Ciągi liczbowe

Definicja 1 *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy np. przez a_n.Ciąg o takich wyrazach oznaczmy przez (a_n). Zbiór wyrazów ciągu (a_n), tj. $\{a_n : n \in N\}$, oznaczamy krótko przez $\{a_n\}$.*

Definicja 2 *Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, tzn.*

$$\bigvee_{m\in R} \bigwedge_{n\in N} a_n \geqslant m.$$

Definicja 3 *Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, tzn.*

$$\bigvee_{M\in R} \bigwedge_{n\in N} a_n \leqslant M.$$

Definicja 4 *Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony, tzn.*

$$\bigvee_{m,M\in R} \bigwedge_{n\in N} m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Definicja 5 *Ciąg (a_n) jest rosnący (niemalejący), jeżeli*

$$\bigwedge_{n\in N} a_n < a_{n+1} \quad \left(\bigwedge_{n\in N} a_n \leqslant a_{n+1} \right)$$

Uwaga. Analogicznie definiuje się ciąg malejący i nierosnący.
Uwaga. Monotoniczność dowolnego ciągu (a_n) możemy ustalić badając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ a ciągu (b_n) o wyrazach dodatnich porównując iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ z 1. Korzystamy wtedy z tabeli:

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{b_{n+1}}{b_n}$	ciąg
> 0	> 1	rosnący
< 0	< 1	malejący
$\geqslant 0$	$\geqslant 1$	niemalejący
$\leqslant 0$	$\leqslant 1$	nierosnący

Definicja 6 *(granica właściwa ciągu)*
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in R$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} \left[(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon) \right].$$

Obrazowo: ciąg jest zbieżny do granicy a, gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko punktu a.

Twierdzenie 1 *(o jednoznaczności granicy ciągu)*
Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Definicja 7 *(granice niewłaściwe ciągu)*
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞ $(-\infty)$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} [(n > n_0) \Rightarrow (a_n > \varepsilon)] \quad \left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} [(n > n_0) \Rightarrow (a_n < \varepsilon)]\right).$$

Obrazowo: ciąg jest zbieżny do ∞ $(-\infty)$, gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby (są mniejsze od dowolnie małej liczby).
Fakt (granice ciągu geometrycznego)

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{dla } |q| < 1, \\ = 1 & \text{dla } q = 1, \\ = \infty & \text{dla } q > 1, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leqslant -1. \end{cases}$$

Twierdzenie 2 *(o ograniczoności ciągu zbieżnego)*
Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie 3 *(o arytmetyce granic ciągów)*
Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *gdzie* $c \in R$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *o ile* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$, *gdzie* $p \in Z \setminus \{0\}$,
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, *gdzie* $k \in N \setminus \{1\}$.

Twierdzenie 4 *(o trzech ciągach)*
Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Twierdzenie 5 *(o ciągu monotonicznym i ograniczonym)*
Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący (nierosnący) dla $n \geqslant n_0$ oraz ograniczony z góry (z dołu), to jest zbieżny do granicy właściwej $\sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$($\inf\{a_n : n \geqslant n_0\}$).

Twierdzenie 6 *(określenie liczby e)*
Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy przez e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Fakt (o ciągach z granicą e)
Jeżeli ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Uwaga. Fakt powyższy jest również prawdziwy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$.

Twierdzenie 7 *(o dwóch ciągach)*

1. $a_n \leqslant b_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$ *(*$a_n \geqslant b_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$*),*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*),*

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$*).*

Twierdzenie 8 *(o granicach niewłaściwych ciągów)*

1. $a+\infty=\infty$ *dla* $-\infty < a \leqslant \infty$
2. $a\cdot\infty=\infty$ *dla* $0 < a \leqslant \infty$
3. $\frac{a}{\infty}=0$ *dla* $-\infty < a < \infty$
4. $\frac{a}{0^+}=\infty$ *dla* $0 < a \leqslant \infty$
5. $a^\infty=0$ *dla* $0^+ \leqslant a < 1$
6. $a^\infty=\infty$ *dla* $1 < a \leqslant \infty$
7. $\infty^b=0$ *dla* $-\infty \leqslant b < 0$
8. $\infty^b=\infty$ *dla* $0 < b \leqslant \infty$

Podobnie wygląda tabelka „działań” z symbolem $-\infty$:

1. $a-\infty=-\infty$ dla $-\infty \leqslant a < \infty$
2. $a\cdot(-\infty)=-\infty$ dla $0 < a \leqslant \infty$
3. $\frac{a}{-\infty}=0$ dla $-\infty < a < \infty$
4. $\frac{a}{0^-}=-\infty$ dla $0 < a \leqslant \infty$
5. $a^{-\infty}=0$ dla $1 < a \leqslant \infty$
6. $a^{-\infty}=\infty$ dla $0 < a < 1$
7. $(-\infty)^b=0$ dla $-\infty \leqslant b < 0$

Symbole nieoznaczone

$$\infty-\infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^\infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0$$

Źródło: *"Analiza matematyczna 1"*, M. Gewert, Z. Skoczylas.