Równania i nierówności wymierne

2.56. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-3}$, b) $\frac{y}{y-1}=\frac{y+3}{y+1}$, c) $\frac{9}{t}-\frac{7-t}{t-1}=1$, d) $\frac{y+2}{y+1}=-\frac{2-y}{y-2}$,

e) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$, f) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$,

g) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$, h) $\frac{3}{4x-20}+\frac{15}{50-2x^2}+\frac{7}{6x+30}=0$,

i) $\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x}-3=0$, j) $\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-2=0$, k) $\frac{5}{x^2}-\frac{26}{x}+5=0$,

l) $\frac{-5x+1}{|x|}=1$, m) $2-\frac{1}{|x-3|}=\frac{1}{6}$.

2.67. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x}{x-1}\le 1$, b) $\frac{x^2+x+1}{x^2-4}<0$, c) $\frac{6}{1-x}+\frac{x}{x-1}<0$.

Podaj liczby naturalne należące do zbioru rozwiązań nierówności.

2.68. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x+1}{2x-3}-2<0$, b) $\frac{-2x+5}{3x-5}-5>0$, c) $\frac{7x-8}{5-7x}\ge 4$,

d) $\frac{y}{2y+3}-1\frac{1}{2}\le 0$, e) $\frac{2y-4}{y^2+1}>0$, f) $\frac{4}{3z+1}-2>0$,

g) $-\frac{2}{3}\le\frac{3-4x}{5x+2}\le\frac{3}{2}$, h) $-1\le\frac{3x+1}{x+1}<3$, i) $-3<\frac{x^2+\frac{1}{4}x-2}{x^2-x+1}<2$,

j) $\frac{x^2}{4+9x^4}\le\frac{1}{12}$, k) $\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^4<16$.

2.56. Odp. **a)** 5, **b)** 3, **c)** 3, **d)** nie ma rozwiązania, **e)** 1, **f)** $x_1=-3$, $x_2=\frac{2}{3}$, **g)** 3, **h)** nie ma rozwiązania, **i)** $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{3}$, **j)** $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$, **k)** $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$, **l)** $\frac{1}{6}$, **m)** $x_1=2\frac{5}{11}$, $x_2=3\frac{6}{11}$.

Wskazówka. **i)** Dziedzina $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Podstawiamy $\frac{1}{x}=t$, gdy $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ i otrzymujemy równanie postaci $3t^2-8t-3=0$.

2.67. Odp. **a)** $x\in(-\infty;1)$, liczba 0, **b)** $x\in(-2;2)$, liczby: 0, 1, **c)** $x\in(1;6)$, liczby: 2, 3, 4, 5.

2.68. Odp. Nierówność jest spełniona, gdy: **a)** $x\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$, **b)** $x\in\left(\frac{5}{3};\frac{30}{17}\right)$, **c)** $x\in\left(\frac{5}{7};\frac{4}{5}\right\rangle$, **d)** $y\in\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right\rangle\cup\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$, **e)** $y\in(2;+\infty)$, **f)** $z\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, **g)** $x\in\left\langle 0;6\frac{1}{2}\right\rangle$, **h)** $x\in\left\langle-\frac{1}{2};+\infty\right)$, **i)** $x\in\mathbf{R}$, **j)** $x\in\mathbf{R}$, **k)** $x\in(-\infty;-11)\cup\left(-\frac{9}{7};+\infty\right)$.

g) $D=\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{2}{5}\right\}$. Nierówność podwójna jest równoważna układowi nierówności $\frac{3-4x}{5x+2}\ge-\frac{2}{3}\ \wedge\ \frac{3-4x}{5x+2}\le\frac{3}{2}$.

k) $D=\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}\right\}$. Obie strony nierówności nie są ujemne, więc nierówność możemy zapisać w postaci:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^4}<\sqrt[4]{16}\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{3x-1}{2x+5}\right|<2\ \Leftrightarrow\ \frac{3x-1}{2x+5}<2\ \wedge\ \frac{3x-1}{2x+5}>-2.$$