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \int_L \bar{N} \alpha_t t_0 ds.$$

Przy zastosowaniu I twierdzenia redukcyjnego otrzymujemy

$$\varphi_A = \int_L \frac{M_p \cdot \bar{M}}{EI} ds + \int_L \bar{N} \alpha_t t_0 ds = \int_L \bar{N} \alpha_t t_0 ds \quad (M_p = 0).$$

Należy rozwiązać układ wyjściowy (statycznie niewyznaczalny) z obciążony obciążeniem wirtualnym – potrzebna jest jedynie siła normalna  $\bar{N}_{1B}$ .

Metoda przemieszczeń ( $n_g = 1$ )

Rys. 56.2. Metoda przemieszczeń, wirtualne obciążenie jednostkowe w miejscu i na kierunku  $\varphi_A$ 

Moment wyjściowy

$$M_{1A}^0 = 0,5 [-].$$

Sumaryczne momenty przywęzłowe:

$$M_{1A} = 0,5 + EI\varphi,$$

$$M_{1B} = EI\varphi,$$

$$M_{1C} = EI\varphi, \quad M_{C1} = 0,5EI\varphi.$$

Równanie równowagi

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0 \quad ; \quad 0,5 + 3EI\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{1}{6EI}.$$

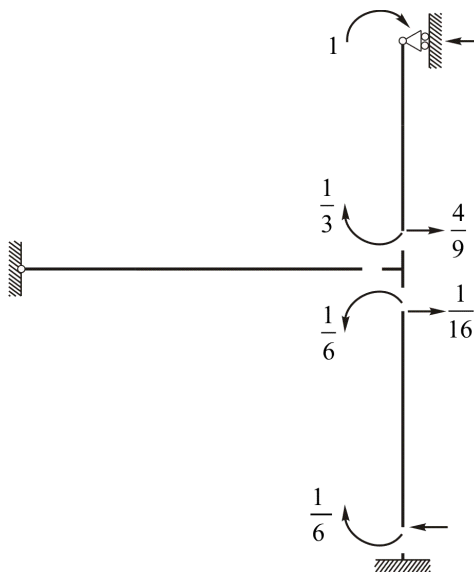
Podstawiając obliczoną wartość  $\varphi$  wyznaczamy wielkości momentów przywęzłowych.

$$M_{1A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} [-],$$

$$M_{1B} = -\frac{1}{6} [-],$$

$$M_{1C} = -\frac{1}{6} [-], \quad M_{C1} = -\frac{1}{12} [-].$$

Rozwiązanie



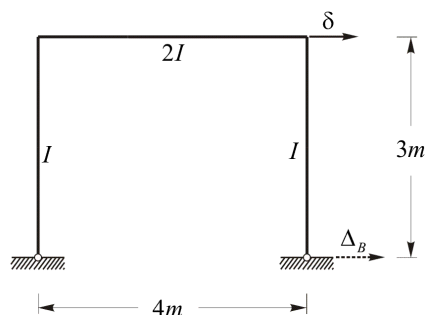
Rys. 56.3. Wyznaczenie siły normalnej w przęciu (B-1)

$$\bar{N}_{1B} = -\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{16}\right) = -\frac{73}{144} = -0,5069 \left[\frac{1}{m}\right]$$

$$\varphi = \int_L \bar{N} \alpha_t t_0 ds = 10^{-5} \cdot 24 \cdot (-0,5069) \cdot 6 = -7,3 \cdot 10^{-3} [\text{rad}] = -25'05''$$

### 57. Zadanie

Obliczyć poziome przemieszczenie  $\delta$  rygła układu ramowego pokazanego na rysunku 57.1. wywołane wymuszeniem kinematycznym – przemieszczeniem podpory  $\Delta_B = 5 [cm]$ .



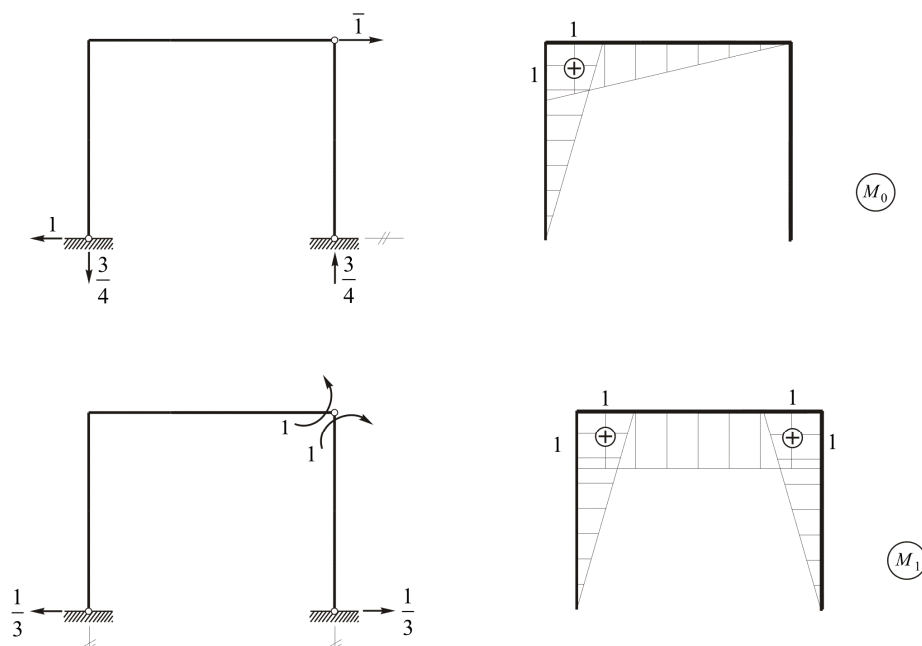
Rys. 57.1. Dany układ ramowy z obciążeniem kinematycznym (przemieszczenie podpory)

$$\delta = \int_L \frac{M_P \cdot \bar{M}}{EI} ds - \sum \bar{R}_i \cdot \Delta_i$$

Stosując II twierdzenie redukcyjne – obciążenie zewnętrzne w układzie podstawowym metody sił, obciążenie wirtualne w układzie niewyznaczalnym powyższy wzór zapiszemy w postaci

$$\delta = -\sum \bar{R}_i \cdot \Delta_i \quad (M_p = M_\Delta = 0).$$

Rozwiązanie od obciążenia wirtualnego w układzie statycznie niewyznaczalnym (należy obliczyć jedynie reakcję  $\bar{H}_B$ ).



Rys. 57.2. Wyznaczenie wykresów momentów

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{6}{EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{EI},$$

stąd



$$X_1 = -1,5 [m].$$

Reakcję  $\bar{H}_B$  wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji

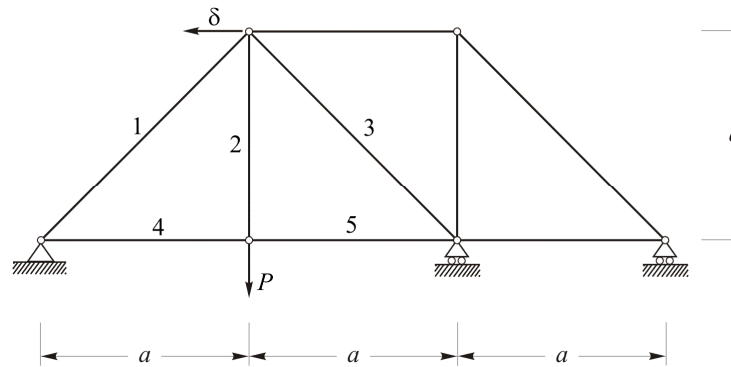
$$\bar{H}_B = 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1,5) = -0,5 [-].$$

Zatem poszukiwane przemieszczenie jest równe

$$\delta = -\bar{H}_B \cdot \Delta_B = -5 [cm] \cdot (-0,5) = 2,5 [cm] = 0,025 [m].$$

### 58. Zadanie

W kratownicy przedstawionej na rys. 58.1. obliczyć przemieszczenie  $\delta$ .  $EA = const.$



Rys. 58.1. Dany układ kratowy z obciążeniem

TEORIA

Wykorzystując II twierdzenie redukcyjne można zapisać

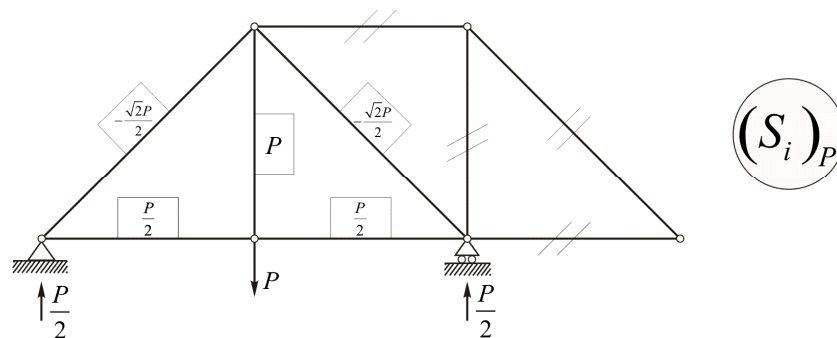
$$\delta = \sum \frac{(S_i)_P \cdot \bar{S}_i \cdot l_i}{EA_i}$$

gdzie:

$(S_i)_P$  – siły w prętach w układzie podstawowym metody sił, obciążenie zewnętrzne,

$\bar{S}_i$  – siły w prętach w układzie niewyznaczalny, obciążenie wirtualne.

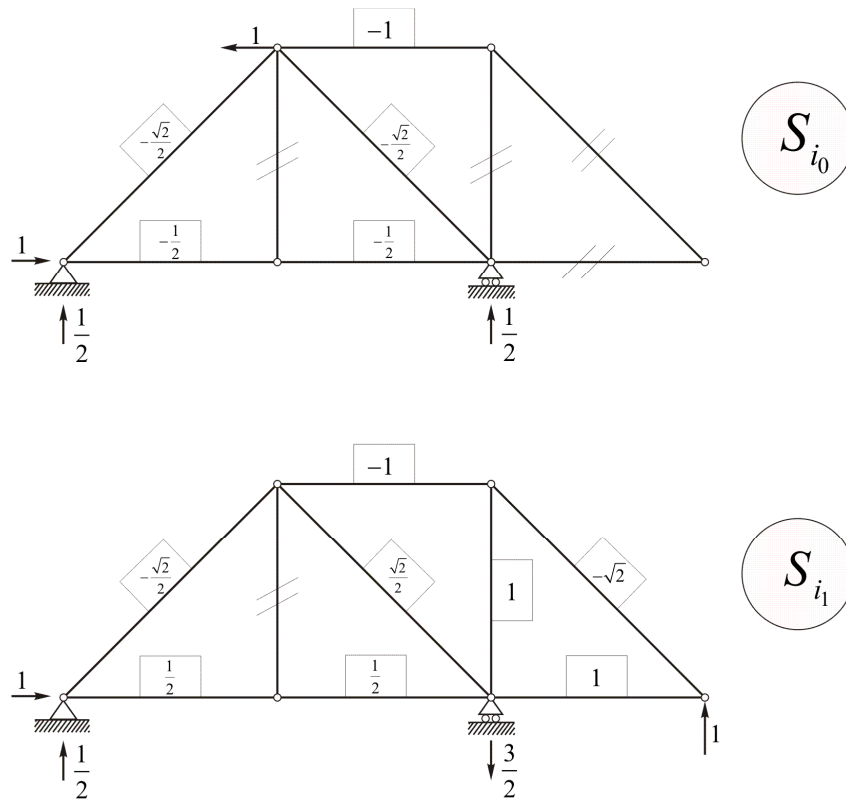
Obciążenie zewnętrzne w układzie podstawowym metody sił.



Rys. 58.2. Siły w prętach w wybranym układzie podstawowym metody sił od obciążenia zewnętrznego

Niezerowe są jedynie pręty 1, 2, 3, 4 i 5.

Obciążenia wirtualne w układzie statycznie niewyznaczalnym.



Rys. 58.3. Rozwiązanie układu statycznie niewyznaczalnego metodą sił

$$\delta_{10} = \sum \frac{S_{i0} S_{i1}}{EA_i} l_i = \frac{1}{EA} \left[ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot a \right] = \frac{a}{EA} \frac{2\sqrt{2}-1}{2},$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{S_{i1} S_{i1}}{EA_i} l_i = \frac{1}{EA} \left[ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right] = \frac{a}{EA} \frac{6\sqrt{2}+7}{2},$$

stąd

$$X_1 = -\frac{2\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}+7} \approx -0,1181.$$

Rozwiązanie uzyskujemy korzystając z zasady superpozycji  $S_i = S_{i0} + S_{i1} \cdot X_1$ :

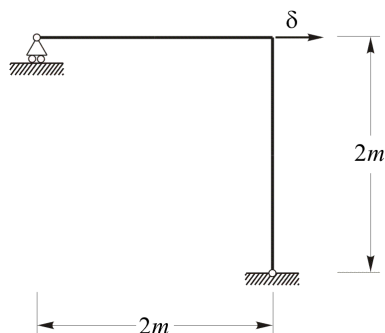
$$\bar{S}_1 = -0,6236, \quad \bar{S}_2 = 0, \quad \bar{S}_3 = 0,6236, \quad \bar{S}_4 = \bar{S}_5 = -0,5591.$$

Zatem poszukiwane przemieszczenie jest równe

$$\delta = \sum \frac{(S_i)_p \bar{S}_i}{EA_i} l_i = \frac{1}{EA} \cdot 2 \cdot \frac{P}{2} \cdot (-0,5591) \cdot a = -0,5591 \frac{Pa}{EA}.$$

**59. Zadanie**

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 59.1. Obliczyć zaznaczone na rysunku przemieszczenie  $\delta$  powstałe pod wpływem nierównomiernego ogrzania prętów układu. Dane:  $\Delta t = t_d - t_g = 32 [^{\circ}C]$ ,  $\alpha_t = 10^{-5} [\text{deg}^{-1}]$ ,  $h = 0,4 [m] = \text{const}$ ,  $EI = \text{const}$ .



Rys. 59.1. Dany układ ramowy z obciążeniem (temperatura)

TEORIA

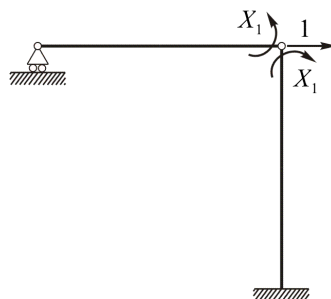
Z zasady prac wirtualnych wynika wzór 
$$\delta = \int_L \bar{M} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds + \int_L \frac{M \bar{M}}{EI} ds .$$

Stosując I twierdzenie redukcyjne można zapisać 
$$\delta = \int_L \bar{M} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds + \int_L \frac{M_p \bar{M}}{EI} ds = \int_L \bar{M} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds .$$

gdyż  $M_p = 0$  (zerowy wpływ temperatury w układzie podstawowym metody sił).

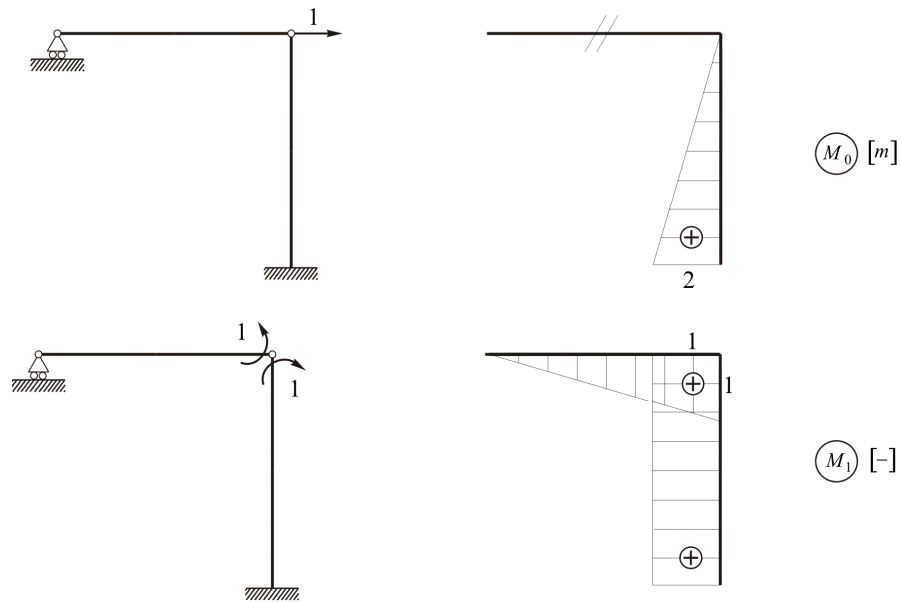
Obciążenia wirtualne przyjmujemy w układzie statycznie niewyznaczalnym.

Metoda sił ( $n_s = 1$ ).



Rys. 59.2. Układ podstawowy metody sił (UPMS) obciążony jednostkowym obciążeniem wirtualnym

Wyznaczenie wykresów momentów  $M_0$  i  $M_1$ .



Rys. 59.3. Wykresy momentów w UPMS

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{EI}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \right] = \frac{8}{3EI},$$

stąd

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{4}.$$

Zatem

$$\int_l \bar{M} ds = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} = -\frac{1}{4},$$

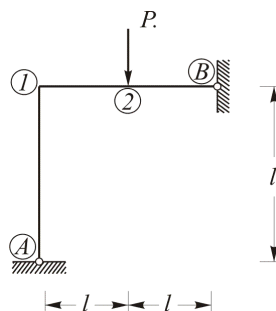
poszukiwane przemieszczenie jest równe

$$\delta = \int_L \bar{M} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds = \frac{10^{-5} \cdot 32}{0,4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \cdot 10^{-4} [m] = -0,02 [cm]$$

## VII. Nośność graniczna

### 60. Zadanie

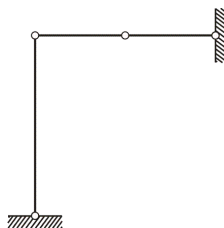
Dany jest układ ramowy przedstawiony na rys. 60.1. Wyznaczyć graniczną wartość obciążenia siłą  $P$ . Narysować wykres momentów zginających w stanie granicznym. Dane  $M_{pl} = const$ .



Rys. 60.1. Dany układ ramowy

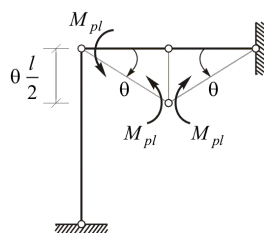
Stosujemy metodę prób kinematycznych.

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny – aby układ przekształcił się w mechanizm muszą powstać dwa przeguby plastyczne. W rozpatrywanym schemacie momenty zginające mogą przyjmować wartości ekstremalne tylko w dwóch przekrojach (1) i (2). Możliwy jest zatem jeden mechanizm zniszczenia.



Rys. 60.2. Mechanizm zniszczenia

Stan przemieszczeń wirtualnych układu w chwili zniszczenia.



Rys. 60.3. Ilustracja równania pracy

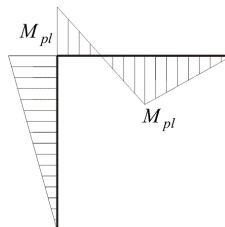
Obciążenie graniczne  $P_{gr}$  wyznaczmy z zasady prac wirtualnych  $L_w = L_z$ , gdzie  $L_w$  – praca sił wewnętrznych (momentów  $M_{pl}$  w przekrojach na końcach prętów) na odpowiednich kątach obrotu w przegubach plastycznych;  $L_z$  – praca obciążeń zewnętrznych na odpowiednich przemieszczeniach.

$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta = 3M_{pl} \cdot \theta,$$

$$L_z = P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2},$$

$$L_w = L_z \Rightarrow 3 \cdot M_{pl} \cdot \theta = P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow P_{gr} = \frac{6M_{pl}}{l}$$

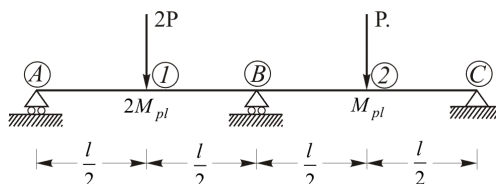
Wykres momentów zginających w granicznym stanie obciążenia.



Rys. 60.4. Wykres momentów w stanie granicznym

### 61. Zadanie

Dana jest belka ciągła przedstawiona na rys. 61.1. Obliczyć graniczną wartość obciążenia  $P$  oraz narysować wykres momentów zginających w stanie granicznym.

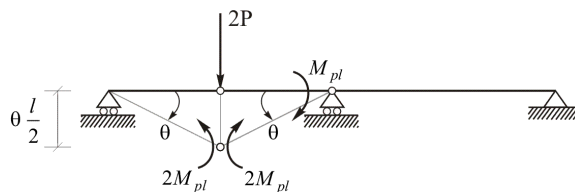


Rys. 61.1. Dana belka ciągła

Stosujemy metodę prób kinematycznych.

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny – przekształcenie go w mechanizm następuje w wyniku powstania dwóch przegubów plastycznych. W rozpatrywanym schemacie momenty zginające mogą przyjmować wartości ekstremalne tylko w trzech przekrojach (1), (B), (2). Możliwe są zatem trzy różne mechanizmy zniszczenia.

Analiza I-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (1) i (B).



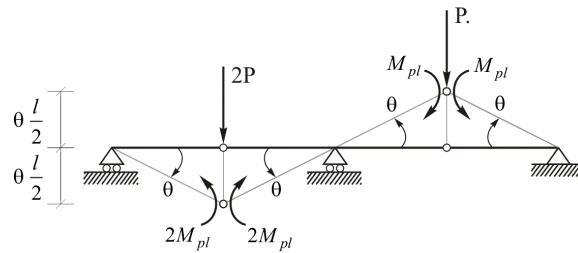
Rys. 61.2. Mechanizm zniszczenia I – ilustracja równania pracy

$$L_w = 2M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta = 5M_{pl} \cdot \theta ,$$

$$L_z = 2P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} = P \cdot \theta \cdot l ,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_I = \frac{5M_{pl}}{l} .$$

Analiza II-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (1) i (2).



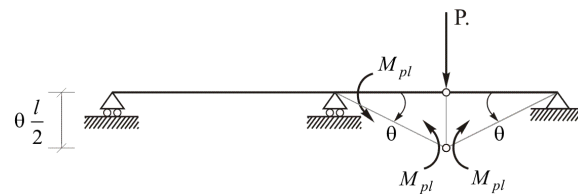
Rys. 61.3. Mechanizm zniszczenia II – ilustracja równania pracy

$$L_w = 2M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta = 6M_{pl} \cdot \theta ,$$

$$L_z = 2P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} = P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} ,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_{II} = \frac{12M_{pl}}{l} .$$

Analiza III-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (B) i (2).



Rys. 61.4. Mechanizm zniszczenia III – ilustracja równania pracy

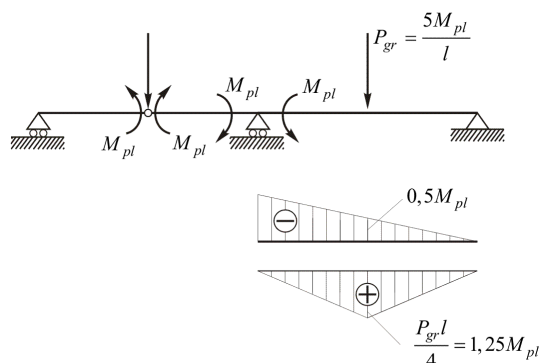
$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta = 3M_{pl} \cdot \theta ,$$

$$L_z = P \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} ,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_{III} = \frac{6M_{pl}}{l} .$$

Obciążeniem granicznym jest minimalna wartość  $P_{gr} = P_I = \frac{5M_{pl}}{l}$ , odpowiada jej pierwszy (I) analizowany mechanizm zniszczenia.

Należy sprawdzić, czy dany mechanizm zniszczenia jest statycznie dopuszczalny – w żadnym przekroju nie może być przekroczona odpowiednia wartość momentu granicznego powodującego uplastycznienie w przekroju.



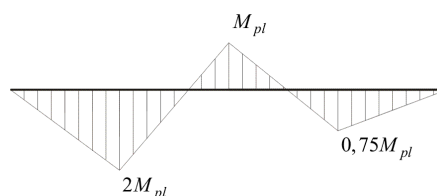
Rys. 61.5. Sprawdzenie statycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia

$$M_2 = -0,5M_{pl} + 1,25M_{pl} = 0,75M_{pl}$$

Ponieważ  $M_2 = 0,75M_{pl} < M_{pl}$

Zatem założony mechanizm zniszczenia jest statycznie dopuszczalny.

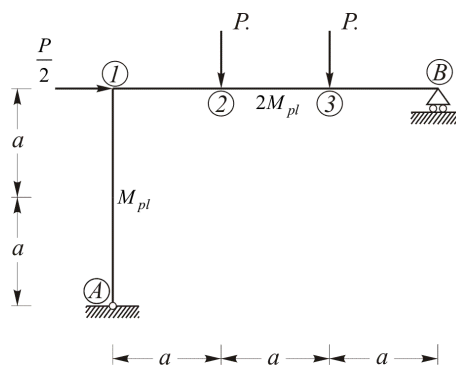
Wykres momentów zginających w granicznym stanie obciążenia.



Rys. 61.6. Wykres momentów w stanie granicznym

## 62. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rys. 62.1. Obliczyć graniczną wartość obciążenia  $P$  oraz sporządzić wykres momentów zginających w stanie granicznym.

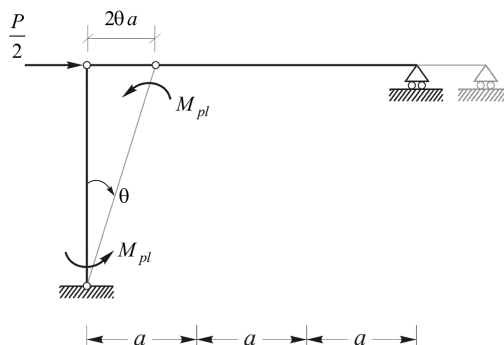


Rys. 62.1. Dany układ ramowy

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny – przekształcenie go w mechanizm następuje w wyniku powstania dwóch przegubów plastycznych. W rozpatrywanym schemacie momenty zginające mogą przyjmować wartości ekstremalne w czterech przekrojach (A), (1), (2), (3). Możliwych jest więc 6 mechanizmów zniszczenia.



Analiza I-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (A) i (1).



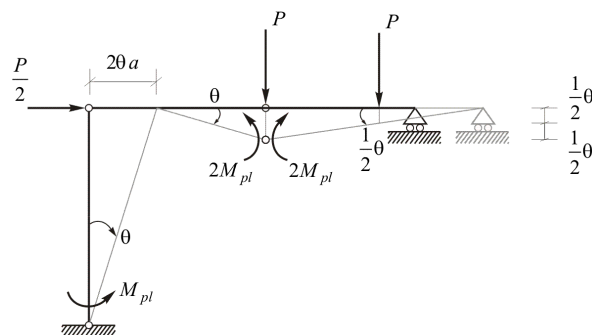
Rys. 62.2. Mechanizm zniszczenia I – ilustracja równania pracy

$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + M_{pl} \cdot \theta = 2M_{pl} \cdot \theta ,$$

$$L_z = \frac{P}{2} \cdot \theta \cdot 2a = P \cdot \theta \cdot a ,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_I = \frac{2M_{pl}}{a} .$$

Analiza II-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (A) i (2).



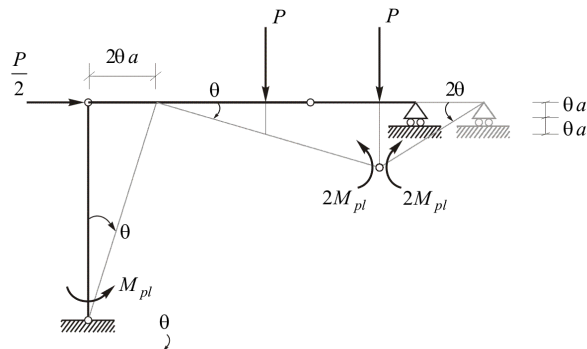
Rys. 62.3. Mechanizm zniszczenia II – ilustracja równania pracy

$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \frac{\theta}{2} = 4M_{pl} \cdot \theta ,$$

$$L_z = \frac{P}{2} \cdot \theta \cdot 2a + P \cdot \theta \cdot a + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot a = \frac{5}{2} P \cdot \theta \cdot a ,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_{II} = 1,6 \frac{M_{pl}}{a} .$$

Analiza III-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (A) i (3).



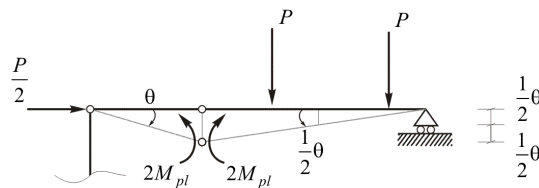
Rys. 62.4. Mechanizm zniszczenia III – ilustracja równania pracy

$$L = M \cdot \theta + 2M \cdot \theta + 2M \cdot 2\theta = 7M \cdot \theta,$$

$$L_z = \frac{P}{2} \cdot \theta \cdot 2a + P \cdot \theta \cdot a + P \cdot 2 \cdot \theta \cdot a = 4P \cdot \theta \cdot a,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_{III} = 1,75 \frac{M_{pl}}{a}.$$

Analiza IV-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (1) i (2).



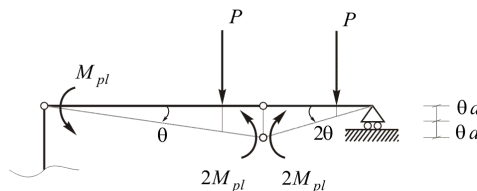
Rys. 62.5. Mechanizm zniszczenia IV – ilustracja równania pracy

$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \frac{\theta}{2} = 4M_{pl} \cdot a,$$

$$L_z = P \cdot \theta \cdot a + P \cdot \frac{1}{2} \theta \cdot a = \frac{3}{2} P \cdot \theta \cdot a,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_{IV} = 2,667 \frac{M_{pl}}{a}.$$

Analiza V-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (1) i (3).



Rys. 62.6. Mechanizm zniszczenia V – ilustracja równania pracy

$$L_w = M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot \theta + 2M_{pl} \cdot 2\theta = 7M_{pl} \cdot \theta,$$

$$L_z = P \cdot \theta \cdot a + P \cdot \theta \cdot 2a = 3P \cdot \theta \cdot a,$$

$$L_w = L_z \Rightarrow P_V = 2,333 \frac{M_{pl}}{a}.$$

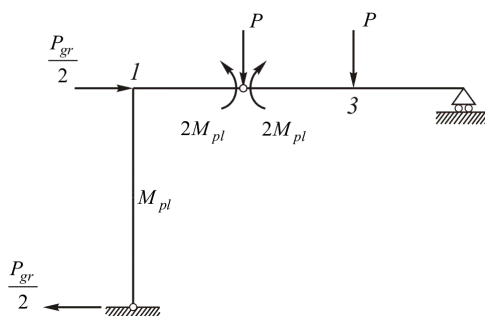
Analiza VI-go mechanizmu zniszczenia – przeguby plastyczne w przekrojach (2) i (3).

*Do samodzielnego opracowania ....*

$$P_{VI} = 6 \frac{M_{pl}}{a}$$

Obciążeniem granicznym będzie więc  $P_{gr} = P_{II} = 1,6 \frac{M_{pl}}{a}$  odpowiada mu drugi (II) mechanizm zniszczenia.

Należy sprawdzić, czy dany mechanizm jest statycznie dopuszczalny – w żadnym przekroju nie może być przekroczona odpowiednia wartość momentu granicznego.



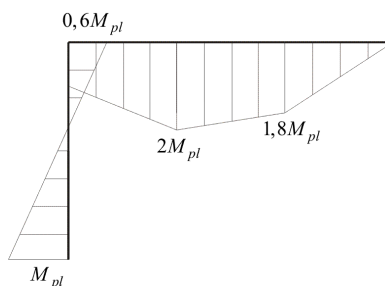
Rys. 62.7. Sprawdzenie statycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia

$$M_1 = \frac{P_{gr}}{2} \cdot 2a - M_{pl} = 0,6 M_{pl},$$

$$M_3 = M_{pl} + P_{gr} \cdot \frac{2a}{4} = 1,8 M_{pl}$$

Ponieważ  $M_1 < M_{pl}$  i  $M_3 < 2M_{pl}$  założony drugi (II) mechanizm zniszczenia jest statycznie dopuszczalny.

Wykres momentów zginających w stanie granicznym.

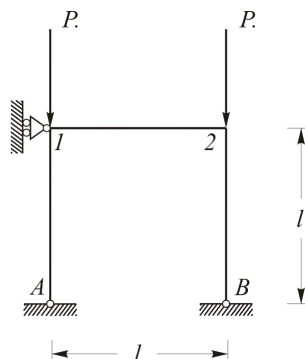


Rys. 62.8. Wykres momentów w stanie granicznym

## VIII. Stateczność

### 63. Zadanie

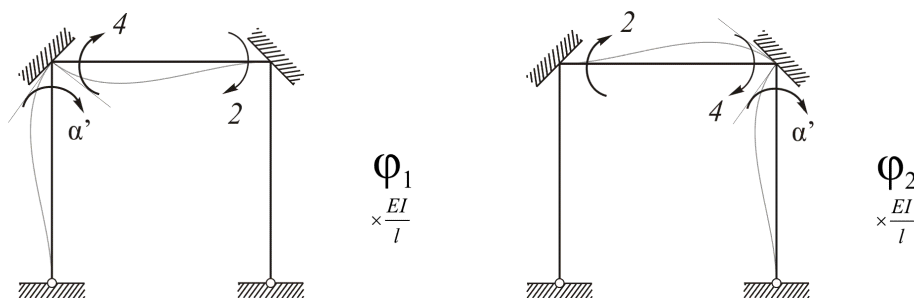
Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 63.1. Obliczyć wartości obciążenia krytycznego  $P_{kr}$  oraz odpowiadające długości wybocheniowe elementów ściskanych. Przyjąć  $EI = \text{const}$ .



Rys. 63.1. Dany układ ramowy

Rozwiązanie metodą przemieszczeń (zakładamy symetryczną postać wyboczenia).

Momenty przywęzłowe wywołane jednostkowymi kątami obrotu  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ .



Rys. 63.2. Momenty przywęzłowe

Z założenia symetrycznej postaci wyboczenia wynika warunek  $\varphi_1 = -\varphi_2$ , wystarczy zapisać jedno równanie równowagi, np. w węźle (1)

$$M_{1A} = \frac{EI}{l} \alpha'(\lambda) \varphi_1, \text{ gdzie } \lambda = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$$

$$M_{12} = \frac{4EI}{l} \varphi_1 + \frac{2EI}{l} \varphi_2 = \frac{2EI}{l} \varphi_1$$

Równanie równowagi w węźle (1)

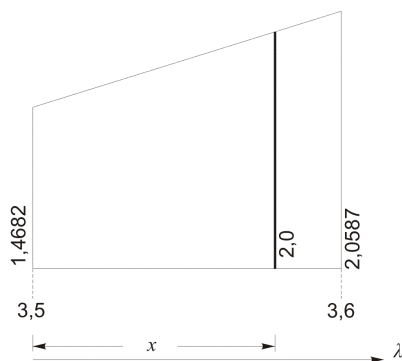
$$\sum M_1 = M_{1A} + M_{12} = 0 \quad : \quad \frac{EI}{l} [\alpha'(\lambda) + 2] \varphi_1 = 0$$

Niezerowe rozwiązanie ( $\varphi_1 \neq 0$ ) dla  $\alpha'(\lambda) = -2$

Przybliżone rozwiązanie – z zastosowaniem tablicy funkcji  $\alpha'(\lambda)$

$$\lambda = 3,5 \Rightarrow \alpha'(\lambda) = -1,4682$$

$$\lambda = 3,6 \Rightarrow \alpha'(\lambda) = -2,0587$$



Rys. 63.3. Liniowa interpolacja

Interpolacja liniowa

$$\frac{2 - 1,4682}{x} = \frac{2,0587 - 1,4682}{0,1}, \quad x = 0,09 \Rightarrow \lambda = 3,59.$$

$$\text{Obciążenie krytyczne } P_{kr} = \lambda^2 \frac{EI}{l^2} = 12,98 \frac{EI}{l^2}.$$

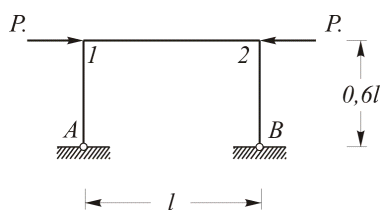
Długość wybocheniowa (efektywna na wybochenia) elementu ściskanego – długość pręta prostego, którego siła krytyczna wg wzoru Eulera równa jest sile w chwili wyboczenia danego elementu ramy.

$$P_{kr} = \lambda^2 \frac{EI}{l_w^2} \Rightarrow l_w = \pi \sqrt{\frac{EI}{P_{kr}}} = \pi l \sqrt{\frac{EI}{P_{kr} l^2}} = \frac{\pi l}{\lambda}$$

$$\text{Dla danych z zadania otrzymujemy } l_{w_{A-1}} = l_{w_{2-B}} = \frac{\pi l}{3,59} = 0,875l.$$

#### 64. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 64.1. Obliczyć krytyczną wartość obciążenia  $P_{kr}$  oraz odpowiadającą długość wybocheniową elementu ściskanego. Założyć symetryczną postać wyboczenia. Przyjąć  $EI = const$ .



Rys. 64.1. Dany układ ramowy

Przy założeniu symetrycznej postaci wyboczenia otrzymujemy  $\varphi_1 = -\varphi_2$  oraz zerową wartość przesuwu elementu (1-2).

W rozwiązaniu metodą przemieszczeń wystarczy zapisać jedno równanie równowagi, np.  $\sum M_1 = 0$ .



Rys. 64.2. Momenty wyjściowe

$$M_{1A} = \frac{3EI}{0,6l} \varphi_1 = \frac{5EI}{l} \varphi_1$$

$$M_{12} = \frac{EI}{l} \alpha(\lambda) \varphi_1 + \frac{EI}{l} \beta(\lambda) \varphi_2 = \frac{EI}{l} [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)] \varphi_1, \quad \lambda = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$$

Równanie równowagi

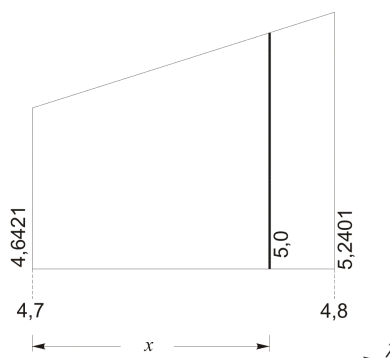
$$\sum M_1 = M_{1A} + M_{12} = 0 \quad : \quad \frac{EI}{l} [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda) + 5] \varphi_1 = 0.$$

Niezerowe rozwiązanie występuje jedynie w przypadku, gdy  $\alpha(\lambda) - \beta(\lambda) = -5$ .

Wykorzystujemy tablice funkcji  $\alpha(\lambda)$  i  $\beta(\lambda)$

$\lambda$	$\alpha(\lambda)$	$\beta(\lambda)$	$\beta(\lambda) - \alpha(\lambda)$
4,7	-0,6582	3,9839	4,6421
4,8	-1,0289	4,2112	5,2401

Z interpolacji liniowej otrzymujemy  $x = 0,06$ , zatem  $\lambda = 4,76$ .



Rys. 64.3. Liniowa interpolacja

Krytyczna wartość obciążenia

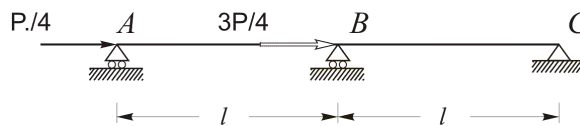
$$P_{kr} = \lambda^2 \frac{EI}{l^2} = 22,66 \frac{EI}{l^2}.$$

Długość wyboczeniowa elementu (1-2)

$$l_w = \frac{\pi l}{\lambda} = \frac{\pi l}{4,76} = 0,66l.$$

## 65. Zadanie

Dana jest belka ciągła przedstawiona na rys. 65.1. Wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia  $P_{kr}$  oraz długości wyboczeniowe elementów ściskanych. Przyjąć  $EI = \text{const}$ .



Rys. 65.1. Dana belka obciążona osiowo

Rozwiązanie metodą przemieszczeń ( $n_g = 1$ ), niewiadomą jest  $\varphi = \varphi_B$ .

Parametry  $\lambda$  każdego z elementów:

$$(A-B) \lambda_1 = \sqrt{\frac{Pl^2}{4EI}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} = \lambda,$$

$$(B-C) \lambda_2 = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} = 2\lambda.$$

Momenty przywęzłowe.

$$M_{BA} = \frac{EI}{l} \alpha'(\lambda)\varphi, \quad M_{BC} = \frac{EI}{l} \alpha'(2\lambda)\varphi$$

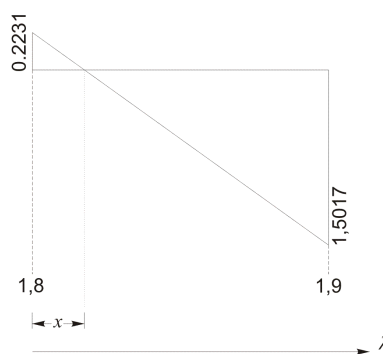
Równanie równowagi.

$$\Sigma M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad : \quad \frac{EI}{l} [\alpha'(\lambda) - \alpha'(2\lambda)]\varphi = 0.$$

Niezerowe rozwiązanie jest możliwe jedynie w przypadku, gdy  $\alpha'(\lambda) + \alpha'(2\lambda) = 0$ .

$\lambda$	$\alpha'(\lambda)$	$\alpha'(2\lambda)$	$\alpha'(\lambda) + \alpha'(2\lambda)$
1,8	2,2818	-2,0587	0,2231
1,9	2,1891	-3,6908	-1,5017

Z interpolacji liniowej otrzymujemy  $\lambda = 1,81$ .



Rys. 65.2. Liniowa interpolacja

Obciążenie krytyczne

$$P_{kr} = 4\lambda^2 \frac{EI}{l^2} = 13,104 \frac{EI}{l^2}.$$

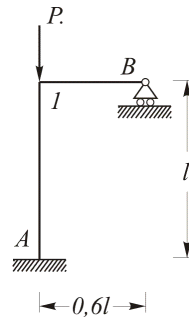
Długości wyboczeniowe elementów:

$$(A-B) l_{w1} = \frac{\pi l}{\lambda} = \frac{\pi l}{1,81} = 1,736l,$$

$$(B-C) l_{w2} = \frac{\pi l}{2\lambda} = \frac{\pi l}{3,62} = 0,868l.$$

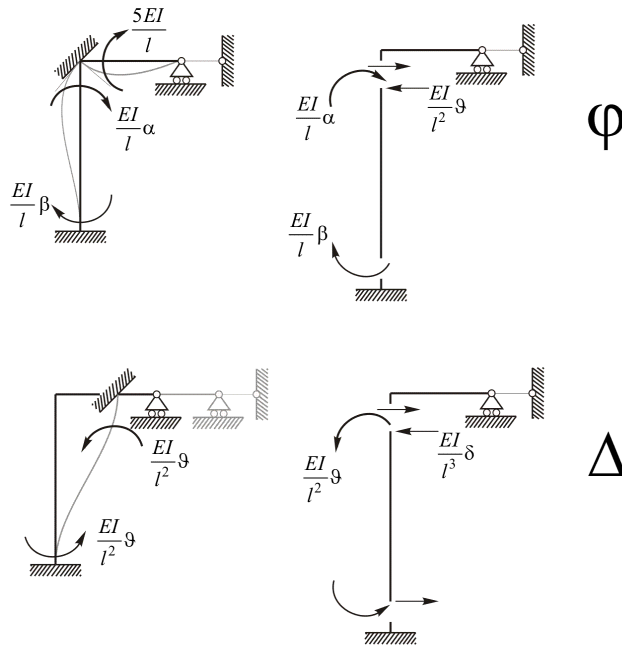
## 66. Zadanie

Dany jest układ ramowy przedstawiony na rysunku 66.1. Obliczyć krytyczną wartość obciążenia  $P_{kr}$  oraz odpowiadającą długość wyboczeniową elementu ściskanego.



Rys. 66.1. Dany układ ramowy

Rozwiązanie metodą przemieszczeń,  $n_g = n_\varphi + n_\Delta = 1 + 1 = 2$ .



Rys. 66.2. Siły wyjściowe (momenty i tnące)

Momenty przywęzłowe (gdy  $\lambda = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$ ):

$$M_{1A} = \frac{EI}{l} \alpha(\lambda) \varphi - \frac{EI}{l} v(\lambda) \Delta, \quad M_{1B} = \frac{3EI}{0,6l} \varphi = \frac{5EI}{l} \varphi.$$

Równania równowagi:

$$\Sigma M_1 = M_{1A} + M_{1B} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{l} [\alpha(\lambda) + 5] \varphi - \frac{EI}{l^2} v(\lambda) \Delta = 0,$$

$$\Sigma T_{1A} = 0 \Rightarrow -\frac{EI}{l^2} v(\lambda) \varphi + \frac{EI}{l^3} \delta(\lambda) \Delta = 0,$$



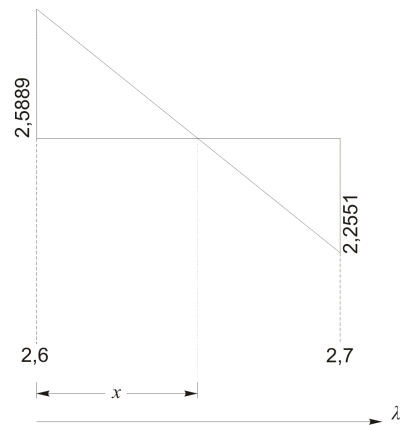
$$\begin{bmatrix} \frac{EI}{l}[\alpha(\lambda)+5] & -\frac{EI}{l^2}v(\lambda) \\ -\frac{EI}{l^2}v(\lambda) & \frac{EI}{l^3}\delta(\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$K(\lambda)$

Aby istniało niezerowe rozwiązanie musi zachodzić warunek  $\det K(\lambda) = 0$ .

$$\frac{(EI)^2}{l^4} \{ [\alpha(\lambda)+5]\delta(\lambda) - v^2(\lambda) \} = 0, \quad f(\lambda) = [\alpha(\lambda)+5]\delta(\lambda) - v^2(\lambda) = 0$$

$\lambda$	$f(\lambda)$
2,6	2,5889
2,7	-2,2551



Rys. 66.3. Liniowa interpolacja

Z interpolacji liniowej otrzymujemy  $\lambda = 2,65$ .

$$\text{Obciążenie krytyczne } P_{kr} = \lambda^2 \frac{EI}{l^2} = 7,023 \frac{EI}{l^2}.$$

$$\text{Długość wybocheniowa elementu ściskanego } l_w = \frac{\pi l}{\lambda} = 1,186 \cdot l.$$

NOTATKI