# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

**DEFINICJA** (pochodnej właściwej funkcji w punkcie)
Pochodną właściwą funkcji $y=f(x)$ w punkcie $x_0 \in D$, oznaczoną symbolem $f'(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

jeśli ta granica istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja jest różniczkowalna w punkcie $x_0$. Jeśli granica ta nie istnieje, to mówimy, że pochodna $f'(x_0)$ nie istnieje.
Pochodną funkcji w punkcie $x_0$ będziemy również oznaczać $\frac{df}{dx}(x_0)$.

**TWIERDZENIE**
Jeżeli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0$, to jest w tym punkcie ciągła.

**TWIERDZENIE** (o warunkach wystarczających monotoniczności funkcji)
Niech $I \subset R$ oznacza dowolny przedział (ograniczony lub nieograniczony).
Jeżeli dla każdego $x \in I$
1. $f'(x)=0$, to funkcja $f$ jest stała na $I$,
2. $f'(x)>0$, ($f'(x)\geq 0$), to funkcja jest rosnąca na $I$ (niemalejąca),
3. $f'(x)<0$ ($f'(x)\leq 0$), to funkcja jest malejąca na $I$ (nierosnąca)

**TWIERDZENIE** (o warunku koniecznym istnienia ekstremum)
Jeżeli funkcja $f$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0$ i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0)=0$.

**TWIERDZENIE** (o warunku wystarczającym istnienia ekstremum)
Niech funkcja $f$ będzie różniczkowalna w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu $x_0$. Jeżeli $f'(x_0)=0$, a ponadto

$f'(x)<0$ dla $x_0-r<x<x_0$ i $f'(x)>0$ dla $x_0<x<x_0+r$

to funkcja ma w punkcie $x_0$ MINIMUM lokalne.
Jeżeli natomiast jest spełniony warunek

$f'(x)>0$ dla $x_0-r<x<x_0$ i $f'(x)<0$ dla $x_0<x<x_0+r$

to funkcja ma w punkcie $x_0$ MAKSIMUM lokalne.

**DEFINICJA** (wklęsłości i wypukłości wykresu funkcji)
Mówimy, że krzywe $y=f(x)$ jest
- **WYPUKŁA** (wypukła w dół) w przedziale $(a,b) \iff$ $\forall_{x_0 \in (a,b)}$ styczne poprowadzone do tej krzywej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest położone pod tą krzywą.
- **WKLĘSŁA** (wypukła w górę) w przedziale $(a,b) \iff$ $\forall_{x_0 \in (a,b)}$ styczna poprowadzona do tej krzywej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest położona nad tą krzywą.

**TWIERDZENIE** (o warunkach wystarczających wklęsłości i wypukłości)
Jeżeli dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi
- $f''(x) < 0$, to krzywa $y=f(x)$ jest wklęsła (wypukła w górę) na $(a,b)$,
- $f''(x) > 0$, to krzywa $y=f(x)$ jest wypukła (wypukła w dół) na $(a,b)$

**DEFINICJA** (punktu przegięcia)
Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia krzywej $y=f(x)$ $\iff$
1. istnieje styczna do krzywej $y=f(x)$ w punkcie $P_0$,
2. krzywa $y=f(x)$ jest wypukła w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu $x_0$ i jest wklęsła w pewnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu lub na odwrót.

**TWIERDZENIE** (o warunku koniecznym istnienia punktu przegięcia)
Jeżeli funkcja $f$ ma drugą pochodną w otoczeniu $U(x_0)$, funkcja $f''$ jest ciągła w punkcie $x_0$ oraz punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y=f(x)$, to $f''(x_0)=0$.

**TWIERDZENIE** (o warunku wystarczającym istnienia punktu przegięcia)
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja $f$ będzie określona przynajmniej w otoczeniu $U(x_0)$ tego punktu. Niech ponadto funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ pochodną właściwą lub niewłaściwą. Wówczas jeżeli istnieje taka liczba dodatnia $r$, że

$f''(x) < 0$ dla każdego $x_0 \in S_-(x_0, r)$ $\wedge$ $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in S_+(x_0, r)$

lub na odwrót, to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu tej funkcji.

**TWIERDZENIE** (reguła de l'Hospitala)

Jeżeli

1. dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ zawierają pewne sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu $x_0$,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
3. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje także granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

UWAGA

Twierdzenie pozostaje w mocy dla granic jednostronnych oraz granic, gdy $x\to\infty$ lub $x\to-\infty$.

**DEFINICJA** (asymptoty pionowej lewostronnej i prawostronnej)

Prostą o równaniu $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $y=f(x)$ wtedy, gdy

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty\right)$

**DEFINICJA** (asymptoty pionowej obustronnej)

Prostą o równaniu $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji wtedy, gdy jest ona jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

**DEFINICJA** (asymptot ukośnych jednostronnych)

Prostą o równaniu $y = ax+b$ nazywamy asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji wtedy, gdy

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \left(\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0\right).$

**DEFINICJA** (asymptoty ukośnej obustronnej)

Prostą o równaniu $y=ax+b$ nazywamy asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $y=f(x)$ wtedy, gdy jest ona jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

UWAGA

Jeżeli $a=0$, to otrzymujemy asymptotę o równaniu $y=b$ i nazywamy ją **ASYMPTOTĄ POZIOMĄ**.

**TWIERDZENIE** (o wyznaczaniu asymptot ukośnych)

Jeżeli istnieją granice właściwe

$$a=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b=\lim_{x\to -\infty}[f(x)-ax]$$

$$\left(a=\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b=\lim_{x\to \infty}[f(x)-ax]\right)$$

to prosta o równaniu $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną).