Ponadto

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x^{\frac{5}{1+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{1+\ln x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{5\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}} = 5,$$

a więc

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{5}{1+\ln x}} = e^5.$$

8. Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci "∞^0". Postępując podobnie jak w zadaniach 6 i 7, mamy

$$\lim_{x\to\infty} (2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(2x)^{\frac{3}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln(2x)^{\frac{3}{x}}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to\infty} \ln(2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}\ln 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln 2x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{2x}}{1} = 0,$$

a więc

$$\lim_{x\to\infty} (2x)^{\frac{3}{x}} = e^0 = 1.$$

Obliczyć następujące granice:

1. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\ln(x-9)}{x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{6x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1+\cos(\pi x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}3x}{\mathrm{arctg}5x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^4}$

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-1}{5x^2+3x}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^{2x}}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\ln x}{x^2+2x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{e^x}{\sin x}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{ctg}x - \dfrac{1}{x}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \mathrm{tg}x\right)$

29. $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\ln x)$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

31. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{tg}x\ln x$

32. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-e^x)\,\mathrm{ctg}x$

33. $\lim\limits_{x\to -\infty} (1+x^2)e^x$

34. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2e^{-x^2}$

35. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x\right)$

36. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi-x)\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$

37. $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

38. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x\,\mathrm{ctg}x$

39. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

40. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin 2x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$

43. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x-1}}$

44. $\lim\limits_{x\to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$

46. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

47. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

48. $\lim\limits_{x\to \infty} (1+e^x)^{\frac{1}{x}}$

49. $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

51. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Odpowiedzi

1. 1	**2.** $\frac{1}{6}$	**3.** 2
4. 0	**5.** 1	**6.** $-\pi$
7. -3	**8.** $\frac{3}{2}$	**9.** $-\frac{1}{\pi^2}$
10. $\frac{3}{5}$	**11.** $\frac{1}{6}$	**12.** 1
13. $\frac{1}{3}$	**14.** ∞	**15.** $\frac{1}{2}$
16. $\frac{1}{3}$	**17.** $\frac{2}{5}$	**18.** 0
19. 0	**20.** 0	**21.** 1
22. $-\frac{1}{2}$	**23.** $-\frac{1}{2}$	**24.** $-\frac{1}{2}$
25. -1	**26.** $\frac{1}{2}$	**27.** 0
28. 0	**29.** ∞	**30.** 0
31. 0	**32.** -1	**33.** 0
34. 0	**35.** 1	**36.** 2
37. -2	**38.** 1	**39.** 1
40. 1	**41.** 1	**42.** 1
43. 1	**44.** 1	**45.** 1
46. e^{-1}	**47.** 1	**48.** e
49. e^3	**50.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$	**51.** e^{-2}

1.2.10. Asymptoty

Wyznaczyć asymptoty funkcji:

1. $y = \dfrac{2x^2+x}{x-2}$ **2.** $y = \dfrac{\ln(x+1)}{3x}$

Rozwiązania

1. Funkcja jest określona dla $x \neq 2$. Przypomnijmy, że prosta o równaniu $x = c$ jest asymptotą pionową lewostronną krzywej $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty.$$

Jeżeli ponadto

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = \infty,$$

to prosta $x = c$ jest również asymptotą pionową prawostronną. Jeżeli $x = c$ jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną krzywej $y = f(x)$, to mówimy, że prosta $x = c$ jest asymptotą pionową obustronną krzywej $y = f(x)$. Oczywiście o funkcji f należy założyć, że jest określona w sąsiedztwie punktu $x = c$.

Zgodnie z powyższym mamy

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2+x}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2+x}{x-2} = \infty,$$

więc prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji y.

Funkcja ta nie ma więcej asymptot pionowych. Należy zbadać istnienie asymptot ukośnych.

Wiadomo, że prosta $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną prawostronną krzywej $y = f(x)$ określonej dla $x \in (a, \infty)$, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0.$$

Ponadto, jeżeli ta asymptota istnieje, to

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Mówimy o asymptocie ukośnej lewostronnej gdy $x \to -\infty$, a funkcja f jest określona dla $x \in (-\infty, b)$. Prosta $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną obustronną, gdy jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną.

Funkcja y może mieć asymptoty ukośne, gdyż jest określona dla $x \neq 2$. Ponieważ

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-2x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x-2} = 5,$$

oraz

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2,$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-2} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-2x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x-2} = 5,$$

więc prosta $y = 2x + 5$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji y.