Oznacza to, że ciąg (a_n) jest malejący. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 = 2$$

Skoro ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, jest więc zbieżny do granicy właściwej – oznaczmy ją przez g. Wtedy

$$0 \leqslant g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{g}{1+g}$$

$$g = \frac{g}{1+g}$$

Stąd otrzymujemy

$$g = 0$$

❑ Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.11. Wykazać zbieżność ciągu (a_n), wykorzystując jego monotoniczność i ograniczoność, jeśli

a) $a_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+2} + \frac{1}{e^3+3} + \ldots + \frac{1}{e^n+n}$ **b)** $a_n = \dfrac{\pi^n}{(n+1)!}$

Zadanie 3.12. Obliczyć granicę ciągu.

a) $a_n = \dfrac{-5n^6 + n^5 - 4n^2 + 8}{6n^5 - 7n^2 + n - 9}$

b) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$

c) $a_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$

d) $a_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n-1)!}$

e) $a_n = \left(\dfrac{5n^4 - 6n^2 + 1}{-5n^4 + 6n - 5}\right)^{1001}$

f) $a_n = \dfrac{(n^3 + 5n - 1)^{2007}}{(n+1)^{7002}}$

g) $a_n = \left(\dfrac{2^{2n} + 3^n - 8}{4^n + 2^n - 1}\right)^8$

h) $a_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 5^n}$

i) $a_n = \dfrac{4^{n+1} - 5^{n+2}}{5^n - 4^n}$

j) $a_n = \dfrac{4^{3n-2} - 7}{8^{2n} - 5}$

k) $a_n = \dfrac{6^n}{1 + 2^n + 3^n}$

l) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$

m) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt[3]{n-1} + 9}$

n) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n} - 4}{n - \sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 8}$

o) $a_n = \dfrac{(\sqrt[3]{n} - 1)^6}{(\sqrt{n} + 1)^5}$

Odpowiedzi do zadań z rozdziału 3

3.1.
a) ciąg rosnący **b)** ciąg malejący **c)** ciąg rosnący **d)** ciąg malejący **e)** ciąg rosnący **f)** ciąg rosnący **g)** ciąg rosnący **h)** ciąg malejący **i)** ciąg malejący

3.2.
a) ciąg ograniczony **b)** ciąg ograniczony **c)** ciąg ograniczony **d)** ciąg ograniczony z dołu **e)** ciąg ograniczony **f)** ciąg ograniczony

3.3.
a) $\begin{cases} a_1 = -17 \\ r = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ r = -\frac{1}{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = -\frac{4}{3} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -13 \\ r = -1 \end{cases}$

3.4. $a_1 = \frac{1}{5}$, $r = \frac{1}{5}$ oraz $n = 50$

3.5. a) $a_1 = 1 + \sqrt{2}$ **b)** $a_1 = 27$

3.6.
a) $a_{n+1} = 16a_n$
b) $a_n = 3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n = 2 \cdot 6^n$, $a_{n+1} = 6a_n$

3.7.
a) $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$
b) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$, $a_4 = -9$, $a_5 = -17$
c) $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 5$, $a_4 = -7$, $a_5 = 17$
d) $a_1 = \frac{\pi}{6}$, $a_2 = \pi$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$
e) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 1$, $a_4 = 4^3$, $a_5 = 4^{10}$
f) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = 1$, $a_5 = -2$

3.8. Ciąg (a_n) jest rosnący.

3.9. Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n = 5n + 4$ oraz ciąg (a_n) jest rosnący.

3.10.
a) Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4$ oraz $b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$.
b) Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2$.

3.11.
a) ciąg jest rosnący oraz $0 < a_n < \frac{1}{e-1}$
b) ciąg jest malejący dla $n \geqslant 2$ oraz $0 < a_n \leqslant a_2$

3.12.
a) $-\infty$ **b)** 0 **c)** 0 **d)** 1 **e)** -1 **f)** 0 **g)** 1 **h)** 0 **i)** -25 **j)** $\frac{1}{16}$ **k)** ∞ **l)** $\frac{5}{4}$ **m)** ∞ **n)** 0 **o)** 0

3.13.
a) 0 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 1 **e)** 1 **f)** $\frac{3}{4}$ **g)** 0 **h)** $\frac{4}{5}$ **i)** 1 **j)** $\frac{5}{2}$ **k)** $\frac{5}{8}$ **l)** 2 **m)** 0 **n)** $\frac{1}{2}$ **o)** $\frac{1}{2}$ **p)** 0 **q)** 2

3.14.
a) $\frac{3}{5}$ **b)** 2 **c)** 3 **d)** π **e)** 6 **f)** 2 **g)** 7 **h)** 5 **i)** $\frac{1}{3}$ **j)** $\frac{2}{3}$ **k)** 1 **l)** 5 **m)** 1 **n)** 1 **o)** 0 **p)** ∞ **q)** ∞ **r)** ∞

3.15.
a) $\sqrt[3]{e}$ **b)** $e^{-\frac{1}{2}}$ **c)** e^{-2} **d)** e^{-10} **e)** e^3 **f)** e^{12} **g)** e^6 **h)** e^3 **i)** e^3 **j)** 1 **k)** ∞ **l)** e^2 **m)** ∞ **n)** 8 **o)** e^{-2}

3.16. a) $p = 4$. **b)** $p = -2$ lub $p = 6$.

3.17. a) $4,5$ **b)** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

3.18. a) $\frac{311}{99}$ **b)** $\frac{129}{55}$ **c)** $\frac{53}{165}$

3.19. $-1,5 < x < 1,5$

3.20. $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

3.21. a) $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = 27$

3.22. $x \in (-1, 1)$

3.23. Funkcja $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$ dla $x \in (-1, 1)$, osiąga minimum w punkcie $x = 0$ równe $f(0) = 0$.

Zadanie 3.13. Obliczyć granicę ciągu.

a) $a_n = (\sqrt{2^n+1} - \sqrt{2^n-1})$

b) $a_n = (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n+1})$

c) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+\frac{1}{n}}$

d) $a_n = \dfrac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}$

e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

f) $a_n = n(2n - \sqrt{4n^2-3})$

g) $a_n = \sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt[3]{n^3-3}$

h) $a_n = \dfrac{(2n+1)\sqrt[3]{8n^3+2}}{(5n+3)\sqrt{n^2+7}}$

i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^5}+1}{\sqrt{n^5+1}+1}$

j) $a_n = (n - \sqrt{n^2-5n+7})$

k) $a_n = (\sqrt{16n^2+5n+4} - 4n)$

l) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}}$

m) $a_n = (\sqrt{n^3+5n+1} - \sqrt{n^3+5n})$

n) $a_n = (\sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{9^n+1})$

o) $a_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$

p) $a_n = \dfrac{1+e+e^2+\ldots+e^{n-1}}{1-e^{2n}}$

q) $a_n = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

Zadanie 3.14. Obliczyć granicę ciągu.

a) $a_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{5n+1}$

b) $a_n = \dfrac{2n^2+\sin n}{n^2+(-1)^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+\sin n}$

d) $a_n = \sqrt[n]{e^n+3^n+\pi^n}$

e) $a_n = (2^n+3^n+4^n+5^n+6^n)^{\frac{1}{n}}$

f) $a_n = \sqrt[n]{1^n+2^n+5^{-n}}$

g) $a_n = \sqrt[n]{5^n+7^n+\cos^2(n)}$

h) $a_n = \sqrt[n]{2\cdot 5^n+3^n\cdot\sin^2 n}$

i) $a_n = \dfrac{n^3-2n^2\cos(n!)}{3n^3+1}$

j) $a_n = \dfrac{2n^2-\cos(3n)}{3n^2-2n+1}$

k) $a_n = \sqrt[n]{3n^2+n}$

l) $a_n = \sqrt[n]{2^{2n+1}+3^{3n+3}+5^{n+2}}$

m) $a_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$

n) $a_n = \sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}}$

o) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$

p) $a_n = \dfrac{4^n+1}{2^n+\cos(n!)}$

q) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

r) $a_n = \left(5+(-1)^n\right)^n$

Zadanie 3.15. Obliczyć granicę ciągu.

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{n+2}$

b) $a_n = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$

c) $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$

d) $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{5n-1}$

e) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{9n+7}$

f) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{2n+1}\right)^{6n+3}$

g) $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}$

h) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{3n^2}$

i) $a_n = \left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1}$

j) $a_n = \left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)^{2-3n}$

k) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^{n+1}$

l) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2}$

m) $a_n = \dfrac{n+1}{n(\ln(n+1)-\ln n)}$

n) $a_n = n\ln\left(\dfrac{n+8}{n}\right)$

o) $a_n = \left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{1000-2n}$

Zadanie 3.16. Wyznaczyć wartość parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby ciąg o wyrazie ogólnym a_n miał granicę równą g, jeśli

a) $a_n = \dfrac{4n-1}{(p-2)n+3}$, $g = 2$

b) $a_n = \dfrac{(p+3)n+2}{p^2n+4}$, $g = \frac{1}{4}$

Zadanie 3.17. Obliczyć poniższe sumy.

a) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

b) $\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \ldots$

Zadanie 3.18. Zamienić poniższe ułamki dziesiętne okresowe na ułamki zwykłe.

a) $3,(14)$

b) $2,3(45)$

c) $0,3(21)$

Zadanie 3.19. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb x, dla których istnieje skończona suma $x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + \ldots$

Zadanie 3.20. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^3}{(x-1)^3} - \ldots$, której prawa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego. Znaleźć dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 3.21. Rozwiązać równania, których lewe strony są sumami nieskończonych ciągów geometrycznych.

a) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{4}{3}$

b) $0,01x + 0,0001x + 0,000001x + \ldots = \frac{3}{11}$

Zadanie 3.22. Rozwiązać nierówność $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots > -1 - x$, której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

Zadanie 3.23. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x) = 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots$, będącej sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.