ZAD 1 Dane są funkcje $f(x)$ i $g(x)$. Wyznaczyć złożenie $f(g(x))$ i $g(f(x))$, dla:

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2 + x + 1$,

b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x + 1$,

c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$,

d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x$.

ZAD 2 Dla podanych funkcji określić funkcję zewnętrzną $(f(x))$ i wewnętrzną $(g(x))$:

a) $y = \operatorname{ctg} 3x$, b) $y = \log_3^2 x$, c) $y = 3^{x^2}$, d) $y = e^{3x}$

e) $y = \sqrt{3x+1}$, f) $y = \sin(2x+2)$ g) $y = \operatorname{arctg}^3\sqrt{x}$ h) $y = (x+2)^2$

ZAD 3 obliczyć pochodne I rzędu funkcji:

a) $y = 5x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x - 2$

b) $y = 8x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$

c) $y = 3\sqrt[3]{x} - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \frac{5}{2x^2 - 5x + 1}$

e) $y = 2\,\frac{x+1}{x-1}$

f) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

g) $y = 3x^2 \sin x$

h) $y = (2x+3)\ln x$

i) $y = 3^x \cdot x^3$

j) $y = 2x + \sin 2x$

k) $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

l) $y = 7\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$

m) $y = x^2 e^{2x} \sin x$

n) $y = \arcsin(1-x)$

o) $y = x \ln 3x$

p) $y = x^3 \operatorname{arctg}^3 x$

r) $y = (10x^2 - 1)e^{3x}$

s) $y = 4 \cdot 3\ln\frac{5}{x-2}$

t) $y = 7 \cdot 5^{10x}$

u) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{x^2+1})$

w) $y = e^{\cos^2 x}$

z) $y = x^{5x}$

ODP.

ZAD 1

a) $f(g(x)) = 3^{x^2+x+1}$, $g(f(x)) = 3^{2x} + 3^x + 1$

b) $f(g(x)) = \sin(2x+1)$, $g(f(x)) = 2\sin x + 1$

c) $f(g(x)) = \ln\sqrt{x}$, $g(f(x)) = \sqrt{\ln x}$

d) $f(g(x)) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x + 1}$, $g(f(x)) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$

ZAD 2

a) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 3x$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2$

d) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x+1$

f) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x+2$

g) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$

ZAD 3

a) $y' = 20x^3 - 2x + \frac{1}{3}$

b) $y' = 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$

d) $y' = \frac{5(5-4x)}{(2x^2-5x+1)^2}$

e) $y' = -\frac{4}{(x-1)^2}$

f) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})^2}$

g) $y' = 3x(2\sin x + \cos x)$

h) $y' = 2\ln x + \frac{2x+3}{x}$

i) $y' = 3^x \cdot x^2 \cdot (x\ln 3 + 3)$

j) $y' = 2(1+\cos 2x)$

k) $y' = \sin x(\cos^2 x - \sin x)$

l) $y' = \frac{14}{x^2+4}$

m) $y' = xe^{2x}(2\sin x + 2x\sin x + x\cos x)$

n) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

o) $y' = \ln 3x + 1$

p) $y' = 3x^2\operatorname{arctg}^2 x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)$

r) $y' = e^{3x}(30x^2 + 20x - 3)$

s) $y' = -\frac{3}{x-2}$

t) $y' = 70 \cdot 5^{10x} \cdot \ln 5$

u) $y' = \frac{1}{1+(x-\sqrt{x^2+1})^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

w) $y' = -2\sin x\cos x \cdot e^{\cos^2 x} =$
$= -e^{\cos^2 x} \cdot \sin 2x$

z) $y' = 5x^{5x}(\ln x + 1)$