ALGEBRA TENSORÓW – ZADANIA   TSiP sz ćw 1

* Dany jest tensor walencji II $\underset{\sim}{R} \equiv R_{ij}$ i wektor $\underset{\sim}{u} \equiv u_k$.
Przedstawić w rozwiniętej formie: a) $R_{ij} u_j$ b) $R_{ij} u_i$
c) $u_i \delta_{ik}$ d) $R_{ij} \varepsilon_{ijk}$

---

a) wektor $d_i = R_{ij} u_j$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1j} u_j \\ R_{2j} u_j \\ R_{3j} u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{11} u_1 + R_{12} u_2 + R_{13} u_3 \\ R_{21} u_1 + R_{22} u_2 + R_{23} u_3 \\ R_{31} u_1 + R_{32} u_2 + R_{33} u_3 \end{Bmatrix}$$

zapis absolutny $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{u}$
analogia do mnożenia macierzy przez wektor
[ćwiczenie – zapisać]

w formie algebraicznej – układ równań

b) wektor $f_j = R_{ij} u_i$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{i1} u_i \\ R_{i2} u_i \\ R_{i3} u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{11} u_1 + R_{21} u_2 + R_{31} u_3 \\ R_{12} u_1 + R_{22} u_2 + R_{32} u_3 \\ R_{13} u_1 + R_{23} u_2 + R_{33} u_3 \end{Bmatrix}$$

zapis absolutny $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{u}$

c) symbol Kroneckera $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n \\ 0 & \text{gdy } m \neq n \end{cases}$ $\underset{\sim}{I} \equiv \delta_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

wektor $p_k = u_i \delta_{ik} = \begin{Bmatrix} u_i \delta_{i1} \\ u_i \delta_{i2} \\ u_i \delta_{i3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \delta_{11} \\ u_2 \delta_{22} \\ u_3 \delta_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = u_k$

w zapisie absolutnym: $\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{u}$ (mnożenie przez macierz jednostkową)

d) tensor Ricci $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{gdy którekolwiek } i, j \text{ lub } k \text{ pokrywają się} \\ 1 & \text{gdy permutacje parzyste: } 123, 231, 312 \\ -1 & \text{gdy permutacje nieparzyste: } 132, 213, 321 \end{cases}$

wektor $b_k = R_{ij} \varepsilon_{ijk}$:

$$b_1 = R_{ij} \varepsilon_{ij1} = R_{23} \varepsilon_{231} + R_{32} \varepsilon_{321} = R_{23} - R_{32}$$
$$b_2 = R_{ij} \varepsilon_{ij2} = R_{31} \varepsilon_{312} + R_{13} \varepsilon_{132} = R_{31} - R_{13}$$
$$b_3 = R_{ij} \varepsilon_{ij3} = R_{12} \varepsilon_{123} + R_{21} \varepsilon_{213} = R_{12} - R_{21}$$

ćwiczenia domowe: sprawdzić następujące tożsamości

$$\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \equiv u_i v_j \varepsilon_{ijk}$$
$$\det \underset{\sim}{A} \equiv A_{1i} A_{2j} A_{3k} \varepsilon_{ijk}$$

Rozpatrywane wielkości tensorowe różnych walencji (z odpowiednią liczbą składowych) traktowane będą jako funkcje położenia punktu — współrzędnych x_i, $i=1,2,3$

Funkcja skalarna (pole skalarne w R^3) $\quad d \equiv d(\underset{\sim}{x}) = d(x_1,x_2,x_3)$

Funkcja wektorowa (pole wektorowe) $\quad \underset{\sim}{u} \equiv \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{u}(x_1,x_2,x_3) = \begin{Bmatrix} u_1(x_1,x_2,x_3) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) \end{Bmatrix}$ — trzy funkcje składowe

Funkcja tensorowa II walencji (pole tensorowe II walencji) $\quad \underset{\sim}{A} \equiv \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} A_{11}(\underset{\sim}{x}) & A_{12}(\underset{\sim}{x}) & A_{13}(\underset{\sim}{x}) \\ A_{21}(\underset{\sim}{x}) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ — 9 funkcji składowych

Zdefiniowane są operatory różniczkowe.

Oznaczenie: $\dfrac{\partial M}{\partial x_i} = M_{,i}$ $\quad M$ — funkcja skalarna lub składowa funkcji tensorowej dowolnej walencji

np. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = f_{,1}$; $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = u_{2,3}$; $\dfrac{\partial A_{13}}{\partial x_2} = A_{13,2}$; $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_k} = u_{1,k}$, $k=1,2,3$

---

* W R^3 dana jest funkcja skalarna $\varphi(\underset{\sim}{x}) = 5x_1^3 + x_1x_2 - x_1x_2x_3$

Obliczyć $\varphi_{,j}$, określić matematyczną formę tego wyrażenia

---

Wektor $d_j = \varphi_{,j} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ — **gradient** pola skalarnego

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \varphi_{,j} = \begin{Bmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 15x_1^2 + x_2 - x_2x_3 \\ x_1 - x_1x_3 \\ -x_1x_2 \end{bmatrix}$$

funkcja wektorowa (pole wektorowe)

* Dla tej samej funkcji obliczyć $\varphi_{,ii}$

skalar $k = \varphi_{,ii} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_i}$ — operator Laplace'a (**laplasjan**)

$$\Delta\varphi \doteq \nabla^2\varphi = \varphi_{,ii} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 30x_1$$

funkcja skalarna (pole skalarne)

* Dana jest funkcja wektorowa $u_i \equiv u_i(\underset{\sim}{x}) = \left[8x_1^3x_2 \mid 5 + 2x_1x_2 \mid x_1 + x_2 + x_3\right]^T$

Rozwinąć wyrażenie $u_{i,j}$

tensor II walencji (pole tensorowe II walencji) — gradient pola wektorowego

$$\mathrm{grad}\,\underset{\sim}{u} = \nabla\underset{\sim}{u} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24x_1^2x_2 & 8x_1^3 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= G_{ij} = G_{ij}(\underset{\sim}{x})$$

* Dla tego samego pola $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})$ obliczyć $u_{i,i}$

skalar (pole skalarne) – **dywergencja** pola wektorowego

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{u} = u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 24x_1^2x_2 + 2x_1 + 1$$

spostrzeżenie: $\operatorname{div}\underset{\sim}{u} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\underset{\sim}{u})$

* Dane jest pole tensorowe II walencji $\underset{\sim}{A} \equiv A_{ij} = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1x_2 & 1-x_3 \\ -x_1x_2 & x_2x_3 & 4 \\ 8x_2^2 & x_1x_2x_3 & 2x_3^2 \end{bmatrix}$

Obliczyć $A_{ij,j}$

---

wektor (pole wektorowe) $u_i = A_{ij,j}$ – dywergencja pola tensorowego II walencji

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{A} = A_{ij,j} = \begin{bmatrix} A_{1j,j} \\ A_{2j,j} \\ A_{3j,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,1} + A_{12,2} + A_{13,3} \\ A_{21,1} + A_{22,2} + A_{23,3} \\ A_{31,1} + A_{32,2} + A_{33,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_1 - 1 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1x_3 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

ĆWICZENIE: ROZPISAĆ WYRAŻENIE $\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T + \rho\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$

gdzie $\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ jest tensorem II walencji, $\underset{\sim}{b} \equiv b_k$ jest wektorem, ρ – liczba

w zapisie wskaźnikowym $(\sigma_{ij})^T_{,j} + \rho b_i = 0$

stąd $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} \end{Bmatrix}$$

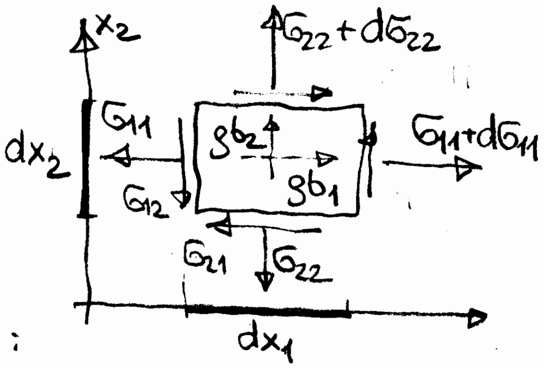
stąd
$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + \rho b_1 = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + \rho b_2 = 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + \rho b_3 = 0 \end{cases}$$

lub
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases}$$

b. ważne równania w mechanice ośrodków ciągłych

DWUWYMIAROWE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA (np. na pł. Ox_1x_2)
(ściana, środnik blachownicy)



tensor
każda składowa – funkcja w R^3

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Równania równowagi wyciętego elementu $dx_1 dx_2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \varrho b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \varrho b_2 = 0 \end{cases}$$

b_1, b_2 – siły masowe $\left[\frac{kN}{kg}\right]$
ϱ – gęstość $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
stąd $\varrho b_1, \varrho b_2$ – siły objętościowe $\left[\frac{kN}{m^3}\right]$

w zapisie absolutnym $\operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma}^T + \varrho \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ – dwuwymiarowy wariant ogólnego trójwymiarowego zapisu

Trzecie równanie $\Rightarrow$ $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ $\to$ symetria tensora $\underset{\sim}{\sigma}$ ($\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T$ lub $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

- Ze związków kinematycznych $\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underset{\sim}{u} + \nabla \underset{\sim}{u}^T)$ wynikają równania zgodności odkształceń (nierozdzielności) – w dwóch wymiarach tylko jedno:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \right)$$

- Równania konstytutywne : PSN

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

Wprowadzamy tzw. funkcję naprężeń Airy $F(x_1,x_2)$ zdefiniowaną wyrażeniami:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = F_{,22} \\ \sigma_{22} = F_{,11} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -F_{,12} - \varrho b_1 x_2 - \varrho b_2 x_1 \end{cases}$$

Równaniem z niewiadomą funkcją F grupującym komplet związków TS jest **równanie biharmoniczne** (Airy) $\Delta(\Delta F) = \nabla^4 F = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0$$

$$F_{,1111} + 2F_{,1122} + F_{,2222} = 0$$

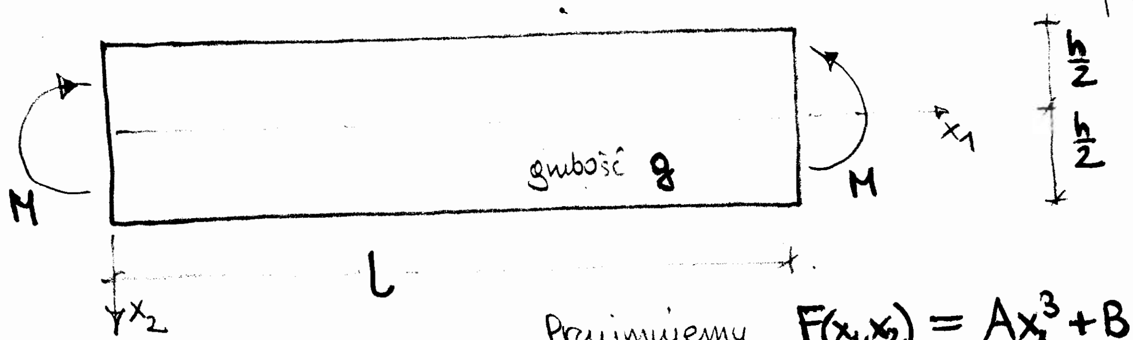
Inna forma: $\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = G_{,11} + G_{,22} = 0$

gdzie $G = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = F_{,11} + F_{,22}$

$F_{,iijj} = 0$, $i,j = 1,2$

spostrzeżenie: $\Delta F = \sigma_{11} + \sigma_{22}$

* tarcza prostokątna, obciążenie na brzegach wypadkowe obciążenia – momenty skupione. Znaleźć rozkład naprężeń w PSN w Ox_1x_2



Przyjmujemy $F(x_1,x_2) = Ax_1^3 + Bx_1^2x_2 + Cx_1x_2^2 + Dx_2^3$

stąd $\sigma_{11} = 2Cx_1 + 6Dx_2$, $\sigma_{22} = 6Ax_1 + 2Bx_2$, $\sigma_{12} = -2Bx_1 - 2Cx_2$

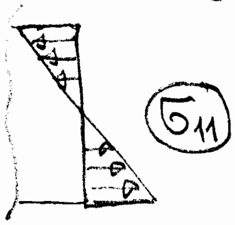
Warunki brzegowe:
1) $\sigma_{22} = 0$ na $x_2 = \frac{h}{2}$
2) $\sigma_{22} = 0$ na $x_2 = -\frac{h}{2}$
3) $\sigma_{12} = 0$ na $x_2 = \pm\frac{h}{2}$
4) $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \cdot g x_2 \, dx_2 = M$

stąd $A = B = C = 0$

$$D = \frac{M}{6I}$$

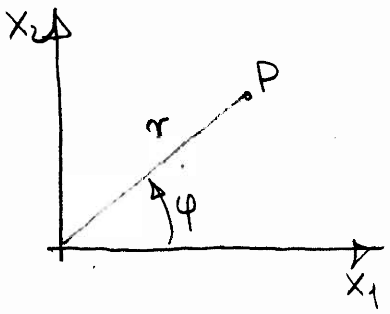
gdzie $I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g x_2^2 \, dx_2$

stąd jedynie $\sigma_{11} = 6\frac{M}{6I}x_2 = \frac{M}{I}x_2$



- Wynik zgodny z rozwiązaniem Wytrzymałości Materiałów, przy tym ścisły w sensie Teorii Sprężystości (równanie równowagi, warunek nierozdzielności, warunki brzegowe)

RÓWNANIE TARCZY W UKŁADZIE BIEGUNOWYM



$F(x_1,x_2) \to F(r,\varphi)$, wszystkie inne zmienne stanu: $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{ij}(r,\varphi)$, $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}(r,\varphi)$

$\underset{\sim}{u} = u_k(r,\varphi)$

Równanie biharmoniczne w układzie biegunowym

zapis operatorowy $\nabla^4 F(r,\varphi) = \Delta(\Delta F(r,\varphi)) = 0$

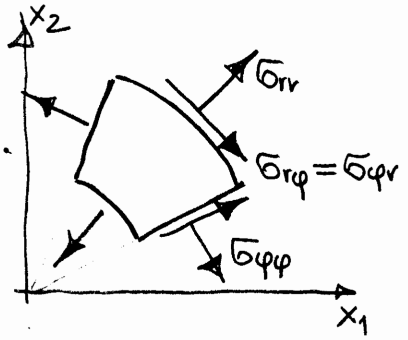
gdzie $\Delta F(r,\varphi) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = F_{,rr} + \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi}$

Forma rozwinięta: $\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \cdot}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) = 0$

Zapis łączny: $\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0$

gdzie $G = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0$

Stan naprężenia w układzie biegunowym



$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)$$

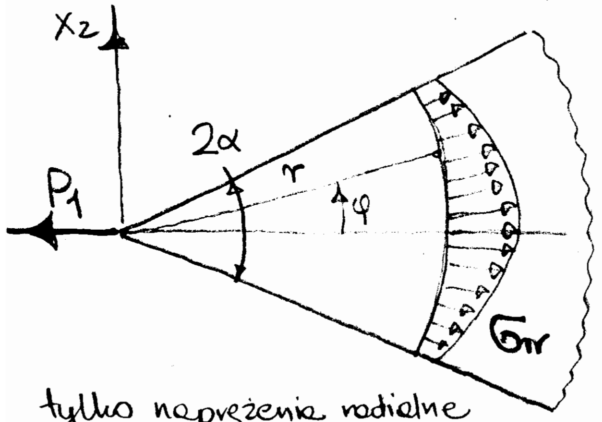
σ_{rr} – naprężenia normalne radialne

$\sigma_{\varphi\varphi}$ – naprężenia normalne obwodowe

$\sigma_{r\varphi}=\sigma_{\varphi r}$ – naprężenia styczne

spostrzeżenie: $\Delta F=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}$

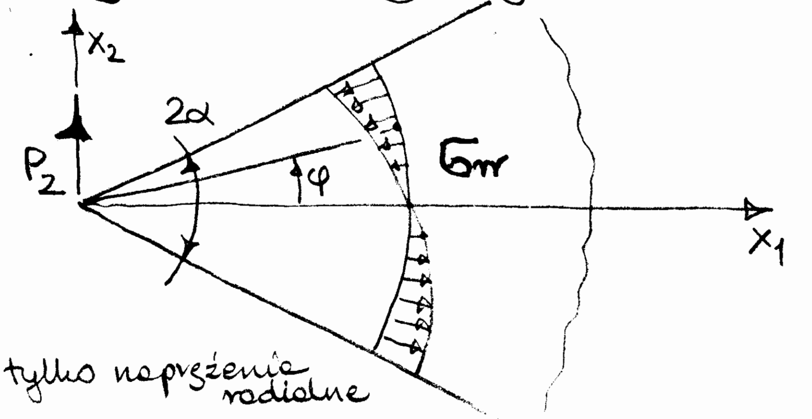
Dwa elementarne przykłady – klin tarczowy pod działaniem siły skupionej
grubość g, kąt wewnętrzny równy 2α



tylko naprężenia radialne

$$\sigma_{rr}(r,\varphi)=\frac{2P_1}{g(2\alpha+\sin 2\alpha)}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

odwrotnie proporcjonalne względem r, symetryczne względem φ – jak obciążenie

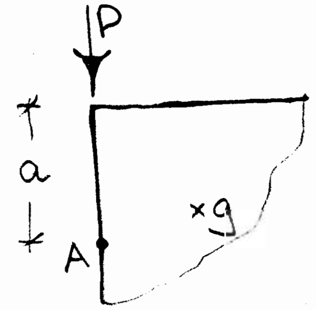


tylko naprężenia radialne

$$\sigma_{rr}(r,\varphi)=-\frac{2P_2}{g(2\alpha-\sin 2\alpha)}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$

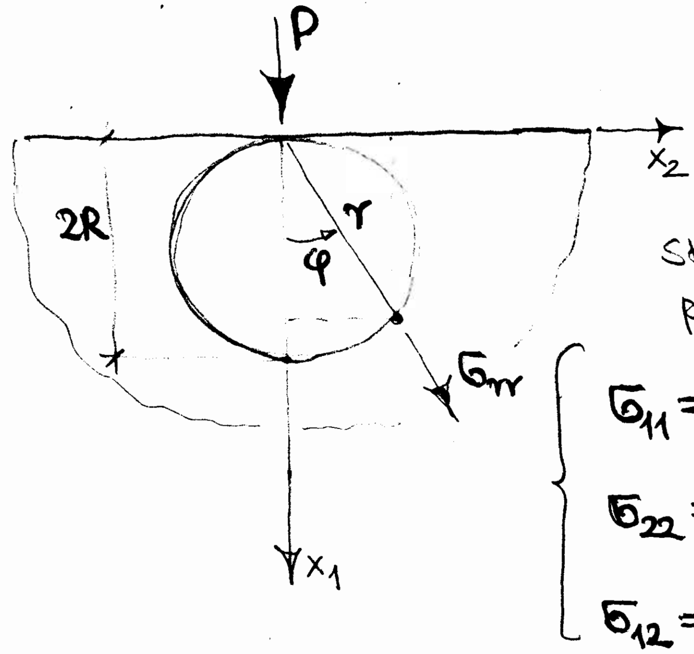
odwrotnie proporcjonalne względem r, antysymetryczne względem φ – jak obciążenie

Zadanie domowe: określić stan naprężenia w p. A



W obu przypadkach przy $r\to 0$ jest $\sigma_{rr}\to\pm\infty$ – rozwiązania nie obowiązują w bliskim sąsiedztwie p. O

Przypadek szczególny – **półpłaszczyzna sprężysta** (zagadnienie Flamanta)

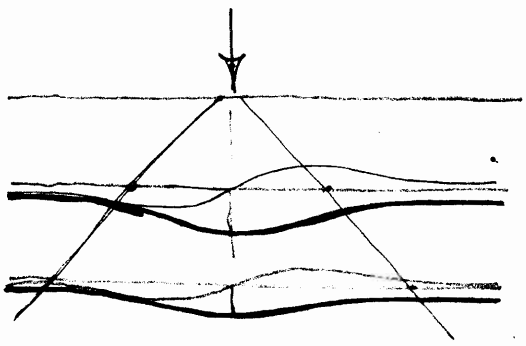


$$\alpha=90^\circ \Rightarrow \sigma_{rr}=-\frac{2P}{\pi g}\frac{\cos\varphi}{r}$$

spostrzeżenie: $\sigma_{rr}=-\dfrac{P}{\pi g R}$

Stan ten można przedstawić w układzie prostokątnym Ox_1x_2:

$$\begin{cases}\sigma_{11}=-\dfrac{2P}{\pi g}\dfrac{x_1^3}{r^4}\\[2mm] \sigma_{22}=-\dfrac{2P}{\pi g}\dfrac{x_1x_2^2}{r^4}\\[2mm] \sigma_{12}=-\dfrac{2P}{\pi g}\dfrac{x_1^2x_2}{r^4}\end{cases}\qquad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$



szkic wykresów naprężeń

$\sigma_{11} \to$ ——

$\sigma_{12} \to$ ——

Naprężenia o znaczeniu inżynierskim znajdują się w zakresie objętym klinem o kącie 90°

OBROTOWOSYMETRYCZNE ZAGADNIENIA 2D (PSN, PSO)

Obrotowa symetria → funkcja F i naprężenia zależne jedynie od zmiennej r

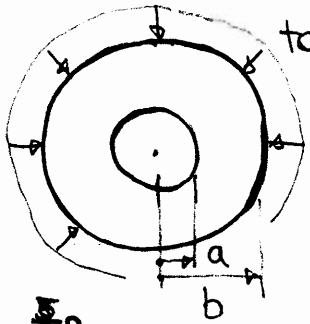
$$\nabla^4 F(r) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \cdot}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0$$

z symbolem pochodnej zwyczajnej:
$$\frac{d^4F}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3F}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dF}{dr} = 0$$

$$F^{IV} + \frac{2}{r}F''' - \frac{1}{r^2}F'' + \frac{1}{r^3}F' = 0$$

Rozwiązanie ogólne: $F(r) = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D$, stąd $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi} = 0$

* tarcza pierścieniowa – PSN, ew. rura grubościenna – PSO; ciśnienie zewnętrzne p

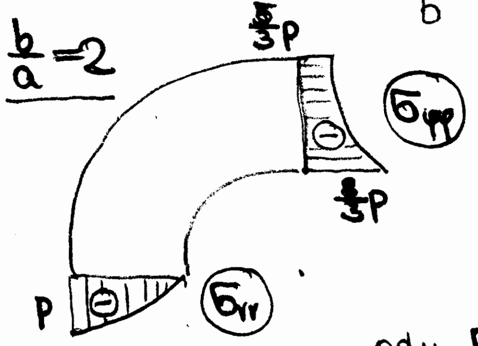


$$\sigma_{rr}(r) = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C$$
$$\sigma_{r\varphi} = 0$$

Warunki brzegowe:

1) $\sigma_{rr}\big|_{r=a} = 0$
2) $\sigma_{rr}\big|_{r=b} = -p$
3) przy dużym $\frac{b}{a}$ naprężenia skończone (brak wyrazów logarytm.)

$\frac{b}{a} = 2$

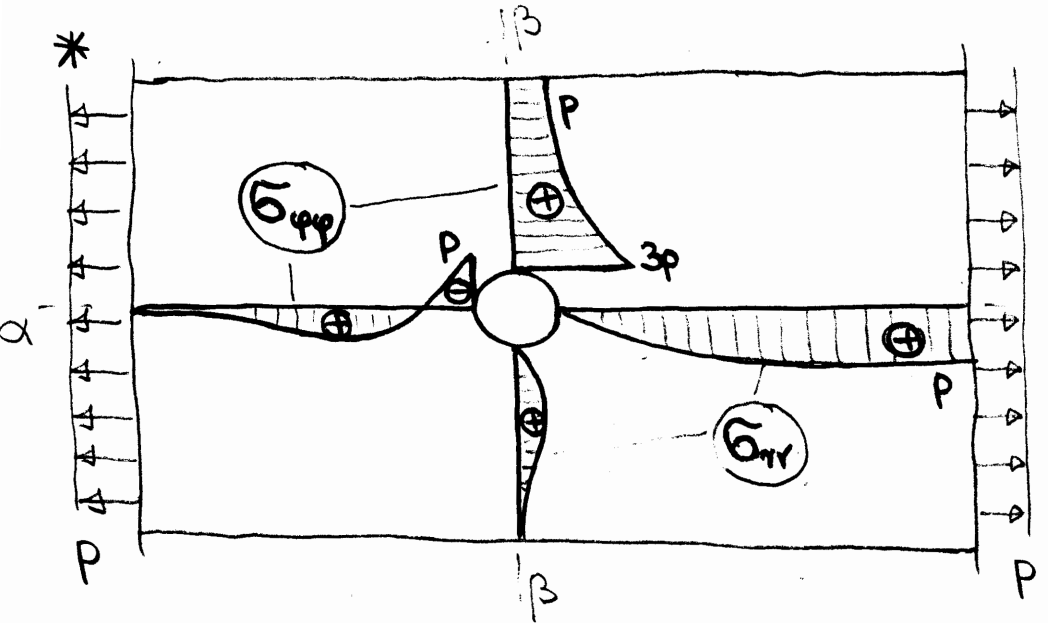


stąd wartość $B = 0$, z podstawienia A i C

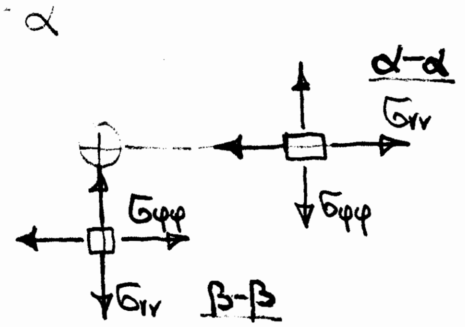
$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \dfrac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(\dfrac{a^2}{r^2} - 1\right) \\[2ex] \sigma_{\varphi\varphi}(r) = -\dfrac{pb^2}{b^2 - a^2}\left(\dfrac{a^2}{r^2} + 1\right) \end{cases}$$

gdy PSO – naprężenia $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = \text{const}$

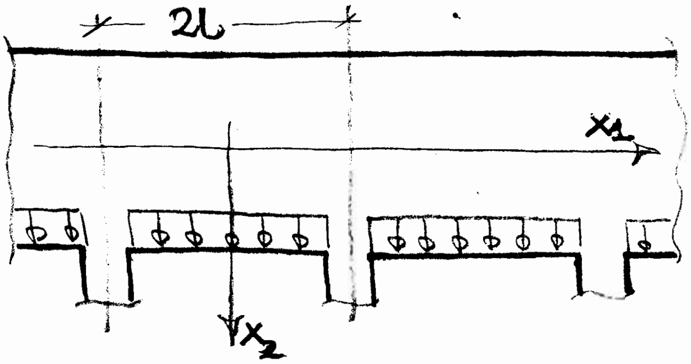
*



rozciągana tarcza z otworem (problem koncentracji naprężeń)



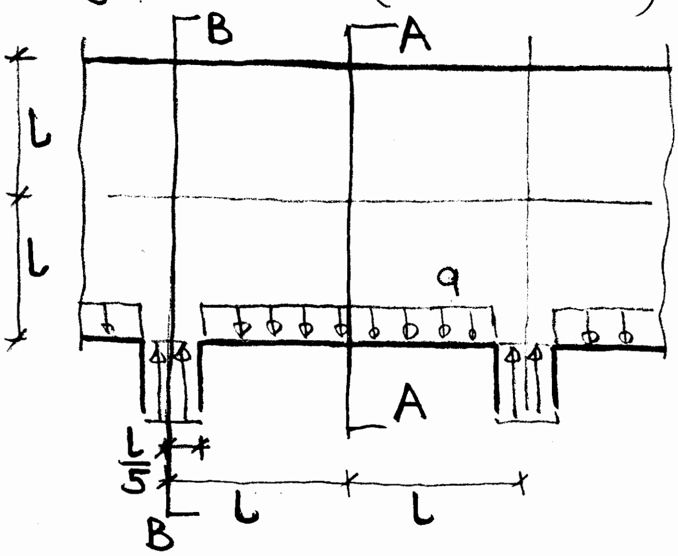
ZASTOSOWANIE SZEREGÓW TRYGONOMETRYCZNYCH W ANALIZIE TARCZ

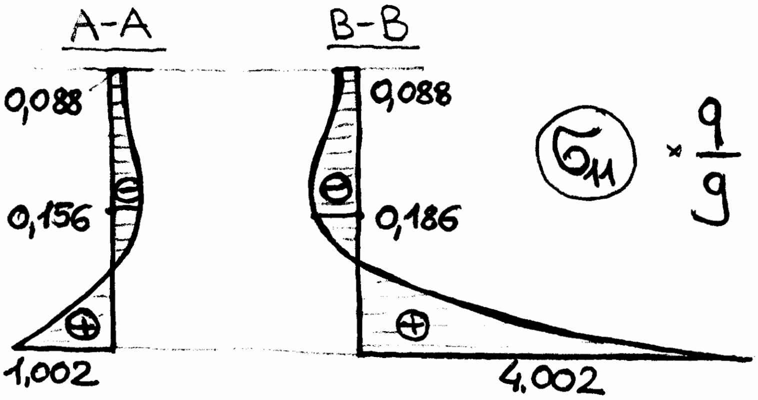


tarcza obciążona i podparta w sposób okresowy → ściana z podporami, walcowy zbiornik wielkośrednicowy

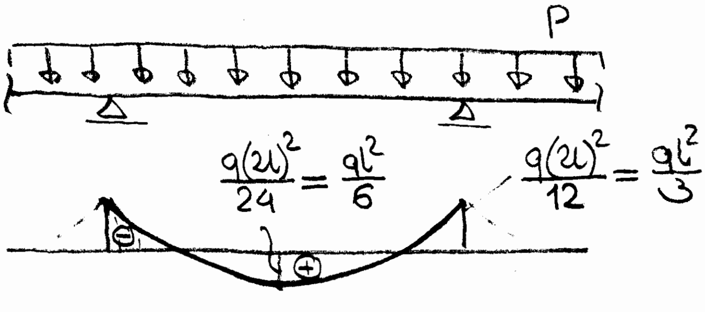
– obciążenie, funkcja F oraz naprężenia można rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera

Przykład: tarcza (belka-ściana)





$\sigma_H \times \frac{q}{g}$



Porównanie z rozwiązaniem belki:

$$W = \frac{g(2l)^2}{6} = \frac{2}{3} g l^2$$

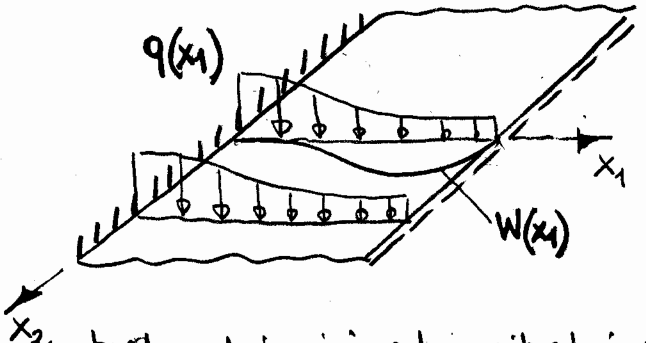
A-A $\quad \sigma_{max} = \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{3}{2gl^2} = 0{,}25 \frac{q}{g}$

B-B $\quad \sigma_{max} = \frac{ql^2}{3} \cdot \frac{3}{2gl^2} = 0{,}50 \frac{q}{g}$

Przyjęcie jednowymiarowego modelu belki jest w tym przypadku znacznym błędem

PRZYKŁADY ANALIZY PŁYT

(I) PASMO PŁYTOWE – układ kartezjański, obciążenie, ugięcie i siły wewn. funkcją jednej współrzędnej (x_1) – symetria translacyjna

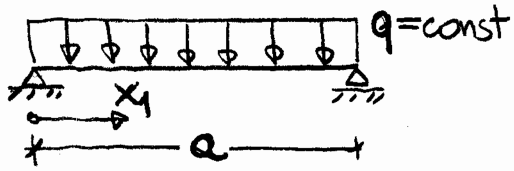


brak zależności od współrzędnej x_2

równanie płyty $\dfrac{d^4 w}{dx_1^4} = \dfrac{q(x_1)}{D}$

bezpośrednie całkowanie, warunki brzegowe

PRZYKŁAD



Równanie: $\dfrac{d^4 w}{dx_1^4} = \dfrac{q}{D}$

Warunki brzegowe: $w(0)=0$, $w(a)=0$

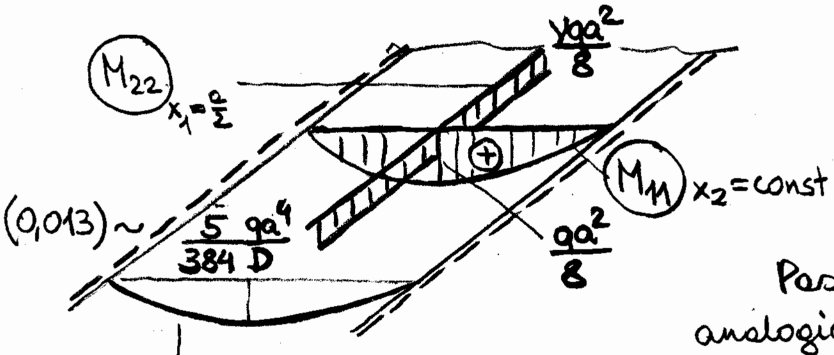
$\dfrac{d^2 w}{dx_1^2}(0)=0$, $\dfrac{d^2 w}{dx_1^2}(a)=0$

– rozwiązanie $w(x_1)$

stąd $M_{11}(x_1) = -D\dfrac{d^2 w}{dx_1^2}$

$M_{22}(x_1) = -\nu D \dfrac{d^2 w}{dx_1^2} = -\nu M_{11}$

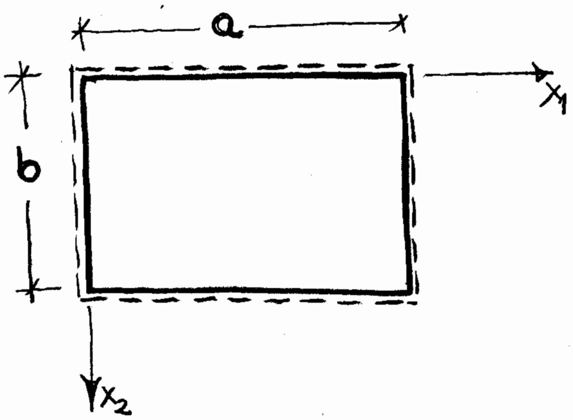
$M_{12} = 0$



$W(x_1)$ – powierzchnia ugięcia

Pasmo płytowe – równanie różniczkowe analogiczne do równania Eulera belki zginanej, różnica – momenty zginające płytowe $M_{22} = -\nu M_{11}$

(II) PŁYTY PROSTOKĄTNE (przykład: swobodnie podparta)



Obciążenie oraz przewidywane funkcje x_1 i x_2: ugięć oraz momentów płytowych traktowane są jako podwójne nieskończone szeregi trygonometryczne

$$q(x_1,x_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b}$$

tożsama postać $$W(x_1,x_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b}$$

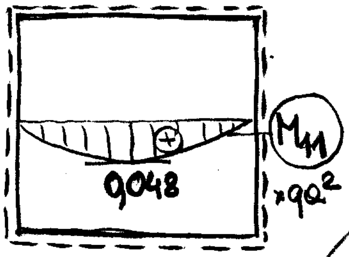
Przykład: $q(x_1,x_2) = q_0 = const \Rightarrow a_{mn} = \dfrac{16 q_0}{mn\pi^2}$ dla m, n jednocześnie nieparzystych

Rozwiązanie – funkcja $W(x_1,x_2)$ jako szereg, szybkozbieżny względem m i n, dobre przybliżenie daje już pierwszy wyraz, poniżej ugięcia max. w środku

- $b = a \Rightarrow W_{max} = 0{,}00416 \dfrac{q_0 a^4}{D}$
- $b = 3a \Rightarrow W_{max} = 0{,}0122 \dfrac{q_0 a^4}{D}$
- $b \to \infty \Rightarrow W_{max} = 0{,}0130 \dfrac{q_0 a^4}{D}$

Wniosek: przypadek pasma płytowego jest dobrym przybliżeniem płyty prostokątnej dla $b \geq 3a$

Przypadek płyty kwadratowej
wyznaczenie momentów płytowych

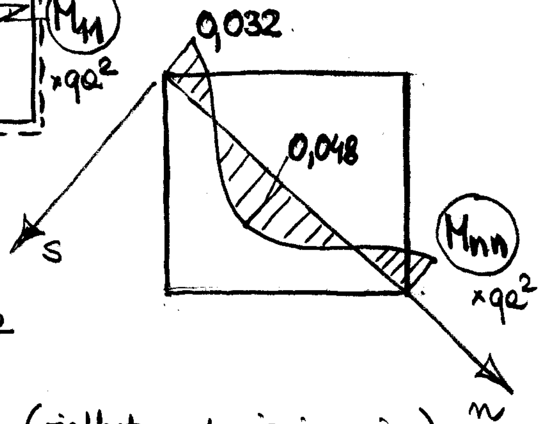


- w środku płyty – $M_{12} = 0$

$\max M_{11} = \max M_{22} = 0{,}048\, qa^2$

- w narożu płyty – $M_{11} = M_{22} = 0$

$M_{12} = -0{,}032\, qa^2$



Przyjmując układ osi n, s zachodzi $M_{nn} = M_{11} + M_{12}$
stąd wykres momentów zginających M_{nn} → rys.
istotne – ujemne momenty zginające w narożach (żelbet – zbrojenie górą)

III OBROTOWA SYMETRIA – funkcje obciążenia, ugięć i momentów zginających zależne jedynie od zmiennej r

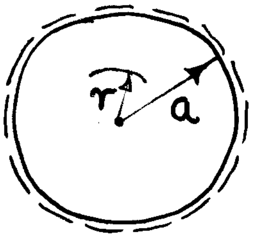
Równanie różniczkowe płyty

$$\Delta(\Delta w) = \frac{q(r)}{D}, \quad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

Gdy równanie jednorodne (=0) $w_0(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$

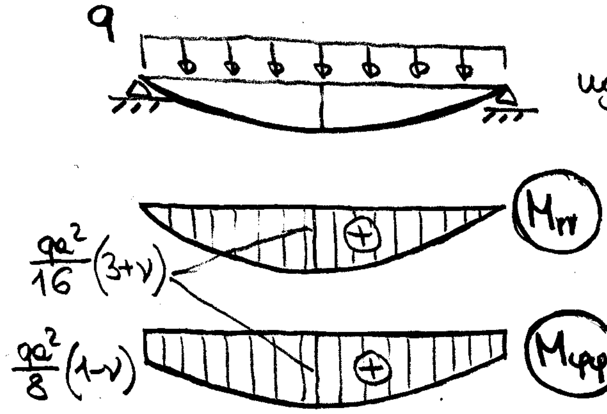
Równanie niejednorodne → $w_s(r)$ zależy od $q(r)$, przy $q = \text{const}$ jest $w_s(r) = \frac{qr^4}{64D}$

Przykład:



Płyta kołowa swobodnie podparta równomiernie obciążona
Warunki brzegowe: $w(a) = 0$, $M_{rr}(a) = 0$,
warunki ograniczające: $w(0)$ i $M_{rr}(0)$ skończone
Rozwiązanie:

$$w(r) = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left[\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right]$$

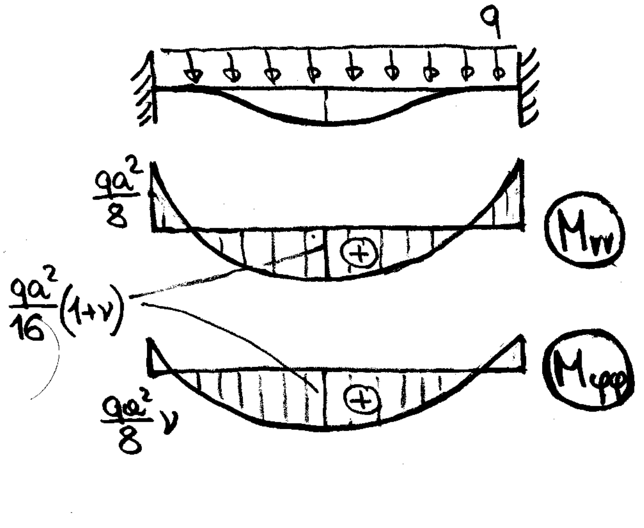


ugięcie maksymalne: $w(0) = \frac{5+\nu}{1+\nu}\frac{qa^4}{64D}$

Przykład 2: Płyta kołowa utwierdzona, $q = \text{const}$
warunki brzegowe: $w(a) = 0$, $\frac{dw}{dr}(a) = 0$
warunki ograniczające: $w(0)$ i $M_{rr}(0)$ skończone
Rozwiązanie:

$$w(r) = \frac{qa^4}{64D}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2$$

ugięcie maksymalne: $w(0) = \frac{qa^4}{64D}$



TEORIA PLASTYCZNOŚCI – ZASTOSOWANIA
TS sz ćw 11

OBLICZANIE ZAPASU BEZPIECZEŃSTWA

* Określić zapas bezpieczeństwa, wg dwóch hipotez: TG i H-M-H.

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} [MPa] \quad , \sigma_0 = 28\, MPa.$$

Przyjąć równomierny wzrost wszystkich składowych.

a. hipoteza Treski

naprężenia główne: $\sigma_1 = 20\,MPa$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -5\,MPa$

Ekstremalne naprężenia styczne: $\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 12{,}5\,MPa$

Stan jest bezpieczny, gdyż $\tau_{max} = 12{,}5\,MPa < \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 14\,MPa$

Zapas bezpieczeństwa $z_1 \to$ warunek $z_1 \cdot \tau_{max} = \tau_0$

$$12{,}5 z_1 = 14 \Rightarrow z_1 = 1{,}12$$

b. hipoteza H-M-H

Warunek stanu bezpiecznego, wyrażony względem składowych stanu wyjściowego

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 \leqslant 2\sigma_0^2$$

$$L = 16^2 + 7^2 + 23^2 + 6 \cdot 6^2 = 1050\, MPa^2$$
$$P = 2 \cdot 28^2 = 1568\, MPa^2$$

$L < P$ – obszar bezpieczny

Sprawdzenie to można także wykonać w układzie osi głównych:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 \leqslant 2\sigma_0^2$$

$$L = 20^2 + 5^2 + 25^2 = 1050\, MPa^2$$

Zapas bezpieczeństwa $z_2 \to$ warunek $z_2^2 \cdot 1050 = 1568$

stąd $z_2 = 1{,}222$

W hipotezie H-M-H można wprowadzić pojęcie tzw. naprężeń zredukowanych

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{22}-\sigma_{11})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

Warunek obszaru bezpiecznego: $\sigma_z \leqslant \sigma_0$

W przypadku zadania jest $\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1050} = 22{,}913\, MPa < \sigma_0 = 28\, MPa$

* Stosując hipotezę H-M-H wyznaczyć graniczną wartość $\sigma_{12} = \sigma_{21} = k\, [MPa]$ gdy dane jest $\sigma_0 = 15\, MPa$.

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 12 & k & 0 \\ k & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [MPa]$$

Warunek H-M-H: $(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 \leqslant 2\sigma_0^2$

$$12^2 + 8^2 + 4^2 + 6k^2 \leqslant 2 \cdot 15^2 \Rightarrow |k| \leqslant 6{,}137$$

* Określić zapas bezpieczeństwa wg hipotez TG i HMH przy jednoparametrowym wzroście składowej σ_{11}

$$\sigma_0 = 50\ \text{MPa}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Sprawdzenie, czy obszar jest bezpieczny

TG: naprężenia główne: $\sigma_{1,2} = \frac{15+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15-0}{2}\right)^2 + 10^2} = 7{,}5 \pm 12{,}5 = \begin{cases} 20 \\ -5 \end{cases}$

$$\sigma_1 = 20\ \text{MPa}, \quad \sigma_2 = -5\ \text{MPa}, \quad \sigma_3 = -25\ \text{MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 22{,}5\ \text{MPa} < \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 25\ \text{MPa}$$ – stan bezpieczny

HMH: $L = (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 = 15^2 + 25^2 + 40^2 + 6 \cdot 10^2 = 3050\ \text{MPa}^2$

$P = 2\sigma_0^2 = 5000\ \text{MPa}^2$, $L < P$ – stan bezpieczny

Obliczenie zapasu bezpieczeństwa wg obu hipotez,

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 15z & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

TG: $\sigma_{1,2} = \frac{15z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}z\right)^2 + 10^2} = 7{,}5z \pm \sqrt{56{,}25z^2 + 100}$

$\sigma_3 = -25\ \text{MPa}$

Można wykazać, że dla wszystkich $z > 0$ zachodzi $\sigma_{min} = \sigma_3 = -25\ \text{MPa}$

stąd $\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{1}{2}\left(7{,}5z + \sqrt{56{,}25z^2+100} + 25\right) = \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 25$

$$7{,}5z + \sqrt{56{,}25z^2 + 100} + 25 = 50 \Rightarrow z = 1{,}4$$

HMH: $L = (15z)^2 + (15z+25)^2 + 25^2 + 6 \cdot 10^2 = 450z^2 + 750z + 1850$

$P = 2\sigma_0^2 = 5000$

$L = P \Rightarrow 450z^2 + 750z - 3150 = 0 \Rightarrow z_{min} = 1{,}94$

* Określić dopuszczalną wielkość naprężeń m, wg hipotez TG i HMH gdy dane jest σ_0

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4m & m \\ 0 & m & m \end{bmatrix}$$

TG: naprężenia główne $\sigma_{1,2} = \frac{4m+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4m-m}{2}\right)^2 + m^2} = \frac{5}{2}m \pm m\frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\sigma_1 = 4{,}305m; \quad \sigma_2 = 0{,}695m; \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{4{,}305m}{2} = \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} \Rightarrow m = \frac{\sigma_0}{4{,}305} = 0{,}232\sigma_0$$

HMH: $(4m)^2 + (3m)^2 + m^2 + 6m^2 = 2\sigma_0^2 \Rightarrow 32m^2 = 2\sigma_0^2$

$$m = \frac{\sigma_0}{4} = 0{,}25\sigma_0$$