



Monitorowanie i Diagnostyka w Systemach Sterowania (MiDwSS)

Wybrane zagadnienia zastosowania estymacji rekursywnej
dla potrzeb monitorowania i diagnostyki w systemach sterowania:
RLS, WRLS, KF, EKF

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I AUTOMATYKI
KATEDRA ELEKTROTECHNIKI, SYSTEMÓW STEROWANIA I INFORMATYKI
Kierunek: Automatyka i Robotyka
Specjalność: Systemy Sterowania i Wspomagania Decyzji
Studia stacjonarne II stopnia: rok I, semestr II
dr inż. Tomasz A. Rutkowski

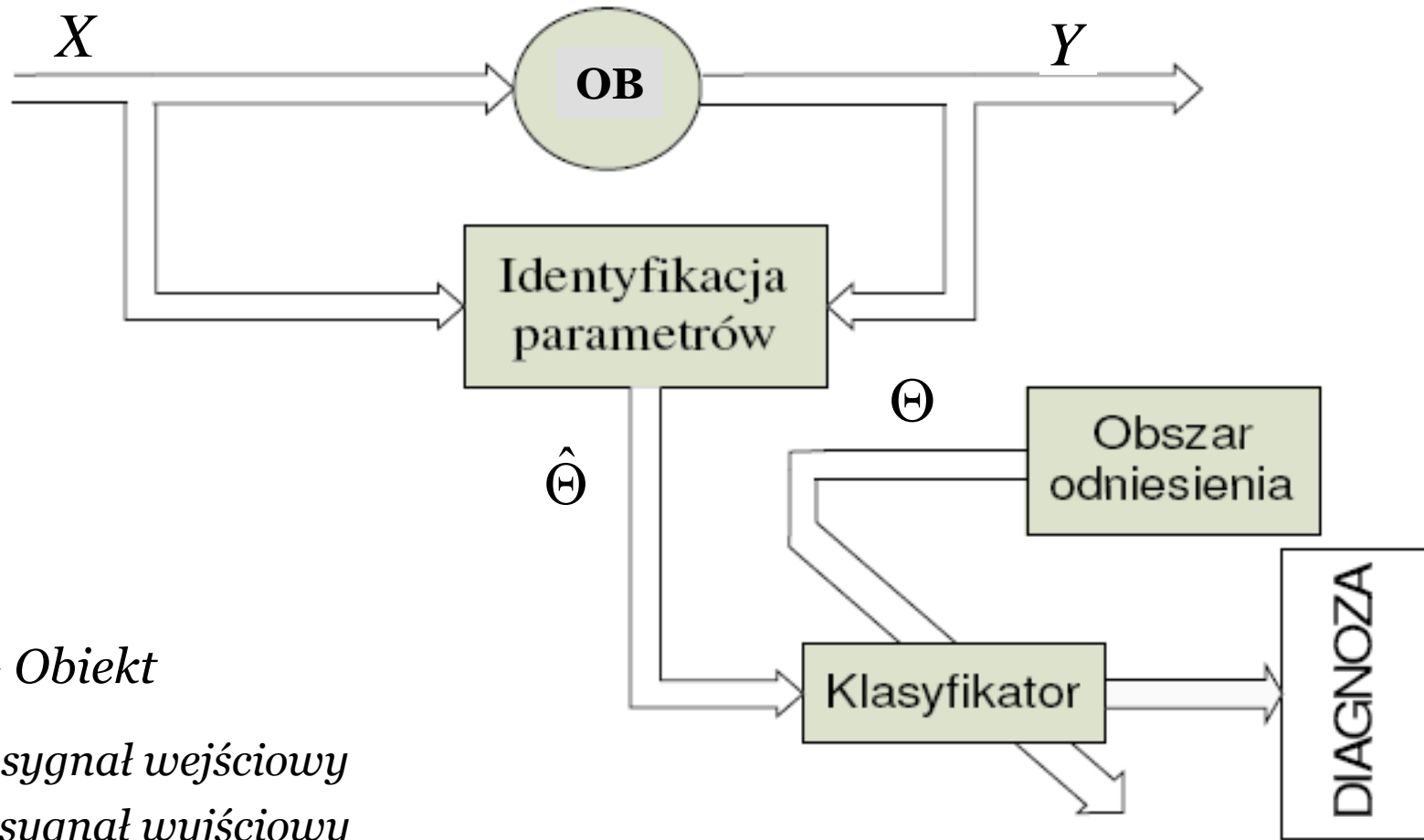
2018



Plan Wykładu

1. Schemat ideowy układu diagnostyki:
 - estymacji parametrów, estymacji wyjścia/stanu, estymacji parametrów i/lub wyjścia/stanu
2. Podstawowe sposoby opisu niepewności
3. Przykłady liniowych, rekursywnych postaci estymatorów
 - Filtr RLS (ang. Recursive Least Squares)
 - Filtr WRLS (ang. Weighted Recursive Least Squares)
 - Filtr Kalmana (ang. Kalman Filter, KF)
4. Przykład nieliniowego, rekursywnego estymatora
 - Rozszerzony Filtr Kalmana (ang. Extended Kalman Filter, EKF)

Schemat ideowy układu diagnostyki - estymacja parametrów



OB - Obiekt

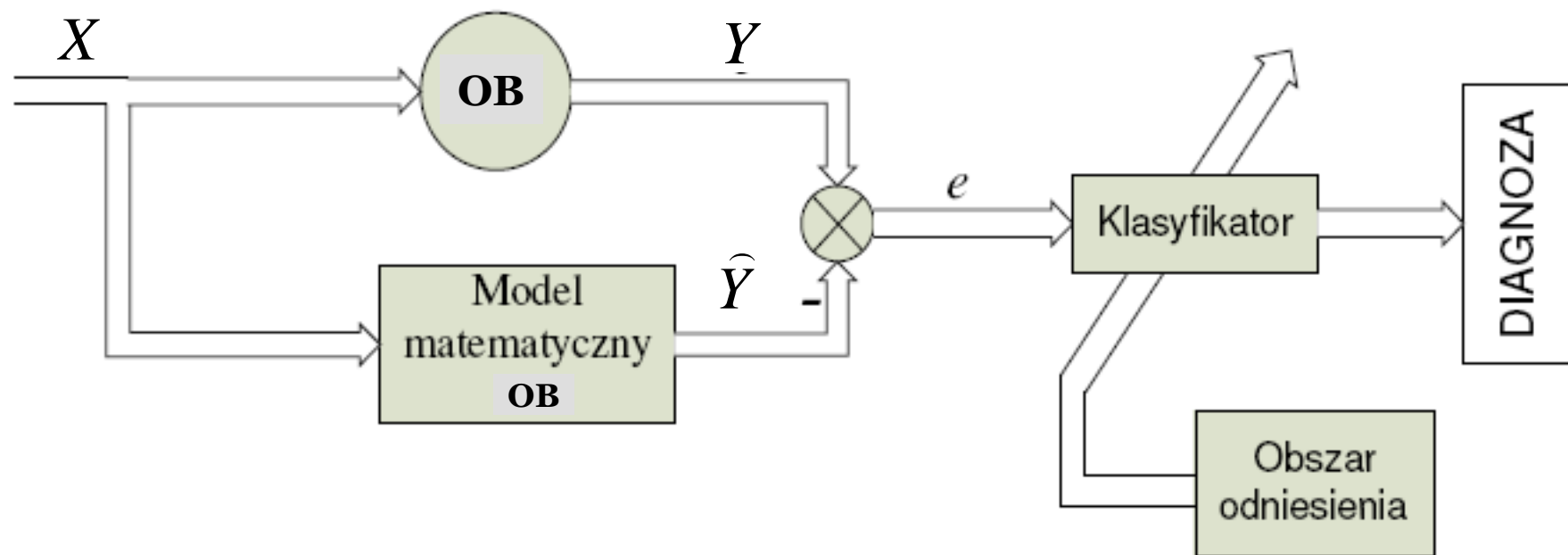
X - sygnał wejściowy

Y - sygnał wyjściowy

Θ - parametry obiektu

$\hat{\Theta}$ - estymata parametrów obiektu

Schemat ideowy układu diagnostyki - estymacja wyjścia/stanu



OB - Obiekt

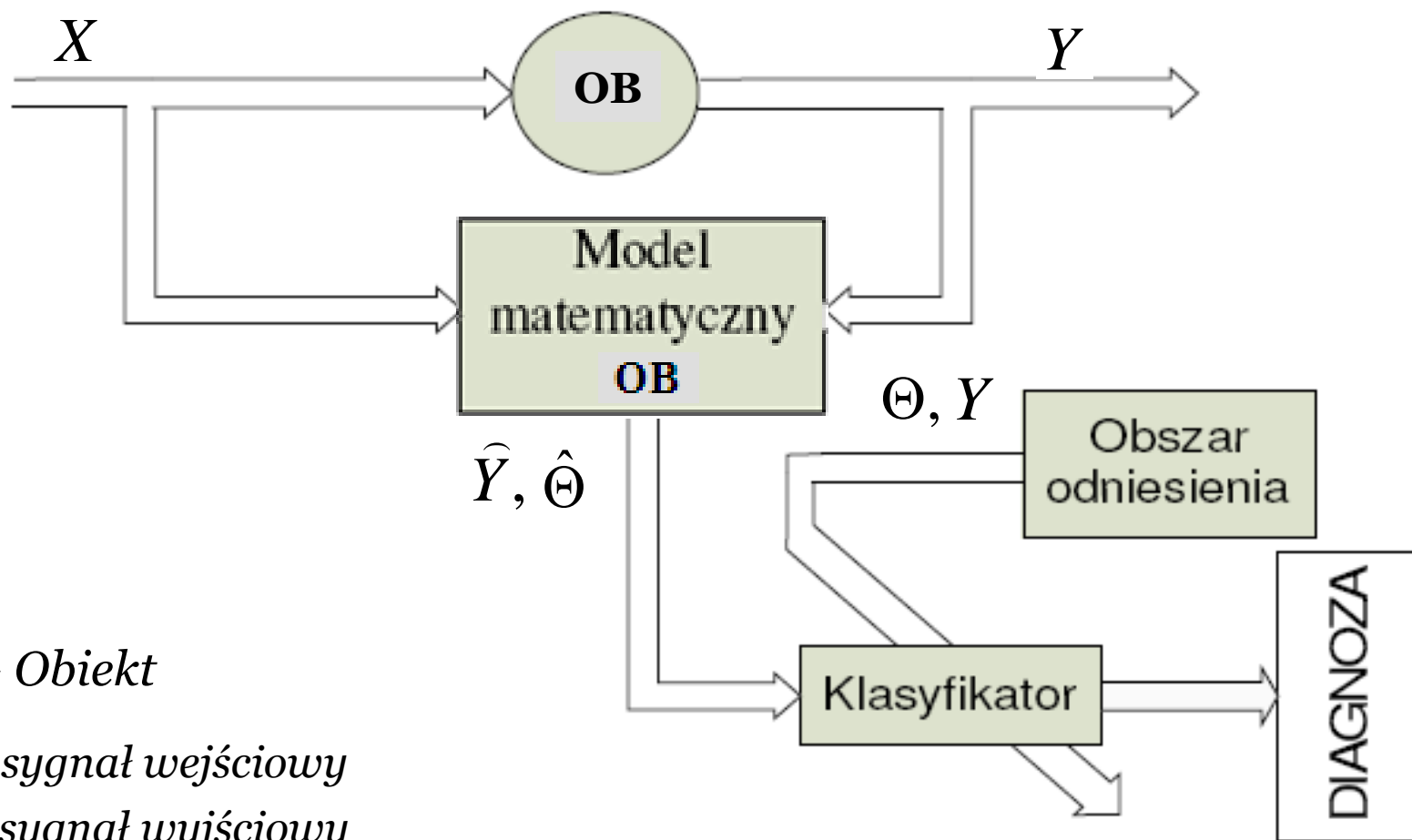
X - sygnał wejściowy

Y - sygnał wyjściowy

\hat{Y} - estymata sygnału wyjściowego z obiektu

$e = Y - \hat{Y}$ - residuum

Schemat ideowy układu diagnostyki - estymacja parametrów i/lub wyjścia/stanu



OB - Obiekt

X - sygnał wejściowy

Y - sygnał wyjściowy

\hat{Y} - estymata sygnału wyjściowego z obiektu

Θ - parametry obiektu

$\hat{\Theta}$ - estymata parametrów obiektu

- Estymacja to proces podejmowania decyzji lub wydawania sądu, co do przybliżonej wartości pewnych parametrów czy zmiennych charakteryzujących dany obiekt, na podstawie dostępnej informacji o obiekcie, łącznie z danymi o procesach w nim zachodzących, uporządkowane w danym zbiorze obserwacji
- Idea obserwatora stanu polega na wykorzystaniu sygnałów wejściowych i wyjściowych systemu dynamicznego do estymacji (śledzenia zmienności) zmiennych stanu
- Idea filtracji polega na takim przekształceniu sygnału „wejściowego”, przez filtr o odpowiedniej strukturze, aby wynik filtracji jak najmniej różnił się od sygnału „odniesienia” przy założonym kryterium błędu

- **PODSTAWOWE SPOSOBY OPISU NIEPEWNOŚCI**

- W praktyce każdy zbiór rzeczywistych obserwacji zawiera informacje obarczone błędami, co związane jest to głównie z niepewnością, niedeterministycznym charakterem obiektu
- Uwzględniając fakt, iż nie zawsze dysponujemy „pełną” informacją pomiarową (choćby ze względów finansowych) problem estymacji można zdefiniować jako szacowanie wielkości niemierzonych (nieznanych) parametrów i zmiennych charakteryzujących obiekt na podstawie dostępnych obserwacji (pomiarów) innych parametrów i zmiennych badanego obiektu oraz na bazie modelu matematycznego obiektu opisującego relacje pomiędzy charakteryzującymi go zmiennymi i parametrami

- Wykorzystanie modeli matematycznych jak i danych pomiarowych, w celu estymacji nieznanymi parametrów i zmiennych charakteryzujących obiekt, jednoznacznie wiąże się z niepewnością
- Źródła niepewności wynikają przede wszystkim z:
 - błędów struktury modelu matematycznego
 - niepewnych parametrów modelu matematycznego
 - błędów pomiarowych obserwowanych wielkości
 - błędów metod numerycznych i symulacji (dokładność obliczeń, błędy zaokrągleń itp.)
 - wiedzy *a priori* oraz heurystyk wykorzystanych przy budowie modelu systemu (niepewność w tym przypadku jest bardzo trudna do oszacowania)

- Trudno jest wskazać uniwersalną metodę opisu niepewności
- Przy wyborze jej odpowiedniej reprezentacji należy wziąć pod uwagę między innymi następujące aspekty związane z jej opisem:
 - przyczyny niepewności
 - ilość jak i jakość dostępnej informacji
 - typ dostępnej informacji
 - metody przetwarzania dostępnych informacji, itp.

- Wyróżnia się wiele sposobów opisu niepewności, z których najczęściej wykorzystuje się następujące modele:
 - probabilistyczny model niepewności
 - rozmyty model niepewności
 - model niepewności wyrażony w postaci zbiorów ograniczonych (ang. set-bounded)

- **Probabilistyczny model niepewności:**
 - nieznane wielkości reprezentowane są przez wartości zmiennych losowych wylosowanych ze ściśle określonych zbiorów, niepewność opisana jest przez rozkład prawdopodobieństwa; trajektorie tych wielkości są reprezentowane przez procesy stochastyczne

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Zmienna losowa:

$$X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

- Prawdopodobieństwo że zmienna losowa X przyjmie wartość ze zbioru $[a, b]$:

$$P(X \in [a, b])$$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Średnia

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Wartość oczekiwana (najbardziej prawdopodobna w sensie statystycznym)

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$E(X) = \bar{X} = \mu = m = m_x$$

inne oznaczenia

- **Probabilistyczny model niepewności**

- **Wariancja**

$$v = E[(X - E(X))^2] = E[(X - m)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

$$v = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

wartość rozrzutu realizacji wokół wartości średniej

- **Odchylenie standardowe**

$$\sigma = \sqrt{v} \Leftrightarrow v = \sigma^2$$

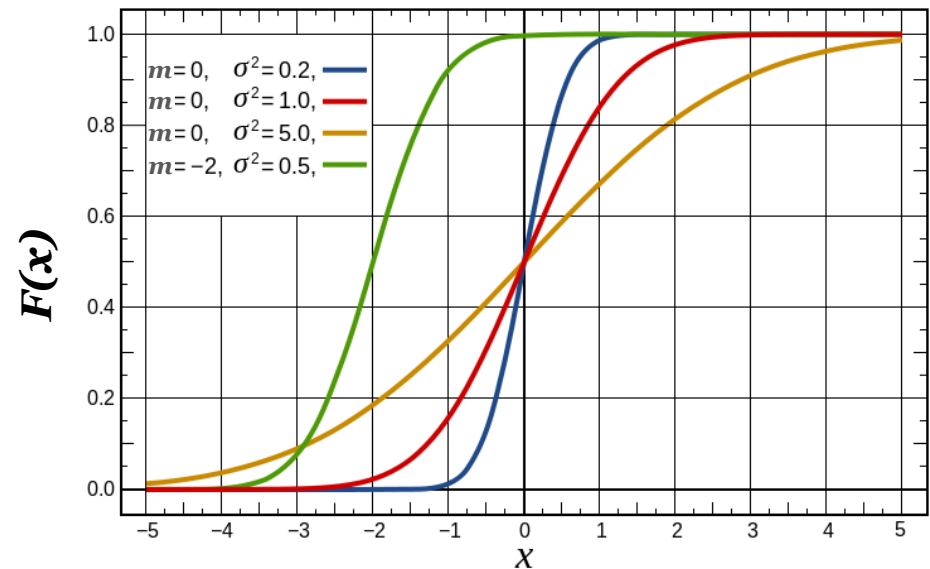
wartość koncentracji realizacji x_i w przedziale $[m - \sigma, m + \sigma]$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Dystrybuanta zmiennej losowej X :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{n} = P(X \leq x)$$

Przykład: rozkład Gaussa



Wyraża prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie wartość mniejszą lub równą x

- **Probabilistyczny model niepewności**

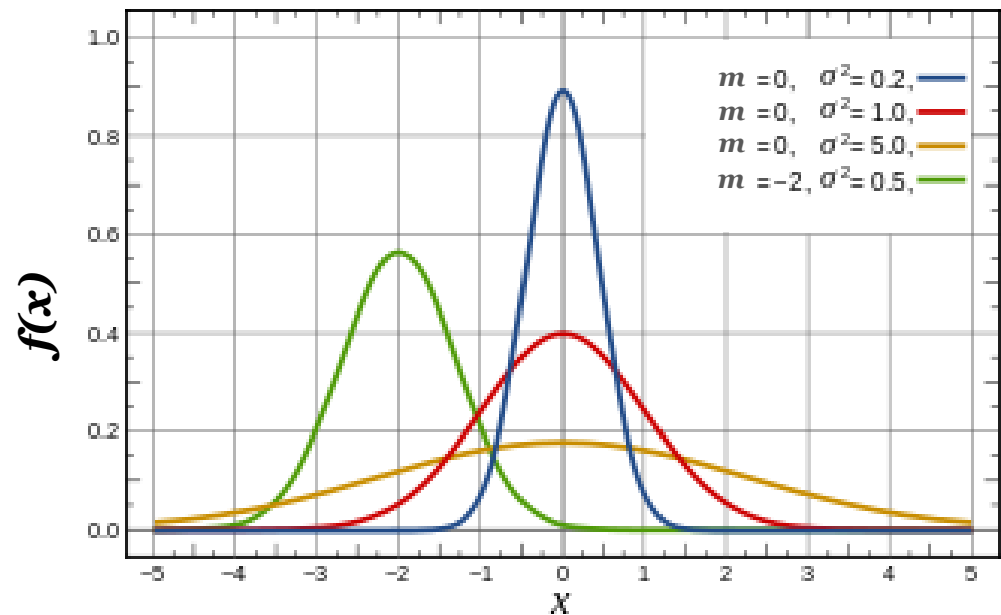
- Gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

Przykład: rozkład Gaussa



- **Probabilistyczny model niepewności**

- Rozkład Gaussa – podstawowe właściwości

- Jeżeli $X \sim N(m, \sigma^2)$ a $Y = aX + b$

- To $Y \sim N(am + b, a^2 \sigma^2)$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - (am + b)}{a\sigma} \right)^2}$$

$$f(y) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - (am + b)}{a\sigma} \right)^2}$$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Rozkład Gaussa – podstawowe właściwości

- Jeżeli X_1 i X_2 są niezależne, oraz $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
- To $X_1 + X_2 \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$f(x_1 + x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (m_1 + m_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

- **Probabilistyczny model niepewności**
 - Rozkład Gaussa – podstawowe właściwości

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Kowariancja

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

$$F(x, y) = P(X \leq x \text{ i } Y \leq y)$$

$$m_x = E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_y = E(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$v_x = E[(X - m_x)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2$$

$$v_y = E[(Y - m_y)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2$$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Kowariancja (cd.)

$$c_{xy} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)$$

$$\rho_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

-gdy zmienne niezależne to: $\rho_{xy}=0$

-gdy zmienne zależne to: $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

- **Probabilistyczny model niepewności**

- Macierz wariacyjno-kowarjacyjna dla n zmiennych losowych

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{x_1} & c_{x_1x_2} & \cdots & c_{x_1x_n} \\ c_{x_2x_1} & \mathcal{V}_{x_2} & \cdots & c_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{x_nx_1} & c_{x_nx_2} & \cdots & \mathcal{V}_{x_n} \end{bmatrix}$$

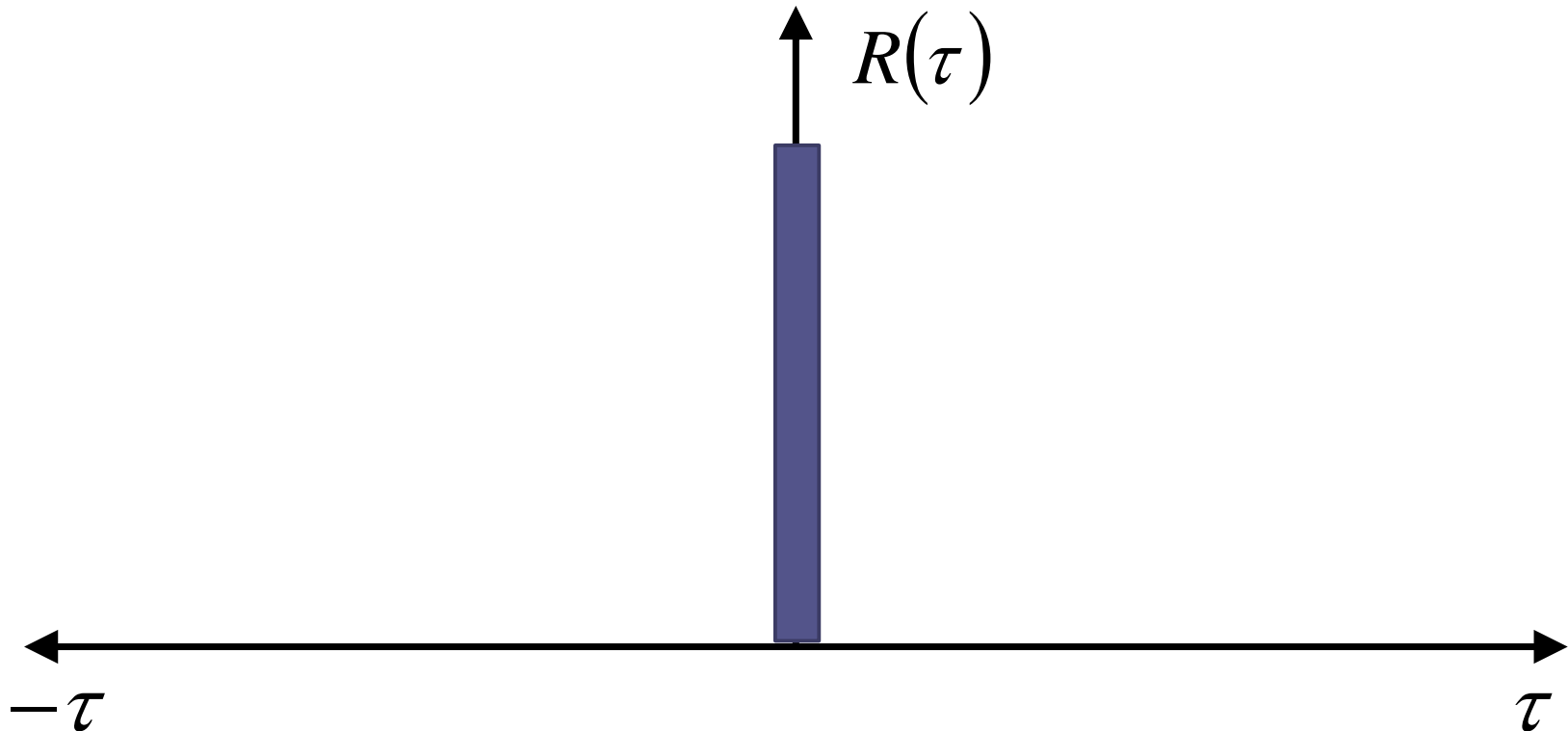
- **Probabilistyczny model niepewności**
 - Autokorelacja

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)]$$

- Jeżeli proces jest stacjonarny $\tau = t_1 - t_2$ to:

$$R(\tau) = E[X(t), X(t - \tau)]$$

- **Probabilistyczny model niepewności**
 - Biały szum



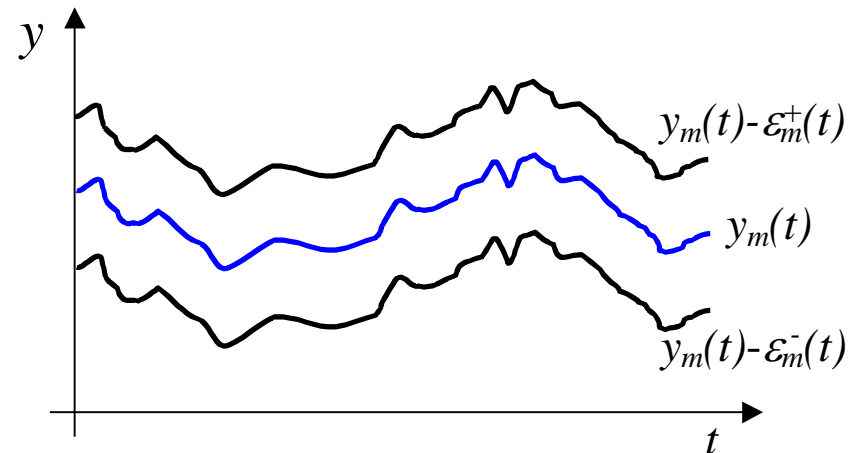
- **Model niepewności w postaci zbiorów ograniczonych (ang. set-bounded):**
 - niepewne wielkości reprezentowane są w postaci ograniczeń dolnych i górnych, wewnątrz których na pewno znajdują się nieznane wielkości, trajektorie ograniczeń są modelowane przez ograniczone zbiory w przestrzeni trajektorii.

Pomiar:

$$y(t)_m = y(t) + \varepsilon_m(t)$$

$$\varepsilon_m^-(t) \leq \varepsilon_m(t) \leq \varepsilon_m^+(t)$$

znane a priori



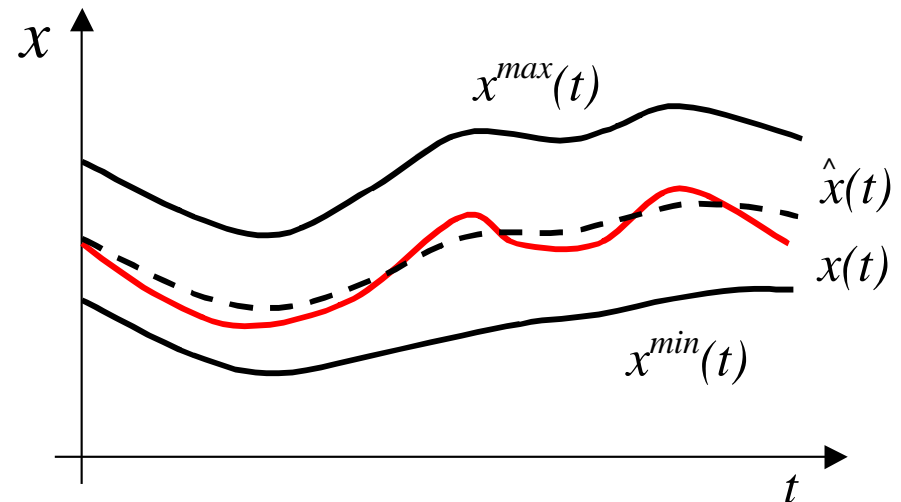
- **Model niepewności w postaci zbiorów ograniczonych (ang. set-bounded):**
 - niepewne wielkości reprezentowane są w postaci ograniczeń dolnych i górnych, wewnątrz których na pewno znajdują się nieznane wielkości, trajektorie ograniczeń są modelowane przez ograniczone zbiory w przestrzeni trajektorii.

Estymaty zmiennej stanu $x(t)$:

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = [x^{\min}(t), x^{\max}(t)]$$

$$\hat{x} : \arg \min_{x \in \hat{\mathbf{X}}} \max_{z \in \hat{\mathbf{X}}} \|x - z\|^2$$

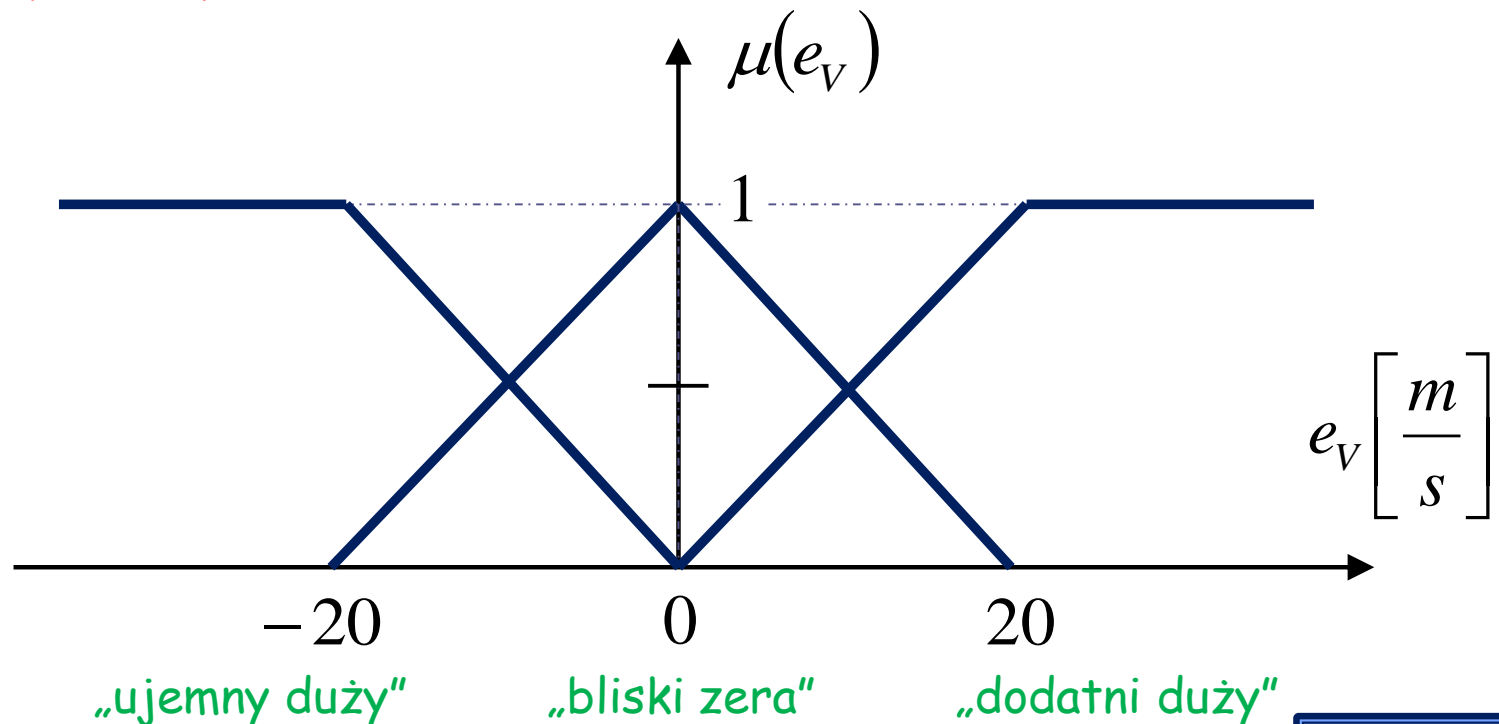
centrum Czybyszewa



- **Rozmyty model niepewności:**

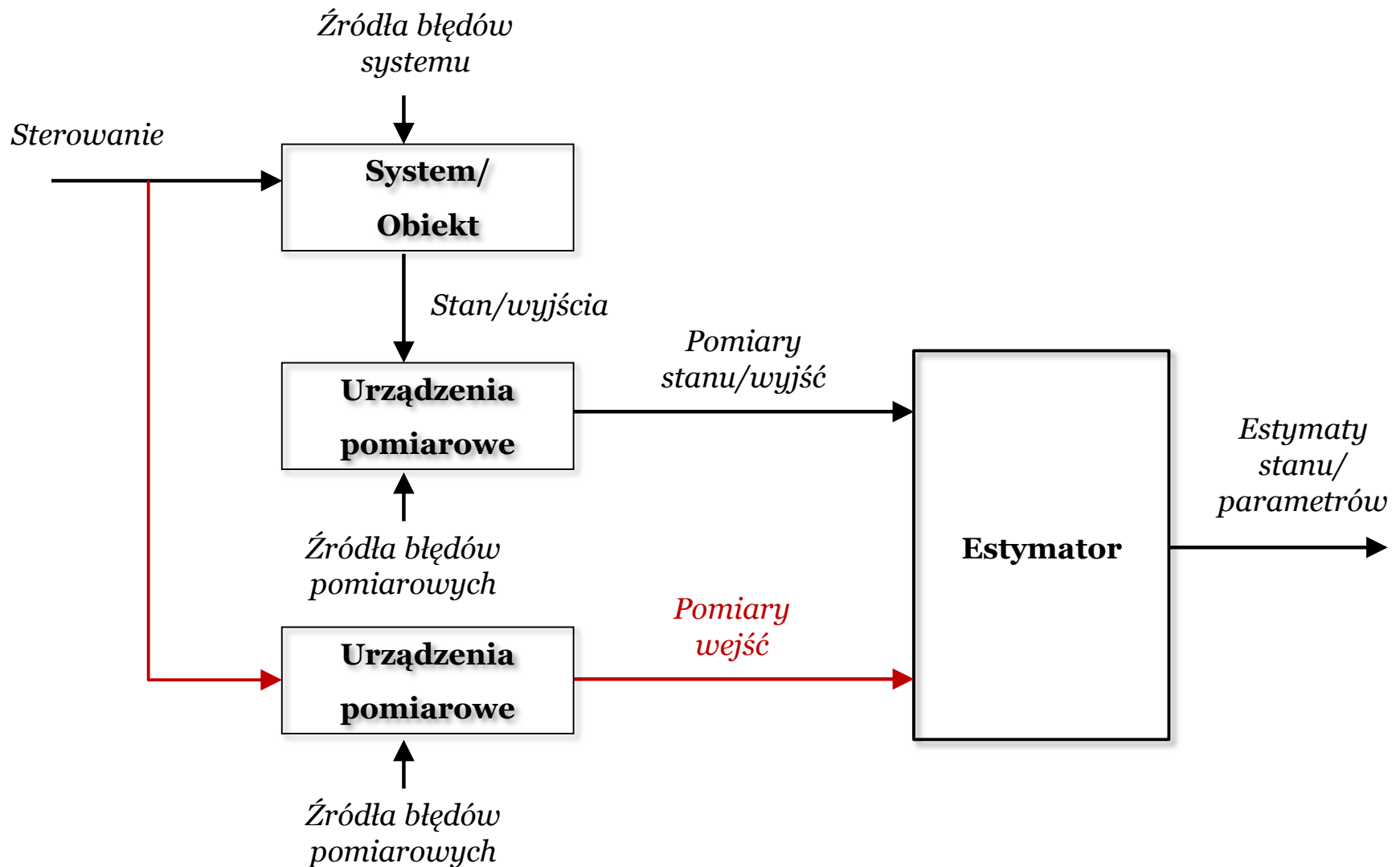
- bazuje na teorii zbiorów rozmytych, niepewne wielkości reprezentowane są przez wartości zmiennych rozmytych, zdefiniowanych bezpośrednio przez funkcję przynależności.

Zbiór rozmyty błędu prędkości e_v



- ESTYMACJA PARAMETRÓW – LRS, WRLS

Schemat ideowy układu estymacji



- Model pomiarowy

$$\tilde{y} = y + \tilde{e} \quad \tilde{e} = \tilde{y} - y$$

wartość mierzona *wartość prawdziwa* *błąd pomiaru*

$$\tilde{y} = \hat{y} + \hat{e} \quad \hat{e} = \tilde{y} - \hat{y}$$

wartość mierzona *wartość estymowana* *błąd resztkowy (residuum)*

\tilde{e} - wartość praktycznie nigdy nieznaną; mechanizm generujący ten błąd zwykle jest aproksymowany przez pewien znany proces (np. szum gaussowski o zerowej wartości średniej i znanej wariancji σ^2 lub zbiór ograniczony o granicach znanych a priori)

\hat{e} - wartość znana w momencie wyznaczenia wartości estymowanej zmiennej

- **Idea RLS**

- Zakładamy, że pewien obiekt (proces) generuje wektor \mathbf{x} składający się z N zmiennych $x(1), x(2), \dots, x(N)$
- Zakładamy niezmienność procesu
- Nie możemy ich zmierzyć bezpośrednio ale dysponujemy aparaturą pomiarową, która umożliwia pomiar M -elementowego wektora \mathbf{z} : $z(1), z(2), \dots, z(M)$, $M > N$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

- gdzie \mathbf{H} to macierz układu pomiarowego o wymiarach $M \times N$
- \mathbf{v} to addytywny szum pomiarowy
- Estymatę \mathbf{x} oznaczamy jako $\hat{\mathbf{x}}$ a odpowiadający jej błąd $\hat{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{v}}$$

- **Idea RLS** (cd.)

- Estymata \hat{x} będzie tym lepsza im mniejszy będzie błąd sumy kwadratów związany z \hat{v}

$$J = \hat{v}^T \hat{v} = \sum_{i=1}^M v_i^2$$

- podstawiając:

$$J = (z - H\hat{x})^T (z - H\hat{x})$$

- J osiąga minimum gdy:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}} = -H^T (z - H\hat{x}) = 0$$

- **Idea RLS** (cd.)
 - Po kolejnych przekształceniach

$$H^T H \hat{x} = H^T z$$

$$\hat{x} = \left(H^T H \right)^{-1} H^T z$$

Czy jest to rozwiązanie efektywne ?

- Przykład rekurencji

- Rekurencyjne wyznaczanie średniej: $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} x_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \dots$$

- Przykład rekurencji

- Rekurencyjne wyznaczanie średniej: $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} x_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) = \dots$$

- Przykład rekurencji

- Rekurencyjne wyznaczanie średniej: $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} x_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) = \dots$$

$$= \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \bar{x}_{n-1} = \dots$$

- Przykład rekurencji

- Rekurencyjne wyznaczanie średniej: $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= \frac{1}{n} x_n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) = \dots \\ &= \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \bar{x}_{n-1} = \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{n} (x_n - \bar{x}_{n-1})\end{aligned}$$

- Standard rekursywnej, adaptacyjnej estymaty parametrów

*nowa estymata = jej prognoza + **korekta***

***korekta** = wzmacnienie * (pomiar-prognoza pomiaru)*

• Wyprowadzenie RLS

- Wykorzystując poprzednie wyprowadzenie dla metody najmniejszych kwadratów:

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z$$

- i wprowadzając oznaczenie bieżącego pomiaru k :

$$\hat{x}(k) = (H^T(k)H(k))^{-1} H^T(k)z(k)$$

- Otrzymuje się ostatecznie rekursywną postać filtru RLS:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k) + K(k)[z(k+1) - h^T(k+1)\hat{x}(k)] = \\ &= \hat{x}(k) + K(k)[z(k+1) - \hat{z}(k+1)]\end{aligned}$$

- Wyprowadzenie RLS (cd.)

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k) \left[z(k+1) - \hat{z}(k+1) \right]$$

↑
*nowa
estymata*

↑
*jej
prognoza*

↑
*błąd pomiędzy pomiarem
a jego prognozą*

↑
korekta

$$\hat{z}(k+1) = h^T(k+1) \hat{x}(k)$$

↑
*nowy, znany
wektor*

↑
*stara
estymata*

- **Algorytm estymacji (dla RLS $\lambda=1$, dla WRLS $\lambda<1$)**

1. **Inicjalizacja:** estymata N -elementowego wektora x na podstawie N pierwszych pomiarów

$$W = \text{diag}(\lambda^{N-1}, \lambda^{N-2}, \dots, \lambda, 1)$$

$$P(N) = (H^T(N) \cdot W \cdot H(N))^{-1}$$

$$\hat{x}(N) = P(N) \cdot H^T(N) \cdot W \cdot z(N)$$

$$k = N$$

2. **Nowy pomiar $z(k+1)$, {nowe $h(k+1)$ i nowy szum $v(k+1)$ }:**

$$\hat{z}(k+1) = h^T(k+1) \cdot \hat{x}(k+1) + v(k+1)$$

3. **Modyfikacja wzmocnienia:**

$$K(k+1) = P(k) \cdot h(k+1) \cdot (\lambda + h^T(k+1) \cdot P(k) \cdot h(k+1))^{-1}$$

4. Predykcja parametru – korekta estymaty wielkości szukanej:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k+1) \cdot (z(k+1) - h^T(k+1) \cdot \hat{x}(k))$$

5. Modyfikacja macierzy P:

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda} (I - K(k+1) \cdot h^T(k+1)) \cdot P(k)$$

6. Następna iteracja:

$$k = k + 1$$

skok do kroku 2

- **Idea WRLS**

- Estymata \hat{x} będzie tym lepsza im mniejszy będzie błąd sumy kwadratów związany z \hat{v} , przy uwzględnieniu diagonalnej macierzy wag W :

$$J = \hat{v}^T W \hat{v} = \sum_{i=1}^M w_i v_i^2$$

- podstawiając:

$$\hat{x} = \left(H^T W H \right)^{-1} H^T W z$$

- przy czym:

$$E[v] = 0 \quad E[vv^T] = R \quad W = R^{-1}$$

- **Przykładowe zadanie:**

Estymacja parametrów modelu matematycznego opisanego równaniem:

$$y(k) = \sum_{n=0}^1 x(n-k)h(k) + v(k)$$

metodami RLS i WRLS, na podstawie znajomości sygnału wejściowego $x(n)$ i wyjściowego $y(n)$ zaszumionego szumem $v(n)$

Przy czym jego parametry to $x = [-0.987; 2,345]$

```
...
% PARAMETRY
iter=2000;           % liczba iteracji
M=2;                % liczba niewiadomych
dwe=1.0;            % odchylenie standardowe wejścia (szum normalny)
dsz=0.5;            % odchylenie standardowe szumu pomiarowego
lambda=0.95;        % parametr „zapominania” ( 0 < lambda < 1 )
x=[-0.987 2.345]';  % rzeczywisty stan obiektu

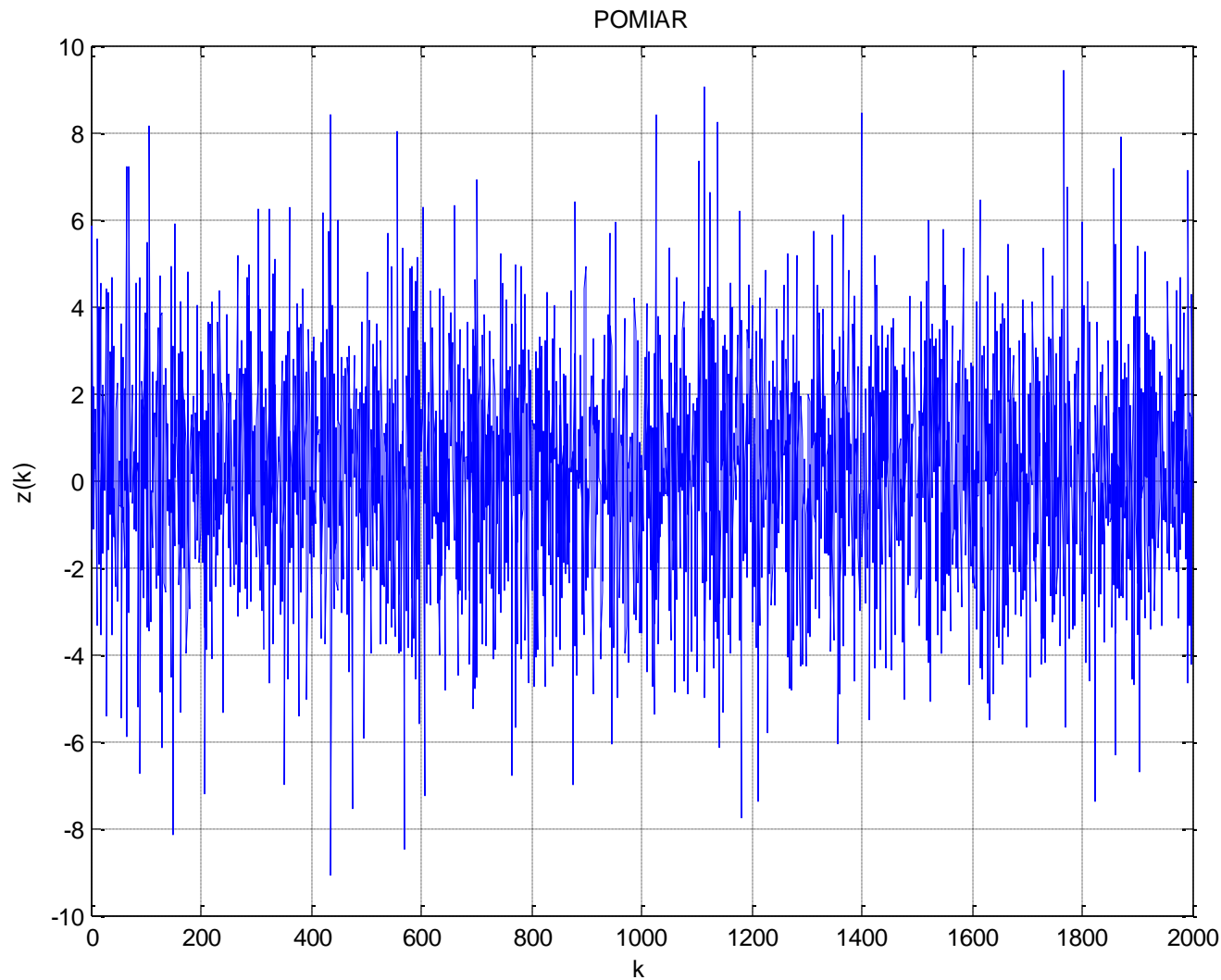
% INICJALIZACJA
...

% PĘTLA GŁÓWNA
for k=1:iter
    ...
    h=h(1:(M-1)); h=[dwe*randn(1,1); h]; % nowy wektor wejścia „h”
    z=h'*x+dsz*rand; % nowy pomiar
    K=P*h/(h'*P*h+lambda); % nowe wzmocnienie „K”
    P=(I-K*h')*P/lambda; % nowa macierz „P”
    xe=xe+K*(z-h'*xe); % nowa estymata stanu obiektu
    XR=[XR; x']; % parametry rzeczywiste
    XE=[XE; xe']; % historia estymacji
    Z=[Z; z']; % historia pomiarów
end

% PREZENTACJA HISTORII ESTYMACJI
...

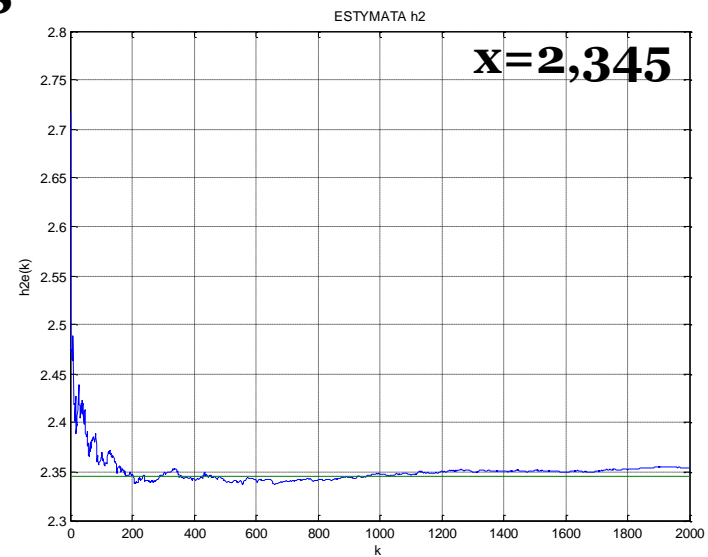
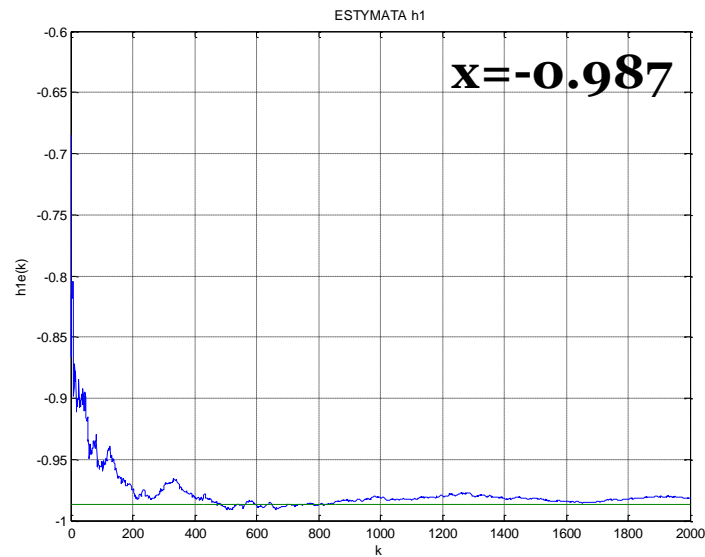
```

Parametry stałe $x = [-0.987; 2.345]$

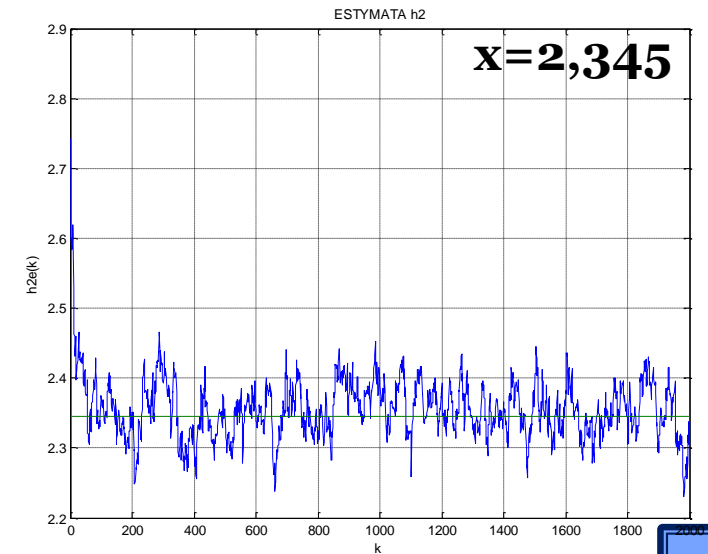
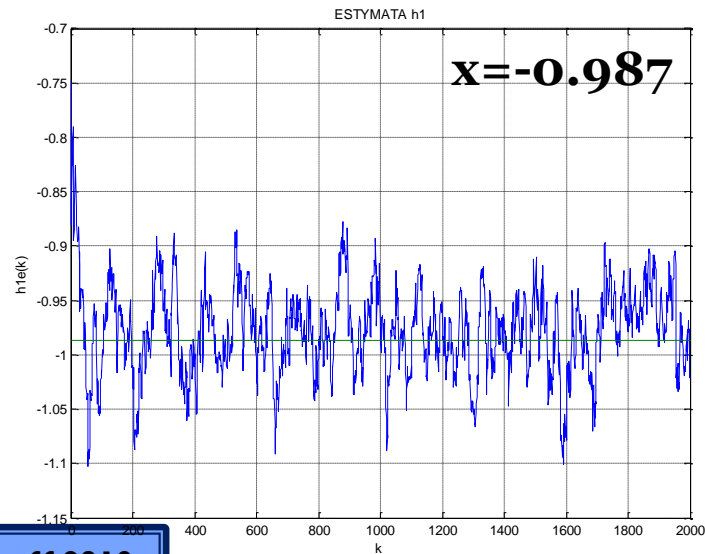


Przykłady estymacji parametrów - filtry RLS, WRLS

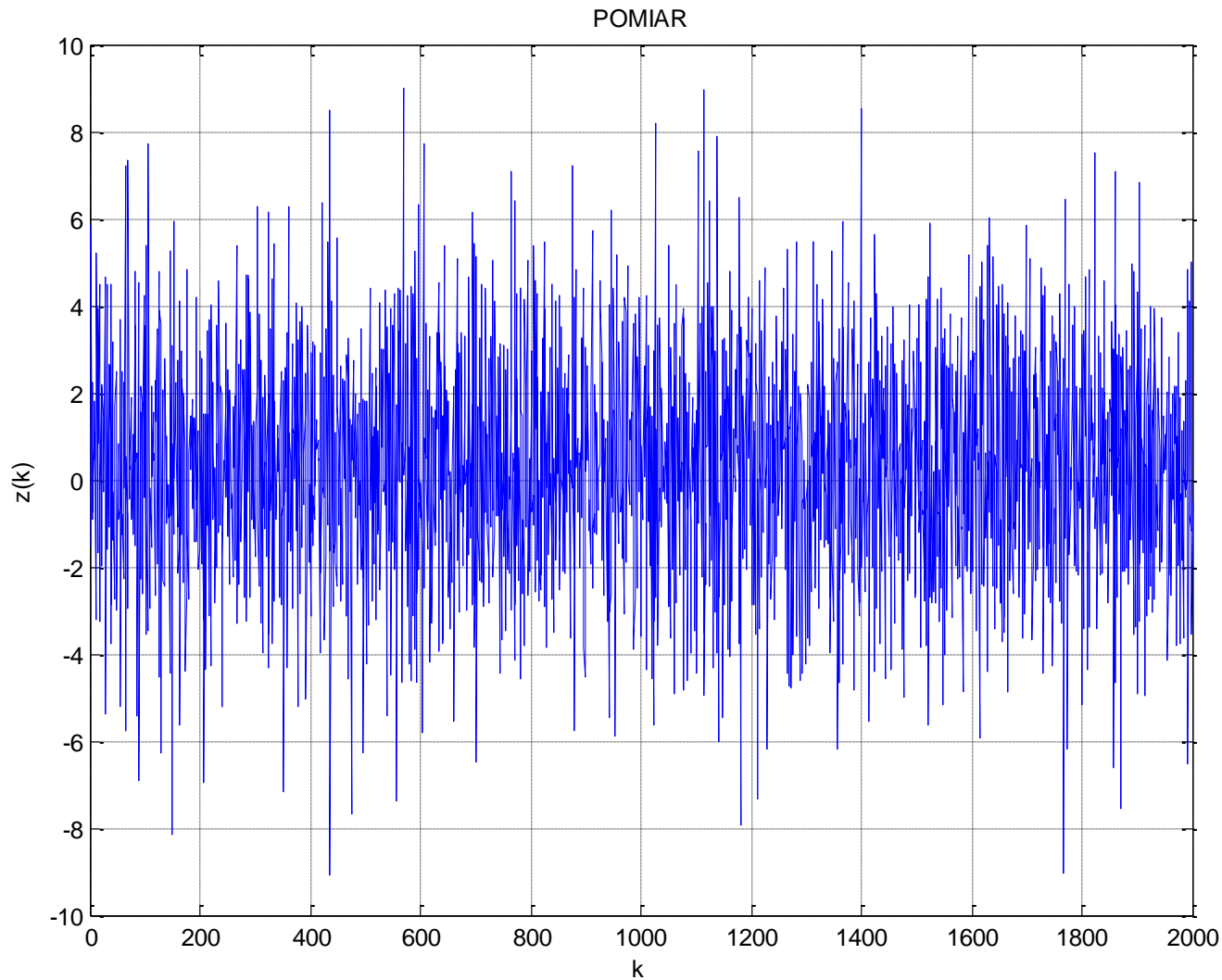
RLS



WRLS

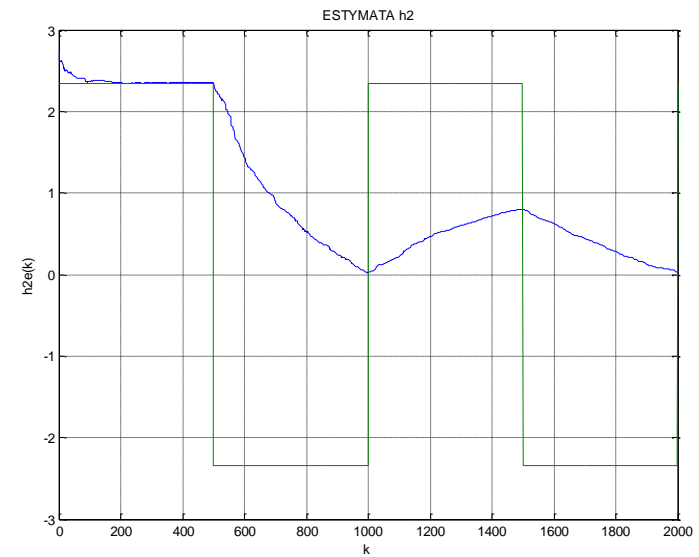
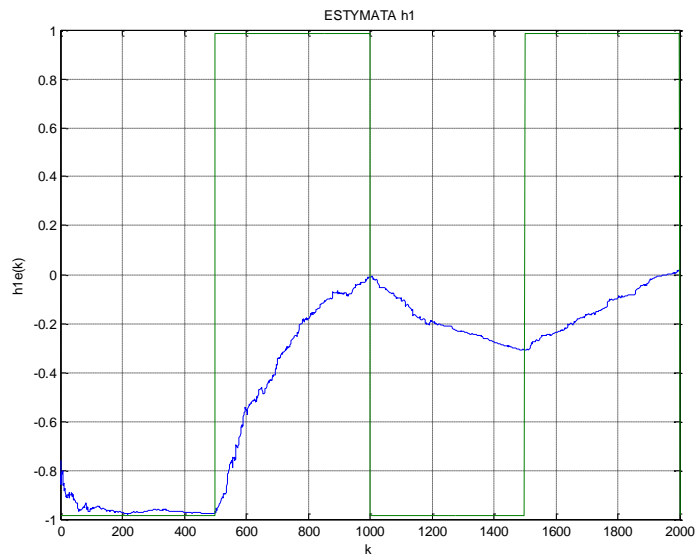


Parametry zmienne $x=[\pm 0.987; \pm 2,345]$

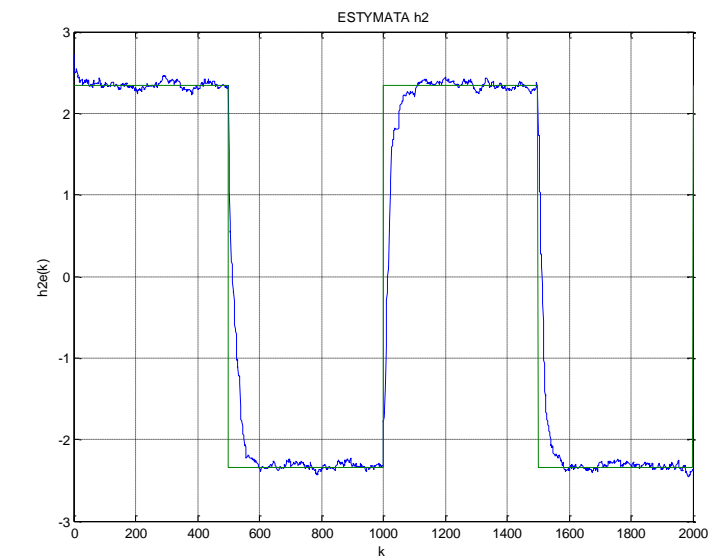
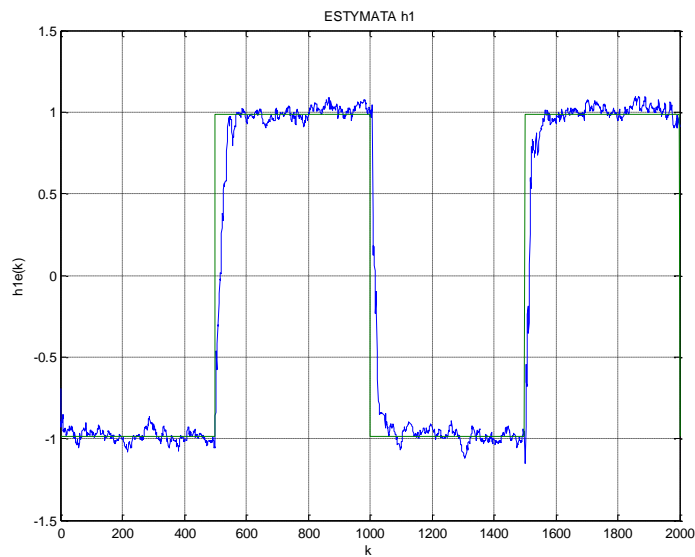


Przykłady estymacji parametrów - filtry RLS, WRLS

RLS



WRLS

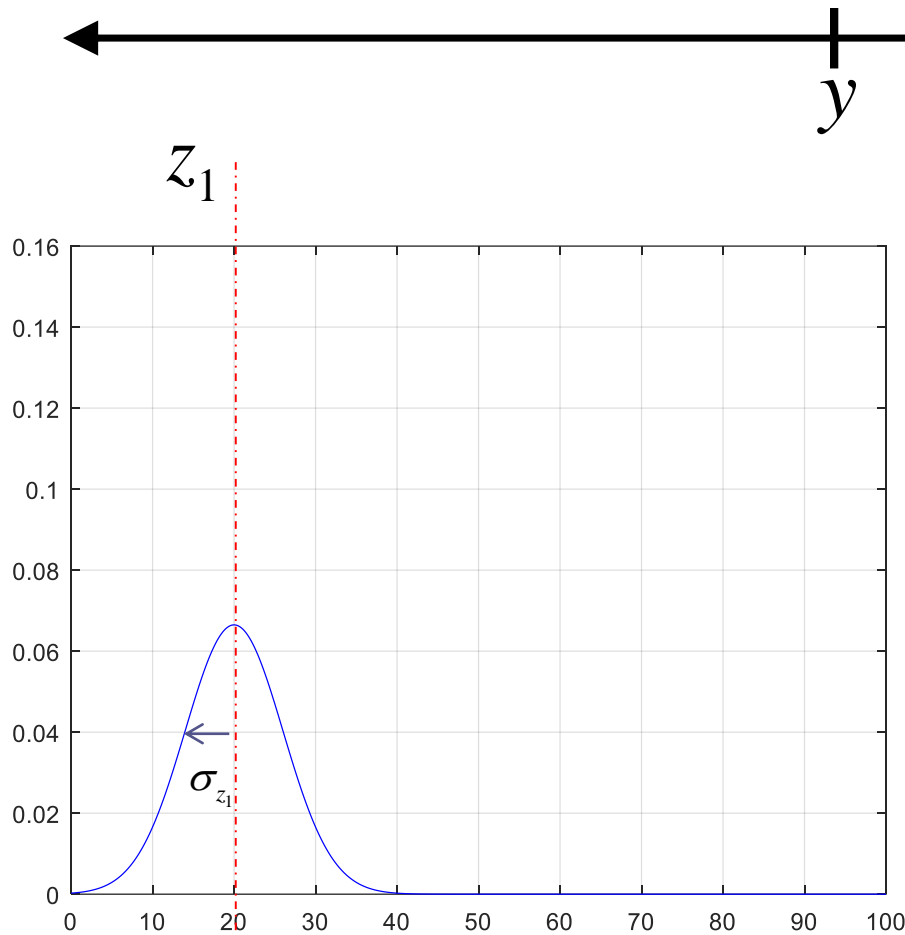


***Bardziej szczegółowe informacje, wyprowadzenia poszczególnych wzorów dla liniowych i nieliniowych filtrów RLS i WRLS można znaleźć między innymi w materiałach wykładowych z przedmiotu:
„Modelowanie i Identyfikacja”***

- ESTYMACJA WYJŚĆ/STANU/PARAMETRÓW
Filtr Kalmana
Rozszerzony Filtr Kalmana

- **Idea Filtru Kalmana** (estymacja minimalno-średniokwadratowa, MMS, Minimum Mean Square)
- Filtr Kalmana stosuje się do estymacji wartości obserwowanych zmiennych, minimalizując błąd estymacji stanu $\tilde{x} = x - \hat{x}$ w sensie statystycznym.
- Filtr Kalmana uwzględnia informacje o procesie z dwóch źródeł:
 - urządzenia pomiarowe (wiedza a posteriori),
 - model systemu (wiedza a priori).
- Filtr Kalmana działa zgodnie ze schematem *predyktor-korektor*

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Określenie pozycji y_1 z kompasem „w rękę” w chwili czasu t_1 , na podstawie położenia gwiazd jako $z_1 = 20$ z precyzją $\sigma_{z_1} = 6$ mil:

- średnia: z_1
- odchylenie standardowe: σ_{z_1}
- optymalna estymata położenia:

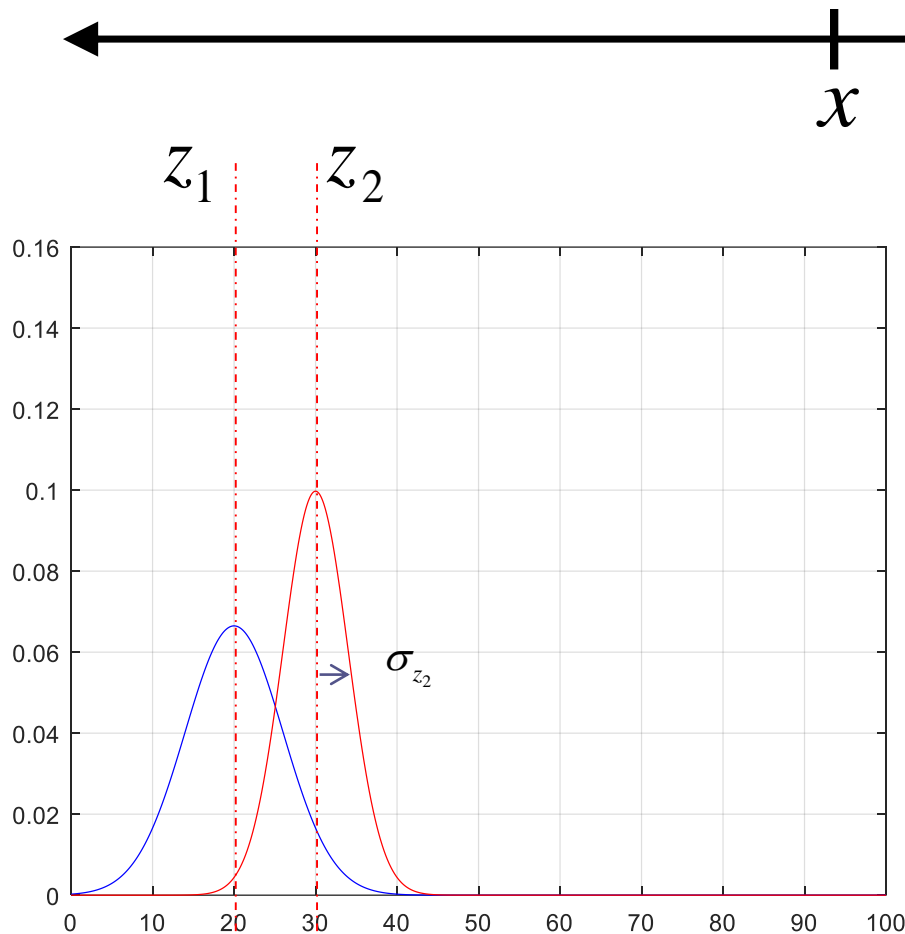
$$\hat{x}(t_1) = z_1 = 20$$

- wariancja błędu estymaty:

$$\sigma_y^2(t_1) = \sigma_{z_1}^2 = 6^2 = 36$$

- z_1 może być predykcją pozycji dla kolejnej chwili czasu t_2

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Ponownie, po krótkiej chwili określenie pozycji x_2 na podstawie pomiaru (pomiar dokładniejszy niż poprzednim razem) $z_2 = 30$ z precyzją $\sigma_{z_2} = 4$ mil, w chwili czasu $t_2 \approx t_1$:

- średnia: z_2
- odchylenie standardowe: σ_{z_2}

• estymata położenia:

$$\hat{x}(t_2) = z_2 = 30$$

• wariancja błędu estymaty:

$$\sigma_y^2(t_2) = \sigma_{z_2}^2 = 4^2 = 16$$

• *Jak dokonać fuzji informacji z dwóch pomiarów o różnej dokładności?*

• *Skorzystamy z właściwości rozkład Gaussa*

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

Jak policzyć skorygowaną pozycję x w chwili czasu t_2 , czyli nową wartość średnią po fuzji danych pomiarowych z_1 i z_2 ?

- przyjmijmy, że dysponujemy dwoma pomiarami obarczonymi szumami v_1 i v_2 o zerowej wartości średniej:

$$z_1 = x + v_1 \qquad z_2 = x + v_2$$

- przyjmijmy, że nowa estymata pozycji wyraża się jako:

$$\hat{x} = s_1 z_1 + s_2 z_2$$

- a błąd jako:

$$e = \hat{x} - x$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

Jak policzyć skorygowaną pozycję x w chwili czasu t_2 , czyli nową wartość średnią po fuzji danych pomiarowych z_1 i z_2 ?

- przyjmijmy, że dysponujemy dwoma pomiarami obarczonymi szumami v_1 i v_2 o zerowej wartości średniej:

$$z_1 = x + v_1 \qquad z_2 = x + v_2$$

- przyjmijmy, że nowa estymata pozycji wyraża się jako:

$$\hat{x} = \underline{s_1} z_1 + \underline{s_2} z_2$$

współczynniki skalujące, wagi

- a błąd jako:

$$e = \hat{x} - x$$

- **Idea Filtru Kalmana** (*zagubieni na morzu*)
- zatem wartość oczekiwana błędu:

$$\begin{aligned} E[e] &= E[\hat{x} - x] \\ &= E[s_1 z_1 + s_2 z_2 - x] \\ &= E[s_1(x + v_1) + s_2(x + v_2) - x] \\ &= s_1 E[x] + s_1 E[v_1] + s_2 E[x] + s_2 E[v_2] - E[x] \\ &= s_1 E[x] + 0 + s_2 E[x] + 0 - E[x] \\ &= \underline{s_1 x + s_2 x - x = 0} \end{aligned}$$

$$\underline{s_1 + s_2 - 1 = 0} \quad \Rightarrow \quad \underline{s_2 = 1 - s_1}$$

- **Idea Filtru Kalmana** (*zagubieni na morzu*)
- i wartość oczekiwana kwadratu błędu:

$$\begin{aligned}E[e^2] &= E[(\hat{x} - x)^2] \\&= E[\hat{x}^2 - 2\hat{x}x + x^2] \\&= E[(s_1 z_1 + s_2 z_2)^2 - 2(s_1 z_1 + s_2 z_2)x + x^2] \\&= E[(s_1(x + v_1) + s_2(x + v_2))^2 - 2(s_1(x + v_1) + s_2(x + v_2))x + x^2] \\&= E[s_1^2(x + v_1)^2 + 2s_1 s_2(x + v_1)(x + v_2) + s_2^2(x + v_2)^2 - 2s_1(x + v_1)x - 2s_2(x + v_2)x + x^2] \\&= E[\underline{s_1^2 x^2} + \underline{2s_1^2 v_1 x} + s_1^2 v_1^2 + \underline{2s_1 s_2 x^2} + \underline{2s_1 s_2 v_1 x} + \underline{2s_1 s_2 v_2 x} + 2s_1 s_2 v_1 v_2 + \\&\quad + \underline{s_2^2 x^2} + \underline{2s_2^2 v_2 x} + s_2^2 v_2^2 - \underline{2s_1 x^2} - \underline{2s_1 v_1 x} - \underline{2s_2 x^2} - \underline{2s_2 v_2 x} + \underline{x^2}] \\&= E[(s_1^2 + 2s_1 s_2 + s_2^2 - 2s_1 - 2s_2 + 1)x^2 + \\&\quad + 2(s_1^2 v_1 + s_1 s_2 v_1 + s_1 s_2 v_2 + s_2^2 v_2 - s_1 v_1 - s_2 v_2)x + \\&\quad + s_1^2 v_1^2 + 2s_1 s_2 v_1 v_2 + s_2^2 v_2^2]\end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**
- i wartość oczekiwana kwadratu błędu, cd.:

$$\begin{aligned}E[e^2] &= E[(\hat{x} - x)^2] \\&= \dots \\&= \{(s_1 + s_2)^2 - 2(s_1 + s_2) + 1\} E[x^2] + \\&\quad + 2 \{s_1^2 E[v_1] + s_1 s_2 E[v_1] + s_1 s_2 E[v_2] + s_2^2 E[v_2] - s_1 E[v_1] - s_2 E[v_2]\} E[x] + \\&\quad + s_1^2 E[v_1^2] + 2s_1 s_2 E[v_1] E[v_2] + s_2^2 E[v_2^2] \\&= (1 - 2 + 1)E[x^2] + 2(0 + 0 + 0 + 0 - 0 - 0)E[x] + s_1^2 E[v_1^2] + 0 + s_2^2 E[v_2^2] \\&= s_1^2 E[v_1^2] + s_2^2 E[v_2^2] \\&= s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2 \\&= \underline{s_1^2 \sigma_1^2 + (1 - s_1)^2 \sigma_2^2}\end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana** (*zagubieni na morzu*)
- Minimalizacja średniego błędu kwadratowego:

$$E[e^2] = s_1^2\sigma_1^2 + (1 - s_1)^2\sigma_2^2$$

$$\begin{aligned}\frac{dE[e^2]}{ds_1} &= 2s_1\sigma_1^2 - 2(1 - s_1)\sigma_2^2 \\ &= 2s_1\sigma_1^2 + 2s_1\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 \\ &= 2s_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2\sigma_2^2 = 0\end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**
- Wyznaczenie współczynnika s_1

$$2s_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2\sigma_2^2 = 0$$

$$2s_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 2\sigma_2^2$$

$$\underline{s_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**
- Wyznaczenie współczynnika s_2

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 - s_1 \\ &= 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**
- finalnie nową, optymalną estymatę pozycji można wyrazić jako :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= s_1 z_1 + s_2 z_2 \\ &= \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_1 + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_2\end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

- a jej nową wariancję:

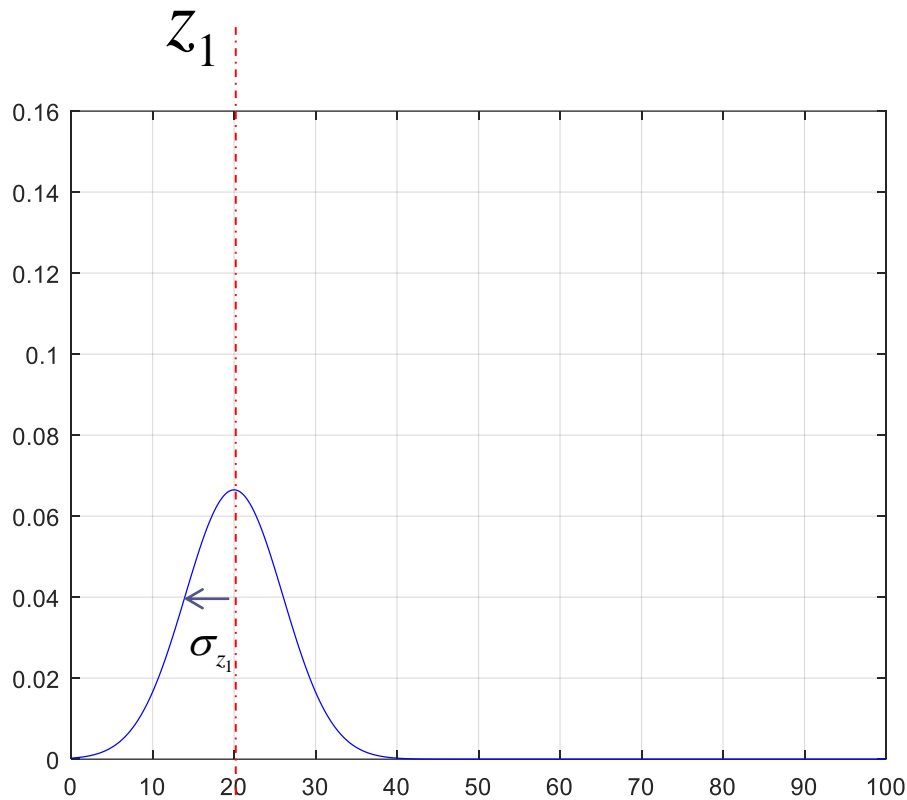
$$\begin{aligned}\sigma^2 &= s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2 \\ &= \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \sigma_2^2 \\ &= \frac{\sigma_2^4 \sigma_1^2 + \sigma_1^4 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \sigma_1^2} \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}\end{aligned}$$

- **Idea Filtru Kalmana** (*zagubieni na morzu*)
- a jej nową wariancję:

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

Jeszcze raz!



Określenie pozycji y_1 z kompasem „w ręku” w chwili czasu t_1 , na podstawie położenia gwiazd jako $z_1 = 20$ z precyzją $\sigma_{z_1} = 6$ mil:

- średnia: z_1
- odchylenie standardowe: σ_{z_1}

- optymalna estymata położenia:

$$\hat{x}(t_1) = z_1 = 20$$

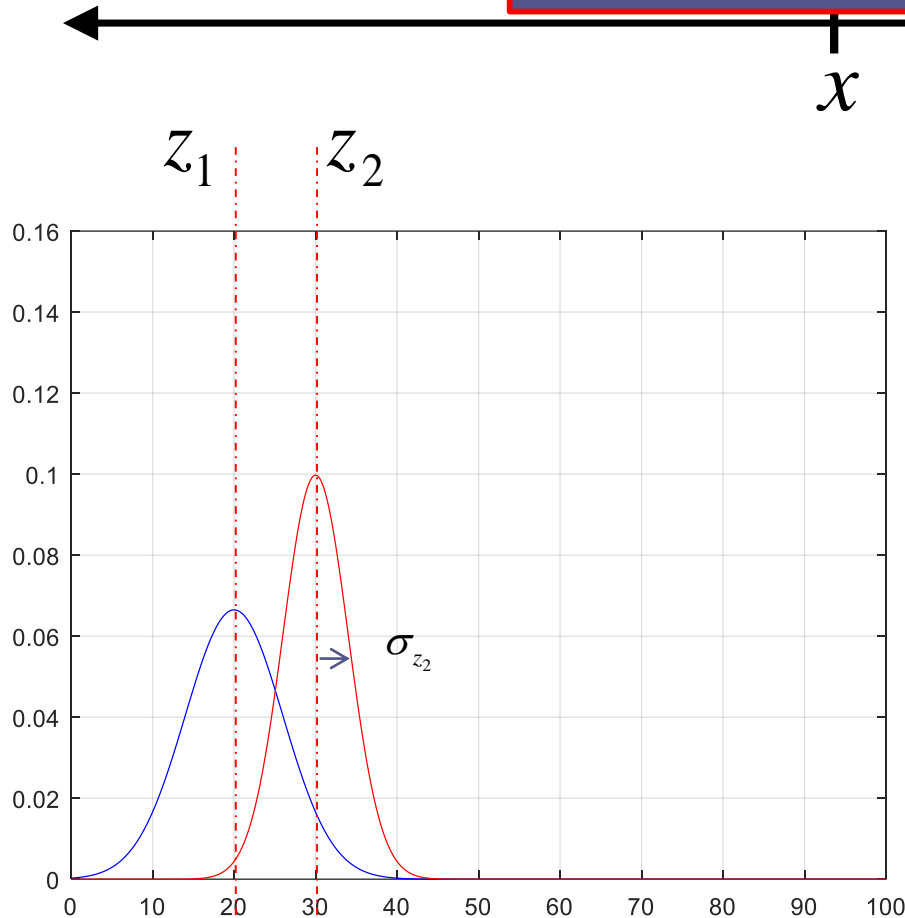
- wariancja błędu estymaty:

$$\sigma_y^2(t_1) = \sigma_{z_1}^2 = 6^2 = 36$$

- z_1 może być predykcją pozycji dla kolejnej chwili czasu t_2

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

Jeszcze raz!



Ponownie, po krótkiej chwili określenie pozycji x_2 na podstawie pomiaru (pomiar dokładniejszy niż poprzednim razem) $z_2 = 30$ z precyzją $\sigma_{z_2} = 4$ mil, w chwili czasu $t_2 \approx t_1$:

- średnia: z_2
- odchylenie standardowe: σ_{z_2}

• estymata położenia:

$$\hat{x}(t_2) = z_2 = 30$$

• wariancja błędu estymaty:

$$\sigma_y^2(t_2) = \sigma_{z_2}^2 = 4^2 = 16$$

• *Jak dokonać fuzji informacji z dwóch pomiarów o różnej dokładności?*

• Skorzystamy z właściwości rozkład Gaussa

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

Z właściwości rozkładu normalnego:

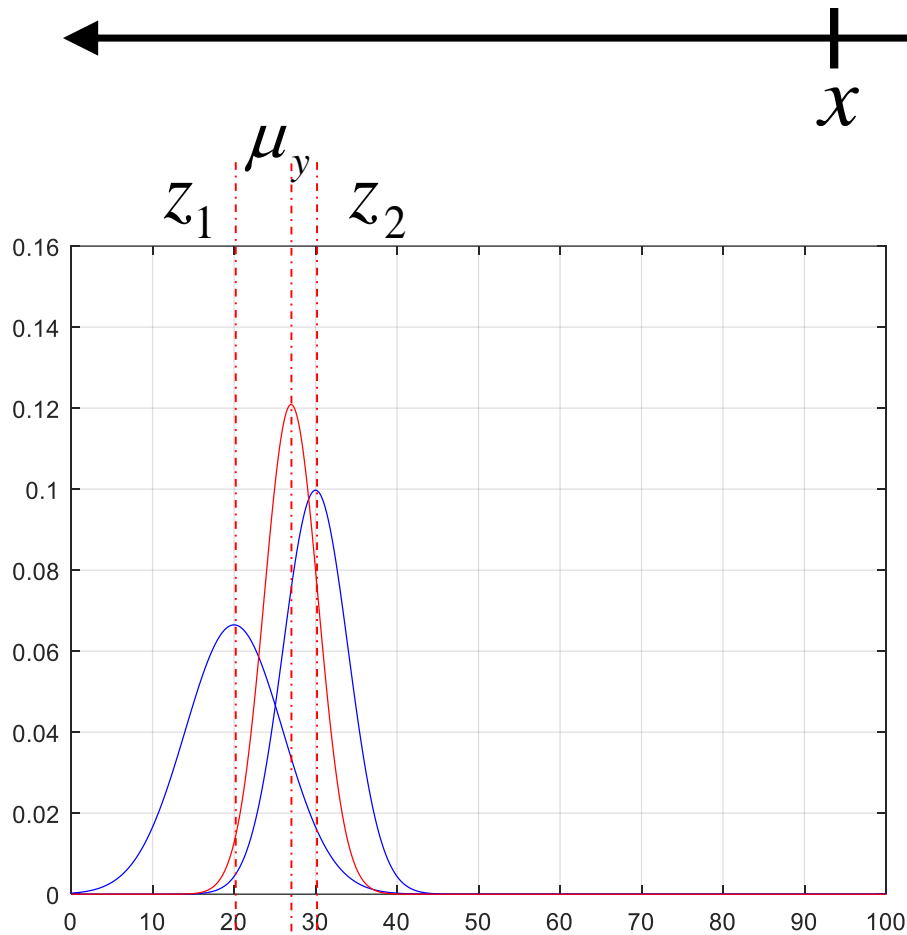
$$\hat{x} = \mu = [\sigma_{z_2}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2)]z_1 + [\sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2)]z_2$$

$$1/\sigma^2 = (1/\sigma_{z_1}^2) + (1/\sigma_{z_2}^2)$$

$$\mu_y = [16/(36+16)]20 + [36/(36+16)]30 = 6,2 + 20,8 = 27$$

$$1/\sigma_y^2 = 1/36 + 1/16 = 52/576 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = 3.3$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Skorygowana pozycja w chwili czasu t_2 :

- optymalna estymata położenia:
$$\hat{x}(t_2) = \mu_y = 27$$
- wariancja błędu estymaty:
$$\sigma_y^2(t_2) = \sigma_y^2 = (3.3)^2 = 10.9$$

...na razie estymacja statyczna...

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

- Zatem najlepszą estymatą położenia w chwili czasu t_2 , wyznaczoną na podstawie dwóch pomiarów będzie: $\hat{x}(t_2) = \mu_y$
- Estymatę położenia można też zapisać jako:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_2) &= [\sigma_{z_2}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2)]z_1 + [\sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2)]z_2 = \\ &= z_1 + [\sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2)][z_2 - z_1] = \\ &= \hat{x}(t_1) + K(t_2)[z_2 - \hat{x}(t_1)]\end{aligned}$$

$$K(t_2) = \sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2) \quad \hat{x}(t_1) = z_1$$

- Natomiast wariancję przedstawić w postaci:

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma_x^2(t_1) - K(t_2)\sigma_x^2(t_1)$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

- Zatem najlepszą estymatą położenia w chwili czasu t_2 , wyznaczoną na podstawie dwóch pomiarów będzie: $\hat{x}(t_2) = \mu_y$

- Estymatę położenia

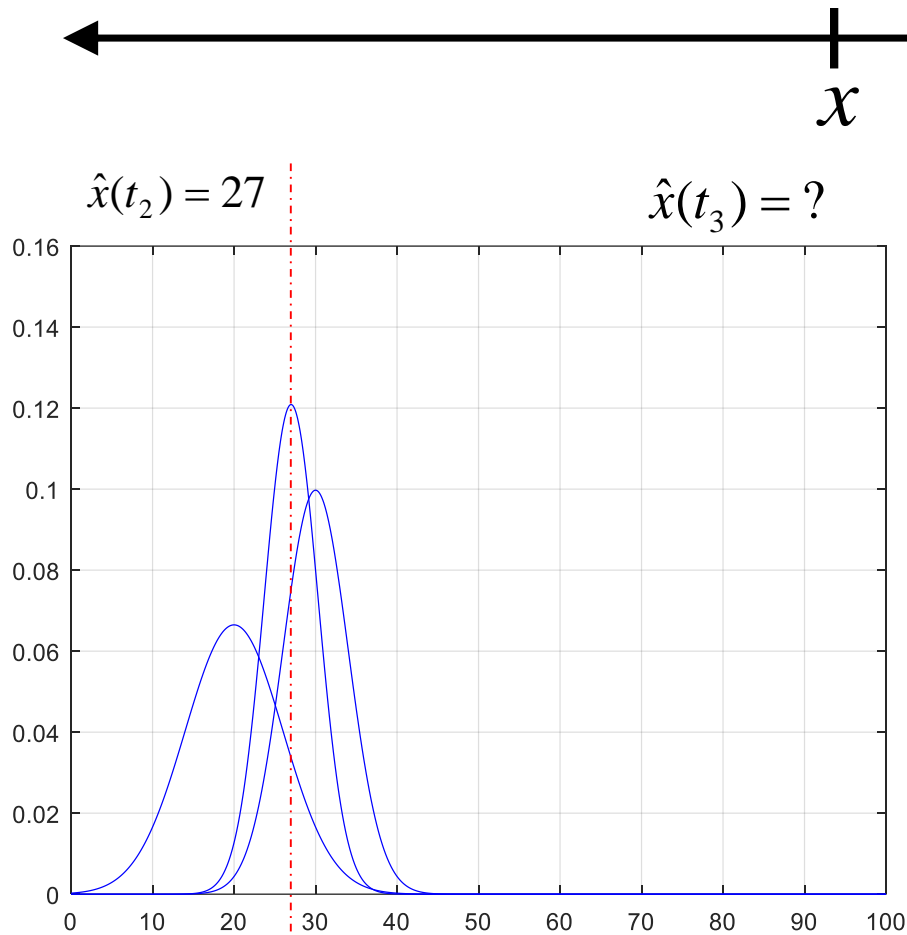
K – wzmacnienie Kalmana, które musi być obliczane w każdym kolejnym kroku

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_2) &= [z_1 + (\sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2))z_2 - z_1] \\ &= z_1 + \underbrace{K(t_2)}_{\text{obliczone w każdym kroku}} [z_2 - \hat{x}(t_1)] \\ \underbrace{K(t_2)}_{\text{obliczone w każdym kroku}} &= \sigma_{z_1}^2 / (\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2) \qquad \hat{x}(t_1) = z_1\end{aligned}$$

- Natomiast wariancję przedstawić w postaci:

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma_x^2(t_1) - \underbrace{K(t_2)}_{\text{obliczone w każdym kroku}} \sigma_x^2(t_1)$$

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**

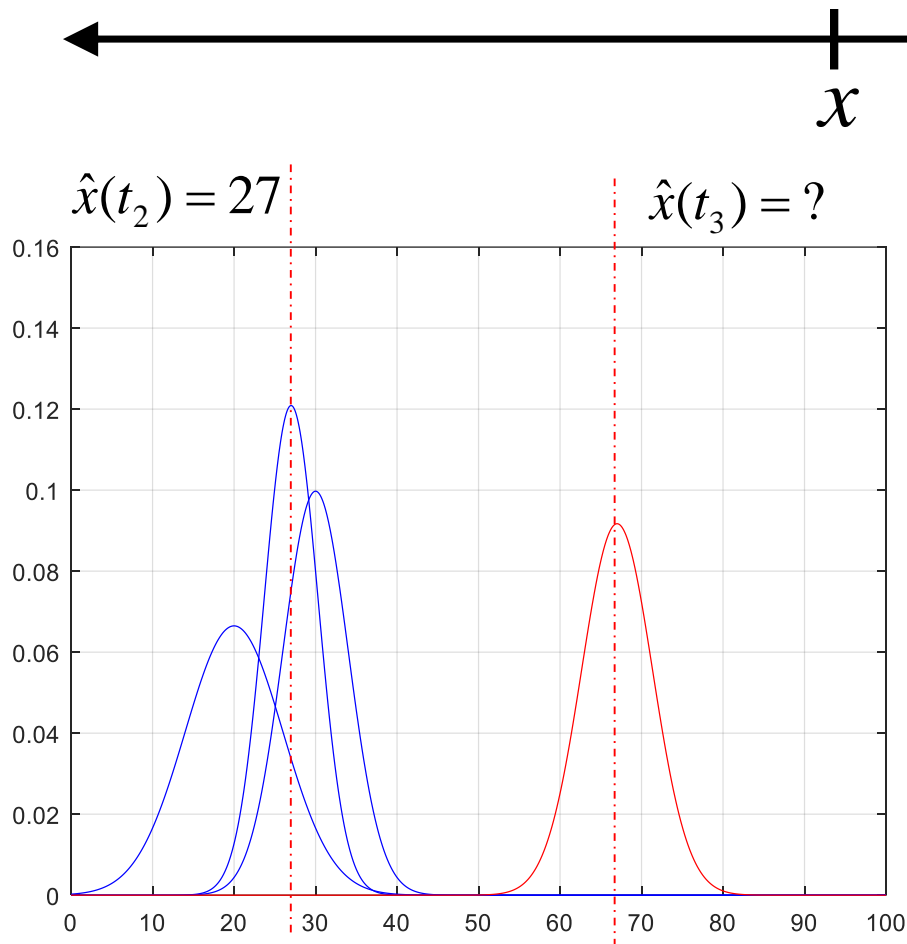


Po kolejnych 2 godzinach żeglugi należy skorygować pozycję łodzi (chwila czasu t_3). Do tej chwili łódź poruszała się z prędkością 20 mil/godzinę, z dokładnością $\sigma_{z3} = 2 \text{ mil}$

Jak skorygować pozycję z taką informacją?

...a teraz dynamika...

- Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)



Po kolejnych 2 godzinach żeglugi należy skorygować pozycję łodzi (chwila czasu t_3). Do tej chwili łódź poruszała się z prędkością 20 mil/godzinę, z dokładnością $\sigma_w = 2 \text{ mil}$

Można wykorzystać model ruchu łodzi:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_3^-) = \hat{\mathbf{x}}(t_2) + v \cdot \Delta t = \hat{\mathbf{x}}(t_2) + [t_3 - t_2] \cdot u \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_3^-) = 27 + 20 \cdot 2 = 67$$

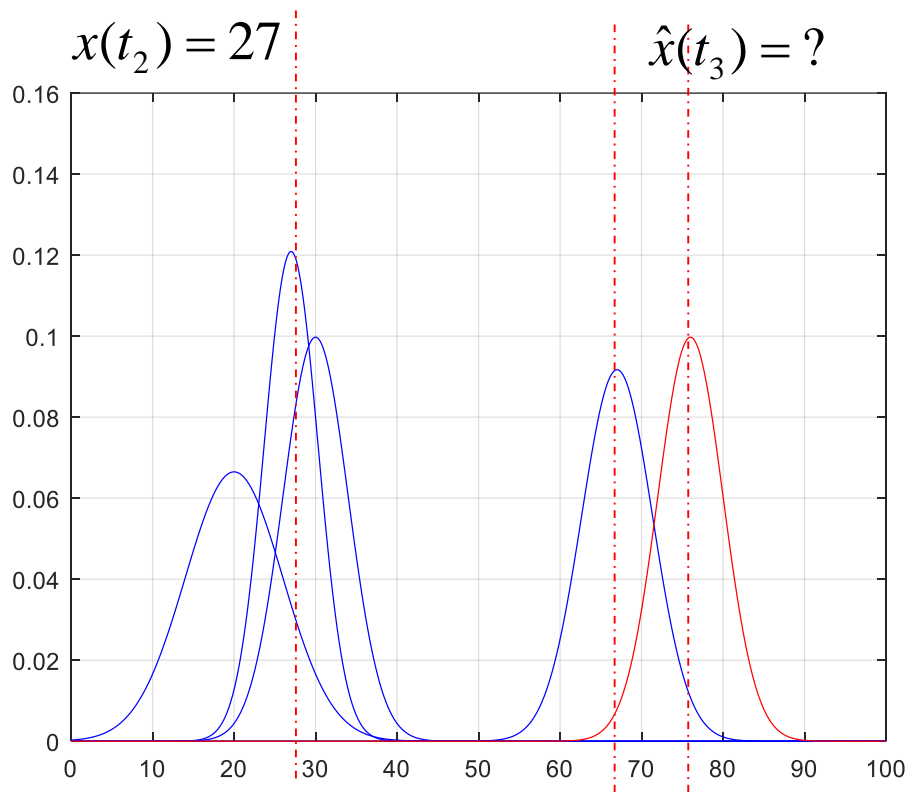
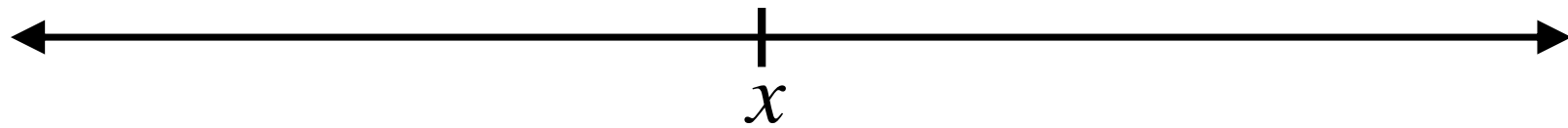
$$\hat{\sigma}_x^2(t_3^-) = \sigma_x^2(t_2) + \sigma_w^2 \cdot \Delta t \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_x^2(t_3^-) = 10.9 + 2^2 \cdot 2 = 18.9 \Rightarrow \dots$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{18.9} = 4.35$$

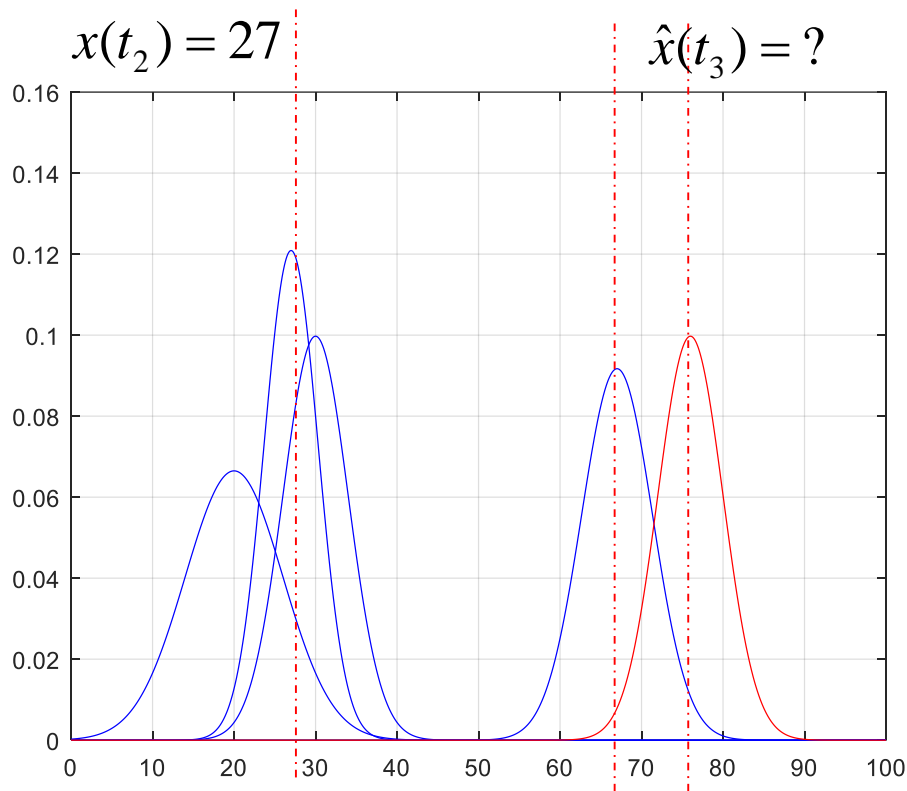
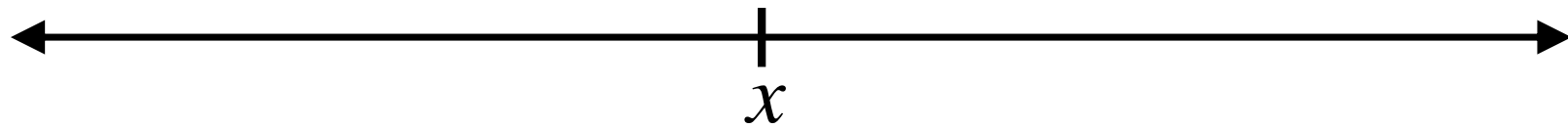
...nie za dokładnie...jeszcze przed fuzją danych..”-”.

- **Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Zatem, po krótkiej chwili określamy pozycję x_3 na podstawie modelu $\hat{x}(t_3^-)$ oraz dokładnego pomiaru $z_3 = 76$ z precyzją $\sigma_{z_3} = 4 \text{ mil}$, w chwili czasu t_3

- Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Zatem, po krótkiej chwili określamy pozycję x_3 na podstawie modelu $\hat{x}(t_3^-)$ oraz dokładnego pomiaru $z_3 = 76$ z precyzją $\sigma_{z_3} = 4$ mil, w chwili czasu t_3

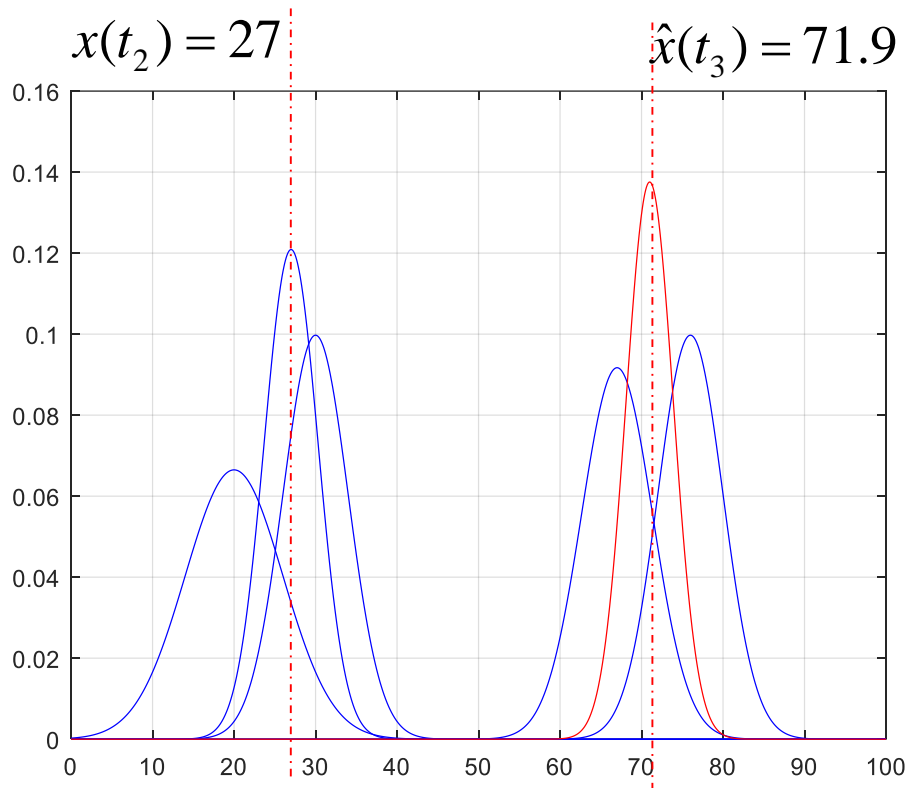
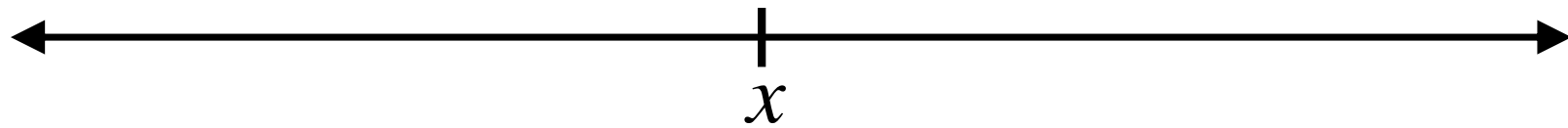
$$\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + \left[\frac{\sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2}{\sigma_{z_3}^2 + \sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2} \right] (z_3 - \hat{x}(t_3^-)) = \dots$$

$$\dots = \hat{x}(t_3^-) + K(t_3)(z_3 - \hat{x}(t_3^-)) \quad (4)$$

$$K(t_3) = \left[\frac{\sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2}{\sigma_{z_3}^2 + \sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_x^2(t_3) = \hat{\sigma}_x^2(t_3^-) - K(t_3) \cdot \hat{\sigma}_x^2(t_3^-) \quad (5)$$

- Idea Filtru Kalmana (zagubieni na morzu)**



Zatem, po krótkiej chwili określamy pozycję x_3 na podstawie modelu $\hat{x}(t_3^-)$ oraz dokładnego pomiaru $z_3 = 76$ z precyzją $\sigma_{z_3} = 4$ mil, w chwili czasu t_3

$$\hat{x}(t_3) = 67 + \left[\frac{18.9}{16 + 18.9} \right] (76 - 67) = \dots$$

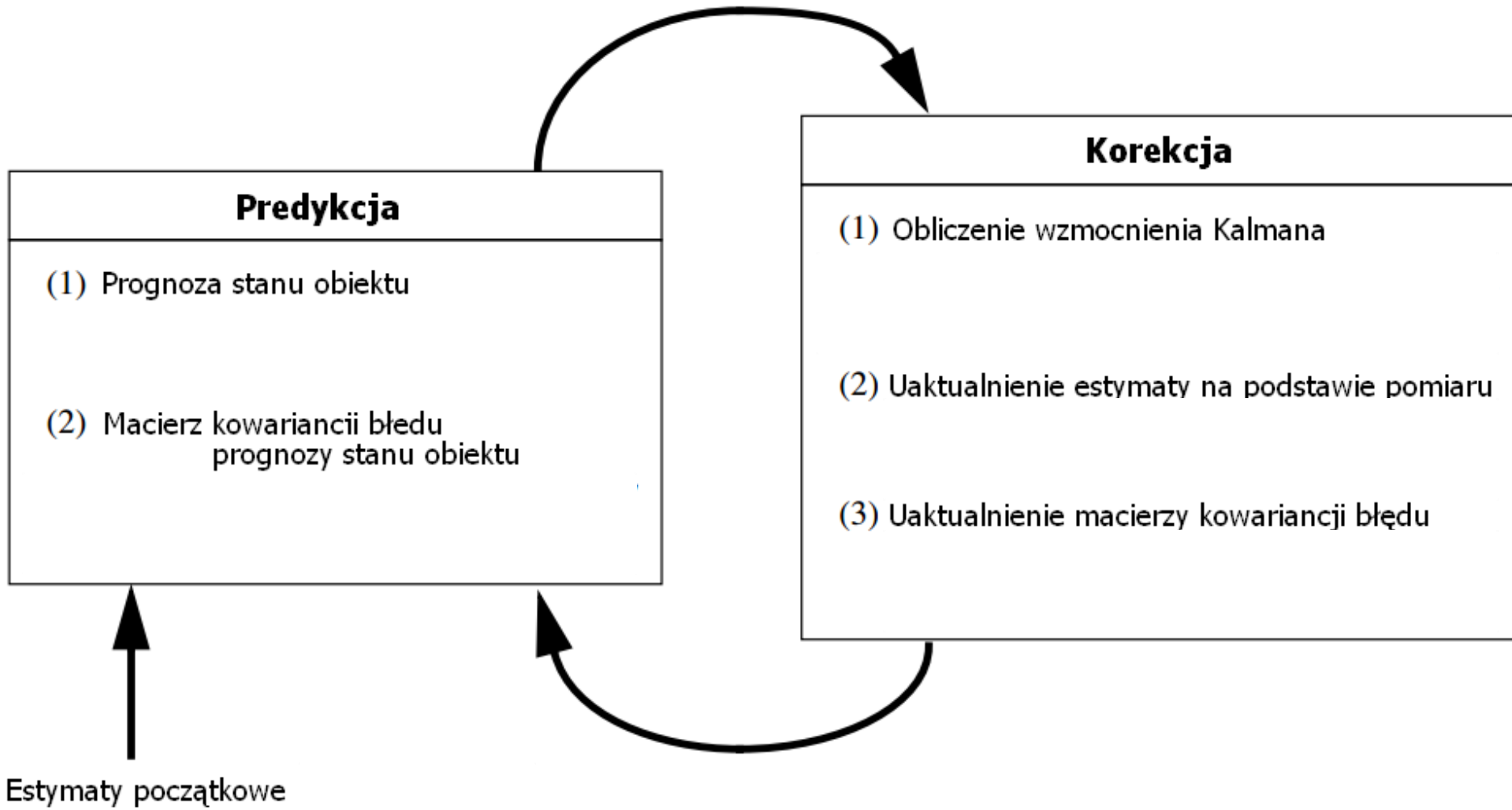
$$\dots = 67 + 0.54 \cdot 9 = 67 + 4,9 = 71,9$$

$$\sigma_x^2(t_3) = 18.9 - 0.54 \cdot 18.9 = \dots$$

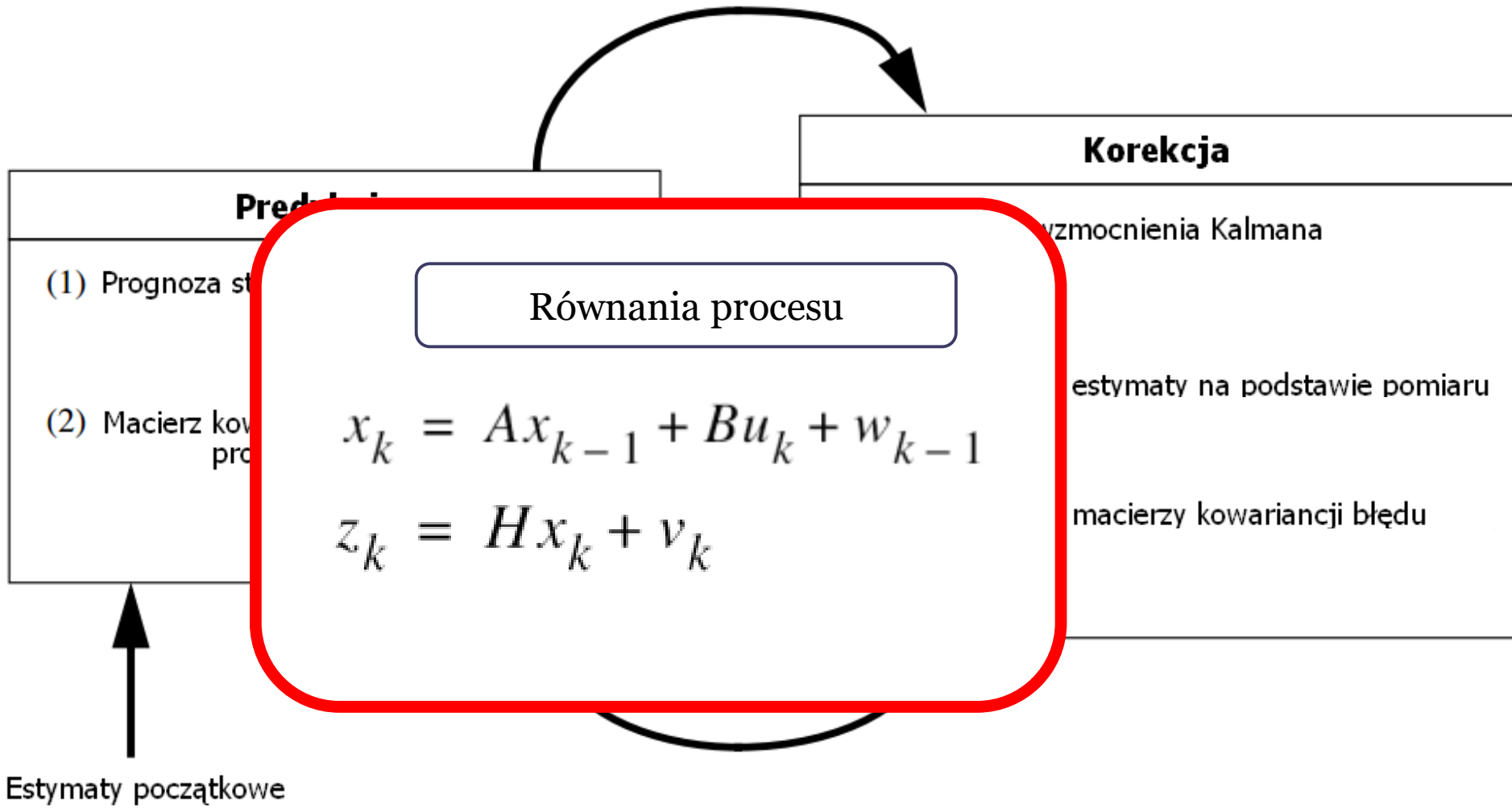
$$\dots = 18.9 - 10.2 = 8.7$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{8.7} = 2.9$$

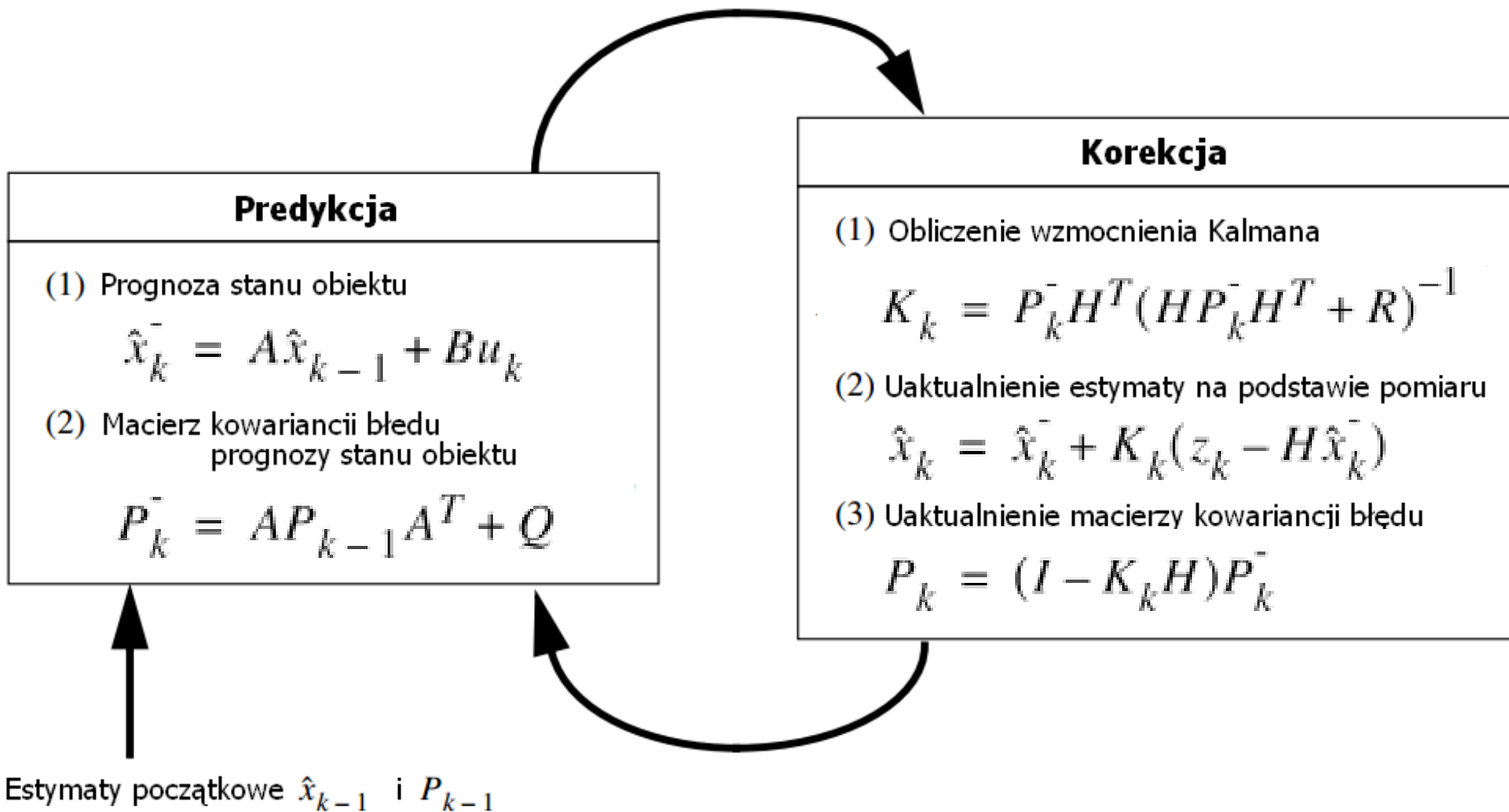
- **Idea Filtru Kalmana**



- **Idea Filtru Kalmana**



- **Idea Filtru Kalmana**



- Idea Filtru Kalmana

Predykcja

$$\bar{x}(t_3) = \bar{x}(t_2) + v \cdot \Delta t = \bar{x}(t_2) + [t_3 - t_2] \cdot u \quad (1)$$

(1) Prognoza stanu obiektu

$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_k$$

(2) Macierz kowariancji błędu prognozy stanu obiektu

$$P_k^- = A P_{k-1} A^T + Q$$

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1}$$

(2) Uaktualnienie estymaty na podstawie pomiaru

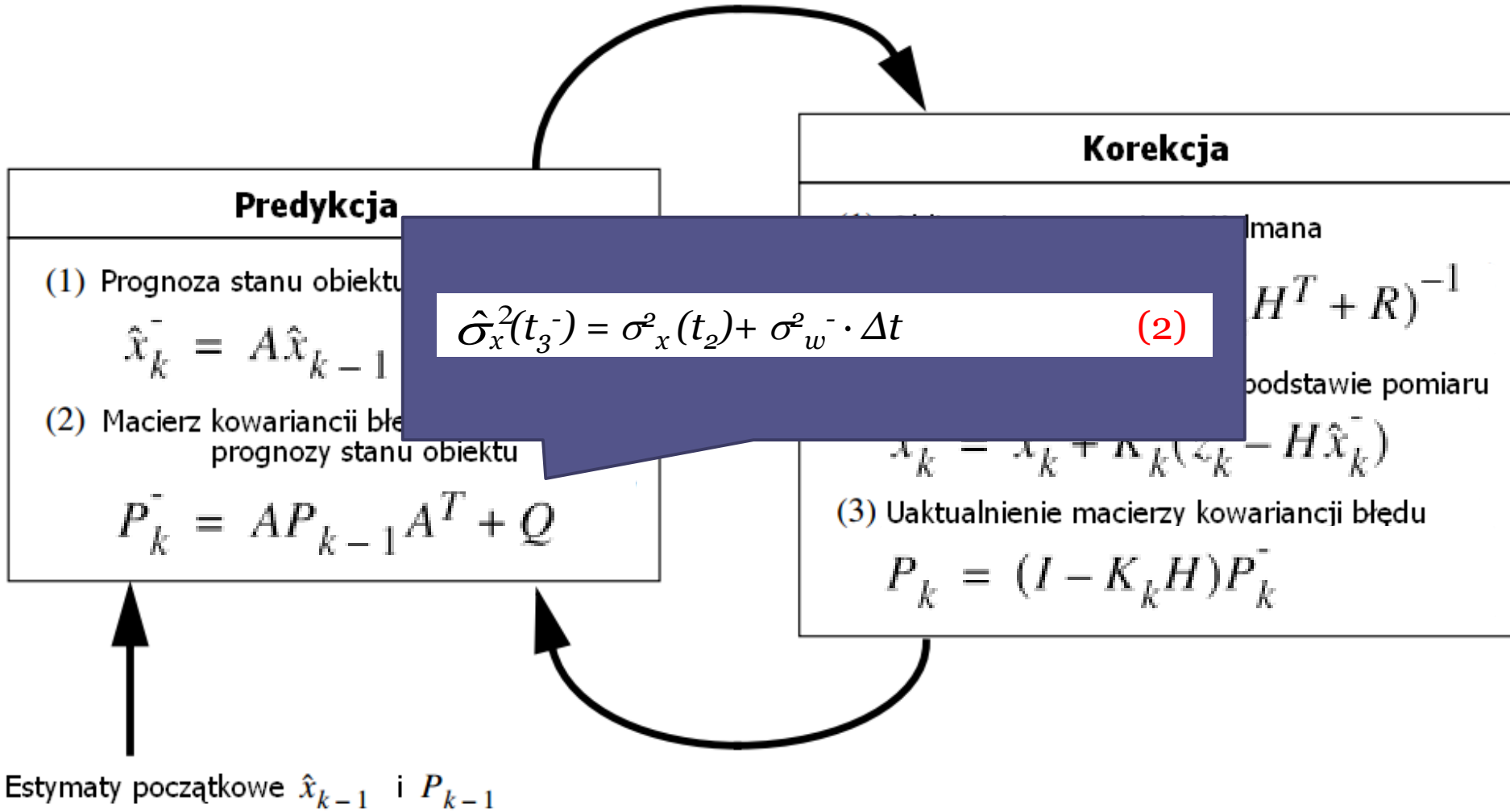
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$$

(3) Uaktualnienie macierzy kowariancji błędu

$$P_k = (I - K_k H) P_k^-$$

Estymaty początkowe \hat{x}_{k-1} i P_{k-1}

- Idea Filtru Kalmana



Estymaty początkowe \hat{x}_{k-1} i P_{k-1}

• Idea Filtru Kalmana

$$K(t_3) = \left[\frac{\sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2}{\sigma_{z_3}^2 + \sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2} \right] \quad (3)$$

(1) Prognoza stanu obiektu

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

(2) Macierz kowariancii błędu prognozy stanu obiektu

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Korekcja

liczenie wzmocnienia Kalmana

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) Uaktualnienie estymaty na podstawie pomiaru

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) Uaktualnienie macierzy kowariancii błędu

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Estymaty początkowe \hat{x}_{k-1} i P_{k-1}

• Idea Filtru Kalmana

$$K(t_3) = \frac{\overset{H}{\sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2}}{\sigma_{z_3}^2 + \underset{H^2}{\sigma_{\hat{x}(t_3^-)}^2}} \quad (3)$$

(1) Prognoza stanu obiektu

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

(2) Macierz kowariancji błędu prognozy stanu obiektu

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Korekcja

liczenie wzmocnienia Kalmana

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) Uaktualnienie estymaty na podstawie pomiaru

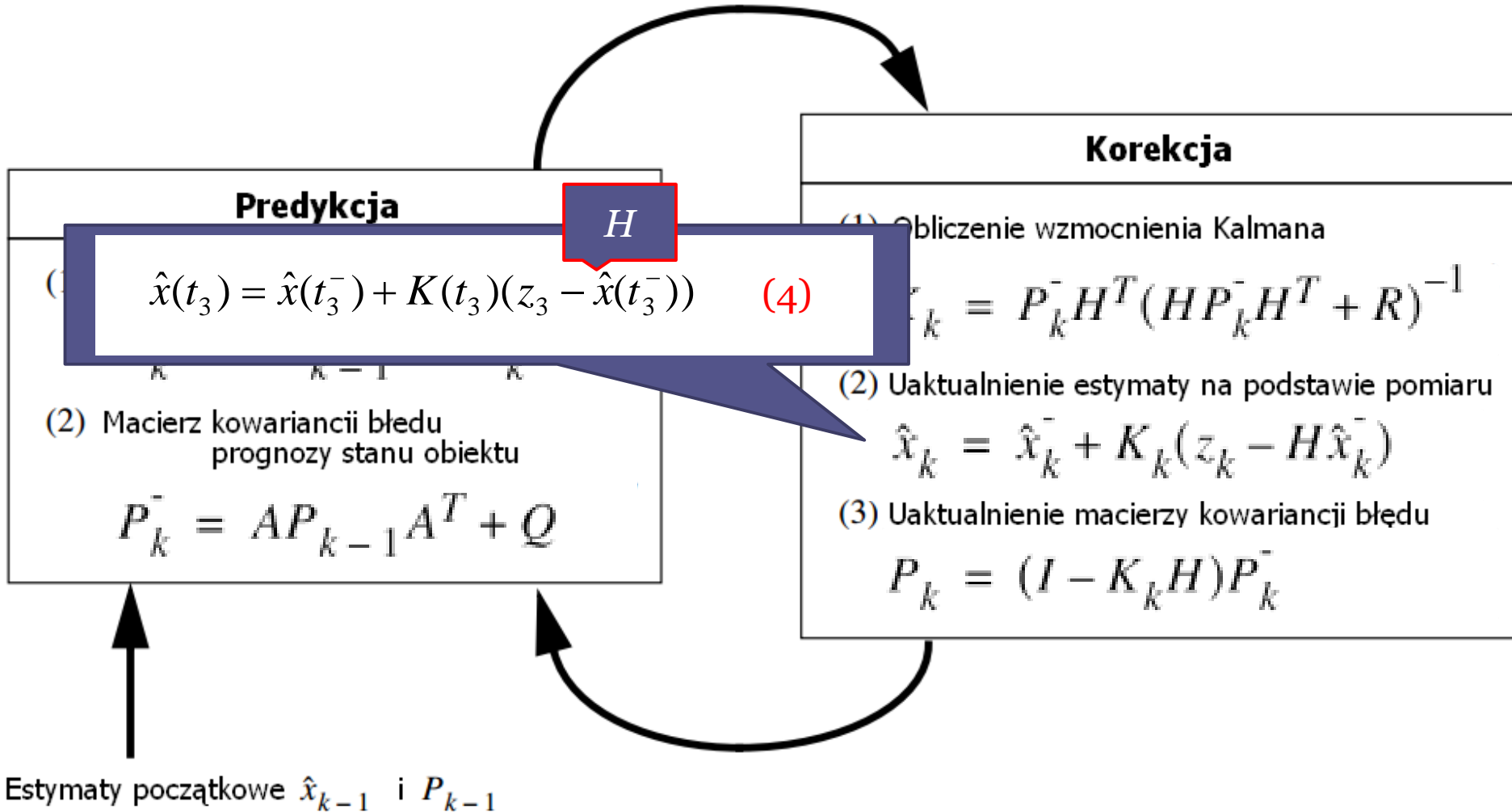
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) Uaktualnienie macierzy kowariancji błędu

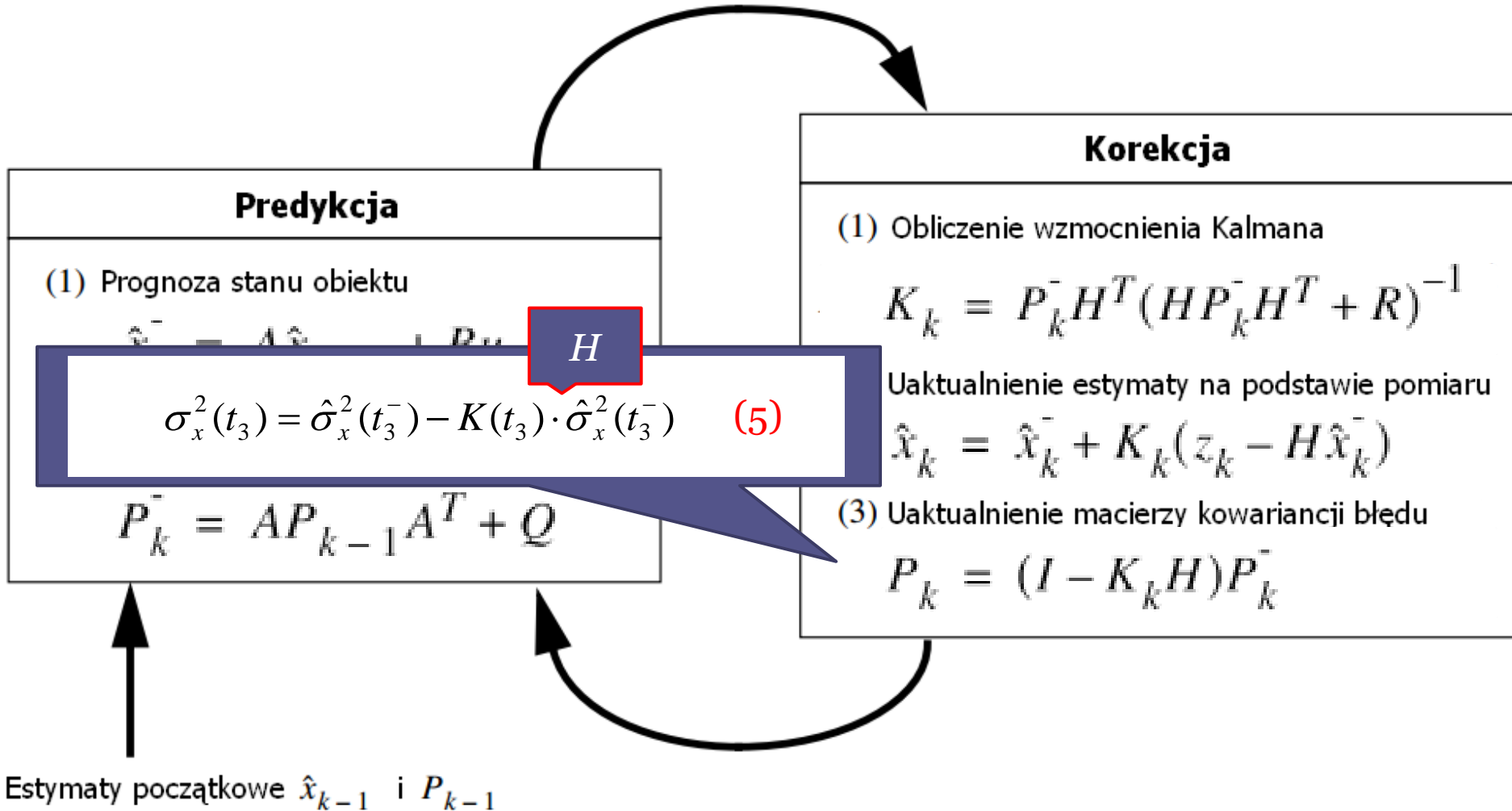
$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Estymaty początkowe \hat{x}_{k-1} i P_{k-1}

• Idea Filtru Kalmana



- Idea Filtru Kalmana



- **Idea Filtru Kalmana**

*Działanie zgodnie ze schematem **Predykcja-Korekcja***

Optymalna estymata = jej prognoza + korekta

*korekta = wzmacnienie Kalmana * (pomiar - prognoza pomiaru)*

Wariancja estymaty = Warjancja prognozy(1 - wzmacnienie Kalmana)*

- **Idea Filtru Kalmana** (estymacja minimalno-średniokwadratowa, MMS, Minimum Mean Square)
- Minimalizuje się funkcję jakości w postaci:

$$J = E[(x - \hat{x})^T \cdot (x - \hat{x})]$$

- Rozważa się model:

$$\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + G \cdot w(k) \\ z(k+1) = H \cdot x(k+1) + v(k+1) \end{cases}$$

- model procesu

- model pomiaru

- *proces dynamiczny, niestacjonarny*

- **Idea Filtru Kalmana** (estymacja MMS)

- macierze A, B, C, G znane,

- $\mathbf{w}(k)$ – szum systemowy (błędy modelowania, niedoskonałość elementów wykonawczych, zakłócenia wewnętrzne), $\mathbf{w}(k) \sim N(0, Q)$:

$$E[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(l)] = \mathbf{0}, \quad k \neq l$$

- $Q(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)]$ – macierz autokowariancji szumu procesu, dodatnio określona i symetryczna

- $\mathbf{v}(k+1)$ – szum pomiarowy (niedoskonałość czujników pomiarowych), $\mathbf{v}(k+1) \sim N(0, R)$:

$$E[\mathbf{v}(k)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(l)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(k)\mathbf{w}^T(l)] = \mathbf{0}, \quad k \neq l$$

- $R(k) = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)]$ – macierz autokowariancji szumu pomiarowego, dodatnio określona i symetryczna

- wartości początkowe wektora zmiennych procesu powinny spełniać następujące warunki:

$$E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)] = P_0, \quad E[\mathbf{x}(0)\mathbf{w}^T(k)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{x}(0)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{0}$$

- **Idea Filtru Kalmana** (estymacja MMS)

- \hat{x} – estymacja x ,
- $\hat{x}(k+1|k)$ – prognoza wektora $x(k+1)$ oparta na pomiarach $z(1), \dots, z(k)$,
- $\hat{x}(k+1|k+1)$ – prognoza wektora $x(k+1)$ oparta na pomiarach $z(1), \dots, z(k), z(k+1)$,
- $\hat{z}(k+1|k)$ – prognoza wektora $z(k+1)$ oparta na pomiarach $z(1), \dots, z(k)$,
- $\Delta x(k|k) = x(k|k) - \hat{x}(k|k)$ - błąd estymacji stanu procesu
- $\Delta x(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)$ - błąd prognozy stanu procesu
- $\Delta z(k+1|k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)$ - błąd prognozy stanu pomiaru
- $P(k+1|k) = E[\Delta x(k|k) \cdot \Delta x^T(k|k)]$ - macierz kowariancji błędu estymacji stanu procesu
- $P(k+1|k) = E[\Delta x(k+1|k) \cdot \Delta x^T(k+1|k)]$ - macierz kowariancji błędu prognozy stanu procesu

- **Idea Filtru Kalmana**

- Błąd estymacji a priori (model):

$$e(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)$$

- Błąd estymacji a posteriori (pomiar):

$$e(k+1|k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1)$$

- Estymata błędu kowariancji a priori:

$$P(k+1|k) = E[e(k+1|k)e^T(k+1|k)]$$

- Estymata błędu kowariancji a posteriori:

$$P(k+1|k+1) = E[e(k+1|k+1)e^T(k+1|k+1)]$$

- **Idea Filtru Kalman**

- Celem filtru Kalmana jest wyznaczenie estymaty a posteriori $\hat{x}(k+1|k+1)$ jako liniowej kombinacji estymaty a priori $\hat{x}(k+1|k)$ i ważonej różnicy pomiędzy aktualnym pomiarem $z(k+1)$ a predykcją pomiaru $H \cdot \hat{x}(k+1|k)$:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot (z(k+1) - H \cdot \hat{x}(k+1|k))$$

- Wzmocnienie Kalman $K(k+1)$ dobiera się tak aby estymacja kowariancji błędu a posteriori $P(k+1|k+1)$ była jak najmniejsza

$$K(k+1) = P(k+1|k) \cdot H^T \cdot [H \cdot P(k+1|k) \cdot H^T + R]^{-1}$$

- **Idea Filtru Kalmana**

$$K(k+1) = \frac{P(k+1|k) \cdot H^T}{H \cdot P(k+1|k) \cdot H^T + R}$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} K(k+1) = \frac{1}{H}$$

Większe zaufanie do pomiaru niż do predykcji pomiaru

$$\lim_{P(k+1|1) \rightarrow 0} K(k+1) = 0$$

Większe zaufanie do predykcji pomiaru niż pomiaru

• Algorytm Filtru Kalmana

1. Inicjalizacja:

$$A = \text{const}, \quad B = \text{const}, \quad G = \text{const}, \quad H = \text{const},$$

$$R = R(k) = \text{const}, \quad Q = Q(k) = \text{const}$$

$$k = 0, \quad P(0|0) = P_0, \quad \hat{x}(0|0) = 0,$$

2. Prognoza stanu obiektu (predykcja):

$$\hat{x}(k+1|k) = A \cdot \hat{x}(k|k) + B \cdot u(k|k)$$

3. Macierz kowariancji błędu prognozy stanu obiektu (predykcja):

$$P(k+1|k) = A \cdot P(k|k) \cdot A^T + G \cdot Q \cdot G^T$$

4. Wzmocnienie Kalmana (korekcja):

$$K(k+1) = P(k+1|k) \cdot H^T \cdot [H \cdot P(k+1|k) \cdot H^T + R]^{-1}$$

5. Nowa estyma ta stanu obiektu = korekta prognozy stanu obiektu (korekcja):

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot (z(k+1) - H \cdot \hat{x}(k+1|k))$$

6. Macierz kowariancji błędu estymaty stanu obiektu (korekcja):

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot H] \cdot P(k+1|k)$$

7. $k=k+1$, skok do kroku 2

- **Idea Filtru Kalmana**

Predykcja

- (1) Prognoza stanu obiektu

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

- (2) Macierz kowariancji błędu prognozy stanu obiektu

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Korekcja

- (1) Obliczenie wzmocnienia Kalmana

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

- (2) Uaktualnienie estymaty na podstawie pomiaru

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

- (3) Uaktualnienie macierzy kowariancji błędu

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Estymaty początkowe \hat{x}_{k-1} i P_{k-1}

- **Przykład 1: zastosowania Filtru Kalmana**

Odszumianie (filtrowanie) próbkowanych sygnałów zebranych z systemu GPS (10 razy na sekundę) zamontowanego w pojeździe autonomicznym poruszającym się ruchem jednostajnie przyspieszonym (1 m/s^2) po prostej drodze, z prędkością szacowaną z dokładnością 1 m/s .

Jakie jest dokładne położenie pojazdu w trakcie ruchu?

Z jaką prędkością pojazd się porusza?

Pomiar położenia odbywa się z dokładnością 5 m .

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + 0.5 \cdot a \cdot t^2 \\ v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ s_0 &= 0; \quad v_0 = 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} s(k+1) &= s(k) + v(k) \cdot \Delta t + 0.5 \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \\ v(k+1) &= v(k) + a \cdot \Delta t \end{aligned}$$

- Przykład 1: zastosowania Filtru Kalmana**

$$\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + G \cdot w(k) \\ z(k+1) = H \cdot x(k+1) + v(k+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s(k+1) &= s(k) + v(k) \cdot \Delta t + 0.5 \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \\ v(k+1) &= v(k) + a \cdot \Delta t \end{aligned} \quad x(k) = \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \cdot (\Delta t)^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \cdot [u(k)] + \begin{bmatrix} 0.5 \cdot (\Delta t)^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \cdot [w(k)] \\ [z(k+1)] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + [\mu(k)] \end{cases}$$

- **Przykład 1: zastosowania Filtru Kalmana**

Jak określić macierze R i Q ?

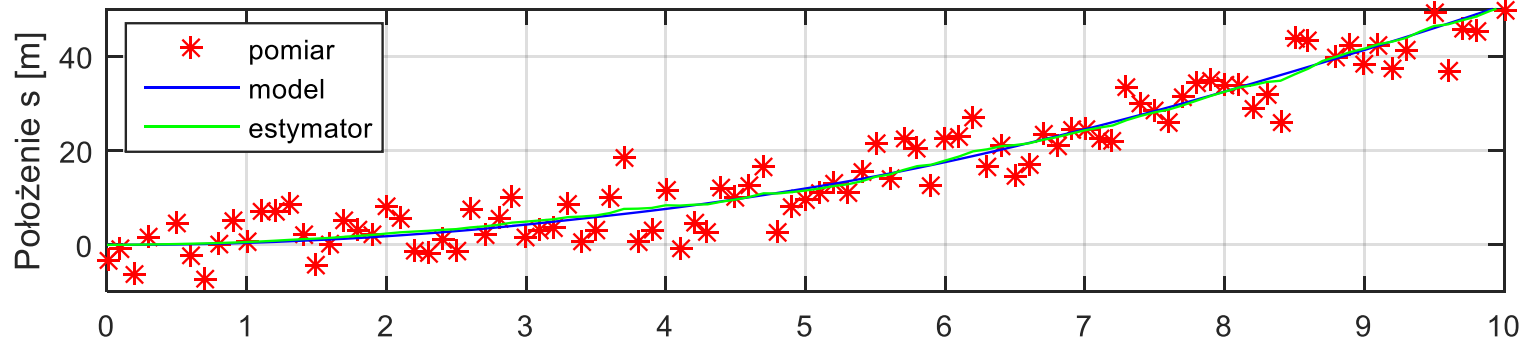
$$R = E[\mu(k) \cdot \mu(k)^T] \rightarrow R = (\sigma_s)^2$$

$$Q = E[w(k) \cdot w(k)^T] \rightarrow Q = E\left[\begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & v \end{bmatrix}\right] = E\begin{bmatrix} s^2 & sv \\ vs & v^2 \end{bmatrix}$$

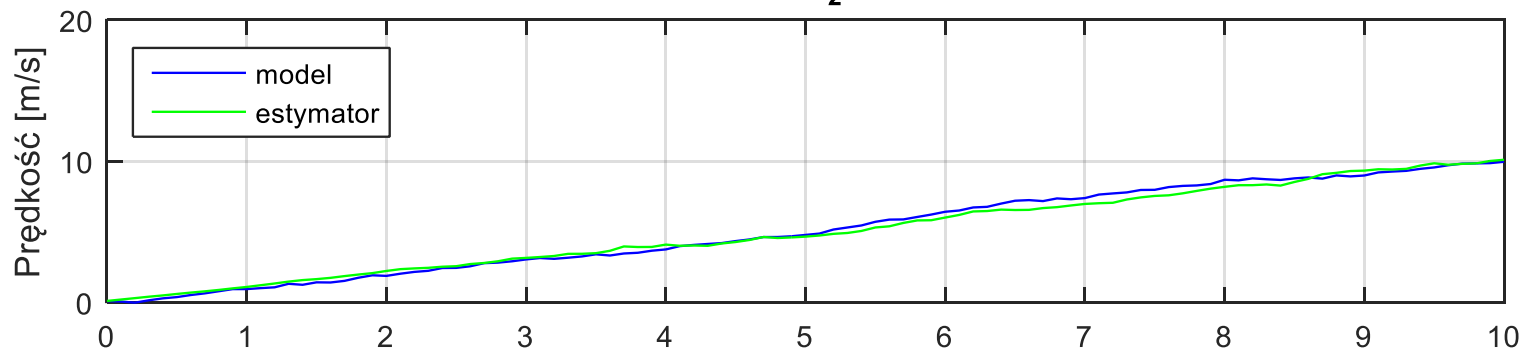
$$Q = \begin{bmatrix} (\sigma_v)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 & (\sigma_v)^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \Delta t \\ (\sigma_v)^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta t^2}{2} & (\sigma_v)^2 \cdot \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

Estymacja wyjść/stanu

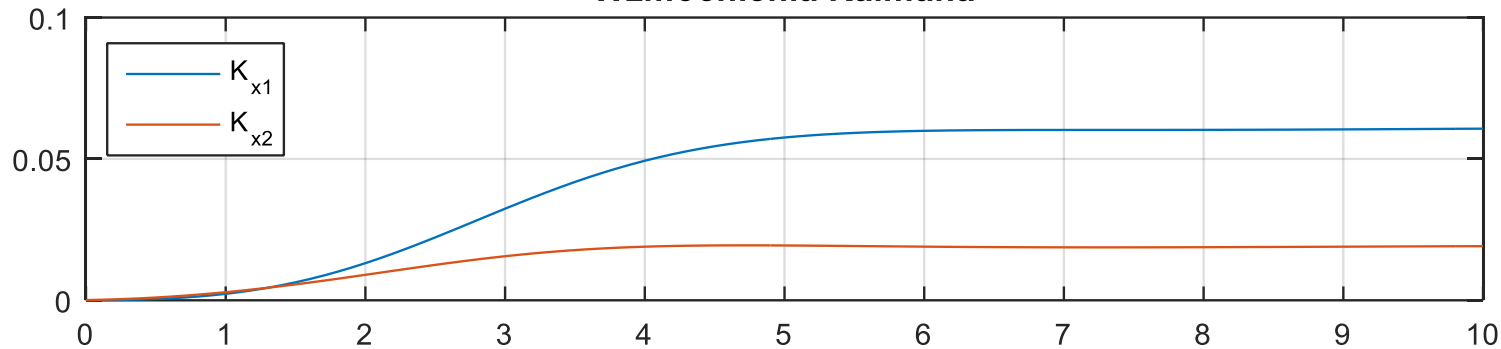
Zmienna stanu x_1 - polozenie s



Zmienna stanu x_2 - predkosc v



Wzmocnienia Kalmana



czas [s]

Błąd położenia z pomiaru i estymatora

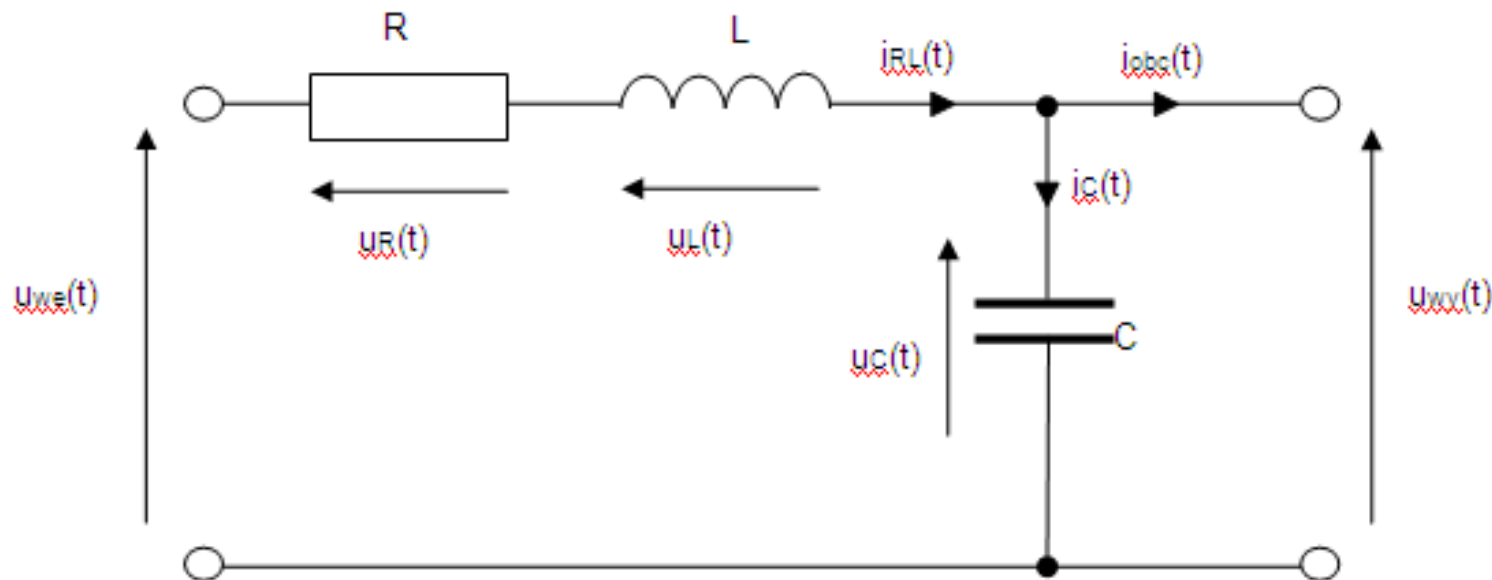


Błąd prędkości z estymatora



• Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana

Odszumianie (filtrowanie) próbkowanych sygnałów zebranych z analogowego czwórnika RLC. Napięcie zasilania $u_{we}(t)$ to napięcie o przebiegu bipolarnym prostokątnym z przedziału 0-1 V, $R=5 \text{ k}\Omega$, $L=2.5 \text{ H}$ i $C=0.1 \text{ }\mu\text{F}$. Napięcie na kondensatorze mierzone jest co $T=10^{-4}$ sekundy.



Odchylenie standardowe szumu pomiarowego i procesu przyjęto na poziomie 0.2.

- Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana**

$$x_1(t) = u_c(t) \quad x_2(t) = \frac{dx_1}{dt} = \frac{du_c}{dt}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{LC}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot [u(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot [w(t)]$$

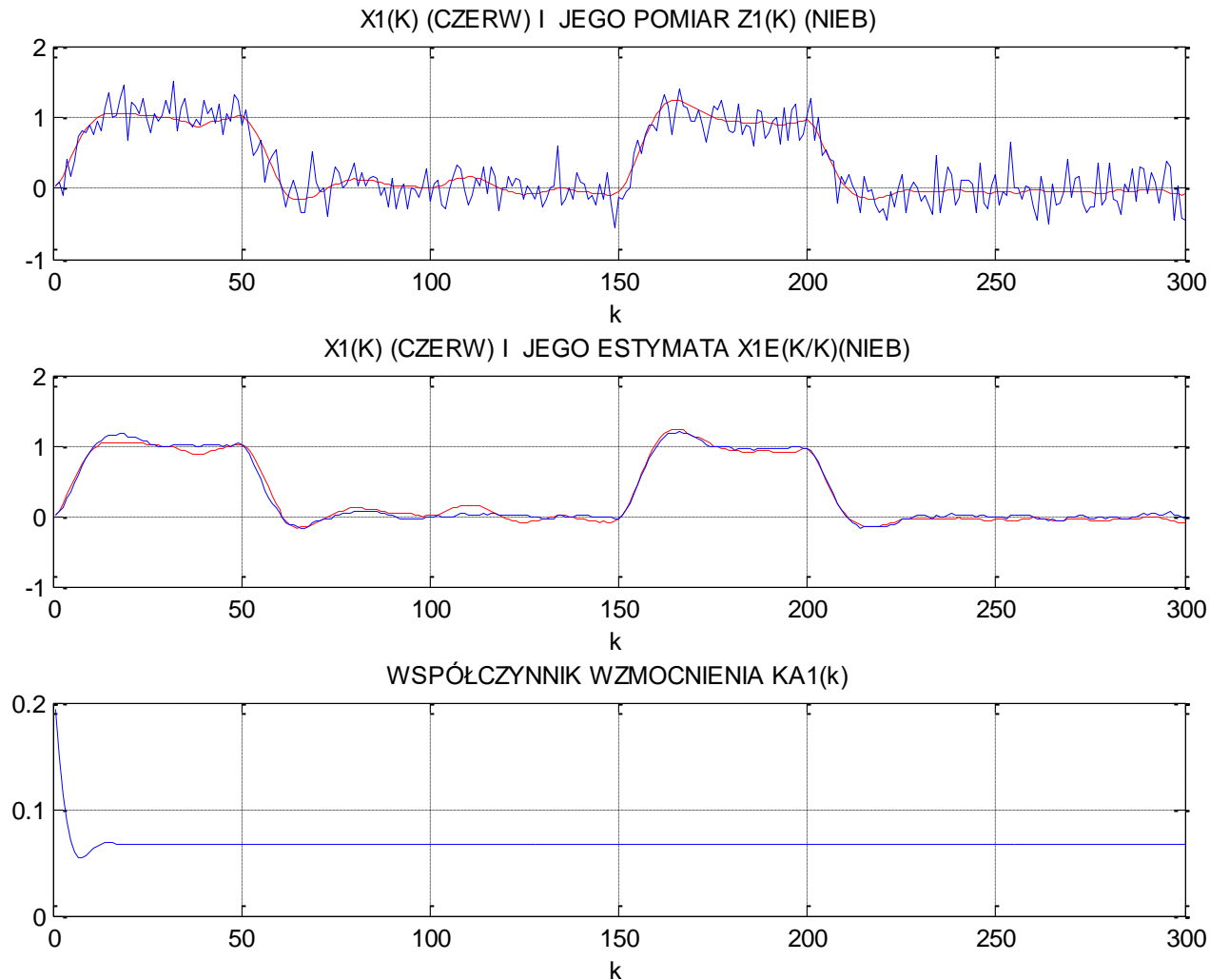
- Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji stanu**

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 \cdot 10^6 & -2 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cdot w(t)$$

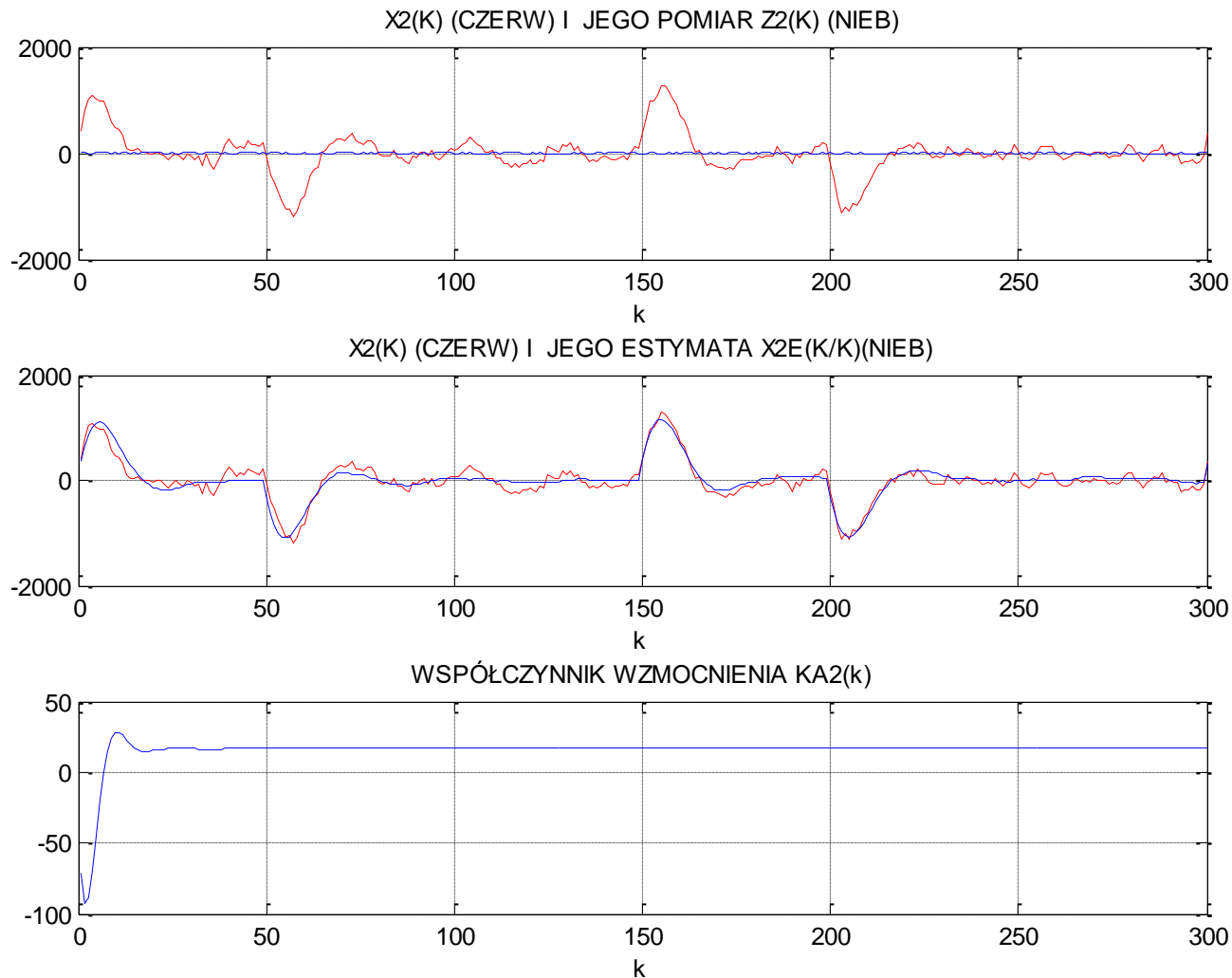
$$A_d = e^{AT} \quad B_d = (e^{AT} - I) \cdot A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9813 & 0.0001 \\ -360.13 & -0.8013 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0.0187 \\ 360.13 \end{bmatrix} \cdot u(k) + \begin{bmatrix} 0.0187 \\ 360.13 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k+1) = [1 \quad 0] \cdot x(k+1) + v(k+1) \end{cases}$$

- **Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji stanu**



- **Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji stanu**



- **Przykład 2: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji stanu**

```
...
% ESTYMACJA - FILTR KALMANA PĘTLA GŁÓWNA

for k=1:iter
    ...
    % OBLICZENIE STANU MODELU x(k+1)
    x=F*x+B*u+G*(dq*randn(m,1));
    % WYKONANIE POMIARU z(k+1)
    z=H*x+dr*randn(m,1);
    % OBLICZENIE MACIERZY WARIANCJI PROGNOZY P(k+1/k)
    P1=F*P*F'+G*Q*G';
    % OBLICZENIE WZMOCNIENIA KALMANA A(k+1)
    KA=P1*H'*inv(H*P1*H'+R);
    % OBLICZENIE PROGNOZY STANU PROCESU x(k+1/k)
    x1=F*x+G*u;
    % OBLICZENIE PROGNOZY POMIARU z(k+1/k)
    z1=H*x1;
    % OBLICZENIE ESTYMATY STANU x(k+1/k+1)
    xe=x1+KA*(z-z1);
    % OBLICZENIE MACIERZY WARIANCJI ESTYMATY P(k+1/k+1)
    P=(I-KA*H)*P1;
    % HISTORIA ESTYMACJI
    XP=[XP; x1'];
    XE=[XE; xe'];
    XX=[XX; x'];
    ZZ=[ZZ; z'];
    KK=[KK; (KA(:,1))'];
    ...
end

% WIZUALIZACJA WYNIKÓW
...
```

- **Idea Rozszerzonego Filtru Kalmana**

- Rozszerzony Filtr Kalmana przeznaczony jest dla obiektów opisanych modelem nieliniowym i/lub nieliniowym równaniem pomiarowym.
- Równania takiego nieliniowego systemu można zapisać jako:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$
$$z_k = h(x_k, v_k)$$

- Rozszerzony Filtr Kalmana jest Filtrem Kalmana linearyzowanym wokół aktualnej średniej i kowariancji – każdej zmiennej stanu.

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W w_{k-1}$$
$$z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + V v_k$$

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$
$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0)$$

$f()$, $h()$ – funkcje nieliniowe

Inna notacja niż poprzednio

- **Idea Rozszerzonego Filtru Kalmana**

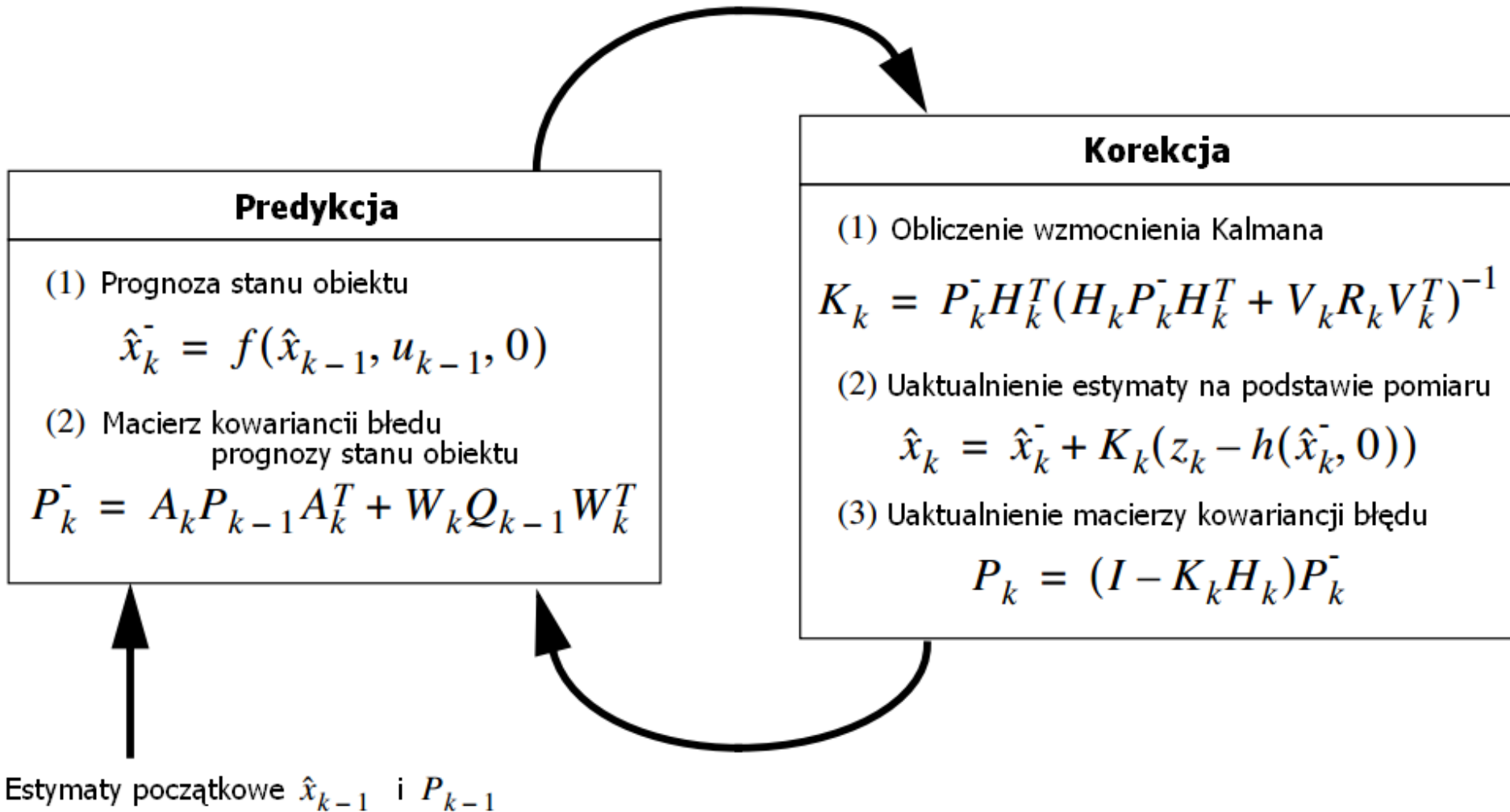
- Macierze Jacobiego pochodnych cząstkowych funkcji $f()$ względem x i w :

$$A_{[i, j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \qquad W_{[i, j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$$

- Macierze Jacobiego pochodnych cząstkowych funkcji $h()$ względem x i v :

$$H_{[i, j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0) \qquad V_{[i, j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$$

• Algorytm Rozszerzonego Filtru Kalmana



• Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana

Dwufazowy silnik synchroniczny z magnesami trwałymi można opisać za pomocą następującego zestawu równań.

$$\dot{I}_a = \frac{-R}{L} I_a + \frac{\omega\lambda}{L} \sin \theta + \frac{u_a + \Delta u_a}{L}$$

$$\dot{I}_b = \frac{-R}{L} I_b + \frac{\omega\lambda}{L} \cos \theta + \frac{u_b + \Delta u_b}{L}$$

$$\dot{\omega} = \frac{-3\lambda}{2J} I_a \sin \theta + \frac{3\lambda}{2J} I_b \cos \theta - \frac{F\omega}{J} + \Delta\alpha$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

Δu_a i Δu_b są szumami napięć u_a i u_b scharakteryzowanymi odchyleniami standardowymi 0.001 A; $\Delta\alpha$ jest szumem momentu obciążenia z odchyleniem standardowym 0.05 rad/sec²;

- **Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana**

Zadaniem jest estymacja zmiennych stanu w postaci położenia wału θ i jego prędkości kątowej ω na podstawie pomiarów prądów I_a i I_b .

Stan systemu:

$$x = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

Równanie pomiarowe:

$$y = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

- Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana**

Równania systemu:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ &= x_k + \begin{bmatrix} -Rx_k(1)/L + x_k(3)\lambda \sin x_k(4)/L + u_{ak}/L \\ -Rx_k(2)/L + x_k(3)\lambda \cos x_k(4)/L + u_{bk}/L \\ -3\lambda x_k(1)\sin x_k(4)/2J + 3\lambda x_k(2)\cos x_k(4)/2J - Fx_k(3)/J \\ x_k(3) \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} \Delta u_{ak}/L \\ \Delta u_{bk}/L \\ \Delta \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_k &= h(x_k) + v_k \\ &= \begin{bmatrix} x_k(1) \\ x_k(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{ak} \\ v_{bk} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- **Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana**

Przyjmując:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} df_1 / dx_1 & df_1 / dx_2 & df_1 / dx_3 & df_1 / dx_4 \\ df_2 / dx_1 & df_2 / dx_2 & df_2 / dx_3 & df_2 / dx_4 \\ df_3 / dx_1 & df_3 / dx_2 & df_3 / dx_3 & df_3 / dx_4 \\ df_4 / dx_1 & df_4 / dx_2 & df_4 / dx_3 & df_4 / dx_4 \end{bmatrix}$$

• Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana

Otrzymuje się:

$$A_k = f'(\hat{x}_k, u_k) = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & \lambda \sin \hat{x}_k(4)/L & \hat{x}_k(3)\lambda \cos \hat{x}_k(4)/L \\ 0 & -R/L & -\lambda \cos \hat{x}_k(4)/L & \hat{x}_k(3)\lambda \sin \hat{x}_k(4)/L \\ -3\lambda \sin \hat{x}_k(4)/2J & 3\lambda \cos \hat{x}_k(4)/2J & -F/J & -3\lambda[\hat{x}_k(1)\cos \hat{x}_k(4) + \hat{x}_k(2)\sin \hat{x}_k(4)]/2J \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_k = h'(\hat{x}_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy czym silnik jest zasilany:

$$u_a(t) = \sin 2\pi t$$

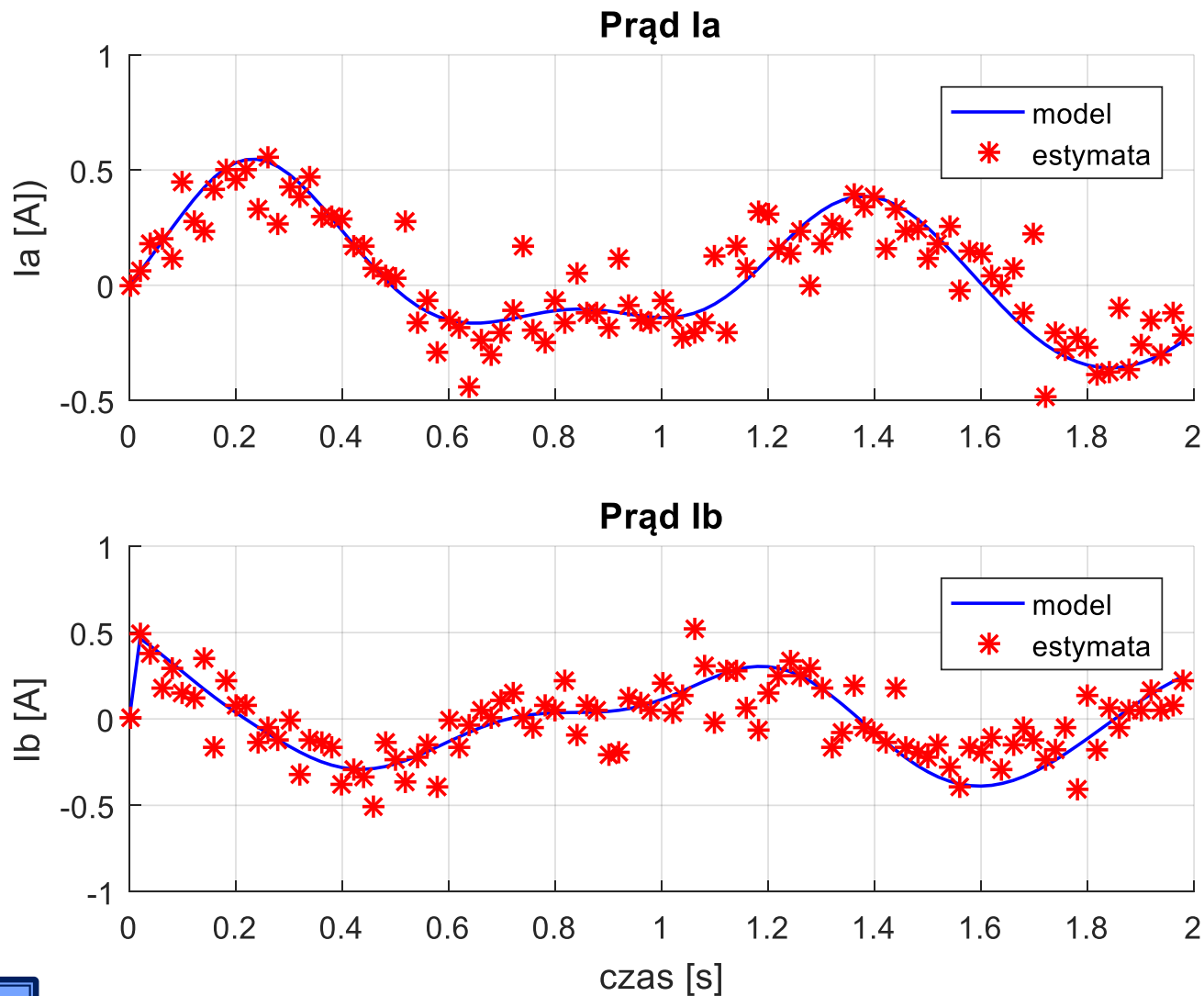
$$u_b(t) = \cos 2\pi t$$



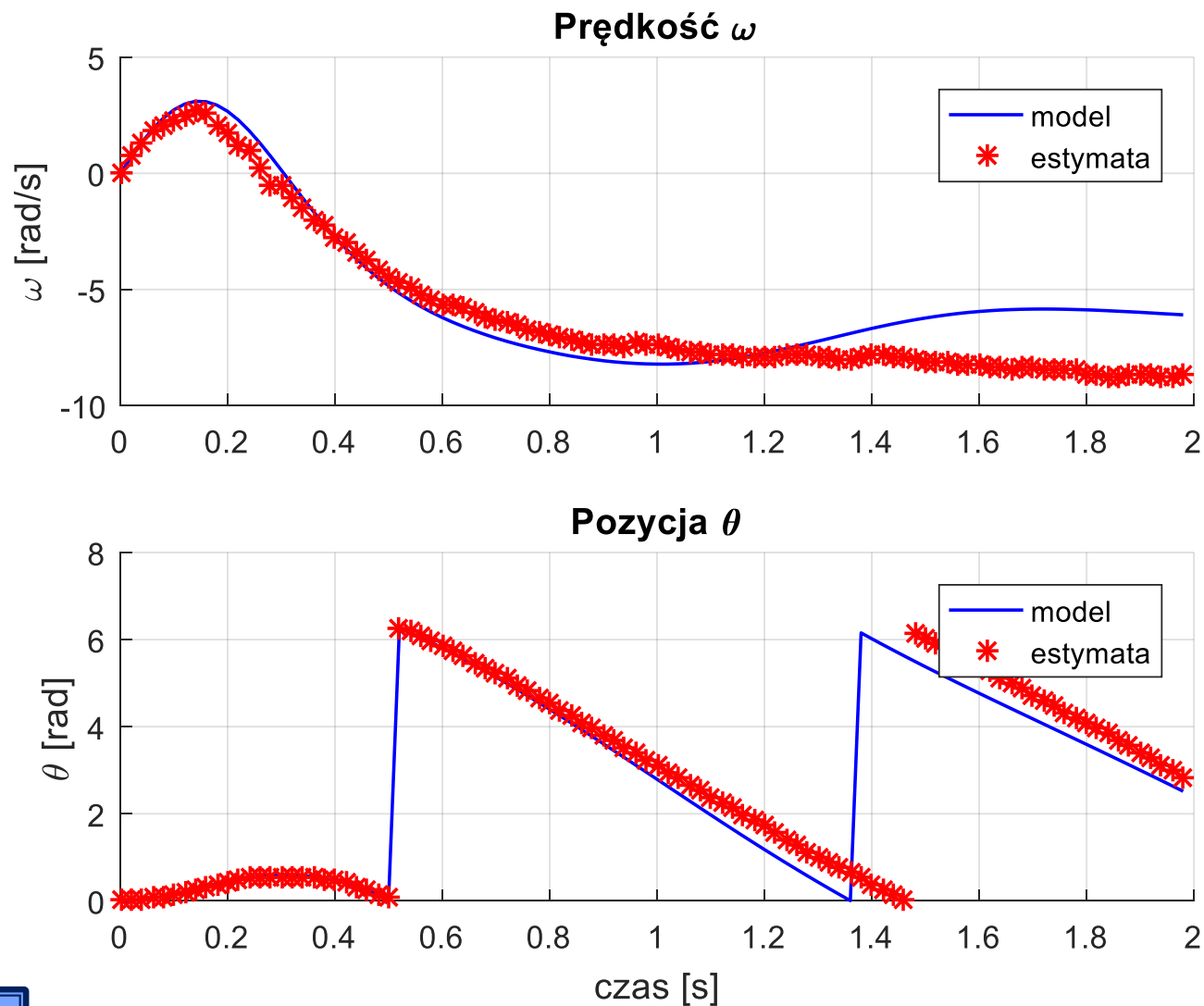
$$u_{ak} = \sin 2\pi k\Delta t$$

$$u_{bk} = \cos 2\pi k\Delta t$$

- Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana



- Przykład 3: zastosowania Rozszerzonego Filtru Kalmana



- **Przykład 4: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji parametrów**

- Rozważamy model postaci:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\Theta) \cdot x(k) + B(\Theta) \cdot u(k) + G \cdot w(k) \\ z(k) = H(\Theta) \cdot x(k) + v(k) \end{cases}$$

gdzie wektor parametrów Θ jest nieznan.

- Wprowadzając nowy wektor zmiennych stanu:

$$y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \Theta(k) \end{bmatrix}$$

przy czym $\Theta = \Theta(k)$

- **Przykład 4: zastosowania Filtru Kalmana do estymacji parametrów**

- Otrzymuje się nieliniowy model w przestrzeni stanów:

$$\begin{cases} y(k+1) = f(y(k), u(k)) + \begin{bmatrix} w(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ z(k) = h(y(k)) + v(k) \end{cases}$$

- **Rozwiązanie: Rozszerzony Filtr Kalmana**

przy czym:

$$f(y(k), u(k)) = \begin{bmatrix} A(\Theta) \cdot x(k) + B(\Theta) \cdot u(k) \\ \Theta(k) \end{bmatrix}$$

$$h(y(k)) = H(\Theta) \cdot x(k)$$



Bibliografia

[0] *Materiały wykładowe z przedmiotów (sem. I; studiów I stopnia) :*

- „Modelowanie i Identyfikacja”
- „Teoria Sterowania”

[1] Tomasz P. Zieliński, „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów – od teorii do zastosowań”. WKŁ, 2007.
Kody programów z książki: <http://galaxy.uci.agh.edu.pl/~zmetr/ksiazki.htm>

[2] Rudolph. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Trasactions of the ASME: Journal of Basic Engineering*, vol 82, Series D, pp. 35-45, 1960.

[3] Peter S. Maybeck, „Stochastic models, estimation and control“, Academic Press, 1979.

[4] Dan Simon „Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches” Wiley-Interscience, 2006.



HISTORIA MĄDROŚCIĄ
PRZYSZŁOŚĆ WYZWANIEM