Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

2.100. Rozwiąż równanie:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$, b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x^2}=9^{-2x^3}$, c) $8^{2x+1}=32\cdot 2^{4x-2}$,

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$, e) $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$, f) $5^{x}\cdot 5^{x^2}\cdot 5^{x^3}=\frac{1}{5}$,

g) $\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{3}$, h) $4^{x}-2^{x+1}-8=0$, i) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$,

j) $x^3\cdot 5^{x}+x\cdot 5^{x+1}=0$, k) $5^{x-1}-5\cdot 2^{x}=5^{x-2}+5\cdot 2^{x-2}$, l) $\frac{16^{x}+2}{4^{x}+1}=2$.

2.105. Rozwiąż nierówność:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}>\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{x}$, b) $2^{4-|x^2-4x|}\ge 4$, c) $(0{,}5)^{x^2}\cdot 4^{x-2}\ge\frac{1}{16}$,

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{|x|}}<2$, e) $9^{x}-3^{x+1}-4<0$, f) $2^{2x}-2^{x}-6<0$,

g) $4^{x}>2^{x+2}-8$, h) $2^{x+1}-3^{x}<2^{x-1}$, i) $8^{x}+5\cdot 2^{x}\ge 4^{x+1}+2$,

j) $5^{x}+\frac{15}{2-5^{x}}<0$, k) $5^{x}+\frac{(5^{x}-5)(5^{x}+5)}{1-5^{x}}>0$.

2.112. Rozwiąż równanie:

a) $\log(x-1)+\log(x-2)=\log(x+2)$, b) $\log_2 x+\log_2(2x-3)=1$,

c) $\frac{1}{2}\log(x^2-16)-1=\log 3-\frac{1}{2}\log(x^2+16)$, d) $\log\sqrt{x+21}+\frac{1}{2}\log(x-21)=1+\log 2$,

e) $\log\sqrt{x^2+x-5}=2\log x+\log\left(\frac{1}{x}\right)$, f) $\log_3 x-\frac{4}{\log_3 x}=3$,

g) $\frac{2(\log_2^2 x+2\log_2 x-10)}{\log_2 x-3}=\log_2^2 x$, h) $\log 2+\log(4^{x-2}+9)=\log 10+\log(2^{x-2}+1)$,

i) $\log_2(9-2^{x})=3-x$, j) $1+\log\sqrt{36+2^{3x}}=2$,

k) $\log\left(64\sqrt{2^{x^2-7x}}\right)=0$, l) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$,

m) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$, n) $3^{\log_2(x^2-5x+7)}=1$,

o) $\log_3(\log_9 x)=\log_9(\log_3 x)$, p) $\log_4\log_2\log_3(2x-1)=\frac{1}{2}$.

2.113. Rozwiąż nierówność:

a) $\log x+\log(x+1)<\log(2x+6)$, b) $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$,

c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)>1$, d) $\log_{0.2}(x^2-2x-1)>0$, e) $\log_3^2 x+3\log_3 x+2\le 0$,

f) $\log_2 x\cdot\log_3 x<\log_3 16$, g) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x}\le 2$, h) $\left|\log(x^2-1)\right|<1$,

i) $\frac{x^2+x+3}{\log(x-4)}<0$, j) $\log_x(1-6x^2)\le 1$, k) $\log_x(2x+3)>1$.

2.100. a) 1, b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, c) 0, d) 2, e) 6, f) −1, g) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, h) 2, i) −1, j) 0, k) 4, l) $\frac{1}{2}$.

2.105. Nierówność jest spełniona, gdy: a) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, b) $x \in \langle 2-\sqrt{6}; 2-\sqrt{2}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{6}\rangle$, c) $x \in \langle 0; 2\rangle$, d) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, e) $x \in (-\infty; \log_3 4)$, f) $x \in (-\infty; \log_2 3)$, g) $x \in R$, h) $x \in (1; +\infty)$, i) $x \in \{0\} \cup \langle 1; +\infty)$, j) $x \in (\log_5 2; 1)$, k) $x \in (0; 2)$.

2.112. a) 4, b) 2, c) $x_1 = -\sqrt{34}$, $x_2 = \sqrt{34}$, d) 29, e) 5, f) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 81$, g) $x_1 = 32$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{1}{4}$, h) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, i) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, j) $x = 2$, k) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, l) $x = 16$, m) $x = 4$, n) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, o) 81, p) 41.

2.113. Nierówność jest spełniona, gdy: a) $x \in (0; 3)$, b) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, c) $x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$, d) $x \in (1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{3})$, e) $x \in \left\langle \frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right\rangle$, f) $x \in \left(\frac{1}{4}; 4\right)$, g) $x \in (0; 1) \cup \{3\}$, h) $x \in (-\sqrt{11}; \sqrt{1,1}) \cup (\sqrt{1,1}; \sqrt{11})$, i) $x \in (4; 5)$, j) $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right\rangle$, k) $x \in (1; +\infty)$.