

Aeroelastyczność i wytrzymałość turbin wiatrowych

Dr hab. Inż. Paweł Dymarski

Zakład Hydromechaniki i Hydroakustyki Okrętu
Instytut Oceanotechniki i Okrętownictwa (WIMiO)

Pokój **331A**, (III piętro, skrzydło budynku)

Konsultacje: czwartek 9:00 – 11:00

Zaliczenie wykładu:

Kolokwium zaliczeniowe, próg zaliczenia: 60% (+opcjonalnie kartkówka)

(Obecność na wykładzie oraz obecność na ćwiczeniach jest obowiązkowa)

Forma kontaktu z prowadzącym

- Komunikacja z zasady powinna się odbywać za pośrednictwem Starosty
- Istnieje możliwość dyskusowania spraw organizacyjnych na zajęciach (a najlepiej przed lub po zajęciach)
- Proszę unikać indywidualnych kontaktów za pośrednictwem poczty elektronicznej (w większości przypadków taki kontakt nie ma uzasadnienia)

Spis treści

1. Teoria profilu aerodynamicznego

1.1 Opis geometryczny

1.2 Siła nośna, siła oporu, moment na profilu (2D)

1.3 Współczynnik ciśnienia C_p , rozkład ciśnienia

1.4 Mechanizm powstawania siły nośnej, równanie Kутty-Żukowskiego

2. Teoria płata nośnego (skrzydła)

2.1 Opis geometryczny płata

2.2 Siła nośna na płacie (3D)

3. Analiza numeryczna płata

3.1 Układ włókien wirowych na i za płatem

3.2 Teoria linii nośnej

4. Płat jako belka zginana

4.1 Powtórka podstawowych wiadomości

4.1.1 Charakterystyki przekroju poprzecznego belki

4.1.2 Podstawowe rozwiązania dla belki zginanej.

4.3 Sztywność belki

4.4 Równanie ugięcia belki

4.5 Macierz sztywności

4.6 Aeroelastyczność: przypadek statyczny – zginanie płata

5. Płat jako belka skręcana

5.1.1 Charakterystyki przekroju poprzecznego płata jako belki o profilu zamkniętym (skręcanie)

5.1.2 Podstawowe rozwiązania dla belki skręcanej

5.2 Aeroelastyczność: przypadek statyczny – skręcanie

Spis treści

6. Wstęp do dynamiki płata

6.1 Dynamika układu o jednym stopniu swobody. Układ masa na sprężynie

6.2 Dynamika układu o wielu stopniach swobody. Model mas skupionych (punktowych)

7. „Rzeczywiste” pole prędkości opływanej łopaty turbiny wiatrowej.

7.1 Określanie pola prędkości wybranego profilu łopaty turbiny. Przypadek stacjonarny

7.2 Określanie niestacjonarnego pola prędkości wybranego profilu łopaty turbiny dla stacjonarnego profilu prędkości wiatru.

7.3 Przypadek niestacjonarnego pola prędkości wiatru.

7.3.1 Widmo wiatru

7.3.2 Wyznaczanie niestacjonarnego pola prędkości wybranego profilu łopaty turbiny.

8. Podstawy analizy płata w dziedzinie częstości

9. Dynamika układu wirnik turbiny – wieża. Wprowadzenie.

Literatura

1. Snorri Gudmundsson: „**GENERAL AVIATION AIRCRAFT DESIGN: APPLIED METHODS AND PROCEDURES**”. Amsterdam, Elsevier 2014
2. Ira H. Abbott, Albert E. Von Doenhoff “**THEORY OF WING SECTIONS Including a Summary of Airfoil Data**”. DOVER PUBLICATIONS, INC., NEW YORK 1949, 1959
3. Zbigniew Brzoska: “**Wytrzymałość materiałów**”. Warszawa, PWN 1972
4. Ryszard Gryboś: “**Podstawy mechaniki płynów**”. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1998
5. Martin O. L. Hansen: “**Aerodynamics of Wind Turbines**” 2nd ed. London * Sterling, Earthscan, 2008
6. James F. Wilson: „Dynamics of Offshore Structures” 2nd ed. John Wiley & Sons 2003
7. Dewey H. Hodges, G. Alvin Pierce: „**Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**”. Cambridge University Press 2002, 2011
8. Srinivasan Chandrasekaran: „**Dynamic Analysis and Design of Offshore Structures**”. Springer 2015, 2018

Wprowadzenie

Co to jest aeroelastyczność? [<https://en.wikipedia.org/wiki/Aeroelasticity>]

Aeroelastyczność to dziedzina fizyki i inżynierii badająca interakcje między siłami bezwładności, sprężystości i aerodynamicznymi zachodzącymi, gdy ciało sprężyste jest wystawione na przepływ płynu. Badanie aeroelastyczności można ogólnie podzielić na dwie dziedziny: aeroelastyczność statyczna zajmująca się statyczną lub ustaloną reakcją elastycznego ciała na przepływ płynu; oraz dynamiczna aeroelastyczność związana z dynamiczną (zazwyczaj wibracyjną) reakcją ciała.

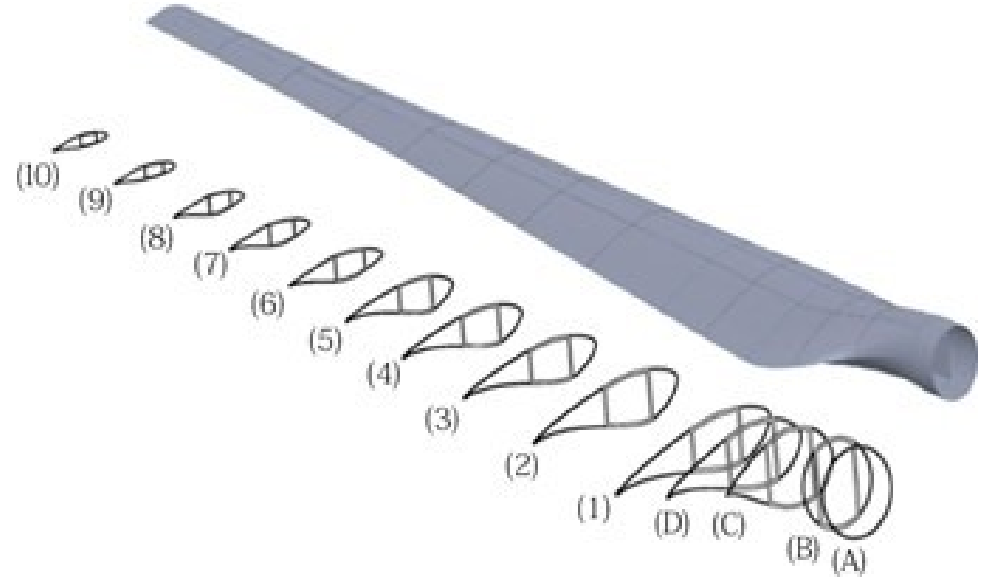
Problemom aeroelastyczności można zapobiec poprzez dostosowanie masy, sztywności lub aerodynamiki konstrukcji, które można określić i zweryfikować za pomocą obliczeń i testów drgań.

Teoria profilu aerodynamicznego

Wprowadzenie. Łopata turbiny

Łopata turbiny to promieniowy płat, połączony z piastą, znajdujący się w tak zwanym dysku turbiny. Na łopacie turbiny wytwarzana jest aerodynamiczna siła styczna (obwodowa), która obraca wirnik turbiny. Wirnik turbiny wiatrowej posiada zwykle kilka łopat.

Geometrię łopaty turbiny opisuje się za pomocą odpowiednio rozmieszczonych profili aerodynamicznych.



Rys. 1. Szkic opisu geometrycznego łopaty turbiny wiatrowej [Sheibani,Akbari (2015)]

Teoria profilu aerodynamicznego

Geometria płata. Podstawowe pojęcia [<https://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>]

kąt natarcia

α



krawędź natarcia

maks. grubość

strzałka ugięcia

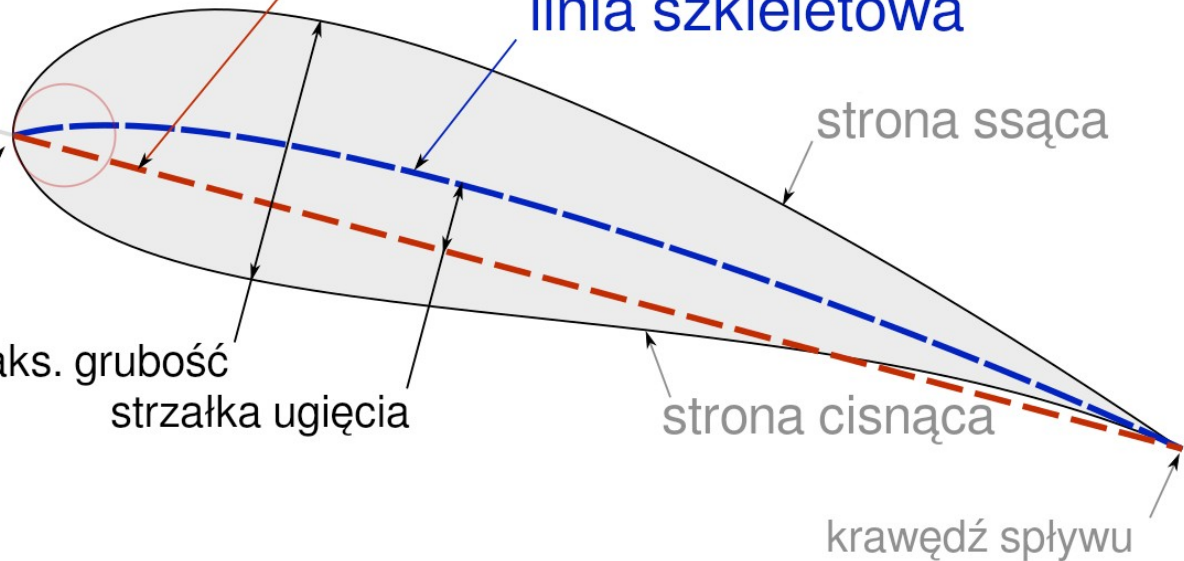
cięciwa

linia szkieletowa

strona ssąca

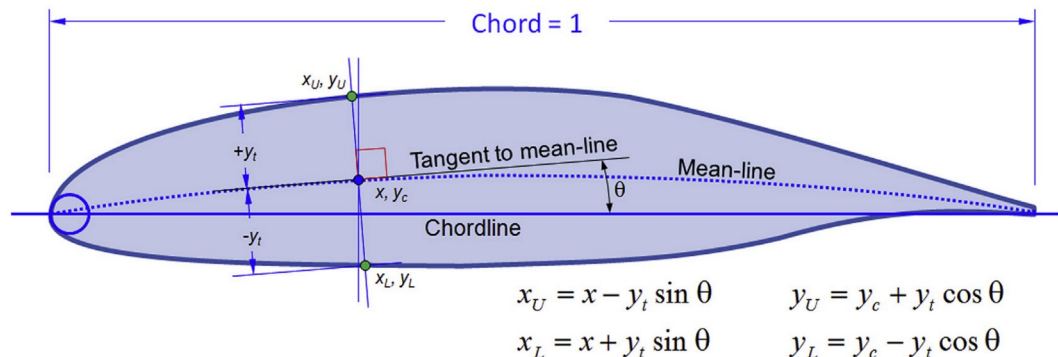
strona cisnąca

krawędź spływu



Teoria profilu aerodynamicznego

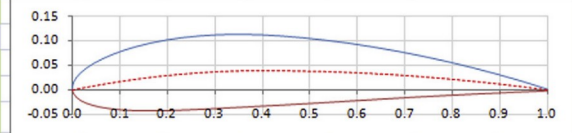
Geometria płata. Opis geometrii profilu na przykładzie profilu NACA 4-cyfrowego [Gudmundsson (2014)]



NACA (ang. National Advisory Committee for Aeronautics) – amerykański komitet doradczy do spraw aeronautyki powołany 3 marca 1915 roku w celu prowadzenia, wspierania i promowania prac badawczych z dziedziny aeronautyki. Z dniem 1 października 1958 roku komitet ten został rozwiązany, a jego struktury stały się częścią nowo utworzonej **NASA**.

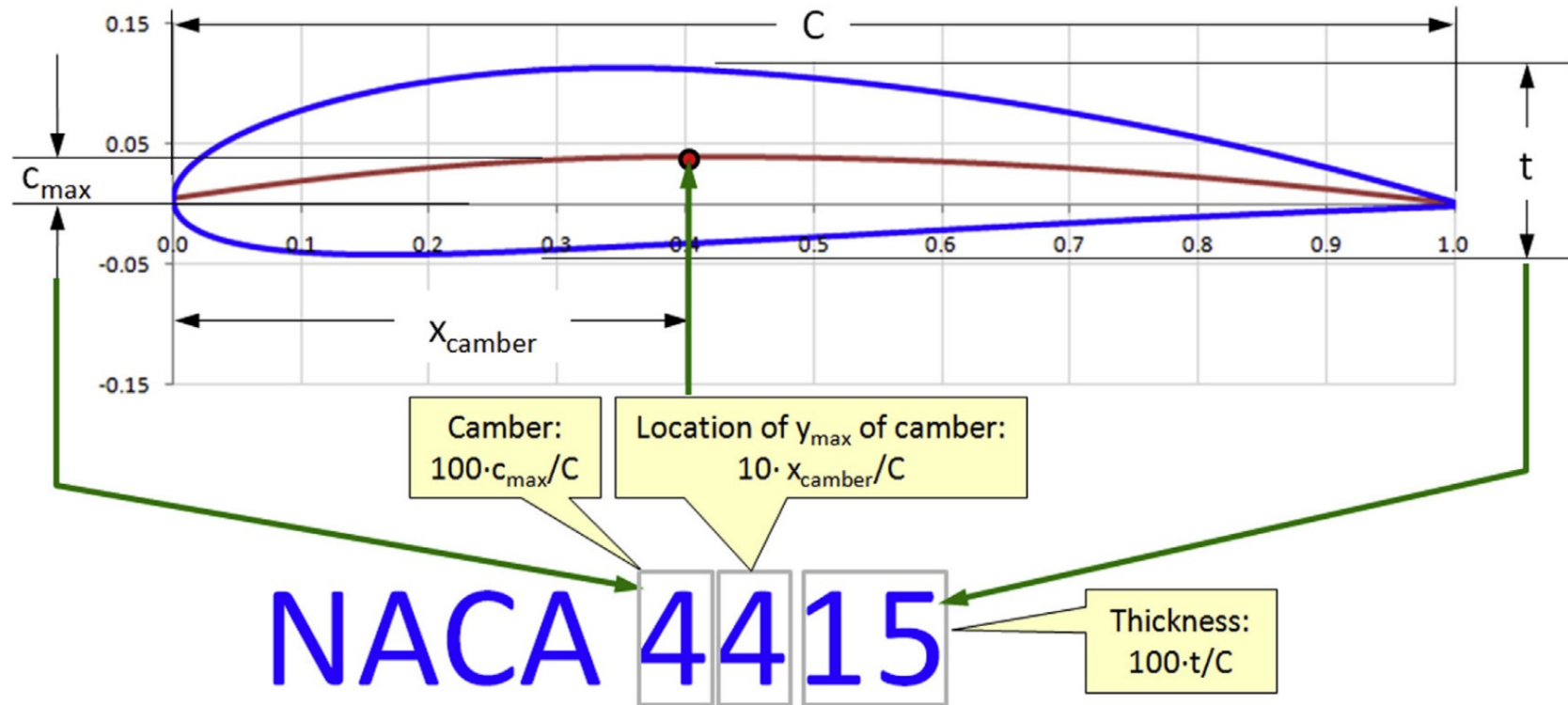
[https://pl.wikipedia.org/wiki/National_Advisory_Committee_for_Aeronautics]

NACA 4-DIGIT AIRFOILS										
Number of points	N =	30								
Angular spacing	$\Delta\phi =$	3.1034								
Thickness	t =	0.15								
Camber	C =	0.04								
Location of max C	$x_{\text{camber}} =$	0.4								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ID	ϕ	X	$y_c(x)$	$y_c'(x)$	θ	x_U	y_U	x_L	y_L	
1	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	2.0000	11.31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	3.10	0.0015	0.0084	0.0003	0.1993	11.27	-0.0002	0.0085	0.0031	-0.0079
3	6.21	0.0059	0.0165	0.0012	0.1971	11.15	0.0027	0.0173	0.0090	-0.0150
4	9.31	0.0132	0.0243	0.0026	0.1934	10.95	0.0086	0.0264	0.0178	-0.0212
5	12.41	0.0234	0.0317	0.0045	0.1883	10.66	0.0175	0.0357	0.0292	-0.0266
6	15.52	0.0365	0.0387	0.0070	0.1818	10.30	0.0295	0.0451	0.0434	-0.0311
7	18.62	0.0523	0.0453	0.0098	0.1738	9.86	0.0446	0.0544	0.0601	-0.0349
8	21.72	0.0710	0.0514	0.0129	0.1645	9.34	0.0627	0.0636	0.0794	-0.0378
9	24.83	0.0924	0.0569	0.0163	0.1538	8.74	0.0838	0.0726	0.1011	-0.0399
10	27.93	0.1165	0.0617	0.0199	0.1418	8.07	0.1078	0.0810	0.1252	-0.0412
11	31.03	0.1431	0.0659	0.0235	0.1284	7.32	0.1347	0.0889	0.1515	-0.0419
12	34.14	0.1723	0.0693	0.0270	0.1138	6.49	0.1645	0.0959	0.1802	-0.0419
13	37.24	0.2039	0.0720	0.0304	0.0980	5.60	0.1969	0.1020	0.2109	-0.0413
14	40.34	0.2378	0.0738	0.0334	0.0811	4.64	0.2319	0.1070	0.2438	-0.0402
15	43.45	0.2740	0.0748	0.0360	0.0630	3.60	0.2693	0.1107	0.2787	-0.0386
16	46.55	0.3123	0.0750	0.0381	0.0438	2.51	0.3090	0.1130	0.3156	-0.0368
17	49.66	0.3526	0.0743	0.0394	0.0237	1.36	0.3509	0.1137	0.3544	-0.0348
18	52.76	0.3948	0.0728	0.0400	0.0026	0.15	0.3946	0.1128	0.3950	-0.0328
19	55.86	0.4388	0.0705	0.0398	-0.0086	-0.49	0.4394	0.1103	0.4382	-0.0306
20	58.97	0.4844	0.0674	0.0392	-0.0188	-1.08	0.4857	0.1066	0.4832	-0.0281
21	62.07	0.5316	0.0636	0.0381	-0.0292	-1.67	0.5334	0.1016	0.5297	-0.0254
22	65.17	0.5801	0.0590	0.0364	-0.0400	-2.29	0.5825	0.0954	0.5777	-0.0226
23	68.28	0.6299	0.0539	0.0341	-0.0511	-2.92	0.6326	0.0879	0.6271	-0.0197
24	71.38	0.6807	0.0481	0.0312	-0.0624	-3.57	0.6837	0.0793	0.6777	-0.0168
25	74.48	0.7325	0.0418	0.0277	-0.0739	-4.23	0.7355	0.0694	0.7294	-0.0139
26	77.59	0.7850	0.0348	0.0235	-0.0856	-4.89	0.7880	0.0582	0.7821	-0.0112
27	80.69	0.8382	0.0274	0.0187	-0.0974	-5.56	0.8409	0.0459	0.8356	-0.0086
28	83.79	0.8919	0.0194	0.0131	-0.1093	-6.24	0.8940	0.0324	0.8898	-0.0061
29	86.90	0.9459	0.0108	0.0069	-0.1213	-6.92	0.9472	0.0176	0.9446	-0.0038
30	90.00	1.0000	0.0016	0.0000	-0.1333	-7.59	1.0002	0.0016	0.9998	-0.0016



Teoria profilu aerodynamicznego

Geometria płata. Opis geometrii profilu na przykładzie profilu NACA 4-cyfrowego.
Objaśnienie kodu 4-cyfrowego [Gudmundsson (2014)]



Teoria profilu aerodynamicznego

Siły (i moment) działające płat [Gudmundsson (2014)]

Całkowita siła (siła wypadkowa) generowana przez płat (skrzydło) zależy od następujących czynników: geometrii płata, gęstości płynu (powietrza), prędkości względnej oraz kąta natarcia, czyli kąta jaki tworzy linia cięciwy z wektorem prędkości napływającego płynu.

Chociaż płat (skrzydło) jest trójwymiarowy, jest zwykle przedstawiany jako zbiór opływów 2D wokół **profili** (przekrojów x-z płata).

Siła wypadkowa (reakcja aerodynamiczna) działająca na określony profil płata można opisać wzorem:

$$r = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_r$$

Gdzie:

r – siła wypadkowa [N] (lub [N/m], patrz niżej)

ρ – gęstość powietrza [kg/m^3],

V – prędkość powietrza [m/s],

S – powierzchnia odniesienia (powierzchnia obrysu płata) [m^2], lub – w przypadku analizy 2D – długość cięciwy c w [m]. W tym

przypadku siła r będzie miała wymiar obciążenia ciągłego [N/m]

C_r – (bezwymiarowy) współczynnik siły reakcji aerodynamicznej.

Teoria profilu aerodynamicznego

Siły (i moment) działające płat [Gudmundsson (2014)]

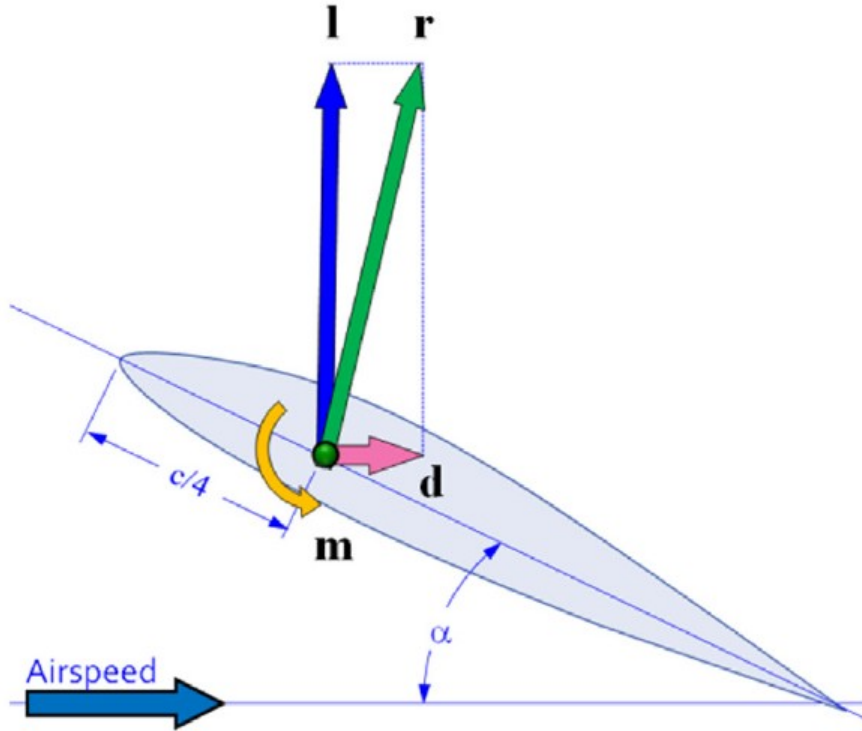
Wypadkową siłę działającą na płat możemy podzielić na dwie składowe w zależności od obranego układu współrzędnych.

Jeżeli wprowadzimy układ współrzędnych Oxz , w którym oś x będzie się pokrywała z kierunkiem napływu - wektorem prędkości płynu (przy założeniu, że płat w tym układzie jest nieruchomy), to składową siły działającą równoległą do osi Ox nazwiemy **siłą oporu**, natomiast składową działającą poprzecznie do kierunku napływu (wzdłuż osi Oz) nazwiemy **siłą nośną**.

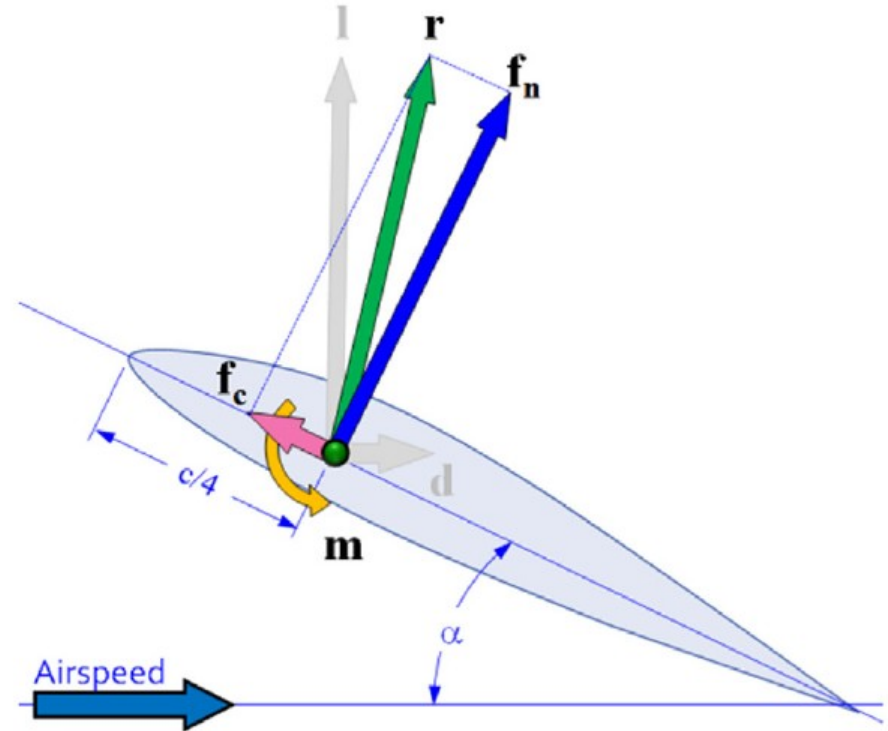
Jeżeli natomiast wprowadzimy lokalny układ współrzędnych Oxz związany z płatem, którego oś Ox będzie równoległa do cięciwy płata i skierowana do krawędzi spływu, a oś Oz będzie skierowana w kierunku strony ssącej ("górnej") płata/profilu, to składową siły działającą wzdłuż cięciwy nazwiemy **siłą styczną**, natomiast składową działającą w kierunku prostopadłym do cięciwy (wzdłuż lokalnej osi Oz) **siłą normalną**.

Teoria profilu aerodynamicznego

Siły (i moment) działające płat [Gudmundsson (2014)]



Rys. 1 a) Rozkład reakcji aerodynamicznej r na profilu na składowe w układzie związanym z wektorem prędkości napływu: siła nośna l i siła oporu d



Rys. 1 b) Rozkład reakcji aerodynamicznej na profilu na składowe w układzie związanym z cięciwą profilu [chord]: siła normalna l i siła styczna [chordwise] f_c

Teoria profilu aerodynamicznego

Siły (i moment) działające płat [Gudmundsson (2014)]

Wartość siły nośnej l , siły oporu d oraz momentu działającego na płat m względem określonej osi, możemy obliczyć z następujących wzorów:

$$l = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_l = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_r \cos \alpha$$

$$d = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_d = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_r \sin \alpha$$

$$m = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot c \cdot C_m$$

gdzie:

C_l i C_d – odpowiednio współczynnik siły nośnej oraz siły oporu profilu [-],

C_m - współczynnik momentu profilu [-].

Znając wyrażenia na siłę nośną i siłę oporu można wyprowadzić odpowiednie wzory na siłę normalną f_n oraz styczną f_c do cięciwy profilu (lub płaszczyzny płata):

$$f_n = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot (C_l \cos \alpha + C_d \sin \alpha)$$

$$f_c = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot (C_d \cos \alpha + C_l \sin \alpha)$$

Notka: Małe litery l , d , m oznaczają tutaj odpowiednie siły dla profilu 2D, które oznaczają oddziaływanie na płat o jednostkowej rozpiętości (najczęściej siła/moment ma wtedy wymiar obciążenia ciągłego i wyrażona jest w [N/m] – siła i w [Nm/m] – moment, gdyż zamiast pola powierzchni S [m²] podstawiamy wtedy długość cięciwy c [m].

Teoria profilu aerodynamicznego

Siły (i moment) działające płat
[Gudmundsson (2014)]

Wartość siły nośnej L , siły oporu D oraz momentu M działającego na płat względem określonej osi, dla przypadku trójwymiarowego (płat 3D o określonej rozpiętości):

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_L$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_D$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot c_{MGC} \cdot C_M$$

gdzie:

C_L i C_D – odpowiednio współczynnik siły nośnej oraz siły oporu płata [-],

C_M - współczynnik momentu płata [-],

c_{MGC} – średnia długość cięciwy płata [m].

Notka: W przypadku płata 3D (o określonej rozpiętości) siły L i D wyrażamy „normalnie” w [N], natomiast moment w [Nm]

Teoria profilu aerodynamicznego

Właściwości „typowego” profilu aerodynamicznego (lub hydrodynamicznego)

Współczynnik siły nośnej C_l

Charakterystyka współczynnika siły nośnej w funkcji kąta natarcia α jest właściwie najważniejszą cechą opisującą płat (z punktu widzenia zastosowania danego profilu).

Z charakterystyką współczynnika siły nośnej $C_l = C_l(\alpha)$ powiązane są pewne kluczowe parametry, które tą charakterystykę opisują.

Maksymalny i minimalny współczynnik siły nośnej C_{lmax} i C_{lmin}

Największa oraz najmniejsza wartość siły nośnej mają istotne znaczenie, gdyż dzięki tym wartością możemy określić jak duży musi być płat, aby wytworzyć określoną (pożądaną) siłę nośną.

Punkt w którym osiągana jest ekstremalna (np. maksymalna) wartość współczynnika siły nośnej nazywamy punktem krytycznym charakterystyki $C_l = C_l(\alpha)$, a kąt natarcia przy którym osiągnięta zostaje wartość maksymalna/minimalna C_l nazywamy kątem krytycznym charakterystyki współczynnika siły nośnej (patrz rysunek 2).

Nachylenie krzywej wsp. siły nośnej $C_{l\alpha}$

Parametr nachylenia krzywej siły nośnej $C_{l\alpha}$ określa jak szybko siła nośna zmienia się wraz z ze zmianą kąta natarcia α :

$$C_{l\alpha} = \frac{\Delta C_l}{\Delta \alpha}$$

Teoria profilu aerodynamicznego

Właściwości „typowego” profilu aerodynamicznego (lub hydrodynamicznego)

Maksymalna wartość nachylenia wynika z liniowej teorii profilu cienkiego i wynosi:

$$C_{l\alpha} = 2\pi = 6,283$$

Charakterystyka wsp. siły nośnej jest z reguły liniowa dla małych kątów natarcia. W tym zakresie (małych kątów natarcia) można założyć że nachylenie $C_{l\alpha}$ jest stałe.

Kąt (natarcia) zerowej siły nośnej α_{ZL}

Kąt natarcia przy którym siła nośna na płacie wynosi zero.

C_l dla zerowego kąta natarcia – C_{l0}

Przy założeniu, że w obrębie małych α nachylenie $C_{l\alpha}$ jest stałe, współczynnik C_{l0}

może być wyznaczony ze wzoru:

$$C_{l0} = -C_{l\alpha} \alpha_{ZL}$$

Zakres liniowy (charakterystyki C_l)

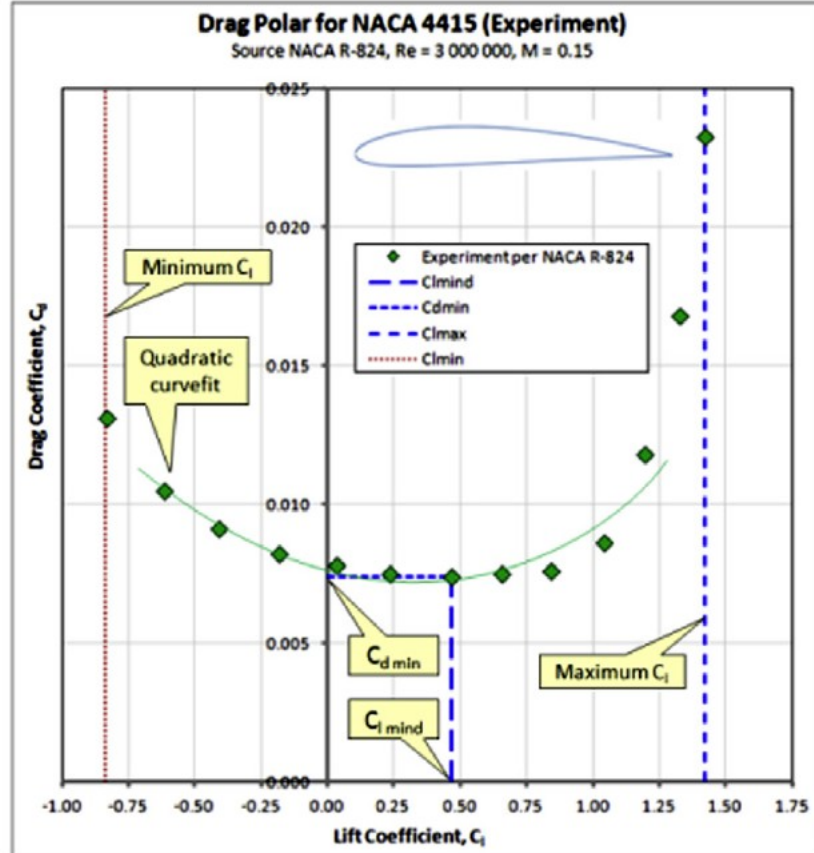
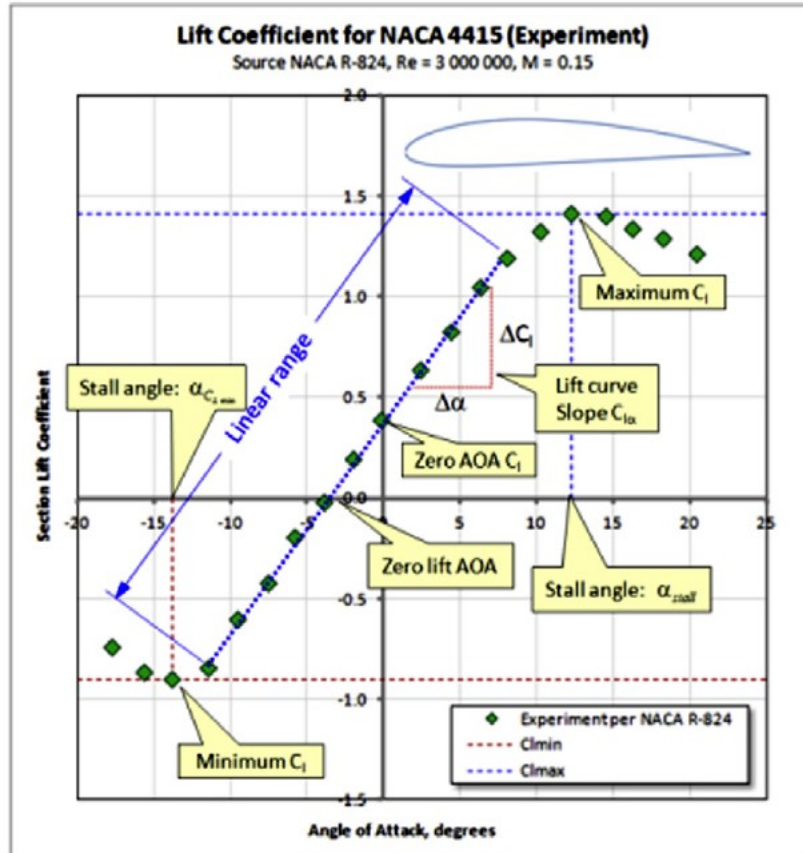
Zakres kąta α w którym charakterystykę wsp. siły nośnej $C_l = C_l(\alpha)$ można aproksymować funkcją liniową:

$$C_l = C_{l0} + C_{l\alpha} \alpha$$

Do ważnych parametrów można zaliczyć również **minimalny współczynnik siły oporu** C_{dmin} oraz **współczynnik siły nośnej dla minimalnego oporu** $C_{l_{mind}}$

Teoria profilu aerodynamicznego

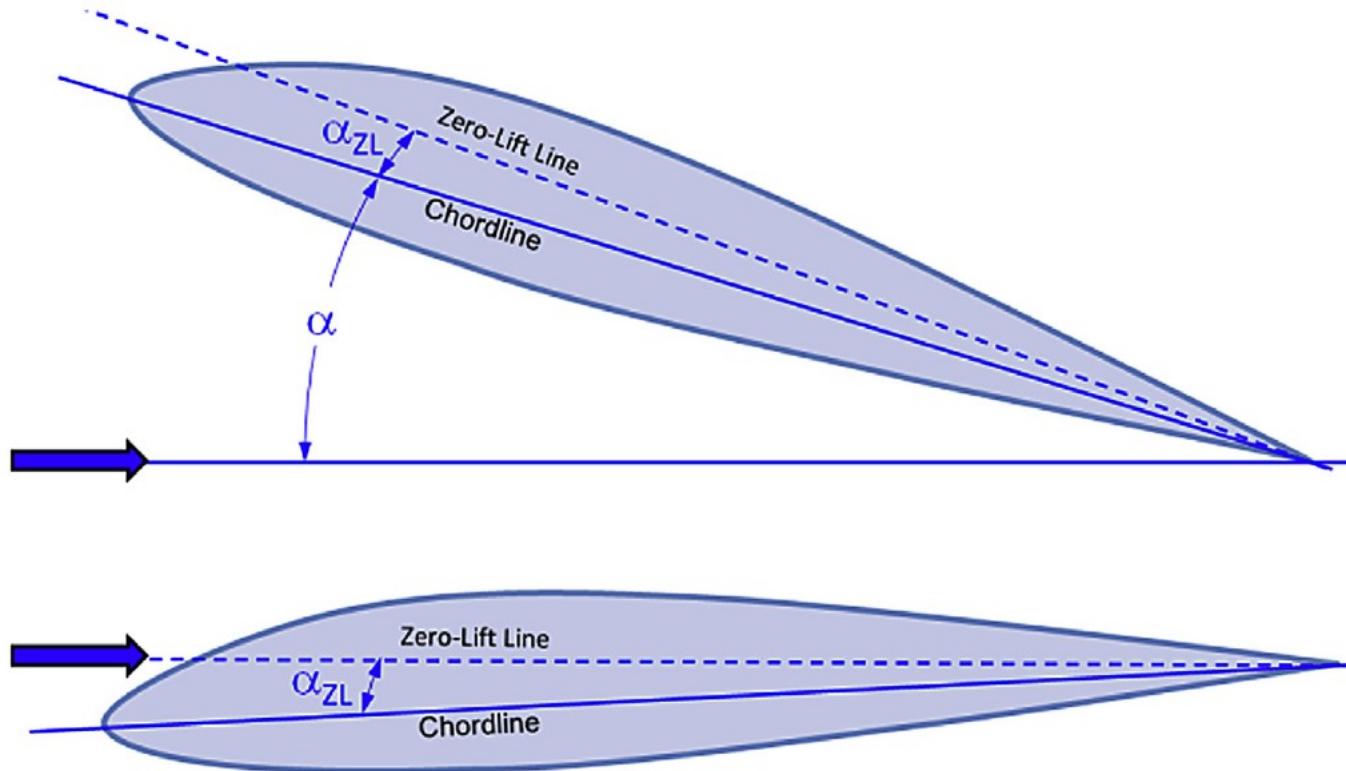
Właściwości „typowego” profilu aerodynamicznego (lub hydrodynamicznego)



Rys. 2 Typowy wykres wsp. siły nośnej C_l w funkcji kąta natarcia α (po lewej) oraz wykres biegunowy współczynnika siły oporu C_d w funkcji wsp. siły nośnej C_l [Gudmundsson (2014)]

Teoria profilu aerodynamicznego

Właściwości „typowego” profilu aerodynamicznego (lub hydrodynamicznego)



Rys. 3 Typowy wykres wsp. siły nośnej C_l w funkcji kąta natarcia α (po lewej) oraz wykres biegunowy współczynnika siły oporu C_d w funkcji wsp. siły nośnej C_l [Gudmundsson (2014)]

Teoria profilu aerodynamicznego

Bezwymiarowy współczynnik ciśnienia C_p

Współczynnik ciśnienia służy do prezentowania rozkładu ciśnienia na płacie w formie bezwymiarowej (podobnie jak współczynniki siły nośnej oraz oporu), dzięki czemu możemy porównywać rozkłady ciśnienia na różnych płatach i/lub różnych kątach natarcia. Współczynnik ciśnienia definiowany jest następująco:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\Delta p}{q}$$

gdzie:

p – ciśnienie (w danym punkcie) [N/m²],

p_∞ – ciśnienie daleko przed płatem [N/m²],

V_∞ – prędkość napływu [m/s],

ρ_∞ – ciśnienie (daleko) przed płatem [N/m²],

q – ciśnienie dynamiczne [N/m²],

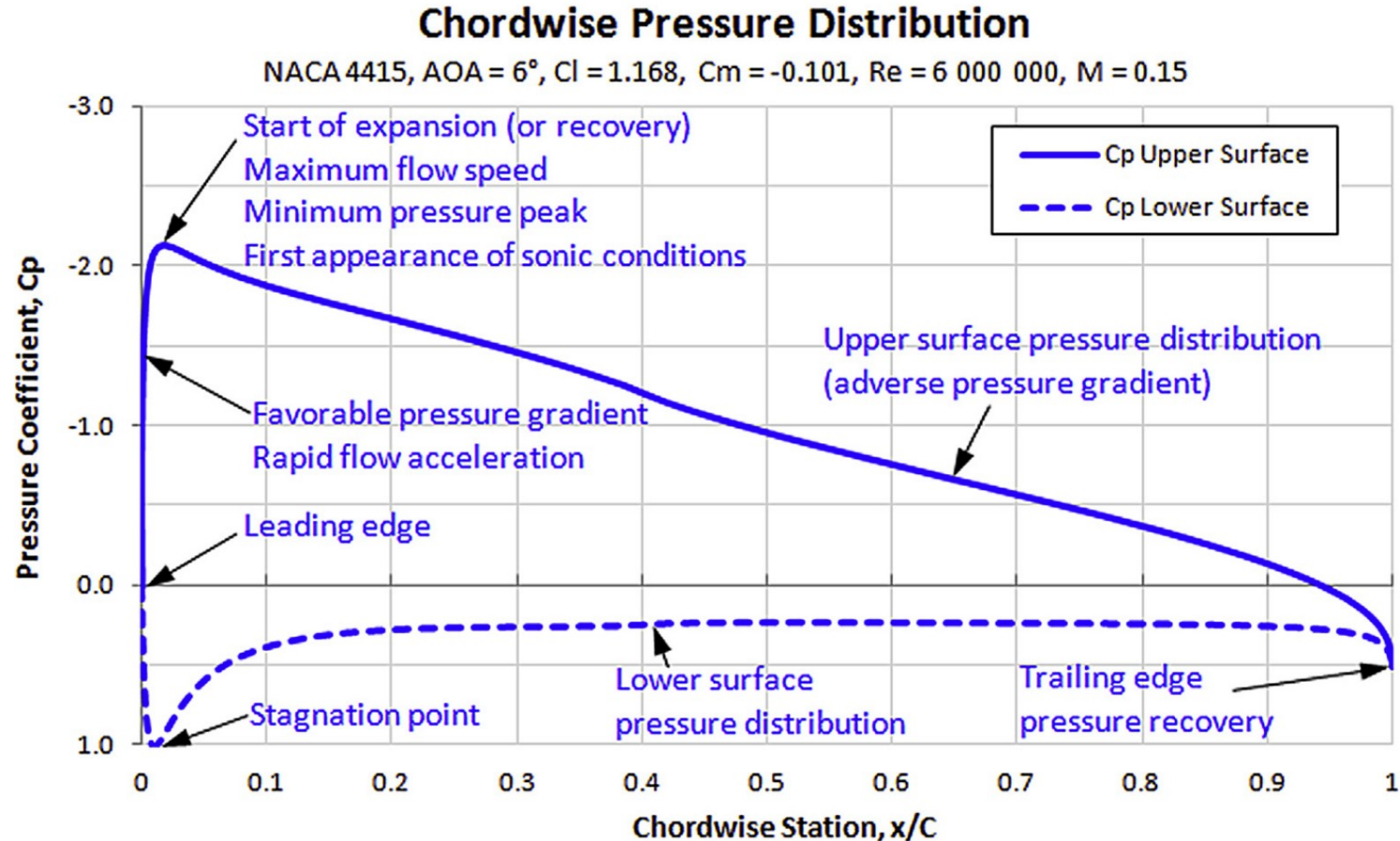
W przepływie nieściśliwym współczynnik ciśnienia może być zdefiniowany następująco:

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2$$

W przepływie nieściśliwym maksymalna wartość C_p wynosi 1 (w punkcie spiętrzenia).

Teoria profilu aerodynamicznego

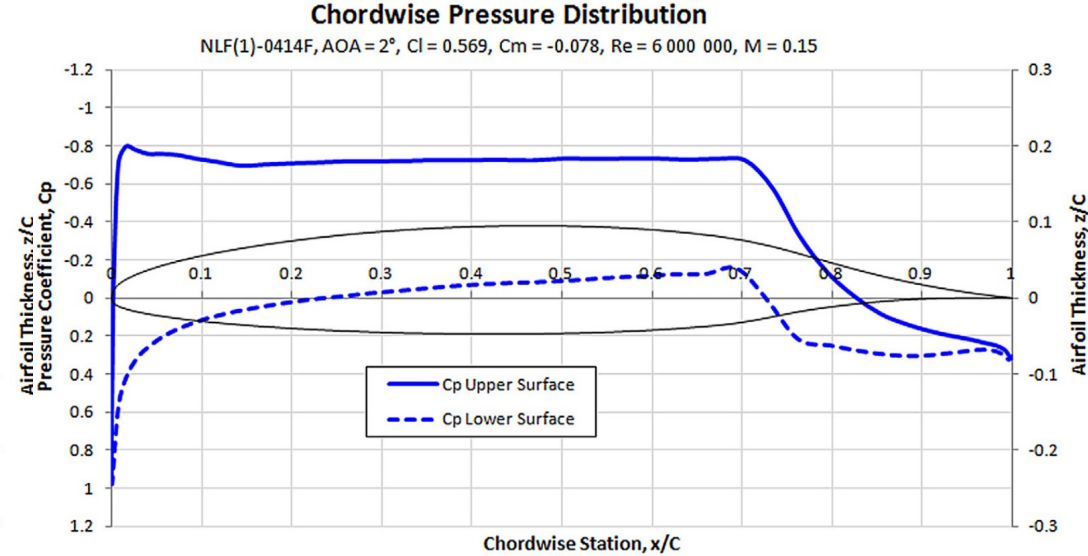
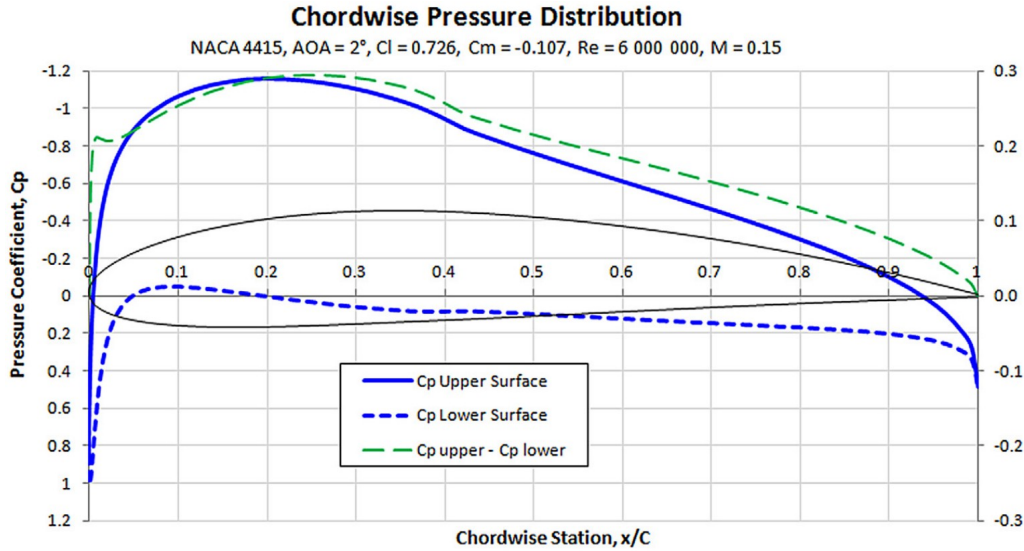
Bezwymiarowy współczynnik ciśnienia C_p



Rys. Rozkład współczynnika ciśnienia C_p wzdłuż cięciwy płata

Teoria profilu aerodynamicznego

Przykładowe rozkłady współczynnika ciśnienia C_p dla “typowych” profili



Rys. Rozkład C_p dla konwencjonalnego płata, dla kąta natarcia $\alpha = 2^\circ$.

Rys. Rozkład C_p dla konwencjonalnego płata, dla kąta natarcia $\alpha = 2^\circ$.

Teoria profilu aerodynamicznego

Środek aerodynamiczny (centrum aerodynamiczne) [Gudmundsson (2014)]

Środek aerodynamiczny – punkt na profilu aerodynamicznym, dla którego moment aerodynamiczny pozostaje stały względem zmiany siły nośnej (czy zmiany kąta natarcia).

Dla środka aerodynamicznego prawdziwa jest zależność:

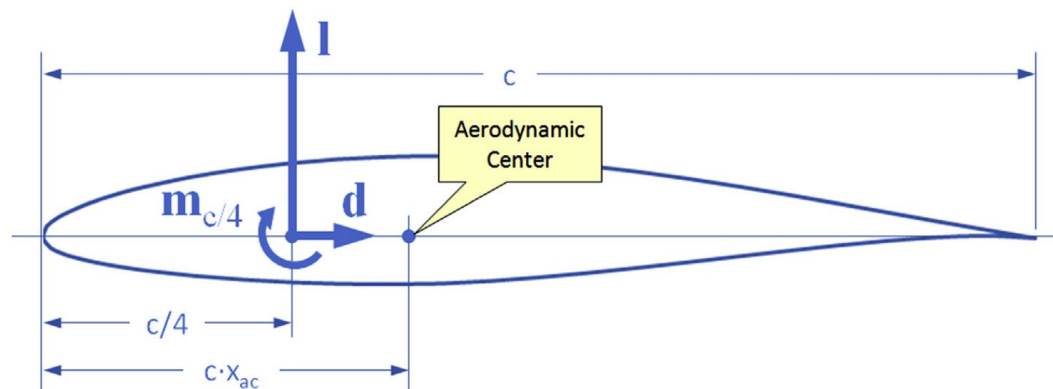
$$\frac{dC_m}{dC_l} = 0$$

Jeśli znamy nachylenie krzywej wsp. siły nośnej $C_{l\alpha}$ oraz nachylenie krzywej wsp. momentu $C_{m\alpha, c/4}$, położenie środka aerodynamicznego x_{ac} można wyznaczyć ze wzoru:

$$x_{ac} = 0.25 - \frac{C_{m\alpha, c/4}}{C_{l\alpha}}$$

gdzie:

$C_{m\alpha, c/4}$ – nachylenie wsp. momentu określonego względem punktu $x=c/4$,
 $C_{l\alpha}$ – nachylenie wsp. siły nośnej.



Rys. Położenie środka aerodynamicznego

Teoria profilu aerodynamicznego

Środek aerodynamiczny (centrum aerodynamiczne) [Gudmundsson (2014)]

Moment na płacie aerodynamicznym może być określany względem środka aerodynamicznego. W przypadku, gdy zajdzie potrzeba określenia tego momentu w $\frac{1}{4}$ cięciwy stosujemy:

$$C_{m,c/4} = C_{m,ac} + C_l (0.25 - x_{ac})$$

lub

$$C_{m,c/4} = C_{m,ac} + C_{l\alpha} \alpha (0.25 - x_{ac})$$

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Zasadniczo, mechanizm powstawania siły nośnej na profilu aerodynamicznym można wytłumaczyć na trzy różne sposoby:

- ▶ Stosując *zasadę zachowania pędu*,
- ▶ wykorzystując *równanie Bernoullego*,
- ▶ stosując *twierdzenie o cyrkulacji Kutty-Żukowskiego*.

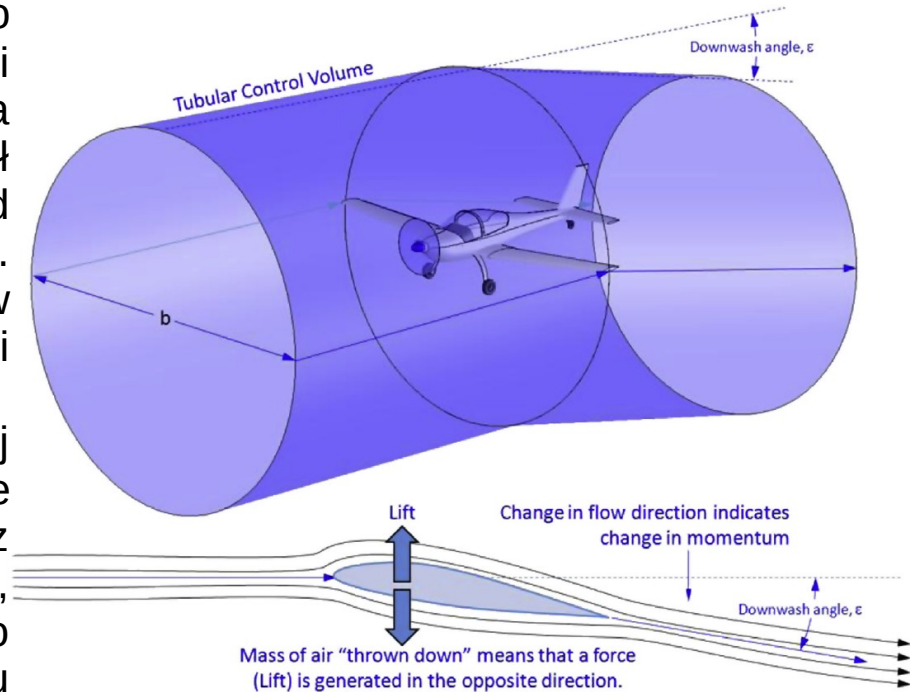
Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o zasadę zachowania pędu

Zasada zachowania pędu wyjaśnia siłę nośną jako konsekwencję ruchu skrzydła przez masę powietrza i nadanie mu ruchu w dół (patrz Rysunek). Ponieważ masa powietrza jest początkowo w spoczynku, ruch w dół oznacza, że pionowa prędkość powietrza zmienia się od zera do pewnej skończonej wartości w określonym czasie. To z kolei oznacza, że siła będzie generowana w przeciwnym kierunku, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona.

Wielkość tej siły można oszacować za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona. *Druga zasada dynamiki* mówi, że szybkość zmiany pędu masy powietrza jest skutkiem siły, jaką płat działa na opływające masy. Trzecia zasada mówi, że – jako reakcja – na płacie generowana jest siła, równa co do wartości, lecz działająca w kierunku przeciwnym do ruchu masy powietrza. To właśnie tę siłę nazywamy **siłą nośną**.



Rys. Zmiana pędu powietrza na skutek przelatującego samolotu. Opis zjawiska [Gudmundsson (2014)].

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o zasadę zachowania pędu

Ruch powietrza w dół nazywany jest **downwash**, tutaj oznaczony literą w i reprezentuje pionową składową prędkości powietrza za skrzydłem.

Jeśli znamy prędkość przepływu w dół w i strumień masy powietrza \dot{m} , który jest odchylany, wielkość siły nośnej, jak już wspomniano, można oszacować korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$L = \dot{m} w$$

Prędkość pionowa w może być oszacowana przy założeniu, że znamy pole przekroju strumienia masy A_{tube} . Zakładając, że $A_{tube} = \pi b^2 / 4$ możemy strumień masy zapisać jako:

$$\dot{m} = \rho A_{tube} V = \rho \frac{\pi b^2}{4} V, \text{ stąd: } L = \rho \frac{\pi b^2}{4} V w$$

Siłę nośną obliczamy również ze wzoru:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \cdot C_L \quad ,$$

co pozwala nam uzyskać wyrażenie na pionową składową prędkości:

$$w = 2 V \frac{S}{\pi b^2} C_L$$



Rys. Zmiana pędu powietrza (**downwash**) na skutek przelatującego samolotu. Zdjęcie zjawiska [https://www.aviatest.eu/2020/04/08/the-word-of-the-week-downwash/]

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o równanie Bernoulliego

Siła nośna jest konsekwencją istnienia różnicy ciśnień pomiędzy górną i dolną powierzchnią płata, a ściślej, jest składową siły wypadkowej będącą wynikiem całkowania ciśnienia na całej powierzchni ciała (płata).

$$\vec{L} = \left(- \int_{S_{Up} + S_{Low}} p \vec{n} dS \right) \vec{e}_z ,$$

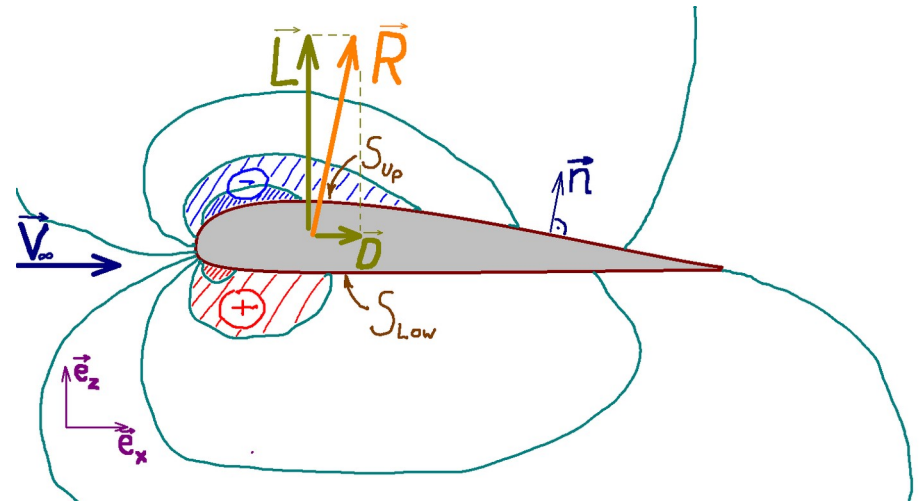
gdzie:

p – ciśnienie [Pa],

S_{Up} , S_{Low} – powierzchnia płata po stronie “górnjej” (ssącej) i “dolnej” (cisnącej),

\vec{n} – wektor normalny skierowany “od ścianki do płynu”,

\vec{e}_z – wektor osi pionowej (prostopadłej do kierunku napływu).



Rys. Rozkład ciśnienia, siła nośna L

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego (1700-1782), zakłada, że istnieje związek między ciśnieniem i prędkością płynu w punkcie i wzdłuż linii prądu, która przechodzi przez ten punkt. Co wyrażone zostało (dla płynu nieściśliwego) w następujący sposób:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{const.}$$

Równania tego używamy zwykle razem z **równaniem ciągłości przepływu** (czyli **równaniem zachowania masy** płynu), które można dla dowolnej objętości kontrolnej V_c ograniczonej powierzchnią kontrolną S_c wyrazić następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} m_{V_c} + \dot{m}_{S_c} = 0$$

Pierwszy człon po lewej stronie równania oznacza zmianę masy płynu (przyrost lub ubywanie) w objętości kontrolnej V_c (w czasie) [kg/s],

drugi człon oznacza strumień masy (ilość przepływającej masy) przez powierzchnię kontrolną S_c [kg/s].

Jeżeli dodatkowo założymy, że płyn jest nieściśliwy ($\rho = \text{const.}$) to masa płynu w objętości kontrolnej V_c będzie niezmienna w czasie, gdyż:

$$m_{V_c} = \rho V_c \quad , \quad \text{stad:} \quad \frac{\partial}{\partial t} m_{V_c} = 0 \quad ,$$

wtedy r.z.m. przyjmie prostszą postać:

$$\dot{m}_{S_c} = 0 \quad .$$

Lewa strona powyższego równania reprezentuje łączny strumień masy przez powierzchnię S_c .

Równanie można czytać następująco:

masa płynu, która w jednostce czasu wpływa do objętości kontrolnej V_c równa się masie płynu, która w jednostce czasu z tej objętości wypływa.

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o równanie Bernoulliego

W szczególnym przypadku możemy na powierzchni kontrolnej S_c wydzielić obszar wlotu (inlet) $S_{c,in}$, obszar wypływu płynu (outlet) $S_{c,out}$, powierzchnię na której leżą linie prądu (powierzchnię prądu) $S_{c,ss}$ oraz powierzchnię na ścianie obiektu opływanego S_{wall} . Wtedy równanie ciągłości przepływu będzie miało postać:

$$\dot{m}_{S_{c,in}} + \dot{m}_{S_{c,out}} + \dot{m}_{S_{c,ss}} + \dot{m}_{S_{c,wall}} = 0 \quad .$$

Uwzględniając fakt, że przez powierzchnię prądu $S_{c,ss}$ przepływ się nie odbywa (wektory prędkości są do niej styczne), podobnie strumień masy przez ściankę S_{wall} wynosi zero, stąd otrzymamy:

$$\dot{m}_{S_{c,in}} + \dot{m}_{S_{c,out}} = 0 \quad .$$

Strumień masy przez powierzchnię S obliczany ze wzoru:

$$\dot{m}_S = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{lub} \quad \dot{m}_S = \int_S \rho v_n dS$$

gdzie: $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ - składowa normalna prędkości do pow. S

Jeśli $v_{n,mean}$ będzie uśrednioną składową normalną prędkości na powierzchni S , to powyższą całkę można zapisać w postaci iloczynu:

$$\dot{m}_S = \rho v_{n,mean} S \quad (**)$$

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o równanie Bernoulliego

Wracając do opływu płata i mechanizmu powstawania siły nośnej, rozważmy dwie powierzchnie S_1 i S_2 będące odpowiednio wlotem do i wylotem z objętości kontrolnej V_c . Dodatkowo „od góry” V_c jest ograniczona powierzchnią S_0 będącą powierzchnią prądu i „od dołu” powierzchnią S_3 będącą ścianką (powierzchnią płata). Stąd, uwzględniając powyższe rozważania, otrzymamy:

założymy, że moduły prędkości są w przybliżeniu stałe w obrębie rozważanych powierzchni, strumienie masy będą wynosić:

$$\dot{m}_{S_1} = -\rho v_1 S_1 \quad \text{oraz} \quad \dot{m}_{S_2} = \rho v_2 S_2 \quad (**)$$

$$\dot{m}_{S_1} + \dot{m}_{S_2} = 0. \quad (*)$$

Strumień masy wyznaczmy ze wzorów:

$$\dot{m}_{S_1} = \int_{S_1} \rho \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS \quad \text{oraz} \quad \dot{m}_{S_2} = \int_{S_2} \rho \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS$$

Zakładając, że powierzchnie S_1 i S_2 obrane zostały w taki sposób, że wektory prędkości, odpowiednio, \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 są do nich prostopadłe. Dodatkowo, jeśli

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wyjaśnienie siły nośnej w oparciu o równanie Bernoulliego

Z równań (*) i (**) dostaniemy związek pomiędzy wartościami prędkości na powierzchniach S_1 i S_2 :

$$-\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0, \text{ a stąd:}$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}. \quad (***)$$

Jeśli wyróżnimy linię prądu biegnącą z punktu P_1 na powierzchni S_1 do punktu P_2 na S_2 , to równanie B. dla tej tych punktów będzie:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad (***)$$

Jeśli na skutek ukształtowania powierzchni ssącej płata linie prądu ulegną “zagęszczeniu”, to:

$$S_2 < S_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

Wniosek:

Spadek ciśnienia na powierzchni ssącej “wypukłej”, powoduje powstawanie siły nośnej.

Efekt ten może być zwiększony przy zwiększeniu kąta natarcia. Zmiany ciśnienia na powierzchni cisańcej są znacznie mniejsze.

Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Twierdzenie Kutty-Żukowskiego o cyrkulacji

Twierdzenie Kutty-Żukowskiego należy bardziej traktować jako matematyczny opis zjawiska związanego z opływem płata, niż jako wyjaśnienie powstawania siły nośnej.

Jednakże podany opis zjawiska okazuje się kluczowy przy obliczaniu siły nośnej np. metodą linii nośnej czy metodami wirowymi.

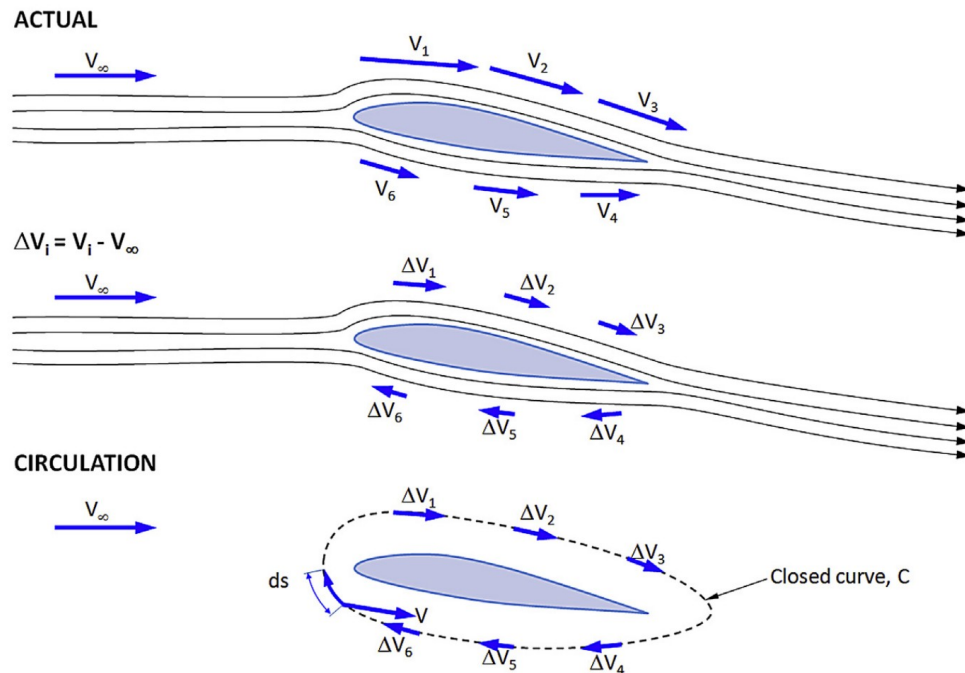
Twierdzenie K-Ż brzmi następująco: Siła nośna generowana przez płat nośny o może być obliczona jako iloczyn gęstości ρ , prędkości postępowej płata V , cyrkulacji płynu wokół płata Γ i rozpiętości płata b . Co można zapisać następująco:

$$L = \rho V \Gamma b$$

Przy czym cyrkulacja definiowana jest poniższą całką:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

Gdzie \mathbf{V} to wektor prędkości, a $d\mathbf{s}$ wektor elementu łuku krzywej zamkniętej C , patrz rysunek niżej.



Teoria profilu aerodynamicznego

Mechanizm powstawania siły nośnej [Gudmundsson (2014)]

Wpływ liczby Reynoldsa

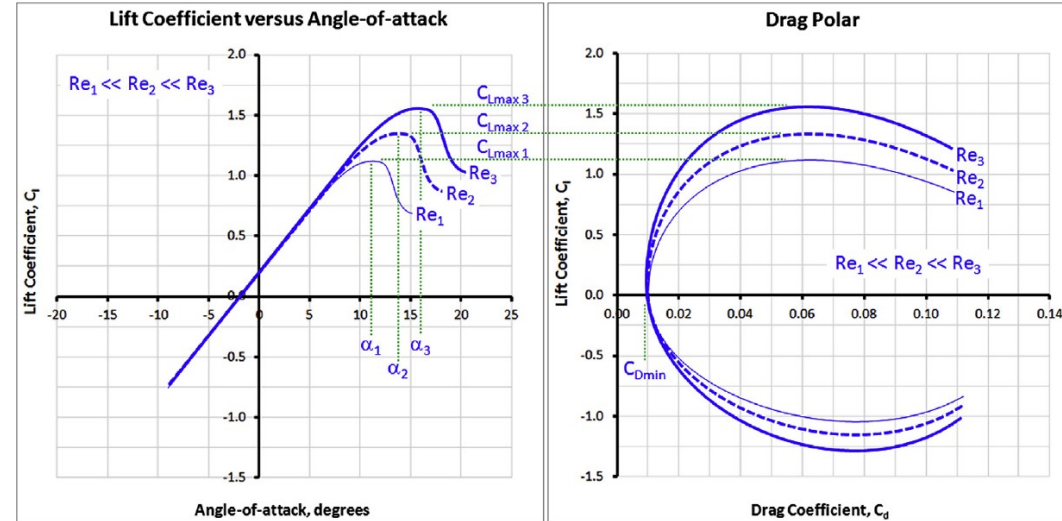
Liczba Reynoldsa wyraża stosunek sił bezwładności do sił lepkości w przepływie. Liczba ta ma duże znaczenie przy analizie warstwy przyściennej oraz zjawiska oderwania przepływu. Liczba Reynoldsa R_e dla profilu płata można wyrazić wzorem:

$$R_e = \frac{Vc}{\nu}$$

Liczba R_e lokalna (w danym punkcie przepływu) zwykle jest liczona jako:

$$R_e(x) = \frac{Vx}{\nu}$$

Gdzie x jest odległością rozpatrywanego punktu na powierzchni płata od krawędzi natarcia (w kierunku krawędzi spływu):



Rys. Wpływ wielkości liczby Reynoldsa na charakterystyki $C_l(\alpha)$, $C_d(C_l)$ [Gudmundsson (2014)]

Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Podstawowe definicje parametrów płata na przykładzie skrzydła o obrycie trapezowym

Powierzchnia płata:

$$S = b \frac{C_r + C_t}{2}$$

Wydłużenie płata [*aspect ratio*]:

$$A_R = \frac{b^2}{S} \quad \text{lub} \quad A_R = \frac{b}{C_{avg}}$$

Zbieżność płata [*taper ratio*]:

$$\lambda = \frac{C_t}{C_r}$$

Średnia długość cięciwy:

$$C_{avg} = \frac{C_r + C_t}{2} = \frac{C_r}{2} (1 + \lambda)$$

Średnia geometryczna długość cięciwy:

$$C_{MGC} = \left(\frac{2}{3}\right) C_r \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda}$$

Średnia aerodynamiczna długość cięciwy:

$$C_{MAC} \approx C_{MGC}$$

Pozycja y cięciwy o długości C_{MGC}

$$C_{MGC} = \left(\frac{b}{6}\right) \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda}$$

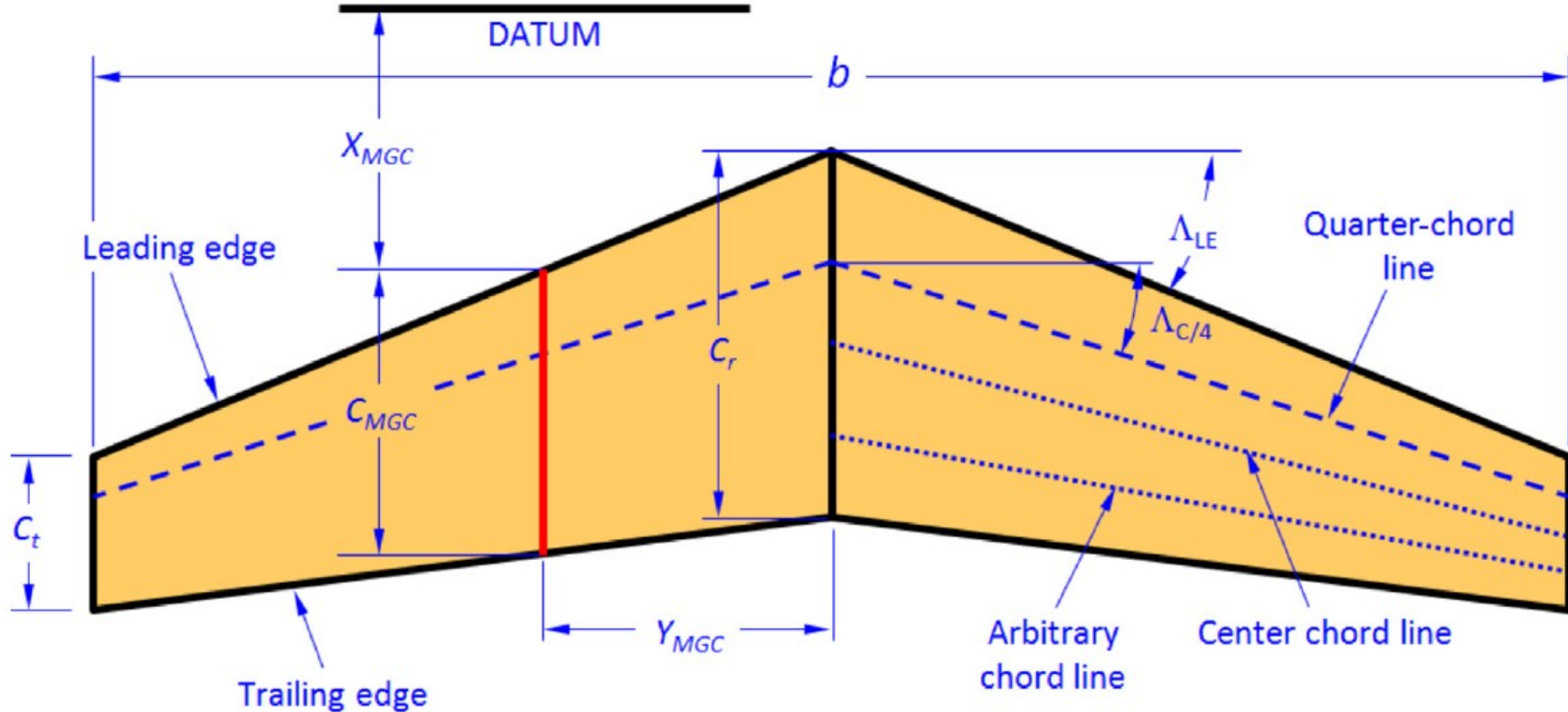
Skos płata (skrzydła) mierzony na krawędzi natarcia oznaczony jest jako Λ_{LE} .

Powyższe wielkości naniesione są na rys. niżej

Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Podstawowe definicje parametrów płata na przykładzie skrzydła o obrycie trapezowym



Rys. Podstawowe wielkości opisujące geometrię płata/skrzydła [Gudmundsson (2014)]

Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Płat ograniczony (z jednej strony) ścianą

[Komentarz ...]

Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Pole prędkości indukowane przez włókno wirowe. Prawo Biota-Savarta

Pole prędkości indukowane przez wir płaski (określony w 2D) o natężeniu Γ podane jest wzorem:

$$u_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad , \quad (*)$$

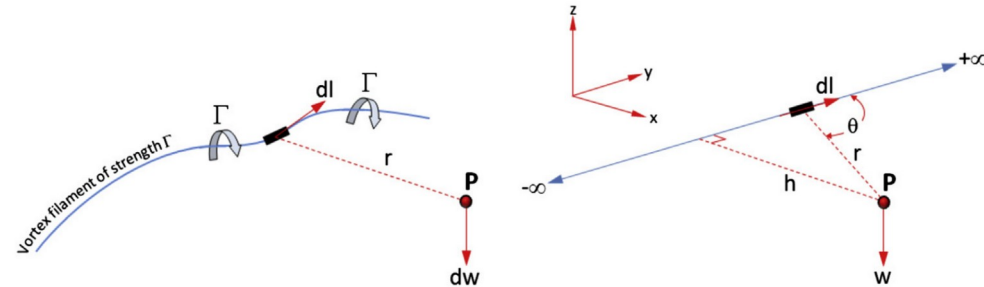
gdzie u_{θ} oznacza obwodową składową prędkości. W przypadku włókna o kształcie „dowolnym” w (przestrzeni 3D), prędkość indukowana w określona jest worem:

$$d\mathbf{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad . \quad (**)$$

Przy czym jeśli włókno jest prostą (rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$), wtedy prawo Biota-Savarta (**) sprowadzi się w praktyce do wzoru na pole prędkości wiru płaskiego (*)

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad ,$$

gdzie h jest długością najkrótszego odcinka od włókna wirowego do punktu \mathbf{P} w którym określamy wartość prędkości w (czyli odległością \mathbf{P} od prostej l). Wektor prędkości \mathbf{w} jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez linię włókna i punkt \mathbf{P} , jego zwrot jest zgodny z kierunkiem cyrkulacji Γ .



Rys. Zakrzywione włókno wirowe oraz włókno wirowe w kształcie prostej [Gudmundsson (2014)]

Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Twierdzenia Helmholtza o wirowości

Helmholtz (1821-1894) używając włókien wirowych do analizy przepływów płynów nielepkich i nieściśliwych sformułował następujące twierdzenia:

- 1. Natężenie wirowości włókna wirowego jest stałe wzdłuż całej długości włókna oraz*
- 2. Włókno wirowe nie może się zaczynać/kończyć w płynie ale musi rozciągać się do "nieskończoności" lub tworzyć pętle zamknięte.*

Z twierdzeń tych (oraz z prawa Kutty-Żukowskiego), wynika, że powinna istnieć "struktura" zwana wirem podkowiastym, która umożliwia wyjaśnienie mechanizmu powstawania siły nośnej na płatach o skończonej rozpiętości.

Linia nośna – sformułowanie zagadnienia

Gdy posiadamy już wiedzę o polu prędkości jakie indukuje zakrzywione bądź proste włókno wirowe,

wiemy, że przepływ wokół włókna wirowego jest przepływem cyrkulacyjnym (płyn krąży wokół włókna), to możemy spróbować opisać przepływ wokół skrzydła 3D.

Na podstawie obserwacji przepływu wokół płata o skończonej rozpiętości możemy stwierdzić, że:

- 1. Płat indukuje cyrkulacje która rozciąga się od wierzchołka do wierzchołka oraz*
- 2. Z każdego wierzchołka skrzydła „spływa” wir, który rozciąga się daleko za płatem.*

Te zaobserwowane „efekty” można w przybliżeniu opisać za pomocą trzech włókien wirowych: pierwszego poprzecznego, **wiru związanego** z płatem oraz dwóch wzdłużnych: drugi wir – **wir swobodny** - ciągnący się z lewego wierzchołka płata wzdłuż linii prądu do nieskończoności oraz trzeci wir (wir swobodny) ciągnący się z prawego wierzchołka, zgodnie z kierunkiem przepływu, do nieskończoności.

Teoria płata

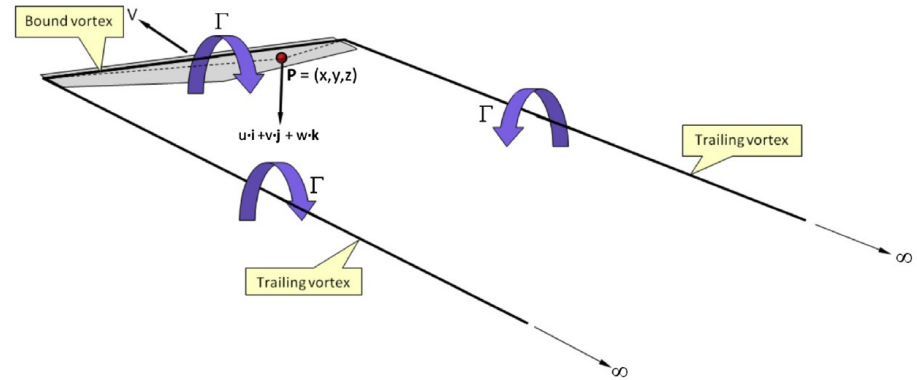
Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Linia nośna – sformułowanie zagadnienia c.d.

Ten system wirów nie tylko spełnia twierdzenia Helmholtza o wirach, ale także indukuje pole przepływu, które przypomina przepływ wokół rzeczywistych trójwymiarowych płatów. Tutaj należy również zauważyć, że te trzy wiry mają ten sam znak.

W rzeczywistości jednak tak uproszczony model nie oddaje właściwie rozkładu siły nośnej wzdłuż rozpiętości płata, która zmniejsza się w okolicach wierzchołków. Można też stwierdzić, że model ten jest wewnętrznie sprzeczny:

Prędkość indukowana przez wiry swobodne powoduje zmniejszenie efektywnego kąta natarcia (zwłaszcza przy wierzchołkach), co z kolei powoduje, że zmniejsza się siła nośna, a tym samym – na mocy prawa K-Ż – zmniejsza się, zwłaszcza przy wierzchołkach, natężenie wirowości (które jest równe cyrkulacji wokół określonego profilu płata)



Rys. a) Model uproszczony układu wirów indukowanych przez płatek [Gudmundsson (2014)], b) zdjęcie zjawiska

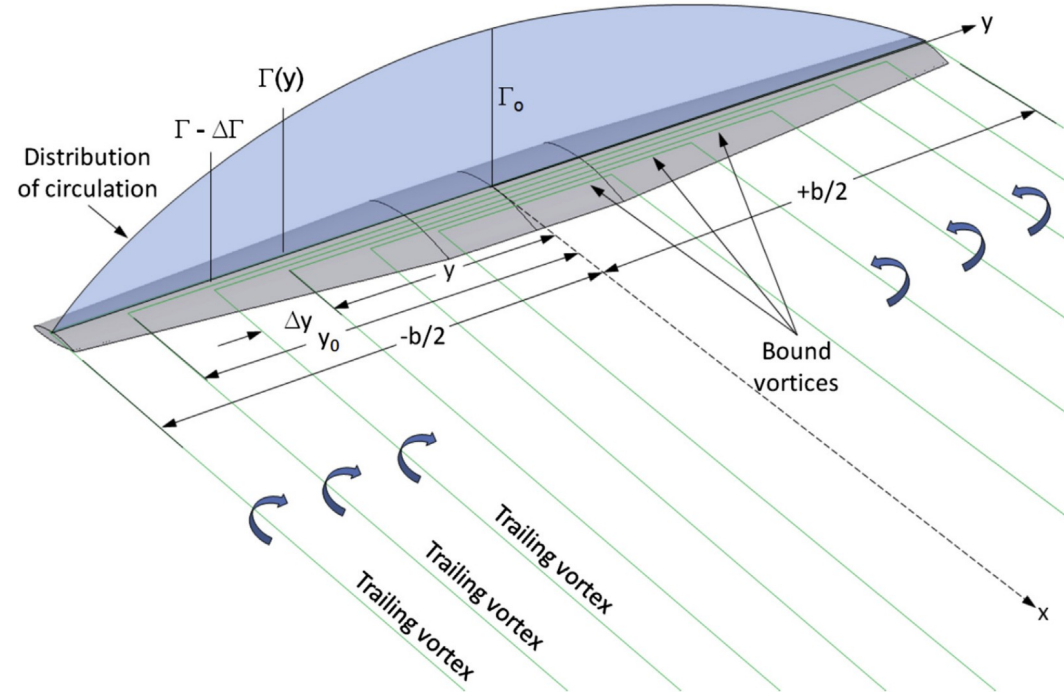
Teoria płata

Płat o skończonej rozpiętości [Gudmundsson (2014)]

Linia nośna – sformułowanie zagadnienia c.d.

Analizując omawiany przypadek dalej, nierównomierny rozkład cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płata musi skutkować tym, że – na mocy twierdzeń Helmholtza – wiry swobodne będą sływać również wzdłuż rozpiętości płata, gdyż natężenie wirowości włókien nie może się zmieniać wzdłuż włókna.

Wynika stąd wniosek, że pojedynczy wir podkowiasty powinien być zastąpiony układem wirów podkowiastych, jak na rysunku obok. Pokazany układ wirów podkowiastych spełnia twierdzenie Helmholtza (każde włókno z osobna, a więc i układ włókien). Na tej podstawie otrzymujemy sumaryczny rozkład wirowości wirów związanych wzdłuż płata.



Rys. Rozkład cyrkulacji wzdłuż płata o skończonej rozpiętości. Układ wirów swobodnych.

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju względem osi [Z. Brzoska „Wytrzymałość materiałów” (1972)]

W tej części przypomnimy pojęcie **momentu bezwładności (pola) przekroju względem osi**, które posłużą nam później do wyznaczania sztywności belki oraz **wskaźnika wytrzymałości przekroju na zginanie**.

Moment bezwładności przekroju względem osi $O\eta$ definiowany jest za pomocą wzoru:

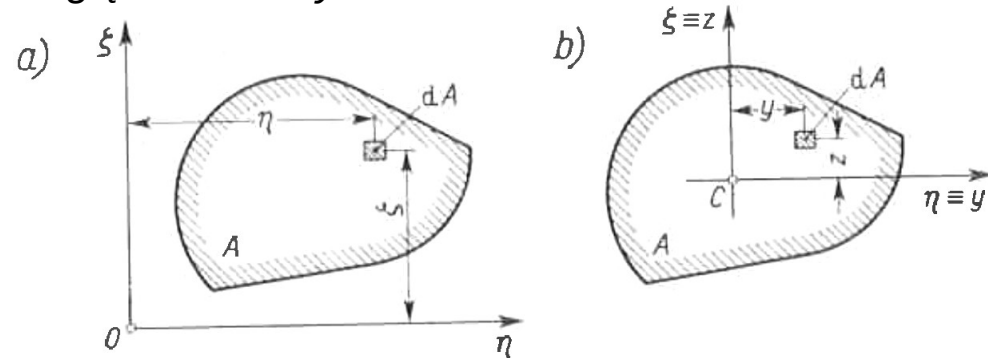
$$J_{\eta} = \int_A \xi^2 dA, \quad (2.1)$$

czyli całki iloczynu pola elementarnego dA przez kwadrat odległości pola dA od obranej osi $O\eta$, przy czym całkowanie obejmuje całe pole przekroju A (Rys. a). Ze względu na fakt, że w powyższym wzorze rzędna ζ występuje w kwadracie, uzyskany wynik jest zawsze dodatni.

Gdy oś $O\eta$ jest osią centralną (przechodzącą przez środek przekroju C) wówczas w stosujemy jemy – zamiast η i ζ oznaczenia x i y , a powyższą całkę zapiszemy w postaci:

$$J_y = \int_A y^2 dA \quad (2.2)$$

J_y nazywany *centralnym momentem bezwładności względem osi Cy* .



Rys. Definicja momentu bezwładności względem osi [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju względem osi [Z. Brzoska „Wytrzymałość materiałów” (1972)]

W analogiczny sposób definiujemy moment bezwładności względem osi $O\xi$:

$$J_{\xi} = \int_A \eta^2 dA \quad (2.3)$$

I jego szczególną wartość, gdy oś Oz jest centralna:

$$J_z = \int_A y^2 dA, \quad (2.4)$$

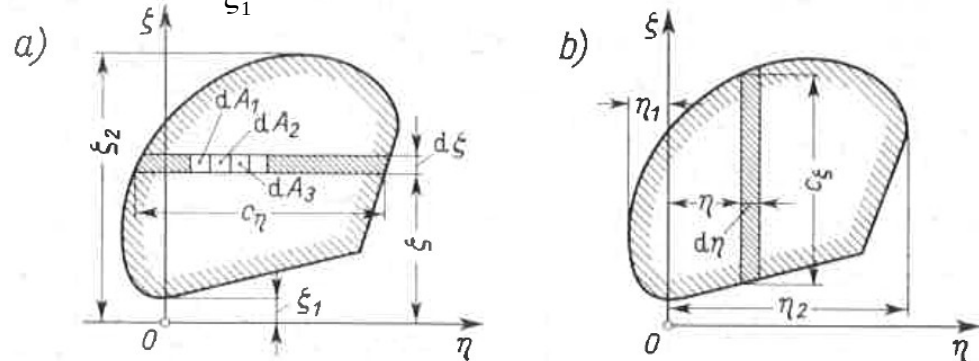
czyli *centralny moment bezwładności względem osi Cz*.

W praktyce, określenie momentu bezwładności J_{η} można sprowadzić do obliczenia całki pojedynczej. Ze względu na fakt, że wszystkie pola dA elementarnego paska równoległego do osi $O\eta$ mają tę samą rzędną ζ , wobec tego sumę iloczynów $\zeta^2 dA$ możemy zapisać jako (rys. a):

$$\xi^2 dA_1 + \xi^2 dA_2 + \dots = \xi^2 \sum dA = \xi^2 c_{\eta} d\xi \quad (2.5)$$

gdzie c_{η} jest szerokością paska (mierzona wzdłuż osi $O\eta$), zależną od położenia paska ζ . Stąd moment bezwładności J_{η} obliczymy ze wzoru:

$$J_{\eta} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} c_{\eta} \xi^2 d\xi \quad (2.6)$$



Rys. Obliczanie momentów bezwładności J_{η} i J_{ζ} całką pojedynczą [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju względem osi [Z. Brzoska „Wytrzymałość materiałów” (1972)]

W podobny sposób obliczamy moment bezwładności względem osi $O\zeta$:

$$J_{\zeta} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} c_{\zeta} \eta^2 d\eta \quad (2.7)$$

gdzie c_{ζ} oznacza wysokość paska mierzoną wzdłuż osi $O\zeta$, która zależy od ζ (rys. b - poprzedni slajd).

Przykład 2.1 Obliczyć moment bezwładności prostokąta:

- a) względem osi $O\eta$, w przypadku gdy dwa boki prostokąta leżą na osiach układu $O\eta\zeta$, (rys. a),
- b) względem centralnej osi Cy (rys. b)

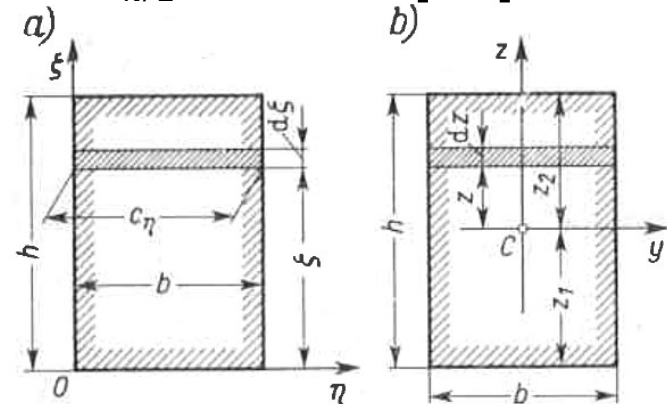
Rozwiązanie (oznaczenia jak na rysunku)

Ad a) Korzystając ze wzoru (2.6) oraz podstawiając $c_{\eta} = b$, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = h$ otrzymamy:

$$J_{\eta} = \int_0^h b \zeta^2 d\zeta = b \left[\frac{\zeta^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

Ad b) Korzystając ze wzoru (2.6) oraz podstawiając $c_y = b$, $z_1 = -h/2$, $z_2 = h/2$ otrzymamy:

$$J_y = \int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$



Rys. Wyznaczanie momentu bezwładności prostokąta

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju. Wzory Steinera i ich zastosowanie [Z. Brzoska (1972)]

Momenty bezwładności dowolnego przekroju względem osi $O\eta$ i $O\xi$ określone są wzorami

$$J_{\eta} = \int_A \xi^2 dA \quad (2.1) \quad \text{i} \quad J_{\xi} = \int_A \eta^2 dA \quad (2.3)$$

Jeżeli znane są centralne momenty bezwładności J_y i J_z , oraz gdy wyrazimy η i ξ w sposób pokazany na rysunku: $\eta = y + \eta_C$, $\xi = z + \xi_C$, otrzymamy po rozwinięciu:

$$J_{\eta} = \int_A (z + \xi_C)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2 \xi_C \int_A z dA + \xi_C^2 \int_A dA$$

$$J_{\xi} = \int_A (y + \eta_C)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2 \eta_C \int_A y dA + \eta_C^2 \int_A dA$$

Przy czym całka: $\int_A dA = A$

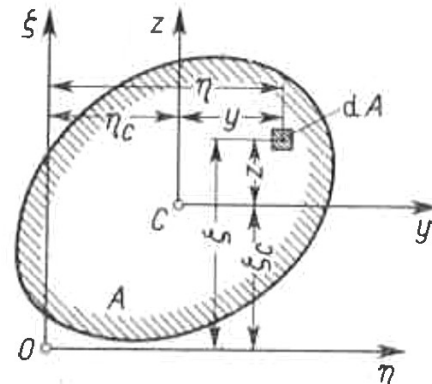
Natomiast uwzględniając, że dla środka powierzchni A - punktu C - momenty statyczne tej powierzchni są równe zero:

$$\int_A z dA = 0 \quad , \quad \int_A y dA = 0 \quad .$$

Stąd, po uwzględnieniu tych relacji, otrzymamy:

$$J_{\eta} = J_y + A \xi_C^2 \quad , \quad J_{\xi} = J_z + A \eta_C^2 \quad (2.8)$$

Powyższe wzory, to tak zwane **wzory Steinera**.



Rys. Sformułowanie wzorów Steinera

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju. Wzory Steinera i ich zastosowanie [Z. Brzoska (1972)]

Stosowanie wzorów Steinera znacząco ułatwia wyznaczanie momentów bezwładności przekroju, gdyż pozwala wykorzystać istniejące (opisane w podręcznikach/poradnikach) rozwiązania dla figur prostych (np. prostokąta, koła, trójkąta itp.). Znając momenty bezwładności tych figur względem (ich własnych) osi centralnych można łatwo wyznaczyć moment bezwładności przekroju z tych figur złożonych.

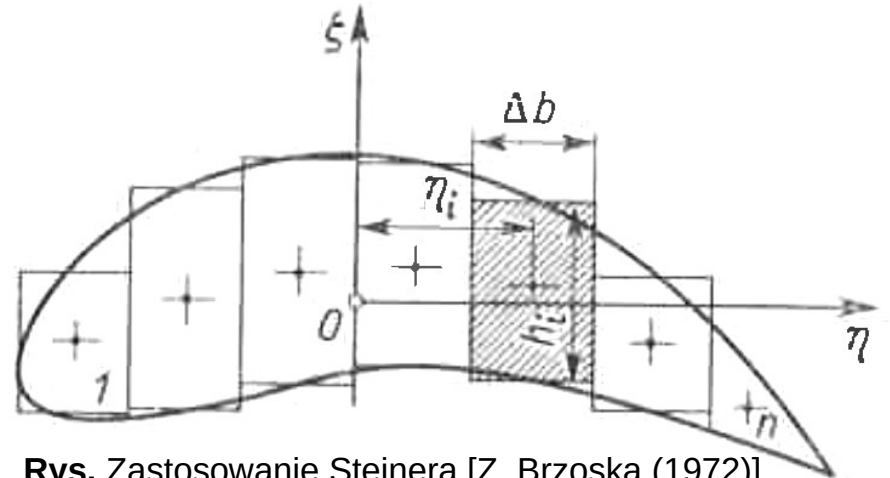
Innym sposobem (często stosowanym w przypadku kształtów nietypowych) jest podział zadanego przekroju na "paski", a następnie zastąpienia każdego z pasków prostokątem (patrz rysunek).

Moment bezwładności paska "i" będzie wtedy, w przybliżeniu, wynosił:

$$J_{\xi,i} \approx \frac{\Delta b^3 h_i}{12} + \Delta b h_i \eta_i^2, \quad (2.9)$$

a całkowity moment:

$$J_{\xi} \approx \frac{\Delta b^3}{12} \sum h_i + \Delta b \sum h_i \eta_i^2. \quad (2.10)$$



Rys. Zastosowanie Steinera [Z. Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju. Moment dewiacyjny [Z. Brzoska (1972)]

Dewiacyjny (lub *odśrodkowy* albo *zboczeniowy*) **moment bezwładności przekroju względem osi $O\eta$ i $O\zeta$** wyrażony jest wzorem:

$$J_{\eta\zeta} = \int_A \eta\zeta dA \quad (2.11)$$

W szczególnym przypadku, gdy osie $O\eta$ i $O\zeta$ są centralne wtedy ten moment bezwładności oznaczamy jako J_{yz} .

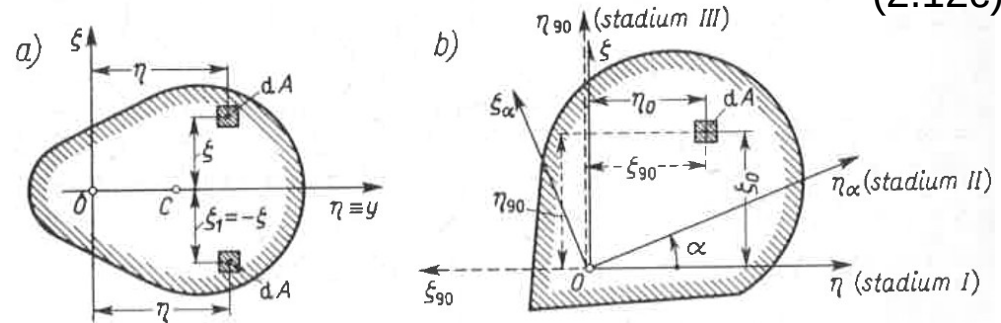
Jedną z własności momentu $J_{\eta\zeta}$ jest fakt, iż zależnie od doboru osi moment ten może być zarówno dodatni jak i ujemny, a także równy zero. Przykładowo jeśli przekrój jest symetryczny, a jedna z osi $O\eta$ lub $O\zeta$ jest osią symetrii, to – właśnie ze względu na symetrię – otrzymamy zerowy moment $J_{\eta\zeta}$ (rys. a)

Dla każdego punktu O dowolnego przekroju można zawsze tak dobrać osie $O\eta_\alpha$, $O\zeta_\alpha$, żeby moment dewiacyjny $(J_{\eta\zeta})_\alpha$ był równy zero. Przy stopniowym

obrocie układu $O\eta_\alpha\zeta_\alpha$, wartość tego momentu ulega zmianie ciągłej. Gdy $\alpha=90^\circ$ (*stadium III*), wówczas z (rys. b) widać, że współrzędne pola dA są: $\eta_{90} = \zeta_0$, $\zeta_{90} = -\eta_0$, (2.12a)

A elementarny moment dewiacyjny w *stadium III*:
 $(dJ_{\eta\zeta})_{90} = \eta_{90} \zeta_{90} dA = -\eta_0 \zeta_0 dA = (dJ_{\eta\zeta})_0$, (2.12b)

A stąd wynika, że $(J_{\eta\zeta})_{90} = -(dJ_{\eta\zeta})_0$ (2.12c)



Rys. Analiza dewiacyjnego momentu bezwładności [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Momenty bezwładności przekroju. Moment dewiacyjny [Z. Brzoska (1972)]

Wniosek: skoro przy obrocie o kąt 90° następuje zmiana znaku $J_{\eta\zeta}$, to musi istnieć pośrednie położenie osi układu współrzędnych, w którym $(J_{\eta\zeta})_\alpha = 0$.

Układ w którym moment dewiacyjny wynosi zero nazywamy *głównym układem dla obranego punktu O*. Jeśli dodatkowo środek układu współrzędnych leży w punkcie C (w środku pola przekroju), to taki układ osi nazywamy **głównym centralnym**.

Jeśli przekrój jest symetryczny, to oś symetrii razem drugą, prostopadłą do niej, osią centralną będą osiami *głównymi centralnymi*.

Dla momentu dewiacyjnego $J_{\eta\zeta}$ można wyprowadzić wzór analogiczny do wzorów Steinerja. Jeśli założymy, że znamy moment J_{yz} względem osi centralnych oraz zapiszemy współrzędne η i ζ w postaci: $\eta = y + \eta_C$; $\zeta = z + \zeta_C$, to można wykazać, że

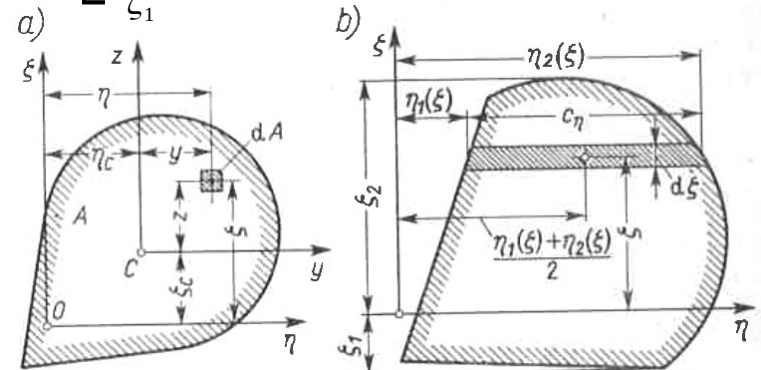
spełniona jest zależność:

$$J_{\eta\xi} = J_{yz} + A \eta_C \zeta_C, \quad (2.13)$$

Której znaczenie i zastosowanie jest takie samo jak wzorów Steinerja dla momentów J_η i J_ζ .

Dla momentu odśrodkowego można również wzór na obliczanie przez pojedyncze całkowanie:

$$J_{\eta\xi} = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} c_\eta (\eta_1 + \eta_2) \xi d\xi \quad (2.14)$$



Rys. Obliczanie momentu dewiacyjnego [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Wyznaczanie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności [Brzoska (1972)]

Określenie ilości i położenia osi centralnych

Założmy, że osie $O\eta$ i $O\zeta$ są centralne, tj. $\eta=y$, $\zeta=z$ oraz znane są centralne momenty bezwładności oraz centralny moment dewiacyjny:

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_{yz} = \int_A yz dA \quad (2.15a)$$

Wyznamy te wielkości dla układu osi y_α, z_α obróconego o kąt α względem pierwotnego.

Na podstawie rysunku możemy sformułować wzory na transformację współrzędnych do nowego układu:

$$y_\alpha = y \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (2.15b)$$

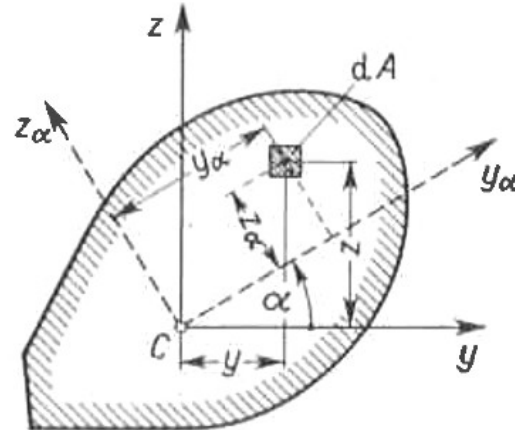
$$z_\alpha = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

Zgodnie z definicją momentu bezwładności względem osi Oy_α mamy:

$$(J_y)_\alpha = \int_A z_\alpha^2 dA, \quad (2.16)$$

Po podstawieniu do (2.16) z (2.15b) oraz uwzględnieniu (2.15a) otrzymamy:

$$(J_y)_\alpha = \frac{1}{2}(J_y + J_z) + \frac{1}{2}(J_y - J_z) \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.16a)$$



Rys. Obrót osi. Określenie głównych osi centralnych [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Wyznaczanie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności [Brzoska (1972)]

Określenie ilości i położenia osi centralnych c.d.

Postępując analogicznie dla momentu względem osi Oz_α zdefiniowanego wzorem:

$$(J_z)_\alpha = \int_A y_\alpha^2 dA \quad (2.17)$$

oraz dla momentu dewiacyjnego, określonego względem osi Oy_α i Oz_α , zdefiniowanego wzorem:

$$(J_{yz})_\alpha = \int_A y_\alpha z_\alpha dA, \quad (2.18)$$

otrzymamy wyrażenie na moment $(J_y)_\alpha$ (po obrocie):

$$(J_z)_\alpha = \frac{1}{2}(J_y + J_z) - \frac{1}{2}(J_y - J_z)\cos 2\alpha + J_{yz}\sin 2\alpha \quad (2.17a)$$

oraz moment dewiacyjny $(J_{yz})_\alpha$ liczony względem obróconych osi Oy_α i Oz_α

$$(J_{yz})_\alpha = \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\alpha + J_{yz}\cos 2\alpha \quad (2.18a)$$

Zależności (2.16a), (2.17a) oraz (2.18a) opisują wartości momentów bezwładności w funkcji kąta obrotu α . Gdy centralne osie są jednocześnie główne, wtedy $(J_{yz})_\alpha = 0$ i z (2.18a) dostaniemy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \quad (2.19)$$

Zwykle powyższe równanie daje w przedziale $(0, 2\pi)$ dwa rozwiązania $2\alpha_1$ i $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$.

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Wyznaczanie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności [Brzoska (1972)]

Określenie ilości i położenia osi centralnych c.d.

Wnioski:

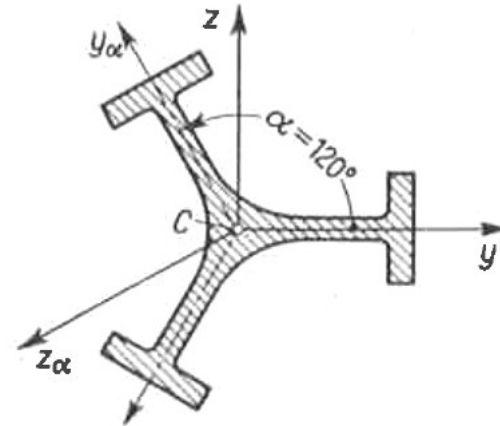
1. Dowolny więc przekrój ma na ogół tylko dwie centralne osie główne, określone kątami α_1 i α_2 i osie te są do siebie prostopadłe.

2. Wyjątkiem jest przekrój, dla którego jednocześnie zachodzi $J_{yz}=0$ oraz $J_y=J_z$, $\text{tg}2\alpha=„0/0”$ jest nieoznaczony, wtedy ze wzorów (2.16a-2.18a) wynika, że niezależnie od kąta α zachodzi:

$$(J_{yz})_{\alpha}=0 \quad \text{oraz} \quad (J_y)_{\alpha}=(J_z)_{\alpha}=J_y=J_z \quad (2.20)$$

Tak więc w tym (wyjątkowym) przypadku każda oś centralna jest osią główną, a moment bezwładności względem każdej z nich jest jednakowy.

Przekroje, które charakteryzują się własnościami opisanymi równaniami (2.20) są stosunkowo często spotykane w praktyce, należą do nich: przekrój kołowy, przekrój kwadratowy oraz **inne przekroje o więcej niż dwóch osiach symetrii** (patrz rysunek)



Rys. Przekrój o 3 osiach symetrii [Z.Brzoska (1972)]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Wyznaczanie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności [Brzoska (1972)]

Określenie ilości i położenia osi centralnych c.d.

Znając położenie osi głównych centralnych osi, określone kątami α_1 i α_2 , można wyznaczyć za pomocą (2.16a-2.18a) odpowiadające tym osi główne centralne momenty bezwładności:

$$\left. \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right\} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y - J_z)^2}{4} + J_{yz}^2} \quad (2.21)$$

Notka 1:

Można dowieść, że moment bezwładności wobec jednej z osi głównych to moment **maksymalny**, a wobec drugiej osi głównej – **minimalny**.

Wynika stąd, że zwykle, jesteśmy w stanie “na oko” stwierdzić, który z uzyskanych momentów, odpowiada, której z osi.

Notka 2:

Przedstawiona analiza stosuje się gdy układ osi nie jest centralny, wtedy we wzorach (2.16a-2.18a) należy wstawić współrzędne η , ζ zamiast y , z .

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Zagadnienie belki/łopaty o przekroju „materiałowo niejednorodnym”

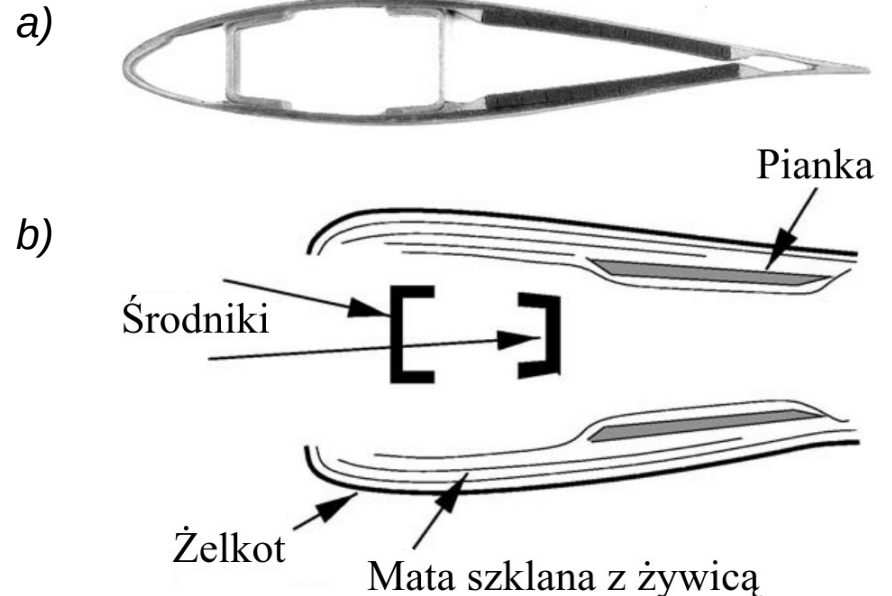
[M.O.L. Hansen (2008) „Aerodynamics of Wind Turbines”]

W przypadku konstrukcji metalowych (np. stalowych, aluminiowych, itd.) zwykle belki wykonane są z materiału jednorodnego, najczęściej o własnościach (w przybliżeniu) jednorodnych.

W przypadku, natomiast elementów wykonanych z kompozytów* (np. „laminatów”), struktura materiału z założenia jest niejednorodna. Zwykle, oprócz włókna (szklanego/węglowego) i żywicy syntetycznej, w przekroju możemy znaleźć pewne elementy wzmacniające/usztywniające jak pianki (np. poliuretanowe), czy kształtowniki (np. z aluminium).

***Materiał kompozytowy (kompozyt)** [Wikipedia] – materiał o strukturze niejednorodnej, złożony z dwóch lub więcej komponentów (faz) o różnych właściwościach. Właściwości kompozytów nigdy nie są sumą czy średnią właściwości jego składników. Najczęściej jeden z komponentów stanowi lepiszcze, które gwarantuje jego spójność, twardość i elastyczność, a drugi, tzw. komponent konstrukcyjny zapewnia odporność na ściskanie/rozciąganie.

Na rysunku a) poniżej pokazany został przekrój przez “przykładową” łopatę turbiny wiatrowej, materiały użyte do budowy łopaty w tym przekroju przedstawia schematycznie rysunek b).



Rys. Przekrój przez łopatę turbiny wiatrowej. Struktura [Hansen]

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Zagadnienie belki/łopaty o przekroju „materiałowo niejednorodnym”

[M.O.L. Hansen (2008) „Aerodynamics of Wind Turbines”]

Z rysunku na poprzednim slajdzie widzimy, że sztywność przekroju na zginanie, opisywana jako EJ , gdzie E – moduł Younga, J – moment bezwładności względem określonej osi (głównej i centralnej) przekroju jest opisem nie pasującym do zagadnienia.

W przypadku łopat turbin wprowadzamy pojęcie sztywności zastępczej (ekwiwalentnej), którą oznacza się jako $[EJ]$ lub $[EJ]_{eq}$.

W celu wyznaczenia środka sprężystości przekroju posłużymy się pojęciem momentu statycznego sztywności przekroju (zamiast momentu statycznego powierzchni przekroju). Momenty te, względem odpowiednich osi wyznaczmy z poniższych wzorów.

Moment statyczny względem osi $O\eta$:

$$[ES_{\eta}] = \int_A E \xi dA \quad (2.22)$$

Moment statyczny względem osi $O\xi$:

$$[ES_{\xi}] = \int_A E \eta dA \quad (2.23)$$

Sztywność wzdłużna belki (na rozciągania):

$$[EA] = \int_A E dA \quad (2.24)$$

Stąd współrzędne środka sprężystości $C_E = (\eta_{CE}, \xi_{CE})$

$$\eta_{C_E} = \frac{[ES_{\xi}]}{[EA]} \quad ; \quad \xi_{C_E} = \frac{[ES_{\eta}]}{[EA]} \quad (2.25a,b)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Zagadnienie belki/łopaty o przekroju „materiałowo niejednorodnym”

[M.O.L. Hansen (2008) „Aerodynamics of Wind Turbines”]

W sposób analogiczny liczymy momenty bezwładności sztywności przekroju.

Moment bezwładności sztywności względem osi $O\eta$:

$$[EJ_{\eta}] = \int_A E \zeta^2 dA \quad (2.26)$$

Moment bezwładności sztywności względem osi $O\zeta$:

$$[EJ_{\zeta}] = \int_A E \eta^2 dA \quad (2.27)$$

Moment dewiacyjny (odśrodkowy) sztywności:

$$[EJ_{\eta\zeta}] = \int_A E \eta \zeta dA \quad (2.28)$$

Jeżeli teraz wprowadzimy osie centralne x i y przechodzące przez środek sprężystości C_E , równoległe odpowiednio do osi $O\eta$ oraz $O\zeta$, to

momenty bezwładności względem tych osi można obliczyć wykorzystując wzory analogiczne do wzorów Steinera:

$$[EJ_y] = \int_A E z^2 dA = [EJ_{\eta}] - \zeta_{C_E}^2 [EA] \quad (2.29)$$

$$[EJ_z] = \int_A E y^2 dA = [EJ_{\zeta}] - \eta_{C_E}^2 [EA] \quad (2.30)$$

$$[EJ_{yz}] = \int_A E yz dA = [EJ_{\eta\zeta}] - \eta_{C_E} \zeta_{C_E} [EA] \quad (2.31)$$

Wyznaczanie kąta α w celu określenia położenia osi głównych centralnych, również odbywa się w sposób analogiczny do belek o przekroju materiałowo jednorodnym.

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Zagadnienie belki/łopaty o przekroju „materiałowo niejednorodnym”

[M.O.L. Hansen (2008) „Aerodynamics of Wind Turbines”]

Kąt α wyznaczmy ze wzoru:

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = -\frac{2[EJ_{yz}]}{[EJ_y] - [EJ_z]}, \quad (2.32)$$

stąd:

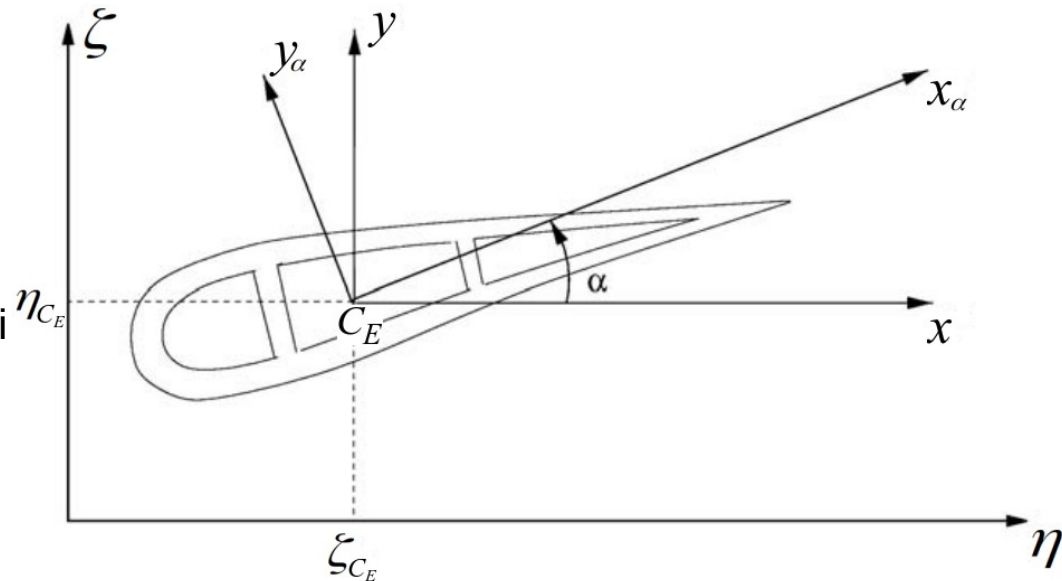
$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2[EJ_{yz}]}{[EJ_y] - [EJ_z]} \right), \quad (2.33)$$

a momenty bezwładności sztywności względem osi głównych i centralnych:

$$[EJ_1] = [EJ_y] - [EJ_{yz}] \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.34a)$$

$$[EJ_2] = [EJ_z] + [EJ_{yz}] \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.34b)$$

Można też użyć wzoru analogicznego do (2.21).



Rys. Główny i centralny układ współrzędnych

Łopata turbiny jako belka zginana

Charakterystyki przekroju poprzecznego zginanej belki (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Zagadnienie belki/łopaty o przekroju „materiałowo niejednorodnym”

[M.O.L. Hansen (2008) „Aerodynamics of Wind Turbines”]

Przydatne wzory

Oczywiście również w przypadku przekrojów materiałowo niejednorodnych momenty bezwładności sztywności można obliczyć za pomocą całek pojedynczych.

Jeśli całkę wyrażającą moment bezwładności sztywności

$$[EJ_{\eta}] = \int_A E \zeta^2 dA, \quad (2.26)$$

zapiszemy w postaci sumy całek:

$$\int_A E \zeta^2 dA = E_1 \int_{A_1} \zeta^2 dA + E_2 \int_{A_2} \zeta^2 dA + \dots \quad (2.35)$$

lub stosując inną notację:

$$\int_A E \zeta^2 dA = \sum_i E_i \int_{A_i} \zeta^2 dA, \quad (2.36)$$

To każdą z całek wchodzącą w skład sumy po prawej stronie równania można zastąpić całką pojedynczą (podobnie jak w (2.6))

$$[EJ_{\eta}] = \sum_i E_i \int_{A_i} \zeta^2 dA = \sum_i E_i \int_{\xi_{1,i}}^{\xi_{2,i}} c_{\eta,i} \zeta^2 d\xi \quad (2.37)$$

Przy czym A_1, A_2, \dots to fragmenty przekroju (składające się na całość powierzchni A) jednorodnie materiałowo. Materiał kolejnych fragmentów charakteryzuje moduł sprężystości wzdłużnej o wartości odpowiednio E_1, E_2, \dots itd.

Analogiczne wzory można zastosować do wyznaczenia $[EJ_{\zeta}]$ oraz $[EJ_{\eta\zeta}]$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

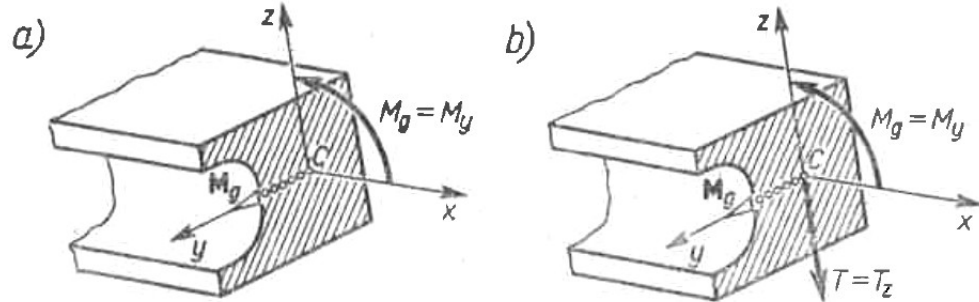
Czyste zginanie, zginanie poprzeczne [Brzoska (1972)]

Ze stanem *zginania prostego* mamy do czynienia wówczas, gdy w przekroju pręta występuje jedynie jedna niezerowa składowa momentu zginającego (w osiach *głównych centralnych* y, z), tj. tylko M_y albo tylko M_z .

Możemy wyróżnić **czyste zginanie**, które zachodzi wtedy gdy w przekroju pręta istnieje tylko moment zginający M_g , którego wektor jest prostopadły do osi pręta x (czyli leży w płaszczyźnie tegoż przekroju).

Drugim przypadkiem jest przypadek **zginania poprzecznego**, gdy wyężenie przekroju tworzą moment gnący M_g i siła poprzeczna T prostopadła do osi pręta, czyli leżąca w płaszczyźnie omawianego przekroju poprzecznego.

Ten drugi przypadek będzie występował w przypadku łopaty turbiny (zarówno o osi pionowej jak i poziomej), gdyż w tych przypadkach zginanie wywołane jest siłą poprzeczną



Rys. Przypadek czystego zginania (a) oraz zginania poprzecznego (b)

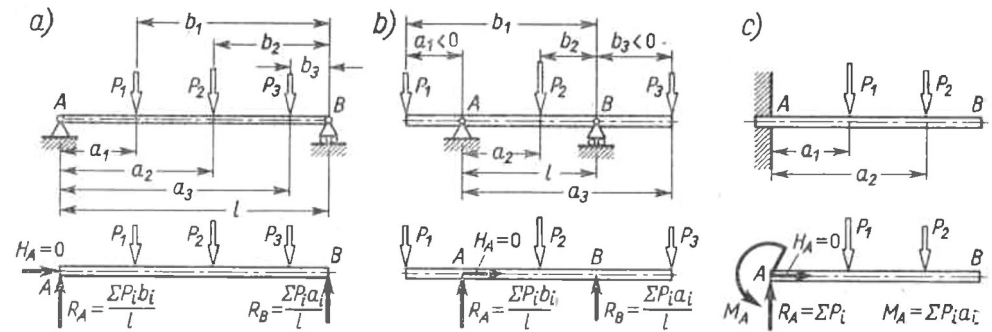
Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Belka z płaskim układem obciążeń [Brzoska (1972)]

Zginanie występuje, gdy obciążenie belki stanowi układ sił przecinających jego oś i do tej osi prostopadłych (rysunek). W tym miejscu założymy, że układ ten jest *płaski*. Układ obciążeń składa się z sił czynnych P_1, P_2, \dots i sił/momentów biernych (reakcji) R, H oraz M

Reakcje (dla belek statycznie wyznaczalnych) wyznacza się na podstawie trzech równań równowagi płaskiego układu sił, wobec czego, układ statycznie wyznaczalny może mieć tylko trzy reakcje, a pojedyncza belka może mieć tylko jedna z trzech postaci (patrz rysunek).



Rys. Podstawowe postaci belki statycznie wyznaczalnej: a) dwupodporowa; b) dwupodporowa z wysięgnikami; c) wspornikowa

Każda z wyżej pokazanych belek stanowi inny schemat obliczeniowy i może odpowiadać różnym konstrukcjom łopaty turbiny wiatrowej. Przykładowo: a), b) odpowiadają turbiną o osi poziomej, natomiast przypadek c) może odpowiadać łopacie turbiny o osi poziomej

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Przykłady konstrukcji turbin wiatrowych [xxx]



Rys. [<https://newatlas.com/energy/study-wind-turbines-behind-hills/>]

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Przykłady konstrukcji turbin wiatrowych [xxx]



Rys.
[<https://courses.ansys.com/index.php/courses/vertical-axis-wind-turbine-part-1/>]



Rys. [<https://re-cognition-project.eu/2021/07/07/vertical-axis-wind-turbine-status-of-activities-and-future-steps/>]

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących [Brzoska (1972)]

Rozkład sił wewnętrznych w belce jest konieczny w celu wyznaczenia naprężeń występujących w określonych przekrojach jak również gdy chcemy wyznaczyć linię ugięcia belki.

Sposób wyznaczania sił przypomnimy na przykładzie **0.a** belki obciążonej jak na rysunku 1. a). Reakcje w podporach (na podstawie równania równowagi sił) wynoszą wtedy odpowiednio:

$$R_A = \frac{Pb}{l} \quad , \quad R_B = \frac{Pa}{l} \quad , \quad (a)$$

Przeanalizujemy siły w przekroju C oraz w D.

Po "przekrojeniu" (myślowo) belki otrzymamy w miejscu przekroju dwa "lica" C' i C". Wytyżenie przekroju określamy w postaci siły T i momentu gnącego M_g. Siły działające na „odcinek pierwszy” belki AC' są przeciwnie skierowane w stosunku do sił działających na odcinek drugi C"B (rysunek 1.c).

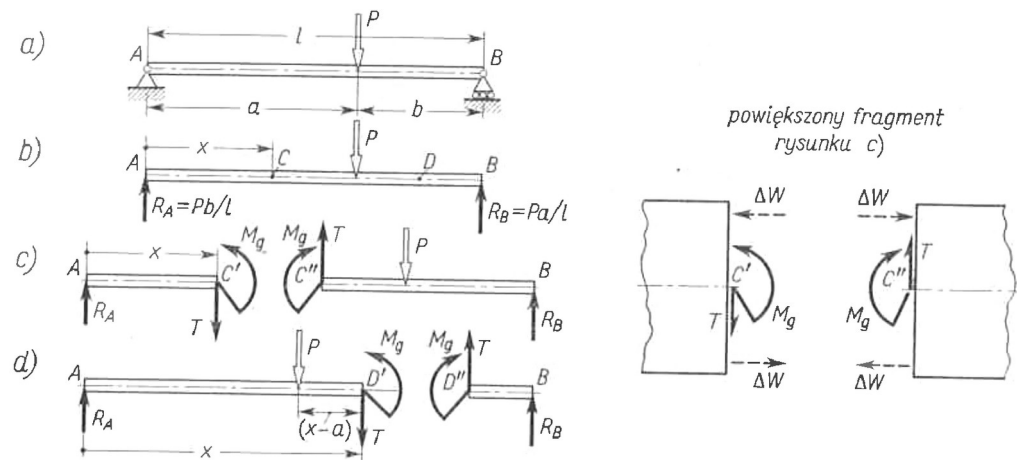
Wartości siły T oraz momentu M_g wyznaczamy stosując równania równowagi jednej z części belki (obojętnie której).

Przykładowo dla odcina AC', równanie składowych pionowych sił oraz momentów względem C' otrzymamy:

$$R_A - T = 0 \quad , \quad R_A x - M_g = 0$$

Stąd, po uwzględnieniu (a) otrzymamy:

$$T = R_A = \frac{Pb}{l} \quad , \quad M_g = R_A x = \frac{Pbx}{l} \quad (b)$$



Rys. 1. Określanie momentu gnącego

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących [Brzoska (1972)]

Dla przekroju D otrzymamy natomiast z równań równowagi:

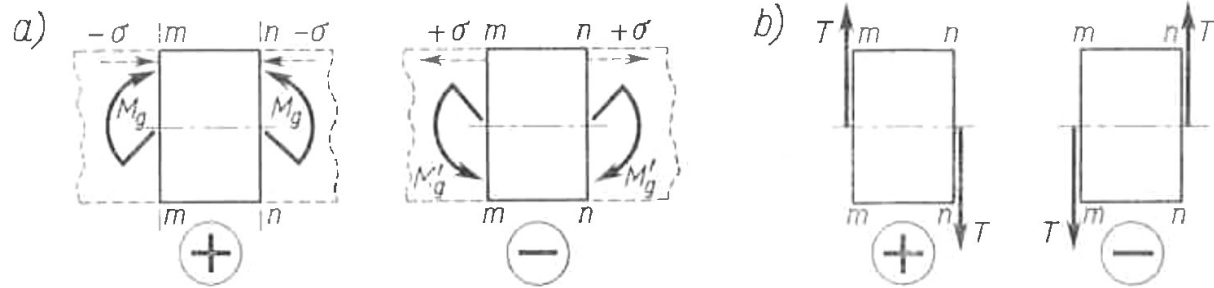
$$T = R_A - P, \quad M_g = R_A x - P(x - a), \quad (c)$$

a po uwzględnieniu (a):

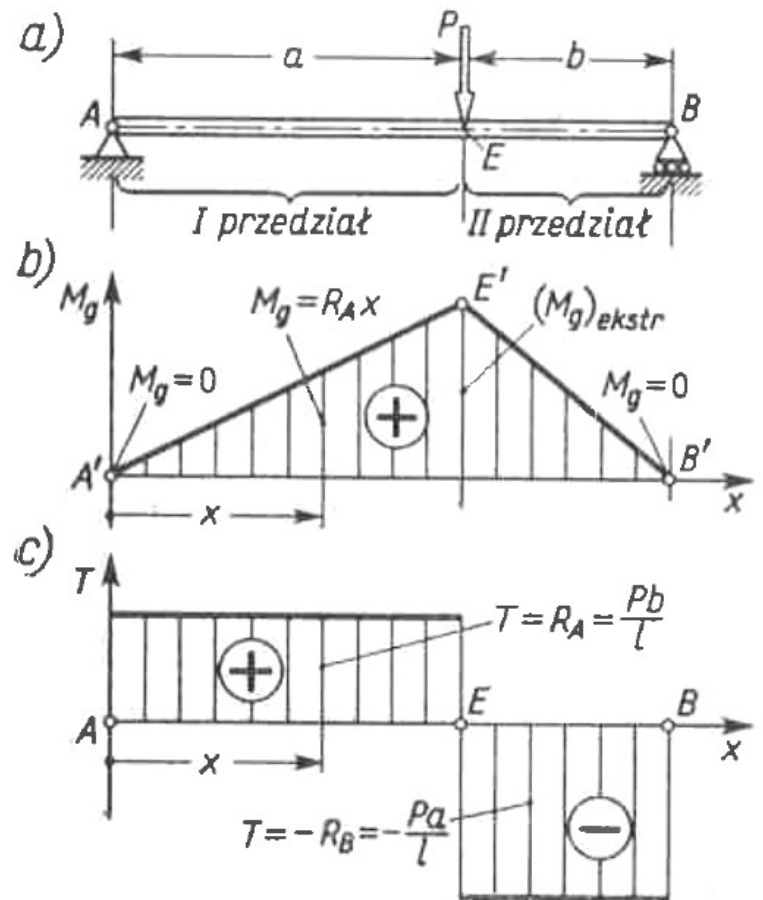
$$T = -\frac{Pa}{l} = -R_B, \quad M_g = \frac{Pbx}{l} - P(x - a) = R_B(l - x). \quad (d)$$

Minus przed wyrażeniem na T wynika z przyjętej konwencji znaków (patrz rysunek 3b).

Na podstawie wzorów opisujących przebieg sił zewnętrznych (b) i (d) można sporządzić wykresy sił tnących i momentów gnących dla zginanej belki (rys. 1a)



Rys. 2. konwencja znaków siły tnącej i momentu gnącego



Rys. 3. Wykresy siły tnącej i momentu gnącego

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących [Brzoska (1972)]

Przeanalizujemy jeszcze drugi przykład **0.b** – belki utwierdzonej z jednej strony (rysunek 4 a).

Dla wyznaczenia sił wewnętrznych obliczenie reakcji jest zbędne, jednak – w ogólności - reakcje są przydatne.

Równania równowagi sił i momentów (w utwierdzeniu):

$$R_B - ql = 0 \quad , \quad ql \frac{l}{2} + M_B = 0 \quad , \quad (e)$$

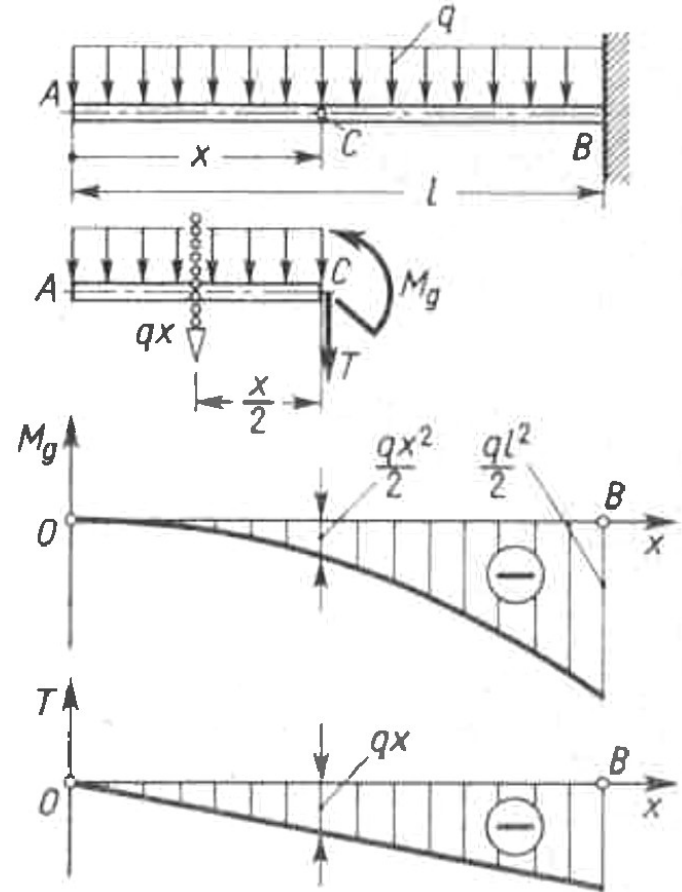
a stąd:

$$R_B = ql \quad , \quad M_B = -\frac{ql^2}{2} \quad . \quad (f)$$

„Przekrajamy” belkę przekrojem C. Na odcinek AC działa obciążenie ciągłe q . Działanie tego obciążenia jest – wg praw statyki - równoważne działaniu siły skupionej o wartości qx i przyłożonej w punkcie odległym o $x/2$ od przekroju C.

Z równania równowagi sił i momentów względem przekroju C dla wycinka AC dostaniemy:

$$T = -qx \quad , \quad (g) \quad M_g = -\left(qx\right)\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{qx^2}{2} \quad (f)$$



Rys. 4. Rozkład $T(x)$ i $M_g(x)$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących [Brzoska (1972)]

Na podstawie poprzedniego przykładu możemy doszukać się pewnych ogólnych zależności pomiędzy rozkładem obciążenia ciągłego $q=q(x)$ działającego na belkę, rozkładem siły tnącej $T=T(x)$, a przebiegiem funkcji momentu gnącego $M_g=M_g(x)$.

Przeanalizujemy elementarny "wycinek" CD belki (rys. 5), na który działają:

- zewnętrzne obciążenie ciągłe q o wypadkowej $q dx$,
- siły wewnętrzne w przekroju $m-m$ o wypadkowej T i momencie M_g ,
- siły wewnętrzne w przekroju $n-n$ o wypadkowej $T+dT$ i momencie M_g+dM_g ,

Z warunku równowagi sił otrzymamy:

$$T - q dx - (T + dT) = 0,$$

skąd otrzymamy zależność:

$$\frac{dT}{dx} = -q, \quad (2.38)$$

wiązącą pochodną siły tnącej z lokalną wartością obciążenia ciągłego $q(x)$:

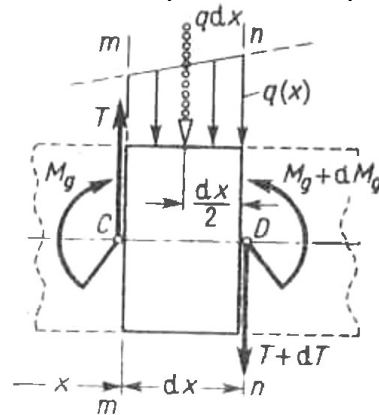
Z warunku równowagi momentów względem punktu D otrzymamy natomiast:

$$M_g + T dx - (q dx) (dx/2) - (M_g + dM_g) = 0$$

Skąd po pominięciu małej drugiego rzędu, czyli $q dx^2/2$, otrzymamy zależność:

$$\frac{dM_g}{dx} = T, \quad (2.39)$$

która wiąże pochodną momentu gnącego M_g z lokalną wartością siły tnącej $T(x)$.



Rys. 5. Analiza równowagi elementarnego wycinka poddanego działaniu obciążenia ciągłego $q(x)$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących [Brzoska (1972)]

Po zróżniczkowaniu ostatniego równania otrzymamy:

$$\frac{d^2 M_g}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q \quad (2.40)$$

Zależności (2.38-2.40) wiążą ze sobą przebiegi obciążenia ciągłego $q(x)$, siły tnącej $T(x)$ oraz momentu gnącego $M_g(x)$.

Metoda wyznaczania sił wewnętrznych użyta w dwóch wcześniej omówionych przykładach jest prosta do zastosowania, gdy potrafimy wyznaczyć obciążenie statycznie ekwiwalentne. Możemy metodę stosować do prostych rozkładów obciążenia ciągłego (rozkład stały – prostokątny, rozkład trójkątny i trapezowy).

W przypadku, gdy funkcja $q(x)$ jest nieliniowa, na przykład opisana wielomianem, wyznaczenie sił wewnętrznych nie jest już takie proste.

Wzór (2.40) pozwala na określanie sił tnących i momentów poprzez całkowanie funkcji $q(x)$.

Jeśli obciążenie jest zadane funkcją analityczną, całkowaną, znalezienie sił i momentów wewnętrznych powinno być prostym zadaniem.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 1. rozkład obciążenia ciągłego $q(x)$ na łopacie turbiny o długości 61,5m określony jest funkcją (a), rys. 1. Wyznacz rozkład sił tnących i momentów gnących w łopacie (zakładamy płaski stan obciążeń),

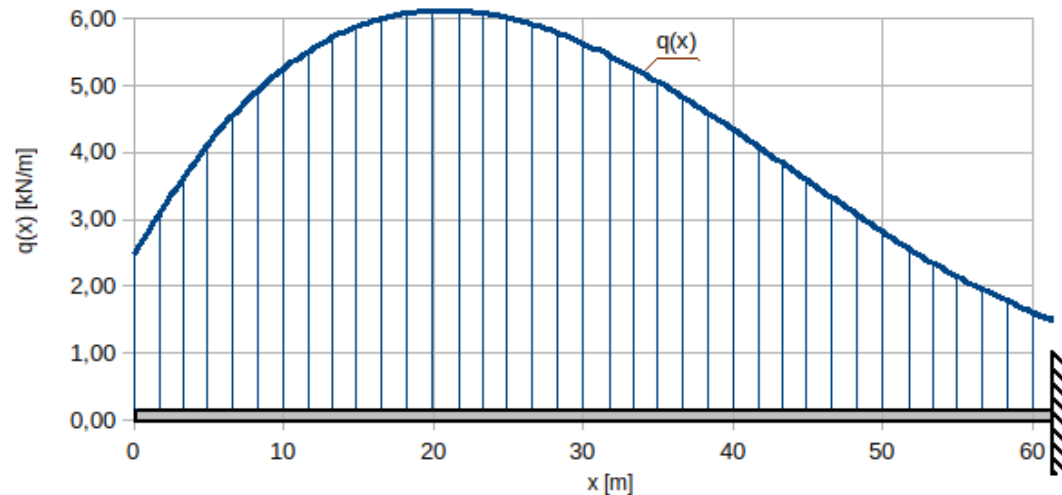
$$q(x) = -0,000093x^3 - 0,01235x^2 + 0,39178x + 2,48062 \quad [\text{kN/m}] \quad (\text{a})$$

Co możemy zapisać jako:

$$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad [\text{kN/m}] \quad (\text{a.1})$$

gdzie:

a =	0,000093
b =	-0,01235
c =	0,39178
d =	2,48062



Rys. 1. Rozkład obciążenia ciągłego $q(x)$ na belce (łopacie turbiny).

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 1. Rozwiązanie

Rozkład siły tnącej wyznaczmy ze wzoru:

$$\frac{dT}{dx} = -q \quad , \quad \text{stad:} \quad T = - \int q(x) dx \quad ,$$

a po uwzględnieniu (a.1):

$$T = - \int (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \quad . \quad (b)$$

Po scałkowaniu otrzymamy równanie opisujące rozkład siły tnącej:

$$T(x) = -\frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{3}x^3 - \frac{c}{2}x^2 - d \cdot x + A \quad (c)$$

Gdzie A jest stałą całkowania, która będzie wyznaczona na podstawie warunków brzegowych.

Znając funkcję $T(x)$ można, posługując się równaniem (2.39) wyznaczyć funkcję przebiegu momentów gnących.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 1. Rozwiązanie (c.d. 2)

Przywołajmy równanie (2.39):

$$\frac{dM_g}{dx} = T(x) \quad , \quad \text{stad: } M_g = \int T(x) dx$$

Po podstawieniu wyrażenia (c), uzyskamy:

$$M_g = \int \left(-\frac{a}{4} x^4 - \frac{b}{3} x^3 - \frac{c}{2} x^2 - d \cdot x + A \right) dx \quad (d)$$

Po scałkowaniu powyższego równania otrzymamy równanie opisujące funkcję $M_g(x)$:

$$M_g(x) = -\frac{a}{20} x^5 - \frac{b}{12} x^4 - \frac{c}{6} x^3 - \frac{d}{2} \cdot x^2 + Ax + B \quad (e)$$

Gdzie B jest stałą całkowania, którą podobnie jak stałą A wyznaczymy w oparciu o warunki brzegowe

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 1. Rozwiązanie (c.d. 3)

Stałe A i B wyznaczmy w oparciu o warunek na swobodnym końcu belki.

Na swobodny koniec belki działa jedynie obciążenie ciągłe q . Do swobodnego końca nie ma przyłożonej siły skupionej. W związku z tym siła tnąca na $T(0)$ wynosi zero. Stąd, z równania (c) , otrzymamy:

$$T(0) = A = 0$$

Czyli funkcja rozkładu siły tnącej będzie ostatecznie

$$T(x) = -\frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{3}x^3 - \frac{c}{2}x^2 - d \cdot x \quad [\text{kN}] \quad (\text{c.1})$$

W celu wyznaczenia stałej B skorzystamy również z warunku brzegowego na końcu swobodnym. Do swobodnego końca nie ma przyłożonego momentu skupionego w związku z tym $M_g(0)$ wynosi zero:

$$M_g(0) = B = 0 \quad ,$$

a równanie (e) będzie miało postać:

$$M_g(x) = -\frac{a}{20}x^5 - \frac{b}{12}x^4 - \frac{c}{6}x^3 - \frac{d}{2} \cdot x^2 \quad [\text{kNm}] \quad (\text{e.1})$$

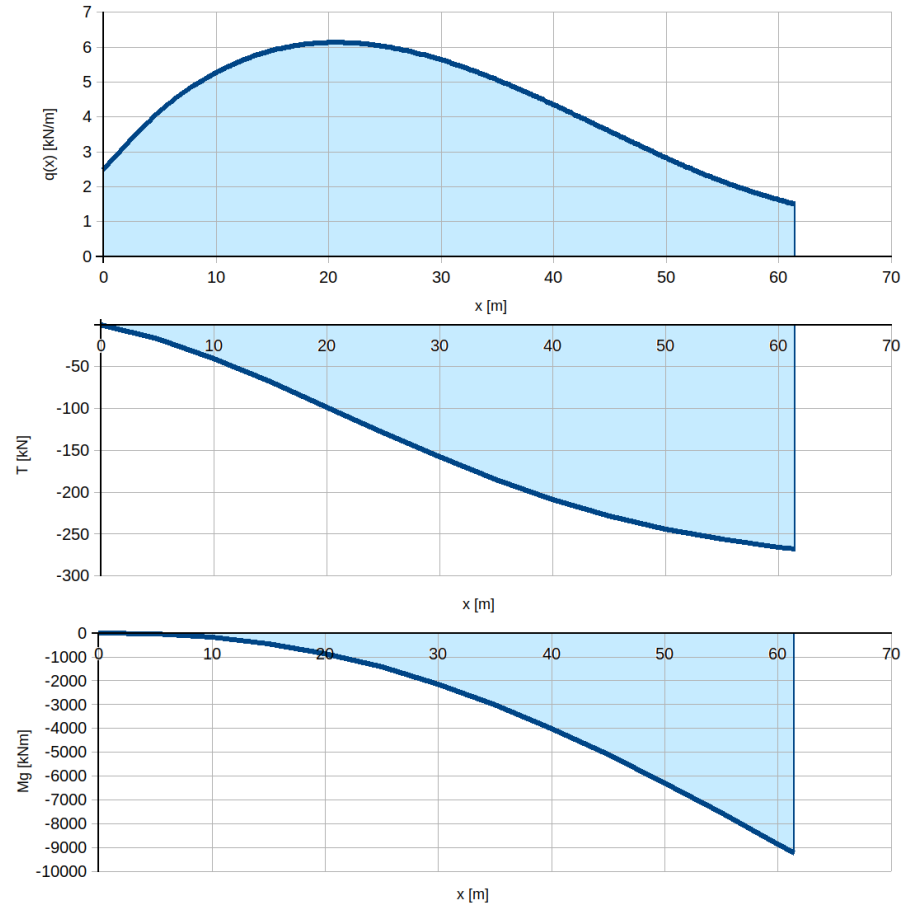
Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 1. Rozwiązanie (c.d. 4)

Wykresy sił tnących i momentów gnących pokazane zostały na rysunku obok.



Rys. 2. Wykresy $q(x)$, $T(x)$ oraz $M_g(x)$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

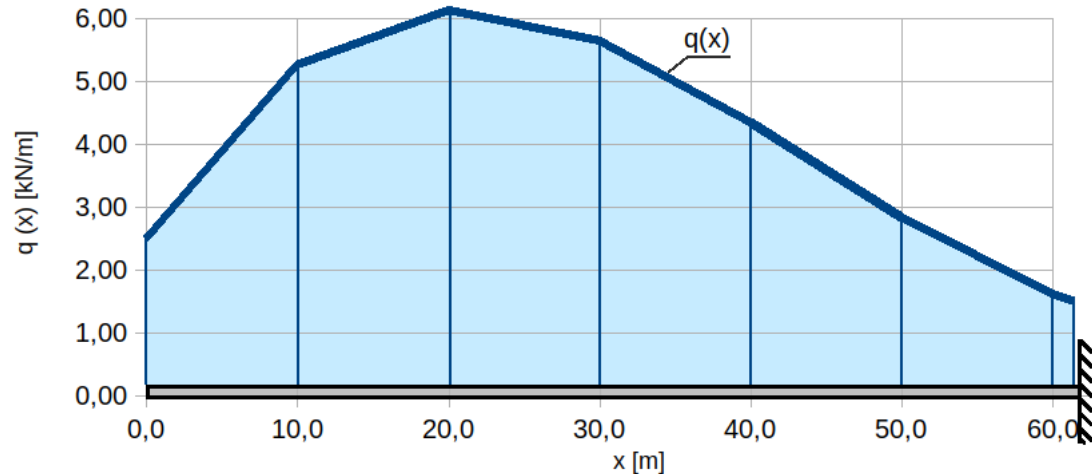
Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 2. Rozkład obciążenia ciągłego zdefiniowany na łopacie - belce utwierdzonej jednostronnie – określony jest tabelarycznie (Tabela 1, Rys. 1).

Wyznacz rozkład sił tnących i momentów gnących w belce.

Tabela 1. Rozkład obciążenia ciągłego

i	x [m]	q(x) [kN/m]
1	0,0	2,48
2	10,0	5,26
3	20,0	6,12
4	30,0	5,63
5	40,0	4,34
6	50,0	2,82
7	60,0	1,62
8	61,5	1,50



Rys. 1. Rozkład obciążenia ciągłego na podstawie tabeli obok.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 2. Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie skorzystamy tutaj ze wzorów całkowych. Różnica polega na tym, iż nie jesteśmy w stanie policzyć całki analitycznie, więc będziemy wyznaczać wartości $T(x)$ i $M_g(x)$ na drodze całkowania numerycznego dla kolejnych wartości x_i .

Możemy to zapisać w postaci poniższych całek oznaczonych. Siła tnąca w punktach x_i będzie obliczana ze wzoru:

$$T(x_i) = - \int_0^{x_i} q(x) dx \quad (a)$$

Natomiast moment gnący będzie liczony jako:

$$M_g(x_i) = \int_0^{x_i} T(x) dx \quad (b)$$

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Obliczenia $T(x_i)$ oraz $M_g(x_i)$

i	x [m]	$q(x)$ [kN/m]	$T(x)$ [kN]	$M_g(x)$ [kNm]
1	0,0	2,48	0,0	0,0
2	10,0	5,26	-38,7	-193,4
3	20,0	6,12	-95,6	-864,7
4	30,0	5,63	-154,3	-2114,1
5	40,0	4,34	-204,2	-3906,7
6	50,0	2,82	-240,0	-6127,7
7	60,0	1,62	-262,2	-8638,6
8	61,5	1,50	-264,5	-9033,6

Kolejne wartości siły tnącej $T(x_i)$ obliczono ze wzoru:

$$T(x_i) = T(x_{i-1}) - \frac{1}{2} [q(x_i) + q(x_{i-1})] \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (c)$$

Wartości momentu gnącego $M_g(x_i)$ posługując się podobną formułą:

$$M_g(x_i) = M_g(x_{i-1}) + \frac{1}{2} [T(x_i) + T(x_{i-1})] \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (d)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Określanie momentów gnących i sił tnących

Przykład 2. Rozwiązanie (c.d. 2)

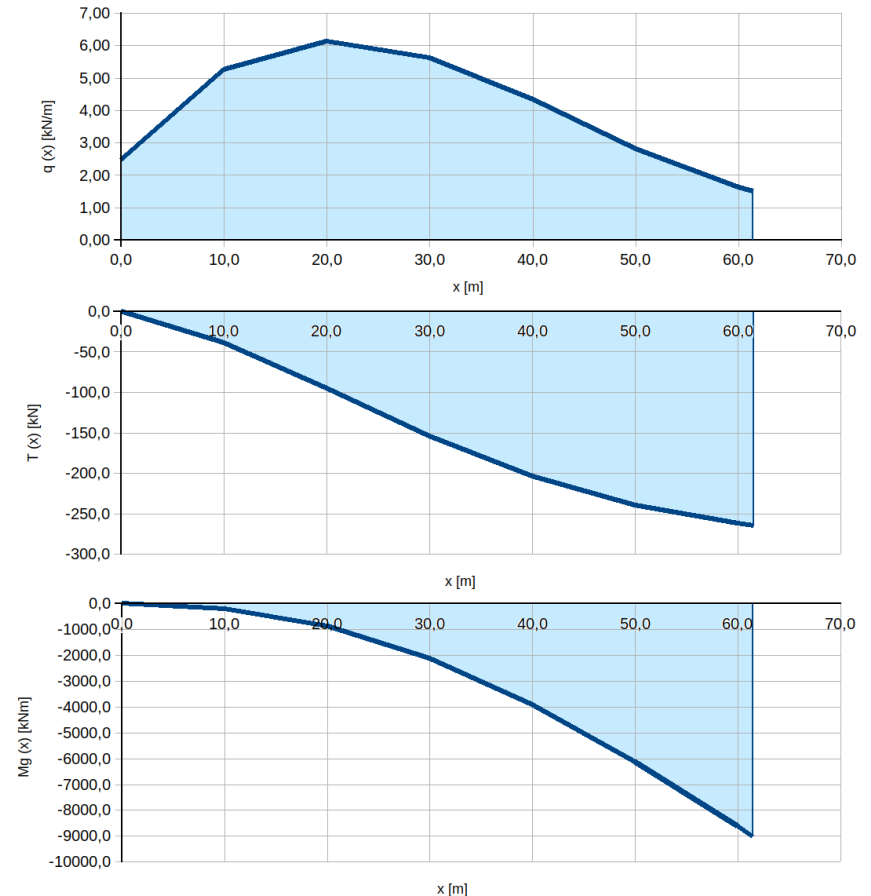
Notka 1: Wzory (c) i (d) przedstawiają całkowanie metodą trapezów (z założeniem, że podprzedziały mogą być różnej długości).

Notka 2: Wartości „początkowe” (brzegowe) $T(x_1)$ i $M_g(x_1)$ zostały wyznaczone z warunku brzegowego na swobodnym końcu (patrz Przykład 1)

Notka 3: Należy zauważyć, iż w “rzeczywistości” informacja o rozkładzie obciążenia podawana jest na podstawie pomiarów w punktach/przekrojach i należy się spodziewać, że forma “pierwotna” danych obciążenia będzie w formie tabeli, a nie wielomianów.

Wykresy siły tnącej $T(x)$ i momentu gnącego $M_g(x)$ pokazano obok (na Rys. 2).

Notka 4: Porównać wyniki z Przykładem 1.



Rys. 2. Wykresy $q(x)$, $T(x)$ oraz $M_g(x)$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Linia ugięcia belki [Brzoska (1972)]

Na podstawie analizy sił/odkształceń w elemencie belki poddanej czystemu zginaniu [Brzoska (1972) rozdz. 5.5] można wyznaczyć relację pomiędzy promieniem zakrzywienia warstwy obojętnej podczas zginania ρ a wielkością momentów gnących w danym przekroju (rys.1):

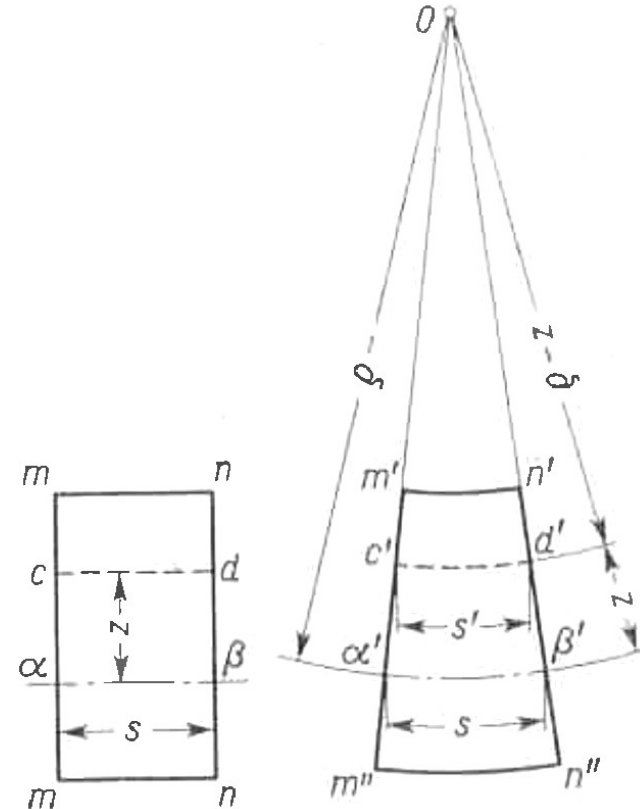
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ_y} \quad (2.41)$$

Z geometrii różniczkowej znamy natomiast relację pomiędzy promieniem ρ a odpowiednimi pochodnymi linii ugięcia $w(x)$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \quad (2.42)$$

a zakładając małe ugięcia, po pominięciu w'^2 , dostaniemy:

$$\frac{1}{\rho} = w'' \quad (2.43)$$



Rys. 1. Określenie odkształceń względnych warstwy obojętnej $\alpha\beta$ oraz włókna cd odległego o z od tej warstwy

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Linia ugięcia belki [Brzoska (1972)]

Po podstawieniu z (2.43) do (2.41) otrzymamy:

$$w'''' = \frac{M_g(x)}{EJ_y} \quad (2.44)$$

Jest to zlinearyzowana postać równania ugięcia belki powszechnie używana w wytrzymałości materiałów.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że kąt ugięcia belki (wyrażony w radianach), można, w przybliżeniu, wyznaczyć ze wzoru:

$$\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = w' \quad (2.45)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Linia ugięcia belki [Brzoska (1972)]

W kolejnym przykładzie skorzystamy z wyników przykładu **0.b**, analizowanego na poprzednim wykładzie (rys. 2). W wyniku otrzymaliśmy rozkład sił tnących i momentów gnących jak niżej (uwaga: zmieniona „numeracja” równań):

$$T = -qx, \quad (a) \quad M_g = -\frac{qx^2}{2} \quad (b)$$

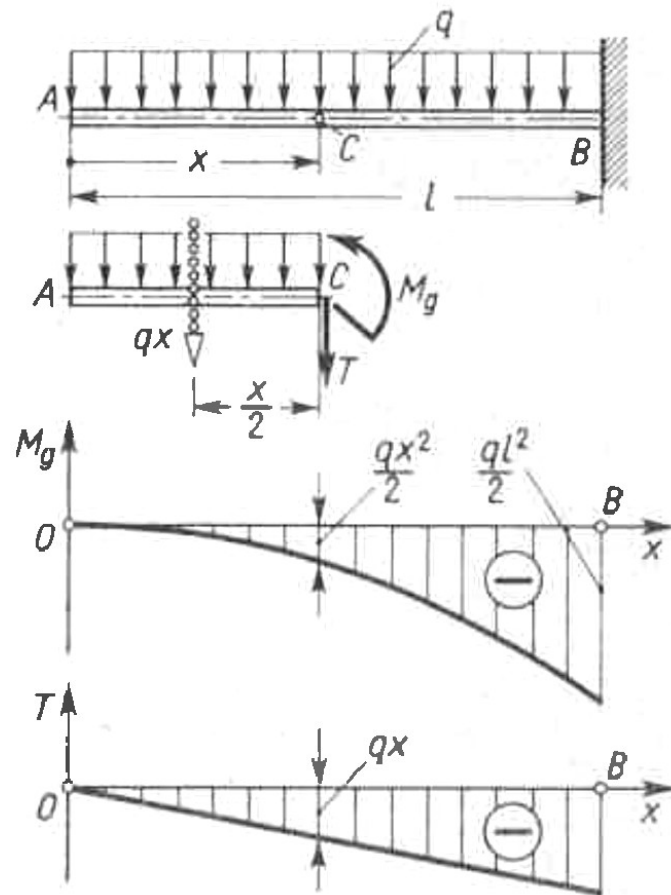
Przykład 3. Wyznacz kąt ugięcia ϑ oraz linię ugięcia w belki opisanej w przykładzie **0.b**.

Rozwiązanie: W celu uzyskania rozwiązania skorzystamy z równania ugięcia (2.44):

$$w'' = \frac{M_g(x)}{EJ_y} \quad (2.44)$$

Podstawiając z (b) do (2.44) otrzymamy:

$$w'' = -\frac{1}{EJ_y} \frac{qx^2}{2} \quad (c)$$



Rys. 2. Rozkład $T(x)$ i $M_g(x)$ z **0.b**

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Linia ugięcia belki [Brzoska (1972)]

Przykład 3. Rozwiązanie c.d.

W pierwszym kroku całkowania równania (c) otrzymamy kąt ugięcia belki:

$$\vartheta = w' = -\frac{1}{EJ_y} \int \frac{qx^2}{2} dx = -\frac{1}{EJ_y} \frac{qx^3}{6} + C. \quad (d)$$

Natomiast linię ugięcia uzyskamy obliczając całkę z rozwiązania (d):

$$w = -\frac{1}{EJ_y} \int \left(\frac{qx^3}{6} + C \right) dx ,$$

co w wyniku da nam:

$$w = -\frac{1}{EJ_y} \left(\frac{qx^4}{24} + Cx + D \right). \quad (e)$$

Stałe całkowania C i D wyznaczmy na podstawie warunków brzegowych.

Kąt ugięcia belki jest określony w miejscu utwierdzenia belki (przekrój B na rys. 2). Stąd mamy dla $x=l$ kąt ugięcia $\vartheta=0$, co po uwzględnieniu (d) da:

$$0 = -\frac{1}{EJ_y} \frac{ql^3}{6} + C \quad , \text{ a stąd: } C = \frac{ql^3}{6EJ_y}$$

Po podstawieniu wyrażeniu na D do wzoru (d) otrzymamy:

$$\vartheta = -\frac{q}{6EJ_y} (x^3 - l^3). \quad (d.1)$$

Sformułujmy kolejny warunek brzegowy, który posłuży do wyznaczenia stałej całkowania D

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Wiadomości wstępne (powtórka z wytrzymałości materiałów)

Linia ugięcia belki [Brzoska (1972)]

Przykład 3. Rozwiązanie c.d. 2

Ugięcie belki w miejscu utwierdzenia jest równe zero, czyli dla $x=l$ mamy $w=0$, stąd na podstawie (e) :

$$0 = -\frac{1}{EJ_y} \left(\frac{ql^4}{24} + \frac{ql^4}{6} + D \right),$$

a po uporządkowaniu:

$$D = -\frac{5ql^4}{24}.$$

Po podstawieniu do (e) otrzymamy:

$$w = -\frac{q}{24 EJ_y} (x^4 + 4l^3 x - 5l^4). \quad (\text{e.1})$$

Korzystając ze wzorów (d.1) i (e.1) można, przykładowo, wyznaczyć kąt ugięcia oraz ugięcie na swobodnym końcu belki $x=0$ (przekrój A, rys. 2).

Kąt ugięcia na swobodnym końcu wyniesie:

$$\vartheta(0) = -\frac{q}{6 EJ_y} (0^3 - l^3) = \frac{ql^3}{6 EJ_y},$$

natomiast ugięcie w tym przekroju wyniesie:

$$w(0) = -\frac{q}{24 EJ_y} (0^4 + 4l^3 \cdot 0 - 5l^4) = \frac{5ql^4}{24 EJ_y}.$$

[Tu jeszcze slajd z rozkładem z wykresami]

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [Jonkman J. (2009) NREL report]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

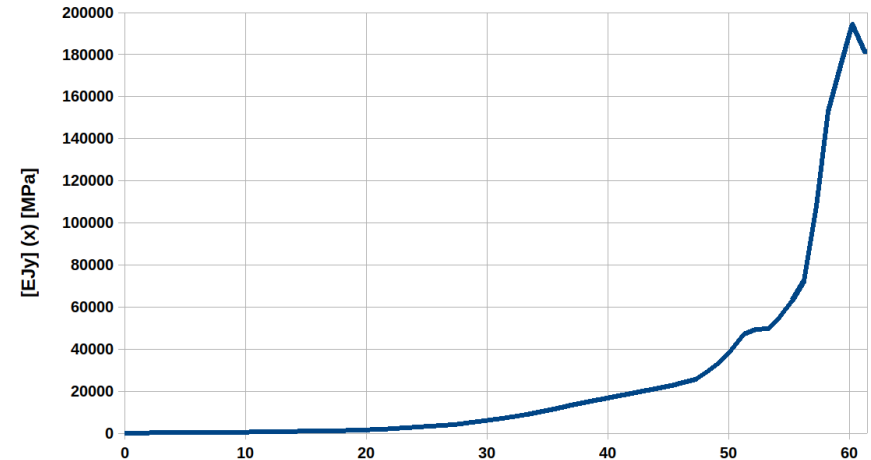
Do tej pory przedstawiając równanie ugięcia belki (2.44) milcząco zakładaliśmy, że funkcją zmienną po długości belki jest jedynie rozkład obciążenia $q(x)$ oraz, w konsekwencji, zmienny jest rozkład momentów gnących $M_g(x)$. Takie zagadnienia są bardzo często spotykane w technice i dobrze opisane w podręcznikach do wytrzymałości materiałów.

W przypadku łopaty turbiny o osi poziomej zmienny jest również rozkład sztywności łopaty $[EJ_y](x)$.

Gdy rozkład obciążenia da się opisać w formie wielomianu $q=W_q(x)$, a rozkład sztywności przekrojów poprzecznych da się opisać funkcją będącą odwrotnością wielomianu $[EJ_y](x)=1/W_{EJ_y}(x)$, wtedy rozwiązanie równania ugięcia belki będzie całką iloczynu wielomianów, czyli będzie można uzyskać rozwiązanie analityczne tego równania.

Przypadek „rzeczywisty” łopaty turbiny

W praktyce, w przypadku turbin wiatrowych dużej mocy, funkcja sztywności $[EJ_y](x)$ jest na tyle złożona (zmienna wzdłuż x), że nie da się jej przedstawić w postaci prostej funkcji analitycznej. Rozwiązanie równania ugięcia belki uzyskuje się wtedy na drodze całkowania numerycznego.



Rys. 3 Rozkład sztywności $EJ_y(x)$ przekroju poprzecznego łopaty turbiny [Jonkman J. (2009)].

Łopata turbiny jako belka zginana

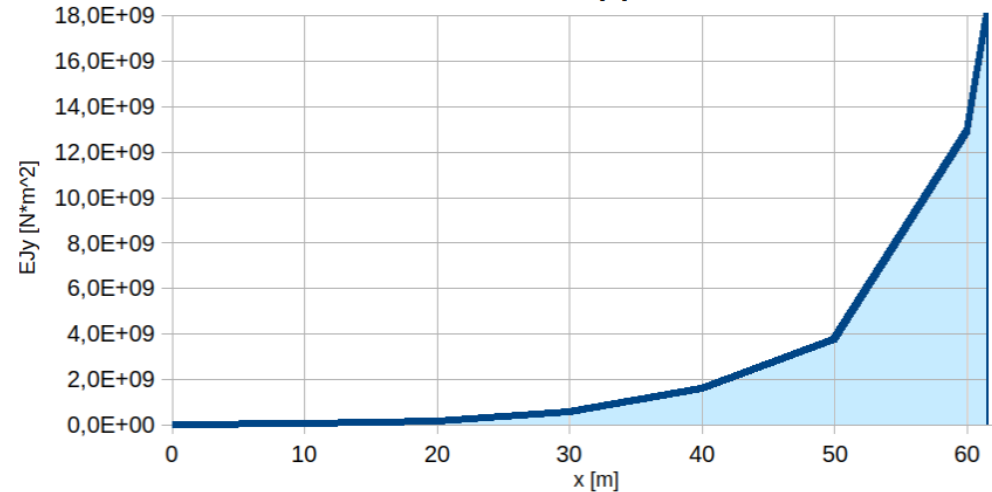
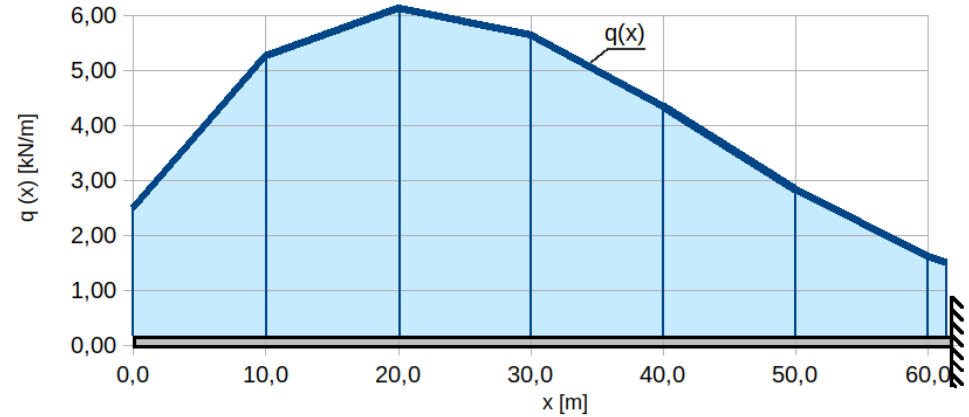
Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [własne]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

Przykład 4. Wyznacz linię ugięcia łopaty turbiny wiatrowej (5MW) o osi pionowej i średnicy $D_T=128\text{m}$. Rozkład obciążenia oraz rozkład sztywności przekroju określony jest w tabeli 1, Rys. 4. Długość łopaty $l=61,5\text{m}$

Tabela 1. Rozkład obciążenia ciągłego $q(x)$ oraz rozkład sztywności przekroju poprzecznego $EJ_y(x)$

i	x [m]	$q(x)$ [kN/m]	$EJ_y(x)$ [N·m ²]
1	0,0	2,48	0,0139e+9
2	10,0	5,26	0,0517e+9
3	20,0	6,12	0,1477e+9
4	30,0	5,63	0,5630e+9
5	40,0	4,34	1,5863e+9
6	50,0	2,82	3,7636e+9
7	60,0	1,62	12,9211e+9
8	61,5	1,50	18,1100e+9



Rys. 4 Rozkład obciążenia ciągłego $q(x)$ oraz sztywności $EJ_y(x)$ przekroju poprzecznego łopaty turbiny

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [własne]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

Przykład 4. Rozwiązanie

W celu rozwiązania zadania (wyznaczenia linii ugięcia) skorzystamy z wyników - rozkładu $M_g(x)$ - uzyskanych z przykładu 2 (ten sam układ obciążeń, długość belki i warunki podparcia).

Tabela 2. Obliczenia kąta ugięcia $\vartheta(x)$ oraz linii ugięcia belki $w(x)$

i	x [m]	$q(x)$ [kN/m]	$M_g(x)$ [Nm]	$EJ_y(x)$ [N·m ²]	$M_g(x)/EJ_y(x)$	\int_1	$\vartheta=\int_1+C$ [rad]	\int_2	$w=\int_2+D$ [m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0	2,48	0,0	0,0139e+9	0,000000	0,0000	0,1786	0,0000	-4,7069
2	10,0	5,26	-193,4e+3	0,0517e+9	-0,003737	-0,0187	0,1599	1,6923	-3,0146
3	20,0	6,12	-864,7e+3	0,1477e+9	-0,005853	-0,0666	0,1119	3,0515	-1,6555
4	30,0	5,63	-2114,1e+3	0,5630e+9	-0,003755	-0,1147	0,0639	3,9307	-0,7763
5	40,0	4,34	-3906,7e+3	1,5863e+9	-0,002463	-0,1458	0,0328	4,4142	-0,2927
6	50,0	2,82	-6127,7e+3	3,7636e+9	-0,001628	-0,1662	0,0124	4,6401	-0,0668
7	60,0	1,62	-8638,6e+3	12,9211e+9	-0,000669	-0,1777	0,0009	4,7063	-0,0007
8	61,5	1,50	-9033,6e+3	18,1100e+9	-0,000499	-0,1786	0,0000	4,7069	0,0000

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [Jonkman J. (2009) NREL]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

Przykład 4. Rozwiązanie c.d.

Omówienie sposobu rozwiązania (patrz [Tabela 2](#)).

Kolumny 1,2,3 i 5 tabeli 2 to wielkości dane, odpowiednio: nr węzła i , odcięta x , obciążenie ciągłe q oraz sztywność EJ_y . Do kolumny 4 został przepisany z Przykładu 2 Moment gnący M_g . Mając rozkład $M_g(x)$ oraz $EJ_y(x)$ można rozwiązać równanie linii ugięcia:

$$w'' = \frac{M_g(x)}{EJ_y(x)} \quad (2.44)$$

Iloraz $M_g(x)/EJ_y(x)$ został obliczony w kolumnie 6.

W celu uzyskania kąta ugięcia $\vartheta = w'$ należy scałkować (2.44):

$$\vartheta(x) = w' = \int_0^x \frac{M_g(x)}{EJ_y(x)} dx + C \quad (a)$$

Całka po prawej stronie równania (2) została oznaczona jako \int_1 , a jej wyniki dla kolejnych węzłów umieszczono w kolumnie 7. Z warunku brzegowego w utwierdzeniu $x=61,5\text{m}$ (węzeł $i=8$) wynika, że w tym węźle:

$$\vartheta(61,5\text{ m}) = 0 \quad , \text{ a stąd: } C = 0,1786 \text{ rad}$$

Uzyskany, po podstawieniu wartości C do (a), kąt ugięcia ϑ znajduje się w kolumnie 8.

W celu uzyskania linii ugięcia $w(x)$ należy scałkować uzyskaną funkcję $\vartheta(x)$.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [własne]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

Przykład 4. Rozwiązanie c.d. 2

Linia ugięcia obliczymy ze wzoru:

$$w(x) = \int_0^x \vartheta(x) dx + D \quad (b)$$

Wynik obliczenia całki po prawej stronie równania (b), oznaczonej jako \int_2 , umieszczono w kolumnie 9. Stałą całkowania D wyznaczymy z warunków brzegowych.

Z warunku brzegowego w utwierdzeniu $x=61,5\text{m}$ (węzeł $i=8$) wynika, że w tym węźle ugięcie jest zerowe, a zatem:

$$w(61,5\text{ m}) = 0 \quad , \quad \text{stąd: } D = -4,7069 \text{ m}$$

Po uwzględnieniu wartości D otrzymamy funkcję ugięcia $w(x)$ – kolumna 10

Na podstawie analizy wyników kąta ugięcia $\vartheta(x)$ (kolumna 8) oraz ugięcia $w(x)$ – kolumna 10, można odczytać wartości maksymalne kąta oraz strzałkę ugięcia:

$$\vartheta_{max} = |\vartheta(0)| = 0,179 \text{ rad}$$

$$w_{max} = |w(0)| = 4,71 \text{ m}$$

Wniosek: wierzchołek łopaty turbiny pod wpływem sił aerodynamicznych - obciążenia $q(x)$ - przemieści się o około 5m. Jest to w przybliżeniu wartość odpowiadająca wymiarowi średnicy wieży turbiny.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [własne]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

Przykład 4. Rozwiązanie c.d. 3

Wyniki funkcji kąta ugięcia $\vartheta(x)$ oraz linii ugięcia $w(x)$ pokazano na rysunku 5 (obok)

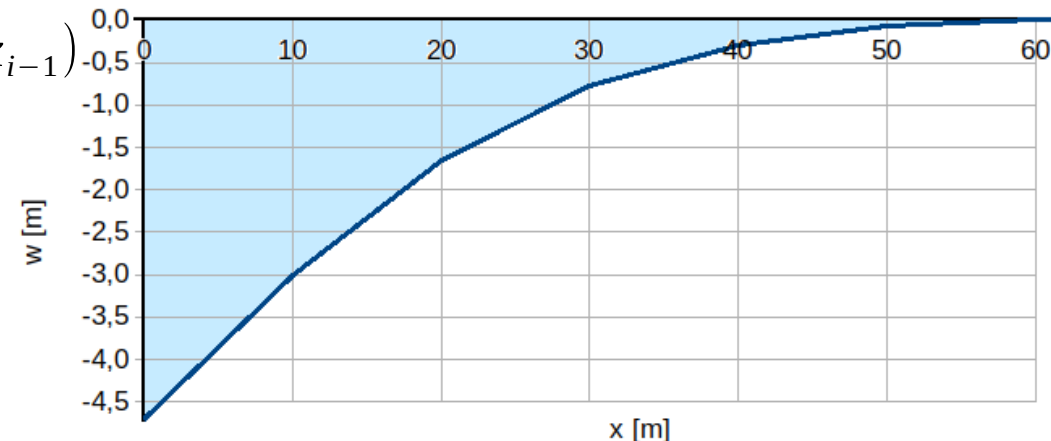
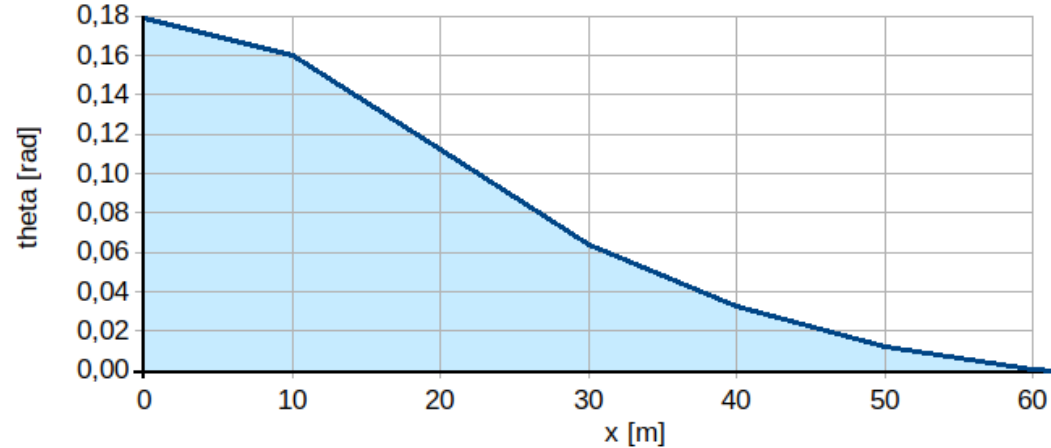
Notka: Całkowanie, podobnie jak w przykładzie 2, przeprowadzono za pomocą metody trapezów:

$$\int_1(x_i) = \int_1(x_{i-1}) + \frac{1}{2} [w''(x_i) + w''(x_{i-1})] \cdot (x_i - x_{i-1})$$

gdzie: $w''(x) = \frac{M_g(x)}{EJ_y(x)}$

$$\int_2(x_i) = \int_2(x_{i-1}) + \frac{1}{2} [\vartheta(x_i) + \vartheta(x_{i-1})] \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Przy czym dla $i=1$ mamy: $\int_1=0$ oraz $\int_2=0$



Rys. 5 Rozkład kąta ugięcia $\vartheta(x)$ oraz linii ugięcia $w(x)$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Linia ugięcia belki [własne]

Zagadnie linii ugięcia dla belki (łopaty turbiny) o zmiennym rozkładzie sztywności $EJ_y(x)$

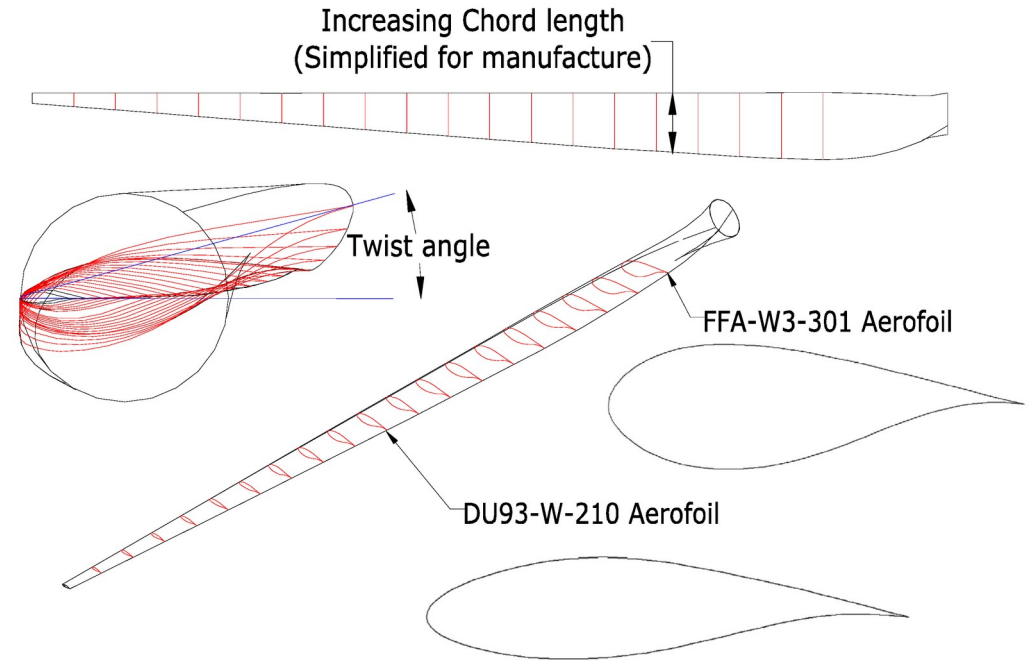
Przykład 4. Komentarz

Notka: W przykładzie 4 założono w uproszczeniu, że osie główne centralne poszczególnych przekrojów (profilu) łopaty są do siebie równoległe.

W stosowanych łopatach turbin, oddalając się od piasty, profile i ich główne centralne osie „lokalne” ulegają skręceniu.

Dla typowych geometrii łopat (NREL 5MW) różnica w kątach skręcenia profili wynosi około 13 stopni.

Rozwiązanie zagadnienia wymaga wtedy wprowadzenie układu globalnego, w którym wyznacza się obciążenie oraz układów lokalnych, w których wyznacza się odkształcenia.



Rys. 6 Skręcenie profili łopaty [<https://pl.pinterest.com/>]

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Wprowadzenie do pojęcia sztywności

Rozważmy belkę wspornikową o danych własnościach przekroju.

Obierzmy węzeł „1” w określonym przekroju tej belki (np. na swobodnym jej końcu), w którym przyłożymy obciążenie oraz będziemy analizować ugięcie tej belki.

Jeśli na skutek przyłożenia siły skupionej p_1 do węzła „1” zaobserwujemy przemieszczenie tego węzła o w_1 to możemy sformułować równanie:

$$p_1 = k_1 w_1, \quad (2.46)$$

gdzie k_1 jest sztywnością belki w węźle „1”.

Na podstawie (2.46) możemy zdefiniować **sztywność** jako stosunek siły działającej na węzeł konstrukcji do przemieszczenia się tego węzła pod wpływem działania siły. Sztywność możemy wyrazić wzorem:

$$k_1 = \frac{p_1}{w_1} \quad [\text{N/m}], \quad (2.47)$$

Często używa się jeszcze równoważnej definicji sztywności: **sztywność** jest równa co do wartości sile, która wywołuje jednostkowe przemieszczenie określonego węzła konstrukcji.

W tym miejscu należy jednak pamiętać, że siła jest wyrażona w [N] (lub jednostkach pochodnych) natomiast jednostką sztywności jest [N/m].

Rys. 7 – Definicja sztywności pomocniczy. rys.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [Wilson (2003)]

Wprowadzenie do pojęcia sztywności

Notka: zauważmy, że znając sztywność danej konstrukcji obliczenie przemieszczeń na skutek działania sił, jak również sił reakcji na skutek wymuszonych przemieszczeń jest zagadnieniem trywialnym.

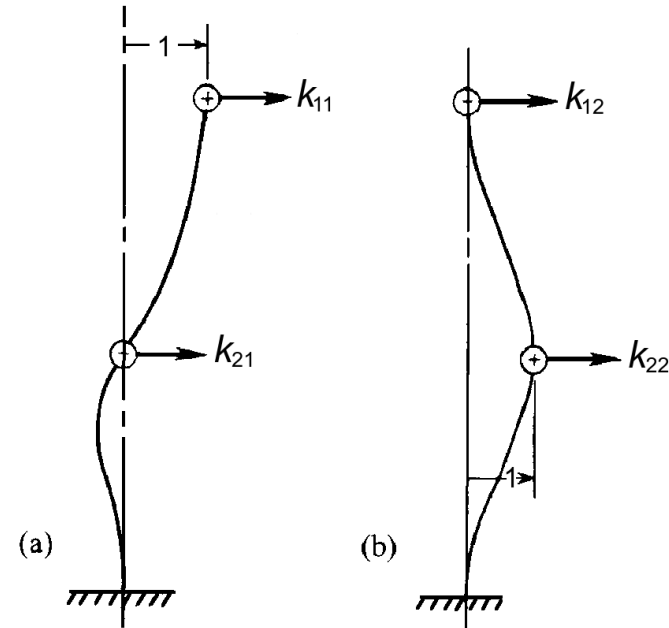
Macierz sztywności

Przeanalizujmy teraz bardzo podobny przypadek – belkę wspornikową, w której przedmiotem analizy będą dwa węzły „1” i „2”. W celu opisu sztywności tego „układu” nie wystarczy już jeden parametr, należy posłużyć się macierzą sztywności K .

Rozważmy teraz dwa układy sił:

Układ 1: przykładamy do węzła „1” siłę k_{11} , natomiast do węzła „2” siłę k_{21} o tak dobranych wielkościach, aby ugięcie belki w węźle „1” było jednostkowe (wynosiło $w_1=1m$) natomiast przemieszczenie węzła „2” wynosiło zero: $w_2=0$.

Układ 2: przykładamy do węzła „1” siłę k_{12} , natomiast do węzła „2” siłę k_{22} o tak dobranych wielkościach, aby ugięcie belki w węźle „1” wynosiło zero: $w_1=0$, natomiast przemieszczenie węzła „2” wynosiło by było przemieszczeniem jednostkowym wynosiło $w_2=1m$.



Rys. 8 Definicja macierzy sztywności.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [Wilson (2003)]

Macierz sztywności

Uzyskane w ten sposób wartości k_{11} , k_{12} , k_{21} i k_{22} są elementami macierzy sztywności, która wiąże przemieszczenia węzłów w_1 i w_2 z siłami zewnętrznymi p_1 i p_2 do tych węzłów przyłożonymi (lub z siłami sprężystości q_{s1} i q_{s2} w tych węzłach, na skutek ich przemieszczeń u_1 , u_2 o czym będzie mowa dalej).

Związek pomiędzy siłami zewnętrznymi p_1 i p_2 a przemieszczeniami węzłów w_1 i w_2 określa poniższy wzór macierzowy:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.48-1)$$

lub – stosując notację macierzową:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{w}, \quad (2.48-2)$$

gdzie:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \text{- wektor obciążeń (sił skupionych } p_i \text{)} \\ \text{przyłożonych w węzłach,}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad \text{- macierz sztywności układu,}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{- wektor przemieszczeń węzłów } w_i.$$

Równanie (2.48-1) można zapisać w (równoważnej) postaci układu równań skalarnych:

$$\begin{aligned} p_1 &= k_{11} w_1 + k_{12} w_2 \\ p_2 &= k_{21} w_1 + k_{22} w_2 \end{aligned}, \quad (2.48-3)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [Wilson (2003)]

Macierz sztywności

Równania (2.48) są prawdziwe, gdy jedyną odpowiedzią na obciążenie zewnętrzne p_1, p_2 są siły sprężystości belki/łopaty (a ogólnie konstrukcji). W przypadku ogólnym (dynamika łopaty) po prawej stronie równania (2.48) pojawią się inne człony (człon sił inercji oraz sił tłumienia).

W związku z tym wprowadzimy pojęcie wektora sił sprężystości \mathbf{q}_s którego składowe obliczane będą za pomocą macierzy sztywności oraz wektora przemieszczeń:

$$\begin{bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.49-1)$$

lub – stosując notację macierzową:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{K} \mathbf{w}. \quad (2.49-2)$$

W przypadku, gdy liczba węzłów wynosi N otrzymamy ogólny związek pomiędzy siłami sprężystości a przemieszczeniami węzłów:

$$\begin{bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ \vdots \\ q_{sN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad (2.50-1)$$

Który możemy zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{aligned} q_{s1} &= k_{11} w_1 + k_{12} w_2 + \cdots + k_{1N} w_N \\ q_{s2} &= k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + \cdots + k_{2N} w_N \\ &\vdots \\ q_{sN} &= k_{N1} w_1 + k_{N2} w_2 + \cdots + k_{NN} w_N \end{aligned} \quad (2.50-2)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

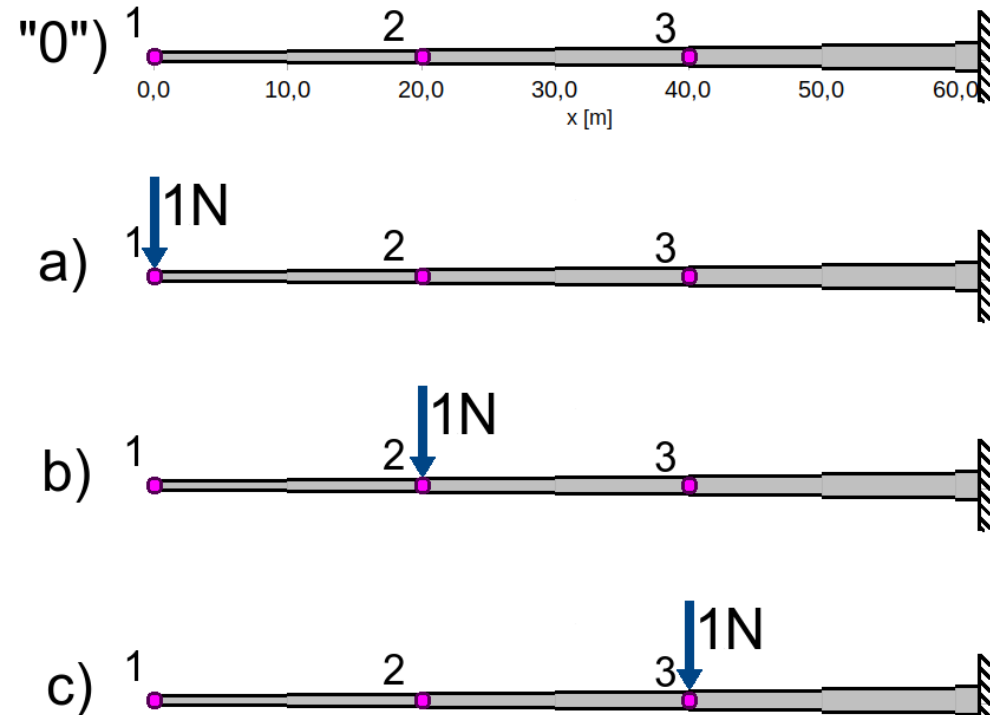
Podsumowując:

Element k_{ij} macierzy sztywności definiujemy jako siłę, która działając na węzeł i wywołuje sprężyste przemieszczenie $w_j=1$ m węzła j , w warunkach gdy wszystkie przemieszczenia $w_k=0$ dla $k \neq j$.

Notka: Jednostką elementu macierzy sztywności k_{ij} jest [N/m]

Przykład 5. Wyznacz macierz sztywności belki (łopaty turbiny) opisaną w przykładzie 4 o konfiguracji węzłów jak na rys. 9 „0”.

Uwaga: w celu wyznaczenia macierzy sztywności nie potrzebujemy znać układu sił (o konkretnych wartościach), potrzebujemy jedynie znać węzły, w których obciążenie będzie przykładane.



Rys. 9 Wyznaczanie macierzy K łopaty turbiny.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

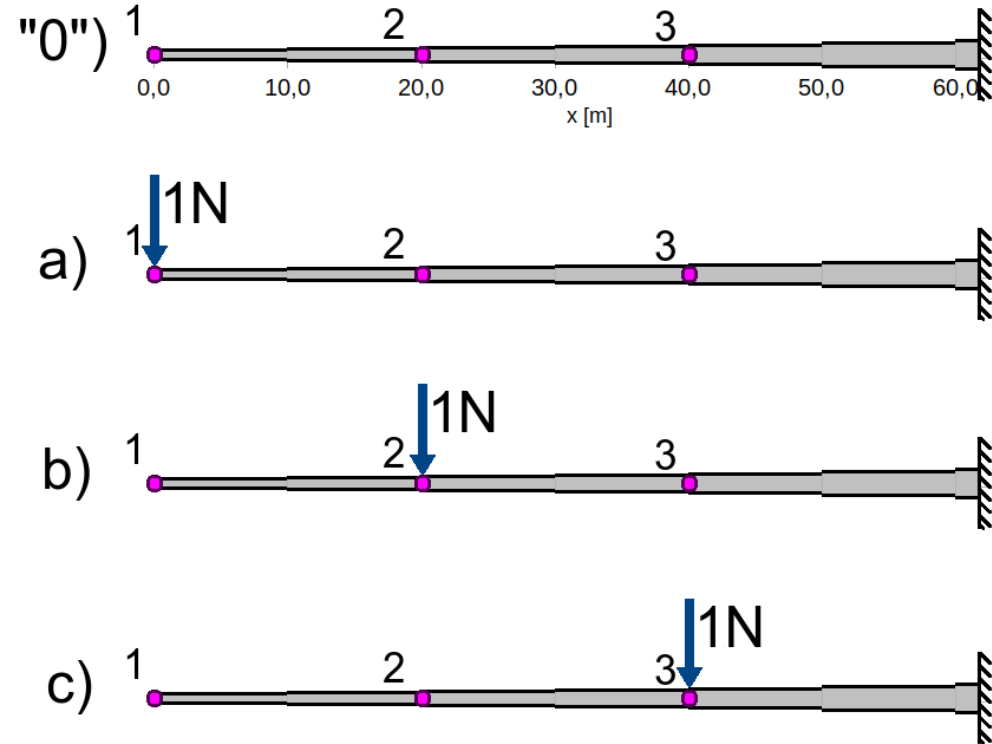
Przykład 5. Rozwiązanie.

W celu uzyskania rozwiązania obierzemy następujące tok postępowania:

1. Obliczymy ugięcia pod wpływem sił jednostkowych przykładanych w kolejnych węzłach.

2. Na podstawie obliczeń z punktu "1" wyznaczymy macierz, którą roboczo nazwiemy "macierzą elastyczności", dzięki której na podstawie znanych obciążeń wyznaczać będziemy przemieszczenia w węzłach

3. Na podstawie związku pomiędzy układem obciążeń a rozkładem przemieszczeń węzłów (znając "macierz elastyczności") wyznaczymy macierz sztywności.



Rys. 9 Wyznaczanie macierzy K łopaty turbiny.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

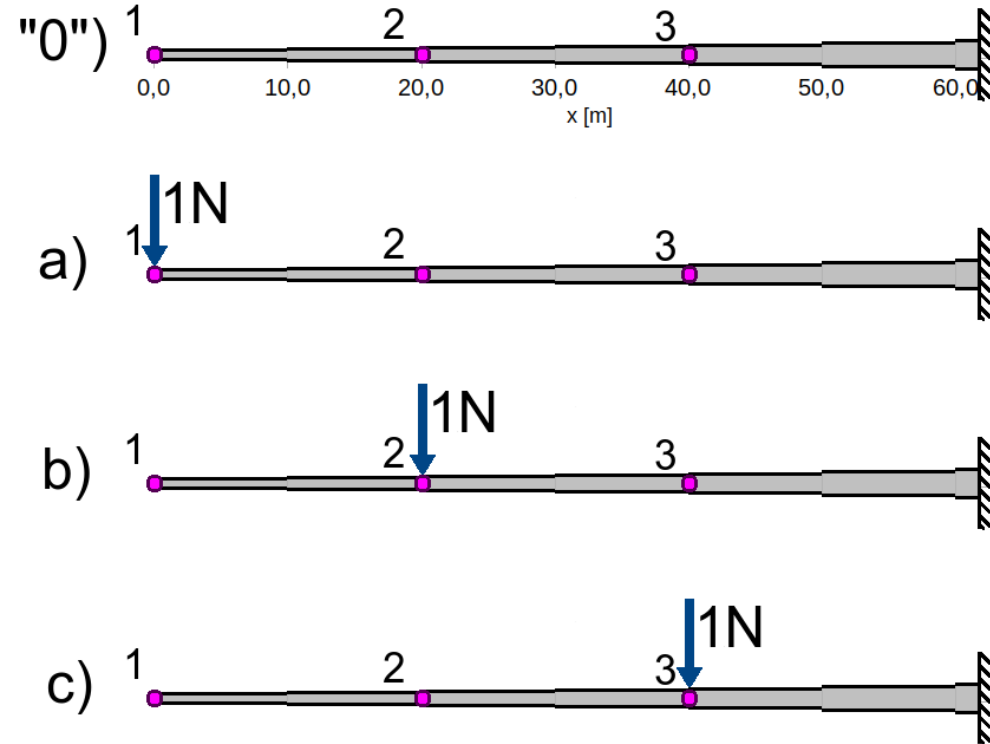
Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy

W celu wyznaczenia ugięcia będziemy postępować analogicznie jak w przykładzie 4, z tą różnicą, że rozkład momentu gnącego obliczymy z prostej reguły **ramię x siła** i tak dla kolejnych przypadków będziemy mieli:

$$M_g(x) = (x - x_{[1]}) \cdot (1 N) \quad (\text{a})$$

$$M_g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_{[2]} \\ (x - x_{[2]}) \cdot (1 N) & \text{dla } x \geq x_{[2]} \end{cases} \quad (\text{b})$$

$$M_g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_{[3]} \\ (x - x_{[3]}) \cdot (1 N) & \text{dla } x \geq x_{[3]} \end{cases} \quad (\text{c})$$



Rys. 9 Wyznaczanie macierzy K łopaty turbiny.

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 2

Chociaż funkcja rozkładu momentu jest liniowa, to pamiętając, że rozkład sztywności EJ_y jest silnie zmienny wzdłuż osi x rozwiążemy zadanie metodą "tabelkową". W tabeli 1 – obliczenia rozkładu $w(x)$ dla obciążenia jednostkowego w węźle [1].

Tabela. 1 Wyznaczanie przemieszczeń węzłów łopaty na skutek obciążenia 1N w węźle [1].

i	węzeł	x [m]	$M_g(x)$ [Nm]	$EJ_y(x)$ [N·m ²]	$M_g(x)/EJ_y(x)$	\int_1	$\vartheta=\int_1+C$ [rad]	\int_2	$w=\int_2+D$ [m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	[1]	0,0	0	0,0139e+9	0,00000000	0,00000000	-0,00000423	0,00000000	0,00008076
2	-	10,0	10	0,0517e+9	0,00000019	0,00000097	-0,00000327	-0,00003750	0,00004325
3	[2]	20,0	20	0,1477e+9	0,00000014	0,00000261	-0,00000162	-0,00006196	0,00001880
4	-	30,0	30	0,5630e+9	0,00000005	0,00000355	-0,00000068	-0,00007348	0,00000728
5	[3]	40,0	40	1,5863e+9	0,00000003	0,00000395	-0,00000029	-0,00007832	0,00000243
6	-	50,0	50	3,7636e+9	0,00000001	0,00000414	-0,00000010	-0,00008024	0,00000051
7	-	60,0	60	12,9211e+9	0,00000000	0,00000423	-0,00000001	-0,00008075	0,00000000
8	-	61,5	61,5	18,1100e+9	0,00000000	0,00000423	0,00000000	-0,00008076	0,00000000

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 3

W tabeli 2 – obliczenia rozkładu $w(x)$ dla obciążenia jednostkowego w węźle [2].

Tabela. 2 Wyznaczanie przemieszczeń węzłów łopaty na skutek obciążenia 1N w węźle [2].

i	węzeł	x [m]	$M_g(x)$ [Nm]	$EJ_y(x)$ [N·m ²]	$M_g(x)/EJ_y(x)$	\int_1	$\vartheta = \int_1 + C$ [rad]	\int_2	$w = \int_2 + D$ [m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	[1]	0,0	0	0,0139e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000040	0,000000000	0,00001545
2	-	10,0	0	0,0517e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000040	-0,00000403	0,00001142
3	[2]	20,0	0	0,1477e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000040	-0,00000806	0,00000739
4	-	30,0	10	0,5630e+9	0,000000018	0,000000009	-0,000000031	-0,00001164	0,00000381
5	[3]	40,0	20	1,5863e+9	0,000000013	0,000000024	-0,000000016	-0,00001403	0,00000143
6	-	50,0	30	3,7636e+9	0,000000008	0,000000034	-0,000000006	-0,00001513	0,00000032
7	-	60,0	40	12,9211e+9	0,000000003	0,000000040	0,000000000	-0,00001545	0,00000000
8	-	61,5	41,5	18,1100e+9	0,000000002	0,000000040	0,000000000	-0,00001545	0,00000000

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 4

W tabeli 3 – obliczenia rozkładu $w(x)$ dla obciążenia jednostkowego w węźle [3].

Tabela. 3 Wyznaczanie przemieszczeń węzłów łopaty na skutek obciążenia 1N w węźle [3].

i	węzeł	x [m]	$M_g(x)$ [Nm]	$EJ_y(x)$ [N·m ²]	$M_g(x)/EJ_y(x)$	\int_1	$\vartheta = \int_1 + C$ [rad]	\int_2	$w = \int_2 + D$ [m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	[1]	0,0	0	0,0139e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000004	0,000000000	0,00000188
2	-	10,0	0	0,0517e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000004	-0,00000036	0,00000152
3	[2]	20,0	0	0,1477e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000004	-0,00000073	0,00000115
4	-	30,0	0	0,5630e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000004	-0,00000109	0,00000079
5	[3]	40,0	0	1,5863e+9	0,000000000	0,000000000	-0,000000004	-0,00000145	0,00000042
6	-	50,0	10	3,7636e+9	0,000000003	0,000000001	-0,000000002	-0,00000175	0,00000013
7	-	60,0	20	12,9211e+9	0,000000002	0,000000003	0,000000000	-0,00000188	0,00000000
8	-	61,5	21,5	18,1100e+9	0,000000001	0,000000004	0,000000000	-0,00000188	0,00000000

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 5

Uzyskane wyniki przemieszczeń poszczególnych węzłów na skutek działania obciążenia (a), (b) lub (c) zebrano w tabelach poniżej.

Tabela. 4 Zbiorcze wyniki przedstawiające przemieszczenia (ugięcia) na skutek działania stanu obciążenia (a), (b) i (c)

a)	Węzeł	$q_{s,i}$ [N]	w_i [m]	b)	Węzeł	$q_{s,i}$ [N]	w_i [m]	c)	Węzeł	$q_{s,i}$ [N]	w_i [m]
	1	1	80,76e-6		1	0	15,45e-6		1	0	1,88e-6
	2	0	18,80e-6		2	1	7,39e-6		2	0	1,15e-6
	3	0	2,43e-6		3	0	1,43e-6		3	1	0,42e-6

Zakładając zasadę superpozycji: odkształcenie od sumy obciążeń jest równe sumie odkształceń od każdego obciążenia z osobna, możemy sformułować równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 & 15,45e-6 & 1,88e-6 \\ 18,80e-6 & 7,39e-6 & 1,15e-6 \\ 2,43e-6 & 1,43e-6 & 0,42e-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ q_{s3} \end{bmatrix} \quad (d)$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 6

Można łatwo wykazać, że podstawiając za wektor \mathbf{q} jedno z obciążeń, które zostało zadane, do wyznaczenia macierzy, np.: $\mathbf{q}_{(a)}=[1, 0, 0]$ otrzymamy wcześniej wyliczony wektor odkształceń \mathbf{w} :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 & 15,45e-6 & 1,88e-6 \\ 18,80e-6 & 7,39e-6 & 1,15e-6 \\ 2,43e-6 & 1,43e-6 & 0,42e-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 \cdot 1 + 15,45e-6 \cdot 0 + 1,88e-6 \cdot 0 \\ 18,80e-6 \cdot 1 + 7,39e-6 \cdot 0 + 1,15e-6 \cdot 0 \\ 2,43e-6 \cdot 1 + 1,43e-6 \cdot 0 + 0,42e-6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 \\ 18,80e-6 \\ 2,43e-6 \end{bmatrix}$$

Analogicznie dostaniemy wynik dla wektorów ortogonalnych $\mathbf{q}_{(b)}=[0, 1, 0]$ i $\mathbf{q}_{(c)}=[0, 0, 1]$.

Ponieważ dowolny wektor sił $\mathbf{q}_s=[q_{s1}, q_{s2}, q_{s3}]$ może być przedstawiony jako kombinacja (suma i/lub zwielokrotnienie) wektorów $\mathbf{q}_{(a)}$, $\mathbf{q}_{(b)}$, $\mathbf{q}_{(c)}$:

$$\begin{bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ q_{s3} \end{bmatrix} = q_{s1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q_{s2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q_{s3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stosując równanie (d) możemy obliczyć przemieszczenia dla dowolnego wektora sił $\mathbf{q}_s=[q_{s1}, q_{s2}, q_{s3}]$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 7

Aby “zbudować” macierz sztywności potrzebujemy znaleźć takie wektory obciążeń $\mathbf{q}_{s(A)}$, $\mathbf{q}_{s(B)}$ i $\mathbf{q}_{s(C)}$, które wywołają przemieszczenia węzłów, odpowiednio: $\mathbf{w}_{(A)}=[1, 0, 0]$, $\mathbf{w}_{(B)}=[0, 1, 0]$, $\mathbf{w}_{(C)}=[0, 0, 1]$ (patrz: definicja macierzy sztywności). Korzystając z bezpośrednio z tej definicji, zadanie to sprowadzi się do rozwiązania 3 układów równań:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 & 15,45e-6 & 1,88e-6 \\ 18,80e-6 & 7,39e-6 & 1,15e-6 \\ 2,43e-6 & 1,43e-6 & 0,42e-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sA1} \\ q_{sA2} \\ q_{sA3} \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 & 15,45e-6 & 1,88e-6 \\ 18,80e-6 & 7,39e-6 & 1,15e-6 \\ 2,43e-6 & 1,43e-6 & 0,42e-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sB1} \\ q_{sB2} \\ q_{sB3} \end{bmatrix} \quad (\text{B})$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80,76e-6 & 15,45e-6 & 1,88e-6 \\ 18,80e-6 & 7,39e-6 & 1,15e-6 \\ 2,43e-6 & 1,43e-6 & 0,42e-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sC1} \\ q_{sC2} \\ q_{sC3} \end{bmatrix} \quad (\text{C})$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 8

Po rozwiązaniu równań (np. metodą Gaussa, metodą wyznaczników, itp), macierz sztywności zbudujemy w następujący sposób:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{sA1} & q_{sB1} & q_{sC1} \\ q_{sA2} & q_{sB2} & q_{sC2} \\ q_{sA3} & q_{sB3} & q_{sC3} \end{bmatrix} \quad (\text{e})$$

Macierz sztywności możemy wyznaczyć również w następujący sposób.

Zapiszmy równanie (d) posługując się notacją macierzową:

$$\mathbf{w} = \mathbf{E} \mathbf{q}_s, \quad (\text{d.1}) \quad \text{gdzie:} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 80,76\text{e-}6 & 15,45\text{e-}6 & 1,88\text{e-}6 \\ 18,80\text{e-}6 & 7,39\text{e-}6 & 1,15\text{e-}6 \\ 2,43\text{e-}6 & 1,43\text{e-}6 & 0,42\text{e-}6 \end{bmatrix}$$

Po przemnożeniu lewostronnie przez \mathbf{E}^{-1} dostaniemy:

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{q}_s, \quad \text{a po uporządkowaniu:} \quad \mathbf{q}_s = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{w} \quad (\text{d.2})$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 9

Równanie (d.2) jest po prostu równaniem (2.49-2) opisującym związek między przemieszczeniem węzłów a siłami sprężystymi do nich przyłożonymi:

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{K} \mathbf{w} \quad ,$$

A z tego wynika, że macierz sztywności jest odwrotnością macierzy \mathbf{E}

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \quad .$$

Macierz odwrotna może być wyznaczona, na przykład metodą Gaussa-Jordana [https://www.naukowiec.org/wiedza/matematyka/metoda-gaussa-jordana_622.html].

Można również skorzystać z funkcji MINVERSE(:) (Excel, LibreOffice)

Stąd po obliczeniach otrzymamy:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 26144,7 & -68091,2 & 69411,6 \\ -91398,0 & 525846,0 & -1030701,8 \\ 159922,7 & -1396424,5 & 5488651,1 \end{bmatrix} \quad [\text{N/m}]$$

Łopata turbiny jako belka zginana

Zginanie proste belki. Macierz sztywności belki/łopaty [własne]

Macierz sztywności

Przykład 5. Rozwiązanie. Ciąg dalszy 10

Sprawdź samodzielnie, jakie wyniki \mathbf{q}_s otrzymasz podstawiając za \mathbf{w} rezultaty uzyskane z układów obciążeń (a), (b) i (c), czyli odpowiednio: $\mathbf{w}_{(a)} = [80,76e-6; 18,80e-6; 2,43e-6]m$; $\mathbf{w}_{(b)} = [15,45e-6; 7,39e-6; 1,43e-6]m$; $\mathbf{w}_{(c)} = [1,88e-6; 1,15e-6; 0,42e-6]m$? Skomentuj uzyskany rezultat.

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o jednym stopniu swobody (1 DoF)

Masa skupiona

Przeanalizujemy belkę z jednym wyróżnionym węzłem (Patrz “Wprowadzenie do pojęcia sztywności”). W celu modelowania dynamiki tej belki (tego węzła), musimy przypisać mu masę.

Na potrzeby modelowania zakłada się, że masa jest skupiona jedynie w węźle (w punkcie), pozostała część belki jest nieważka. (Jest to duże uproszczenie, jednak zakładamy, że omawiany przykład jest jedynie wprowadzeniem do modelowania dynamiki belki/łopaty turbiny).

Analizę dynamiki belki zamierzamy przeprowadzić w oparciu o analizę pojedynczego węzła – punktu masowego. Wiemy, że obrany węzeł będzie (prawdopodobnie) wykonywał ruchy o większej amplitudzie niż pozostałe przekroje belki. Przykładowo, przekroju w pobliżu miejsca utwierdzenia będą się poruszać ze znacznie mniejszą amplitudą. W związku z tym masa jaką przypiszemy węzłowi nie będzie odpowiadać masie całej (rzeczywistej) belki, a jedynie pewnej części tej masy, co możemy zapisać jako:

$$m_1 = f_1 \int_0^l \bar{m}(x) dx, \quad (3.1)$$

Gdzie m_1 masa skupiona węzła, $\bar{m}(x)$ – rozkład liniowy masy belki [kg/m], f_1 – współczynnik określający część masy belki sprowadzoną do węzła „1”, $f_1 = (0,1)$

Rys. 1

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o jednym stopniu swobody (1 DoF)

Masa skupiona

Współczynnik f_1 mieści się w przedziale od 0 do 1, zwykle (w układzie pokazanym na rys 1.) jest mniejszy od 0,5, ale to zależy od rozkładu funkcji $\bar{m}(x)$. Wartość tego współczynnika wyznacza się na podstawie metod energetycznych (metoda Rayleigha) w ten sposób, aby częstości własne modelu (układu zastępczego z masą skupioną) oraz belki rzeczywistej były zgodne [Wilson 2003].

Inną (prostsza, ale mniej dokładną metodą) jest przypisanie węzłowi (węzłom) masy z odcinka belki “przypadającego” danemu węzłowi:

$$m_1 = \int_{x_{1,min}}^{x_{1,max}} \bar{m}(x) dx, \quad (3.2)$$

W przypadku przedstawionym na rys. 1 przyjmujemy zwykle, że $x_{1,min} = 0$; $x_{1,max} = l/2$, zakładając, że przekrój $x=0$ znajduje się na swobodnym końcu belki.

Metoda określona wzorem (3.2) jest szczególnie przydatna w przypadku zastosowania większej liczby węzłów.

Całka w równaniu (3.2) jest najczęściej obliczana numerycznie, gdyż rozkład masy $m(x)$ jest funkcją podaną w formie tabelarycznej.

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o jednym stopniu swobody (1 DoF)

Równanie ruchu

Równanie ruchu pojedynczego węzła o masie m_1 możemy sformułować stosując II zasadę dynamiki Newtona:

$$m_1 \ddot{w}_1 = \sum_i F_i, \quad (3.3)$$

Przy czym prawą stronę równania możemy zapisać w postaci sumy sił zewnętrznych i “wewnętrznych” modelowanego układu, wtedy:

$$\sum_i F_i = p_1(t) - c_1 \dot{w}_1 - k_1 w_1, \quad (3.4)$$

A po podstawieniu do (3.3) uzyskamy:

$$m_1 \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + k_1 w_1 = p_1(t), \quad (3.5)$$

gdzie: k_1 jest sztywnością belki (określaną dla węzła “1”), c_1 to współczynnik tłumienia określany, na przykład, z próby oscylacji swobodnych, $p_1(t)$ to siła zewnętrzna działająca na węzeł/masę “1”.

Człony po lewej stronie równania to kolejno: człon inercyjny (siła inercji/bezwładności), człon tłumienia (siła tłumienia) oraz człon reprezentujący sztywność układu (siła sprężystości).

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o jednym stopniu swobody (1 DoF)

Równanie ruchu

Równanie (3.5) było, oraz jego rozwiązania, było już omawiane w ramach innych kursów (MKW I), więc w tym miejscu ograniczymy się do komentarza, że omówione rozwiązania (własności układu) mają zastosowanie również w tym przypadku.

W szczególności stosują się tu również wzory opisujące częstość własną drgań/oscylacji, oraz charakterystyka opisująca zależność amplitudy odpowiedzi (ruchu) od amplitudy wymuszeń, jak i zależność opisująca przesunięcie w fazie pomiędzy odpowiedzią a wymuszeniem.

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Macierz mas (macierz inercji)

Rozważmy teraz belkę z [przykładu 5](#). Dodatkowo przypiszmy jej pewien rozkład masy $\bar{m}(x)$ (który może być, na przykład, opisany tabelarycznie).

Na podstawie funkcji rozkładu masy $\bar{m}(x)$ możemy obliczyć masy skupione w poszczególnych węzłach, w tym celu posłużymy się równaniem (3.2).

Masy te będą określone wzorami:

$$m_1 = \int_{x_{1,min}}^{x_{1,max}} \bar{m}(x) dx, \quad (3.2-1)$$

$$m_2 = \int_{x_{2,min}}^{x_{2,max}} \bar{m}(x) dx, \quad (3.2-2)$$

$$m_3 = \int_{x_{3,min}}^{x_{3,max}} \bar{m}(x) dx, \quad (3.2-2)$$

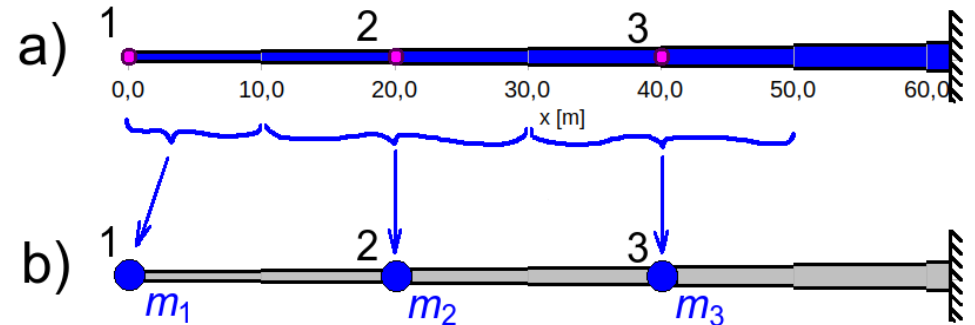
Przy czym granice przedziałów całkowania można zdefiniować następująco:

$x_{1,min} = 0$ – koniec belki,

$x_{1,max} = x_{2,min} = (x_1 + x_2)/2 = 10\text{m}$ – w połowie odległości pomiędzy węzłami “1” i “2”

$x_{2,max} = x_{3,min} = (x_2 + x_3)/2 = 30\text{m}$

$x_{3,max} = (x_3 + x_{koniec})/2 \approx 50\text{m}$ – w połowie między węzłem a punktem utwierdzenia.



Rys. 3 Masy skupione

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Macierz mas (macierz inercji)

Po obliczeniu mas skupionych kolejnych węzłów możemy zbudować macierz mas jako macierz diagonalną:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Im większa jest liczba węzłów, tym dokładniej jest odwzorowany rozkład masy wzdłuż belki i tym mniejsze ma znaczenie przyjęta metoda dystrybucji mas pomiędzy węzły (o ile nie jest ona z gruntu błędna).

Ogólnie, dla N węzłów macierz \mathbf{M} ma następującą postać:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Macierz tłumienia

Macierz tłumienia jest macierzą kwadratową o następującej postaci:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

a siła tłumienia q_{Di} przyłożona do węzła i jest liniową kombinacją prędkości węzłów dw_i/dt . Współczynniki c_{ij} opisujące wpływ prędkości j -tego węzła na tłumienie w węzle i -tym nazywamy *współczynnikami wpływu tłumienia*. Siła tłumienia w i -tym węzle wyrażona jest wzorem:

$$q_{Di} = c_{11} \dot{w}_1 + c_{12} \dot{w}_2 + \cdots + c_{1N} \dot{w}_N = \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{w}_j, \quad (3.9-1)$$

Powyższe można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} q_{D1} \\ q_{D2} \\ \vdots \\ q_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_N \end{bmatrix}, \quad (3.9-2)$$

lub stosując notację macierzową:

$$\mathbf{q}_D = \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}}. \quad (3.9-3)$$

Są różne sposoby uzyskiwania współczynników macierzy tłumienia. Zasadniczo metody te opierają się na wykorzystaniu danych eksperymentalnych.

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Macierz tłumienia. Wyznaczanie współczynników macierzy C

Jedną z metod uzyskiwania macierzy tłumienia, jest określanie jej w formie *tłumienia Rayleigha*, gdzie macierz C buduje się w oparciu o założenie, że elementy c_{ij} są proporcjonalne mas układu oraz do elementów macierzy sztywności. Zależność ta opisana jest następująco:

$$C = a_1 M + a_2 K, \quad (3.10)$$

gdzie a_1 i a_2 są stałymi.

Stałe a_1 i a_2 można wyznaczyć na drodze eksperymentalnej w oparciu o próbę oscylacji swobodnych (patrz teoria z innych kursów, np. MKW I).

Wyprowadzając układ z położenia równowagi (np. poprzez przemieszczenie „statyczne” (powoli) jednego z węzłów, a następnie „uwolnienie” tego węzła), można wyznaczyć funkcję (wykres) zanikania oscylacji.

W przypadku układów o wielu stopniach swobody obserwuje się oscylacje na więcej niż jednej częstotliwości (dla 3 stopni swobody będą to 3 częstotliwości), tak zwanych częstotliwości modalnych.

Analiza widmowa uzyskanych wyników pozwala na „wyodrębnienie” tych częstotliwości i uzyskanie współczynników tłumienia odrębnych dla każdej z zaobserwowanych częstotliwości.

Na potrzeby wyznaczenia macierzy tłumienia w formie Rayleigha wystarczy wyznaczyć współczynniki tłumienia dla dwóch częstotliwości, np. ω_k i ω_m . Wówczas współczynniki a_1 i a_2 otrzymać z układu dwóch równań:

$$v_k = \frac{\omega_k}{2} a_1 + \frac{1}{2 \omega_k} a_2 ; \quad v_m = \frac{\omega_m}{2} a_1 + \frac{1}{2 \omega_m} a_2 \quad (3.11)$$

Najczęściej drgania na 2 pierwszych częstotliwościach modalnych są dominujące, więc do uzyskania współczynników a_1 i a_2 używa się v_1 i v_2

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

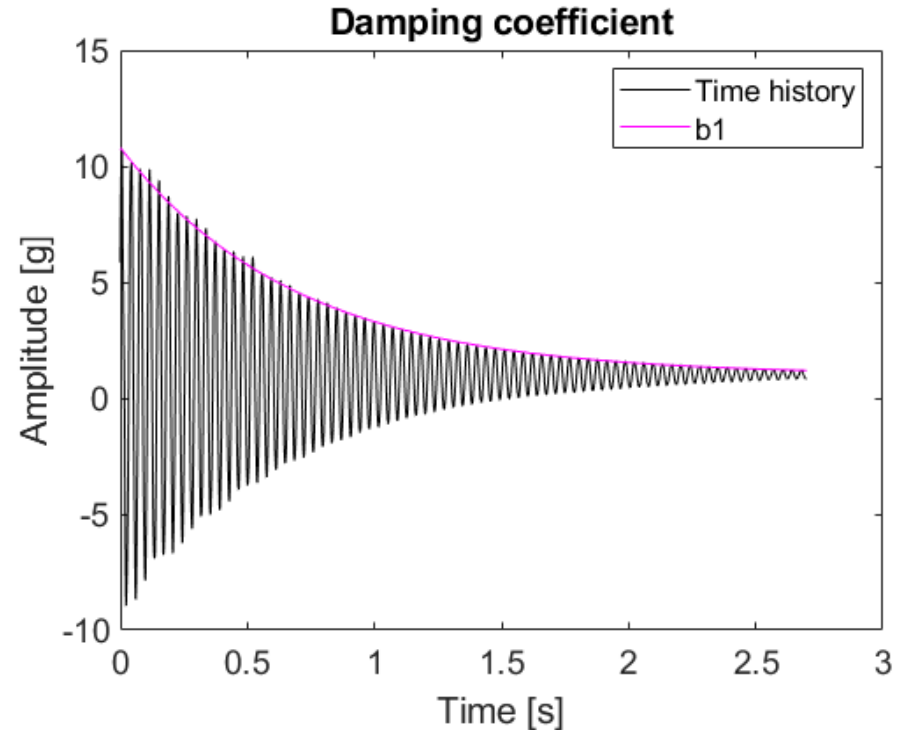
Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Macierz tłumienia. Eksperymentalne wyznaczanie współczynników tłumienia [H. Pruszko 2021]

Przykładowe stanowisko do pomiarów oscylacji swobodnych płata wykonanego z włókna węglowego pokazane zostało na Rys. 4. Zarejestrowany przebieg oscylacji swobodnych pokazano na Rys. 5



Rys. 4. Stanowisko do pomiarów oscylacji płata.
[H. Pruszko 2021]



Rys. 5. Pomiar oscylacji swobodnych [H. Pruszko 2021]

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Równanie ruchu – metoda Newtona

Jedną z metod wyznaczania ruchu mas skupionych jest zastosowanie II zasady dynamiki Newtona. Stosując tą zasadę do mas skupionych m_i dostaniemy następujący układ równań:

$$\sum F_{z,i} = m_i \ddot{z}_i \quad , \quad (3.12)$$

Gdzie:

$\sum F_{z,i}$ - suma sił działających na masę skupioną m_i na kierunku Oz

\ddot{z}_i - przyspieszenie masy m_i (na kierunku Oz)

Przykładowo dla belki z [przykładu 5](#) posiadającej masy skupione m_i (omówione w punkcie „Macierz mas”), uwzględniając, że przemieszczenie węzłów oznaczymy jako w_i (zamiast z_i), dostaniemy następujący układ równań:

$$p_i - q_{si} - q_{Di} = m_i \ddot{w}_i \quad , \quad (3.13-1)$$

gdzie prawa strona równania reprezentuje sumę sił działających na masę m_i ; p_i jest siłą zewnętrzną (aerodynamiczną), q_{si} to siła sprężystości (od sztywności belki/łopaty) opisana równaniem (2.50-2), q_{Di} to siła tłumienia działająca na masę m_i , opisana równaniem (3.9-1).

Równanie (3.13-1) zapisane w postaci macierzowej (dla belki z trzema węzłami) będzie następujące:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3.13-2)$$

Wstęp do dynamiki belki (łopaty turbiny)

Układ o wielu stopniach swobody [Wilson 2003]

Równanie ruchu – metoda Newtona

Równanie macierzowe (3.13-3) można zapisać w skróconej formie:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{p} \quad , \quad (3.13-3)$$

lub w postaci układu równań (tutaj trzech równań):

$$m_i \ddot{w}_i + c_{i1} \dot{w}_1 + c_{i2} \dot{w}_2 + c_{i3} \dot{w}_3 + k_{i1} w_1 + k_{i2} w_2 + k_{i3} w_3 = p_i \quad , \quad (3.13-4)$$

Powyższą postać można łatwo przekształcić w ten sposób, aby wyznaczyć przyspieszenie i -tej masy, a zatem można je użyć do rozwiązania zagadnienia ruchu mas (w dziedzinie czasu) przy użyciu metod numerycznych (np. *metodą jawną Eulera* [explicit Euler]).