Modelowanie i podstawy identyfikacji

- studia stacjonarne

Kazimierz Duzinkiewicz, dr hab. Inż.

Katedra Inżynierii Systemów Sterowania

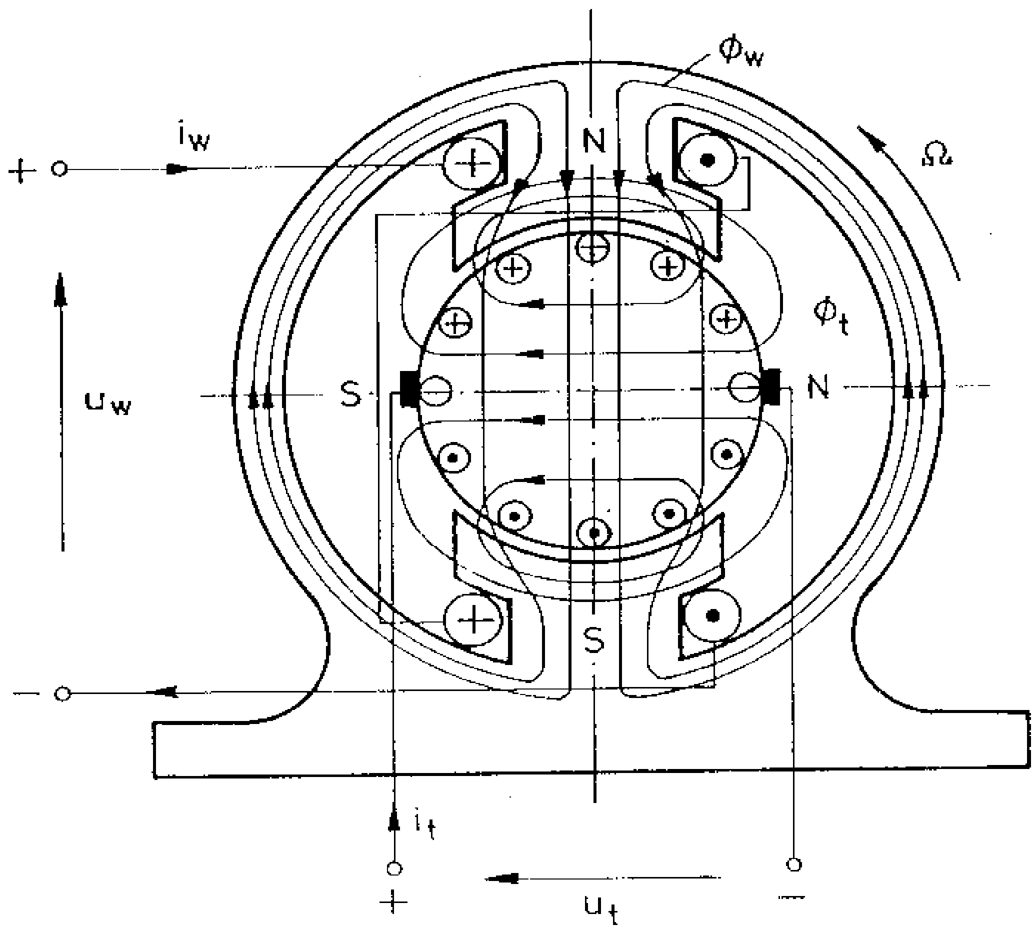
Wykład 4+5 - 2016/2017

Modelowanie fenomenologiczne - przykłady

Systemy elektromechaniczne – przykładowy model

Przykład 4

Cel modelowania: zbudować model obcowzbudnego silnika prądu stałego (SPS) pozwalający badać zachodzące w nim procesy przejściowe elektromechaniczne

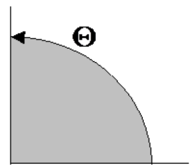


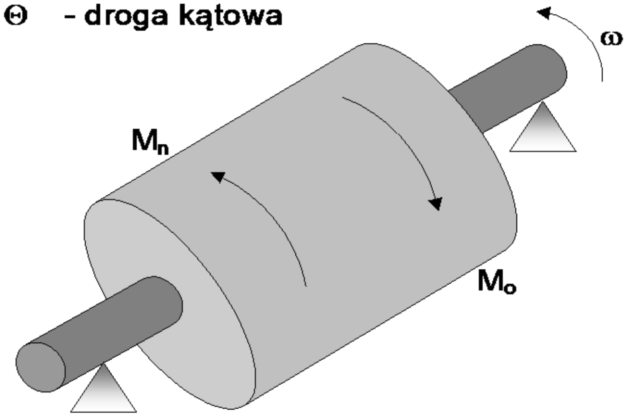
Idealizacja trzech wyróżnionych podsystemów:

- mechanicznego
- elektrycznego – obwodu wzbudzenia
- elektrycznego – obwodu twornika

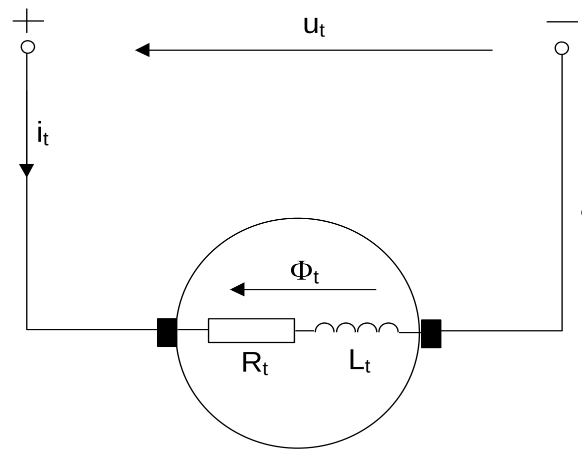
Część mechaniczna

M_n - moment napędowy
M_o - moment oporowy
ω - prędkość kątowa
Θ - droga kątowa

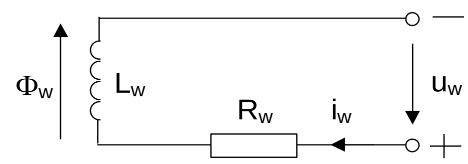




Część elektromagnetyczna:



u_t - napięcie twornika
i_t - prąd twornika
R_t - rezystancja twornika
L_t - indukcyjność twornika
Φ_t - strumień twornika



u_w - napięcie wzbudzenia
i_w - prąd wzbudzenia
R_w - rezystancja wzbudzenia
L_w - indukcyjność wzbudzenia
Φ_w - strumień wzbudzenia

Równania ruchu systemu – podsystem mechaniczny

Prawo zachowania – równanie równowagi – II prawo dynamiki Newton'a

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = M_n(t) - M_o(t)$$

t : czas $[s]$

J : bezwładność wypadkowa sprowadzona do wału silnika, czyli bezwładność obejmująca wirnik silnika i części ruchome układu napędzanego $[kg \cdot m^2]$

ω : prędkość kątowa wału silnika $[s^{-1}]$

M_n : moment napędowy działający na wał silnika $[N \cdot m]$

M_o : moment oporowy działający na wał silnika $[N \cdot m]$

Zależności wiążące

Moment napędowy M_n określony jest w teorii maszyn elektrycznych wzorem

$$M_n(t) = c_M \cdot \Phi_w(t) \cdot i_t(t)$$

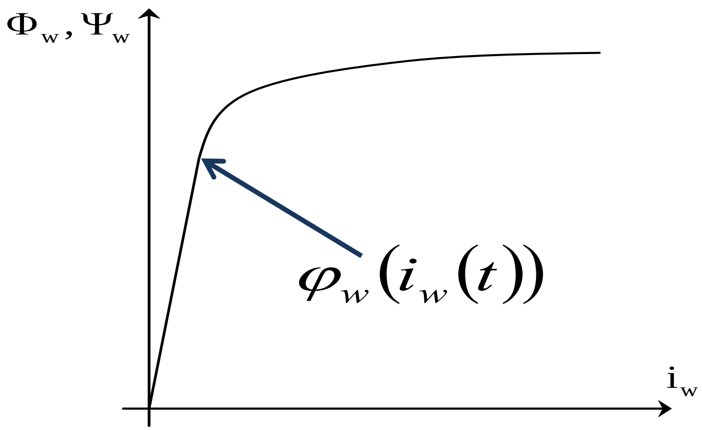
c_M : współczynnik stały dla określonego silnika, zależny od jego danych konstrukcyjnych $\left[N \cdot m \cdot Wb^{-1} \cdot A^{-1}\right]$

Φ_w : strumień magnetyczny (strumień indukcji magnetycznej|) obwodu wzbudzenia $[Wb]$

i_t : prąd twornika $[A]$

Wybrane zmienne systemu: momenty obrotowe, prędkości i położenia kątowe, prądy, napięcia $\Rightarrow$ należy wyrugować strumień magnetyczny obwodu wzbudzenia jako zmienną

Charakterystyka magnesowania obwodu wzbudzenia



Możemy napisać

$$\Phi_w(t) = \varphi_w(i_w(t))$$

φ_w : funkcja magnesowania obwodu wzbudzenia

oraz

$$M_n(t) = c_M \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot i_t(t)$$

Przyjmiemy na razie, że moment oporowy jest dowolną funkcją czasu

Otrzymane równanie ruchu podsystemu mechanicznego

$$\boxed{J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = c_M \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot i_t(t) - M_o(t)}$$

Równania ruchu systemu – podsystem obwodu wzbudzenia

Prawo zachowania – równanie spójności – II prawo Kirchhoff'a dla oczka obwodu wzbudzenia

$$u_w(t) = u_{R_w}(t) + u_{L_w}(t)$$

t : czas $[s]$

u_w : napięcie podawane na uzwojenie wzbudzenia $[V]$

u_{R_w} : napięcie na rezystancji uzwojenia wzbudzenia $[V]$

u_{L_w} : napięcie na indukcyjności uzwojenia wzbudzenia $[V]$

W maszynach elektrycznych wirujących napięcie na indukcyjności obwodu wzbudzenia to siły elektromotoryczne indukowane w tym uzwojeniu

$$u_{L_w}(t) \equiv e_{ind}^{(w)}$$

$e_{ind}^{(w)}$: siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu wzbudzenia $[V]$

Zależności wiążące

a) napięcie na rezystancji uzwojenia wzbudzenia

$$u_{R_w}(t) = R_w \cdot i_w(t)$$

R_w : rezystancja uzwojenia wzbudzenia $[\Omega]$

i_w : prąd płynący przez uzwojenie wzbudzenia $[A]$

b) siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu wzbudzenia

$$e_{ind}^{(w)}(t) = \left(\begin{array}{c} \text{składowa wynikająca} \\ \text{ze zmian w czasie} \\ \text{strumienia sprzężonego} \\ \text{z uzwojeniem wzbudzenia} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{składowa wynikająca} \\ \text{z ruchu zwojów} \\ \text{uzwojenia wzbudzenia} \\ \text{względem} \\ \text{jakiegoś strumienia} \end{array} \right)$$

$$e_{ind}^{(w)}(t) = e_{it}^{(w)}(t) + e_{ir}^{(w)}(t)$$

$e_{it}^{(w)}$: siła elektromotoryczna indukowana transformacji uzwojenia wzbudzenia $[V]$

$e_{ir}^{(w)}$: siła elektromotoryczna indukowana rotacji uzwojenia wzbudzenia $[V]$

Dla uzwojenia wzbudzenia

$$e_{ir}^{(w)} = 0$$

Założenie: z uzwojeniem wzbudzenia sprzężone są jedynie linie strumienia magnetycznego wytwarzanego przez to uzwojenie

$$e_{it}^{(w)}(t) = \frac{d\Psi_w(t)}{dt};$$

$$przy \quad czym \quad \Psi_w(t) = z_w \cdot \Phi_w(t)$$

Ψ_w : strumień magnetyczny sprzężony z uzwojeniem wzbudzenia $[Wb]$

Φ_w : strumień magnetyczny zastępczy uzwojenia wzbudzenia odpowiadający Ψ_w $[Wb]$

z_w : liczba zwojów uzwojenia wzbudzenia $[-]$

Skorzystamy z pojęcia indukcyjności własnej

$$L_w = \frac{\Psi_w}{i_w}$$

Możemy napisać

$$L_w\left(i_w(t)\right)=\frac{\Psi_w\left(i_w(t)\right)}{i_w(t)} \quad \Rightarrow \quad \Psi_w\left(i_w(t)\right)=L_w\left(i_w(t)\right)\cdot i_w(t)$$

Stąd

$$e_{it}^{(w)}(t)=\frac{d\Psi_w(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[L_w\left(i_w(t)\right)\cdot i_w(t)\right]=L_w\left(i_w\right)\cdot\frac{di_w(t)}{dt}+i_w(t)\cdot\frac{dL_w\left(i_w\right)}{dt}=$$

$$=\left[L_w\left(i_w\right)+i_w(t)\cdot\frac{dL_w\left(i_w\right)}{di_w}\right]\cdot\frac{di_w(t)}{dt}$$

Otrzymane równanie ruchu podsystemu obwodu wzbudzenia

$$u_w(t)=R_w\cdot i_w(t)+\left[L_w\left(i_w\right)+i_w(t)\cdot\frac{dL_w\left(i_w\right)}{di_w}\right]\cdot\frac{di_w(t)}{dt}$$

Równania ruchu systemu – podsystem obwodu twornika

Prawo zachowania – równanie spójności – II prawo Kirchhoff'a dla oczka obwodu twornika

$$u_t(t) = u_{R_t}(t) + u_{L_t}(t)$$

t : czas $[s]$

u_t : napięcie podawane na uzwojenie twornika $[V]$

u_{R_t} : napięcie na rezystancji uzwojenia twornika $[V]$

u_{L_t} : napięcie na indukcyjności uzwojenia twornika $[V]$

W maszynach elektrycznych wirujących napięcie na indukcyjności obwodu twornika to siły elektromotoryczne indukowane w tym uzwojeniu

$$u_{L_t}(t) \equiv e_{ind}^{(t)}$$

$e_{ind}^{(t)}$: siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu twornika $[V]$

Zależności wiążące

a) napięcie na rezystancji uzwojenia twornika

$$u_{R_t}(t) = R_t \cdot i_t(t)$$

R_t : rezystancja uzwojenia twornika $[\Omega]$

i_t : prąd płynący przez uzwojenie twornika $[A]$

b) siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu twornika

$$e_{ind}^{(t)}(t) = \begin{pmatrix}\text{składowa wynikająca}\\ \text{ze zmian w czasie}\\ \text{strumienia sprzężonego}\\ \text{z uzwojeniem twornika}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{składowa wynikająca}\\ \text{z ruchu zwojów}\\ \text{uzwojenia twornika}\\ \text{względem}\\ \text{jakiegoś strumienia}\end{pmatrix}$$

$$e_{ind}^{(t)}(t) = e_{it}^{(t)}(t) + e_{ir}^{(t)}(t)$$

$e_{it}^{(t)}$: siła elektromotoryczna indukowana transformacji uzwojenia twornika $[V]$

$e_{ir}^{(t)}$: siła elektromotoryczna indukowana rotacji uzwojenia twornika $[V]$

Dla uzwojenia twornika

$$e_{ir}^{(t)} \neq 0$$

Siła elektromotoryczne indukowana rotacji dla uzwojenia twornika wynika z jego ruchu względem strumienia magnetycznego uzwojenia wzbudzenia

Określany jest w teorii maszyn elektrycznych wzorem

$$e_{ir}^{(t)}(t) = c_E \cdot \Phi_w(t) \cdot \omega(t)$$

c_E : współczynnik stały dla określonego silnika, zależny od jego danych konstrukcyjnych $\left[V \cdot Wb^{-1} \cdot s\right]$

Φ_w : strumień magnetyczny (strumień indukcji magnetycznej|) obwodu wzbudzenia $[Wb]$

ω : prędkość kątowa wirnika silnika $\left[s^{-1}\right]$

Musimy wyrugować Φ_w

Skorzystamy

$$\Phi_w(t) = \varphi_w(i_w(t))$$

wówczas

$$e_{ir}^{(t)} = c_E \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot \omega(t)$$

Założenie: z uzwojeniem twornika sprzężone są jedynie linie strumienia magnetycznego wytwarzanego przez to uzwojenie

$$e_{it}^{(t)}(t) = \frac{d\Psi_t(t)}{dt};$$

$$przy \quad czym \quad \Psi_t(t) = z_t \cdot \Phi_t(t)$$

Ψ_t : strumień magnetyczny sprzężony z uzwojeniem twornika $[Wb]$

Φ_t : strumień magnetyczny zastępczy uzwojenia twornika odpowiadający Ψ_t $[Wb]$

z_t : liczba zwojów uzwojenia wzbudzenia $[-]$

Skorzystamy z pojęcia indukcyjności własnej

$$L_t = \frac{\Psi_t}{i_t}$$

Możemy napisać

$$L_t(i_t(t)) = \frac{\Psi_t(i_t(t))}{i_t(t)} \quad \Rightarrow \quad \Psi_t(i_t(t)) = L_t(i_t(t)) \cdot i_t(t)$$

Stąd

$$e_{it}^{(t)}(t) = \frac{d\Psi_t(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[L_t(i_t(t)) \cdot i_t(t)\right] = L_t(i_t) \cdot \frac{di_t(t)}{dt} + i_t(t) \cdot \frac{dL_t(i_t)}{dt} =$$

$$= \left[L_t(i_t) + i_t(t) \cdot \frac{dL_t(i_t)}{di_t}\right] \cdot \frac{di_t(t)}{dt}$$

Otrzymane równanie ruchu podsystemu obwodu twornika

$$u_t(t) = R_t \cdot i_t(t) + c_E \varphi_w(i_w(t)) \cdot \omega(t) + \left[L_t(i_t) + i_t(t) \cdot \frac{dL_t(i_t)}{di_t}\right] \cdot \frac{di_t(t)}{dt}$$

Zestawimy równania modelu

$$
\begin{cases}
J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt} = c_M \cdot \varphi_w\left(i_w(t)\right) \cdot i_t(t) - M_o(t) \\[2ex]
u_w(t) = R_w \cdot i_w(t) + \left[L_w(i_w) + i_w(t) \cdot \dfrac{dL_w(i_w)}{di_w} \right] \cdot \dfrac{di_w(t)}{dt} \\[2ex]
u_t(t) = R_t \cdot i_t(t) + c_E \varphi_w\left(i_w(t)\right) \cdot \omega(t) + \left[L_t(i_t) + i_t(t) \cdot \dfrac{dL_t(i_t)}{di_t} \right] \cdot \dfrac{di_t(t)}{dt}
\end{cases}
$$

lub

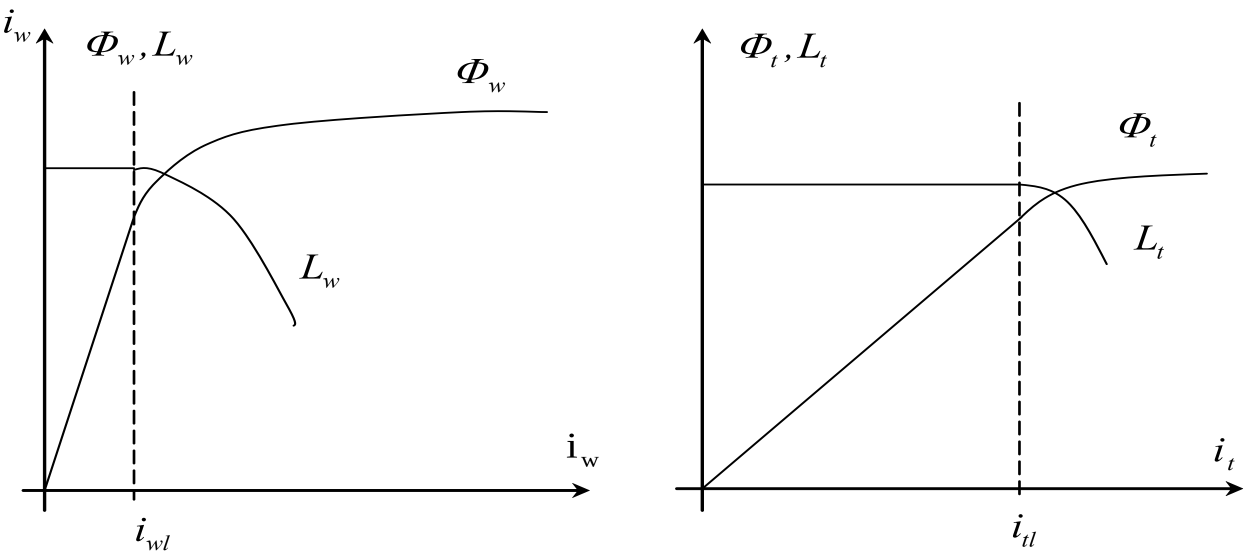
$$\begin{cases} J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt} = c_M \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot i_t(t) - M_o(t) \\ \left[L_w(i_w) + i_w(t) \cdot \dfrac{dL_w(i_w)}{di_w} \right] \cdot \dfrac{di_w(t)}{dt} = u_w(t) - R_w \cdot i_w(t) \\ \left[L_t(i_t) + i_t(t) \cdot \dfrac{dL_t(i_t)}{di_t} \right] \cdot \dfrac{di_t(t)}{dt} = u_t(t) - R_t \cdot i_t(t) - c_E \varphi_w(i_w(t)) \cdot \omega(t) \end{cases}$$

Kategorie otrzymanego modelu

- parametryczny
- dynamiczny
- ciągły
- **nieliniowy**
- o parametrach skupionych
- **niestacjonarny**
- deterministyczny

I próba uproszczenia modelu

Ograniczenie zakresu zmienności prądu wzbudzenia i twornika



Założenia:

- w pewnym obszarze zmian prądu wzbudzenia i_w i twornika i_t związane z nimi charakterystyki magnesowania są liniowe
- silnik ma pracować w obszarze liniowych części charakterystyk magnesowania zarówno dla obwodu twornika jak wzbudzenia

Przy podanych założeniach

$$\Phi_w(t) = \varphi_w(i_w(t)) = k_w \cdot i_w(t) \Rightarrow L_w = const$$

$$\Phi_t(t) = \varphi_t(i_t(t)) = k_t \cdot i_t(t) \Rightarrow L_t = const$$

oraz

$$\left[L_w(i_w) + i_w(t) \cdot \frac{dL_w(i_w)}{di_w} \right] \cdot \frac{di_w(t)}{dt} = L_w \frac{di_w(t)}{dt}$$

$$\left[L_t(i_t) + i_t(t) \cdot \frac{dL_t(i_t)}{di_t} \right] \cdot \frac{di_t(t)}{dt} = L_t \frac{di_t(t)}{dt}$$

Ponadto

$$M_n(t) = c_M \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot i_t(t) = c_M \cdot k_w \cdot i_w(t) \cdot i_t(t)$$

$$e_{ir}^{(t)} = c_E \cdot \varphi_w(i_w(t)) \cdot \omega(t) = c_E \cdot k_w \cdot i_w(t) \cdot \omega(t)$$

W tych wyrażeniach przy stosowaniu jednostek SI i prędkości kątowej stałe c_M oraz c_E są sobie równe

$$c_M = c_E$$

a zatem

$$c_M \cdot k_w = c_E \cdot k_w = G$$

G ma wymiar indukcyjności [H] i jest nazywana indukcyjnością rotacji

Zestawienie równań modelu po pierwszym uproszczeniu

$$\begin{cases} L_w \cdot \dfrac{di_w(t)}{dt} = u_w(t) - R_w \cdot i_w(t) \\ L_t \cdot \dfrac{di_t(t)}{dt} = u_t(t) - R_t \cdot i_t(t) - G \cdot i_w(t) \cdot \omega(t) \\ J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt} = G \cdot i_w(t) \cdot i_t(t) - M_o(t) \end{cases}$$

Kategorie otrzymanego modelu

- parametryczny
- dynamiczny
- ciągły
- **nieliniowy**
- o parametrach skupionych
- stacjonarny
- deterministyczny

Forma modelu

Jeżeli traktować otrzymany układ równań modelowych jako model relacji **wejście wyjście** to SPS jest systemem o trzech wejściach i trzech wyjściach

$$\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_w(t) \\ u_t(t) \\ M_o(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix} i_w(t) \\ i_t(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_w(t) \\ u_t(t) \\ M_o(t) \end{pmatrix} \rightrightarrows \boxed{\boldsymbol{f}\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right)=\boldsymbol{0}} \rightrightarrows \begin{pmatrix} i_w(t) \\ i_t(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}=\mathbf{y}(t)$$

$$\boldsymbol{f}\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right)=\begin{pmatrix} f_w\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right) \\ f_t\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right) \\ f_m\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right) \end{pmatrix}$$

$$f_w\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right)=L_w\cdot \dot{i}_w(t)+R_w\cdot i_w(t)-u_w(t)$$

$$f_t\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right)=L_t\cdot \dot{i}_t(t)+R_t\cdot i_t(t)+G\cdot i_w(t)\cdot\omega(t)-u_t(t)$$

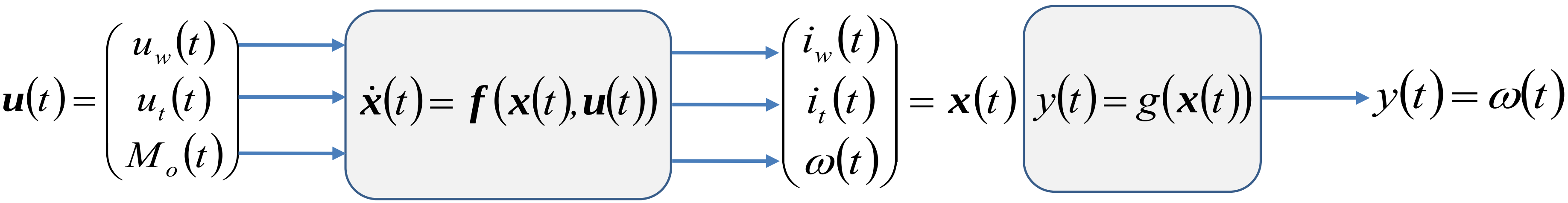
$$f_m\left(\mathbf{y}'(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right)=J\cdot\dot{\omega}(t)-G\cdot i_w(t)\cdot i_t(t)+M_o(t)$$

Ale naturalnym jest traktować otrzymany układ równań modelowych jako **równania stanu modelu stanu** - SPS jest systemem o trzech zmiennych wejściowych i trzech zmiennych stanu

$$\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_w(t) \\ u_t(t) \\ M_o(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} i_w(t) \\ i_t(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Jeżeli wybierzemy jako wyjście prędkość kątową

$$y(t)=\omega(t)$$



$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=\begin{pmatrix} f_w(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) \\ f_t(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) \\ f_m(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) \end{pmatrix}$$

$$f_w(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=\frac{1}{L_w}\left(-R_w\cdot i_w(t)+u_w(t)\right)$$

$$f_t(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=\frac{1}{L_t}\left(-R_t\cdot i_t(t)-G\cdot i_w(t)\cdot\omega(t)+u_t(t)\right)$$

$$f_m(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=\frac{1}{J}\left(G\cdot i_w(t)\cdot i_t(t)-M_o(t)\right)$$

$$g(\mathbf{x}(t))=\omega(t)$$