Metody Matematyczne w Transporcie 2017/18 Transport sem. II, studia magisterskie

Laboratorium 1 Zagadnienie Programowania Liniowego

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady		Limit środków
	W_1	W_2	
I	16	24	96 000
II	16	10	80 000
Limit produkcji	3 000 szt	4 000 szt	
Zysk jednostkowy	30 zł	40 zł	

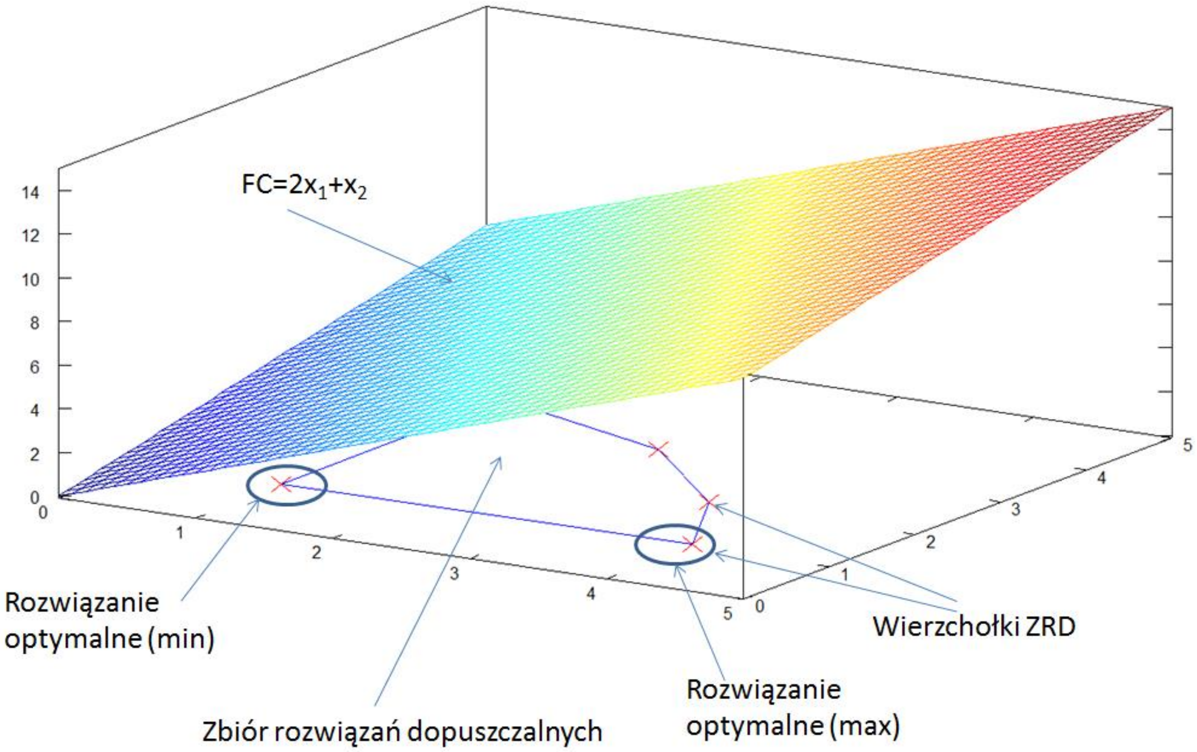
Dodatkowe ograniczenie: „Komórka analizy rynku ustaliła optymalne proporcje produkcji W_1:W_2, które kształtują się odpowiednio jak 3:2"

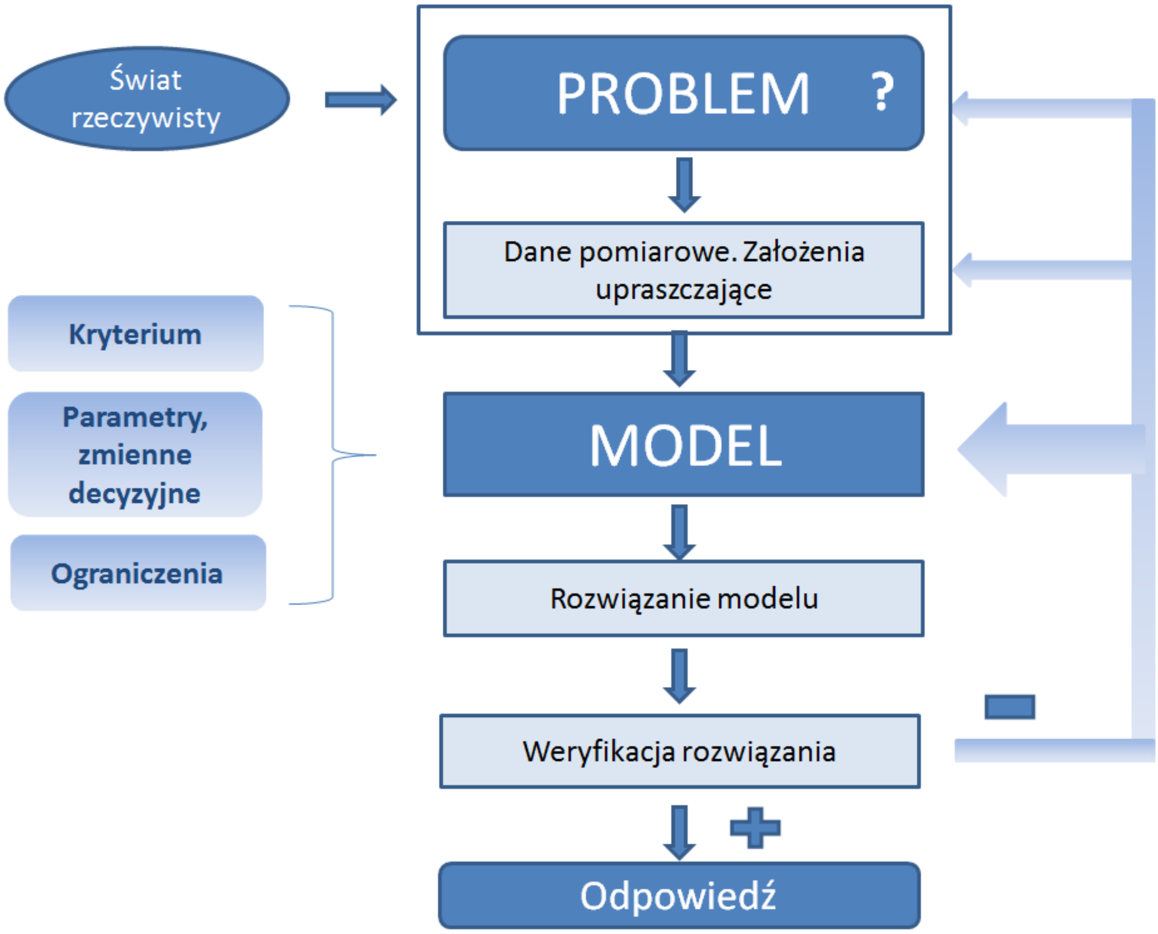
Zmienne decyzyjne x_1, x_2 oznaczające liczbę sztuk W_1, W_2

Cel / Kryterium $FC(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 \longrightarrow \max$

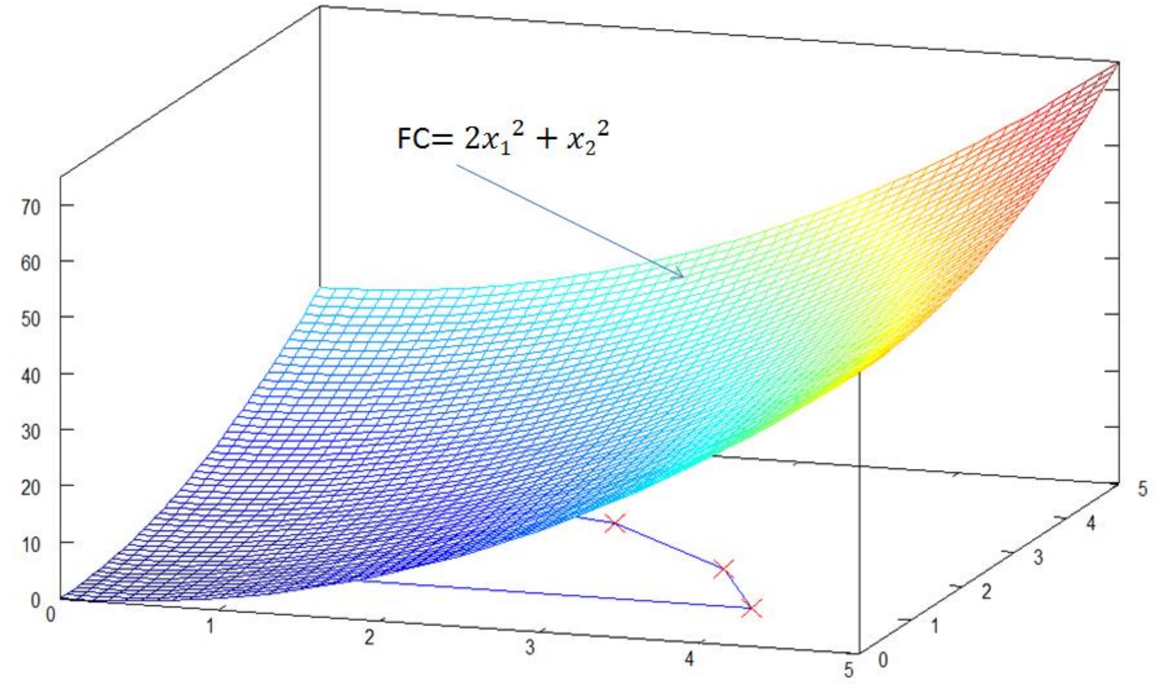
Ograniczenia:

$$\begin{cases} 16x_1 + 24x_2 \leq 96\,000 \\ 16x_1 + 10x_2 \leq 80\,000 \\ 0 \leq x_1 \leq 3\,000 \quad 0 \leq x_2 \leq 4\,000 \\ x_1 = \frac{2}{3}x_2 \end{cases}$$

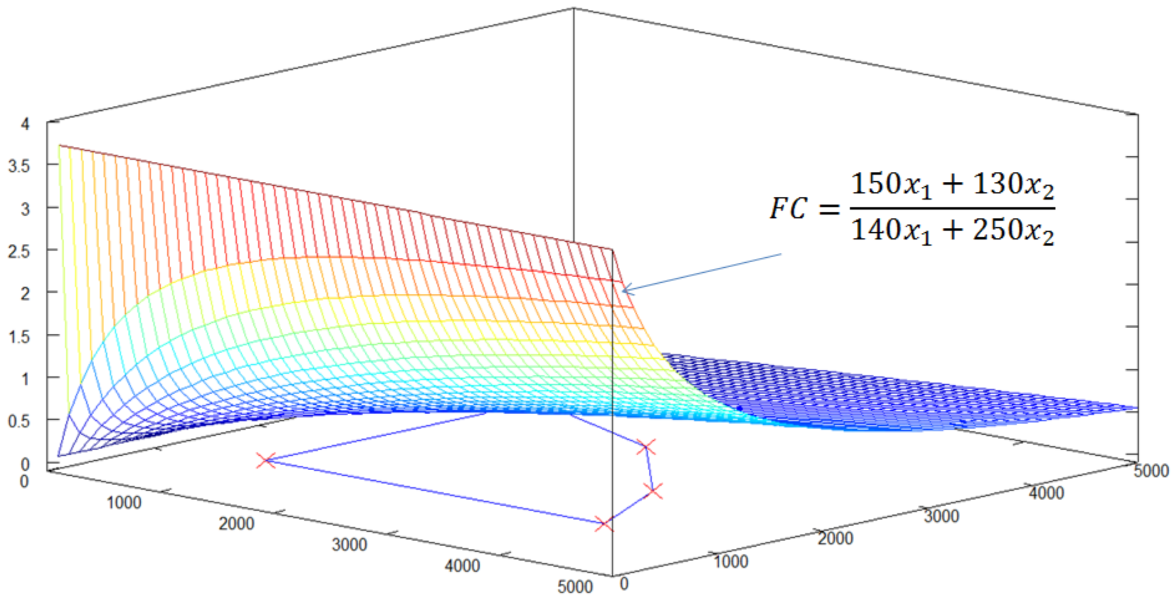



Świat rzeczywisty
PROBLEM ?
Dane pomiarowe. Założenia upraszczające
Kryterium
Parametry, zmienne decyzyjne
Ograniczenia
MODEL
Rozwiązanie modelu
Weryfikacja rozwiązania
Odpowiedź

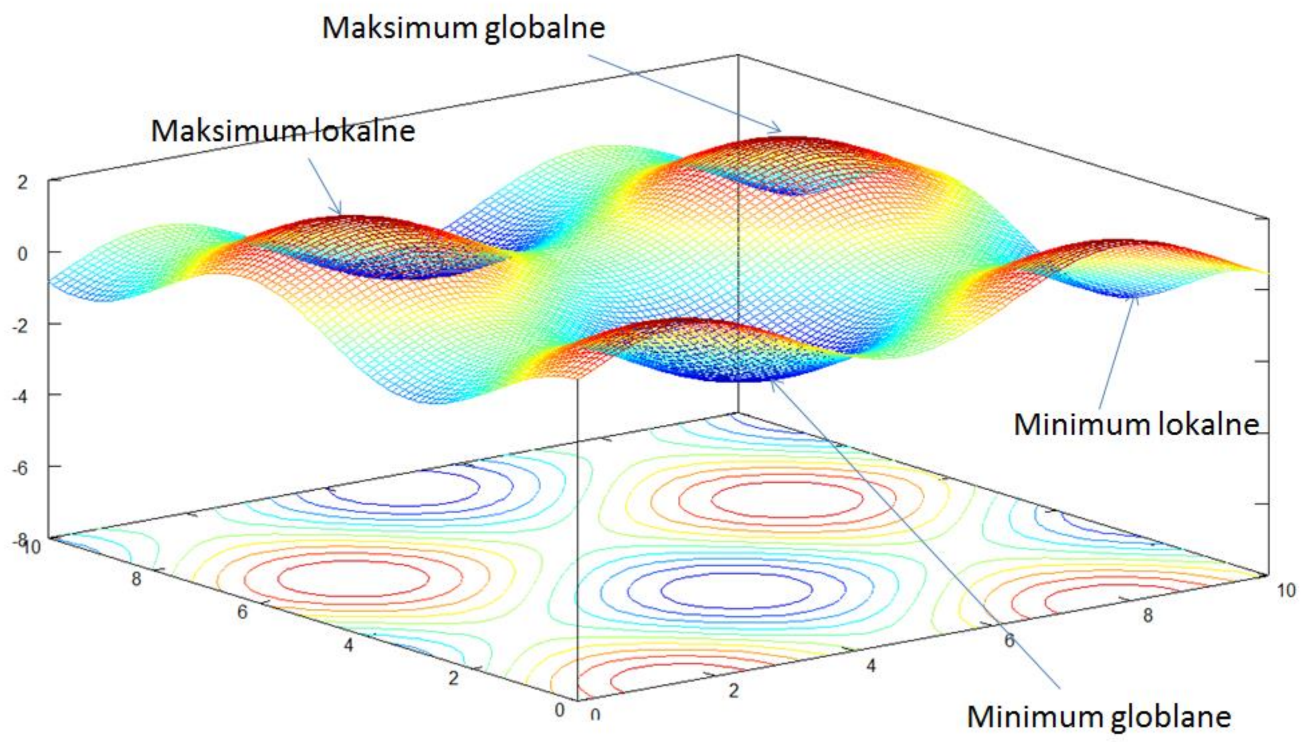
Programowanie kwadratowe



Programowanie ilorazowe



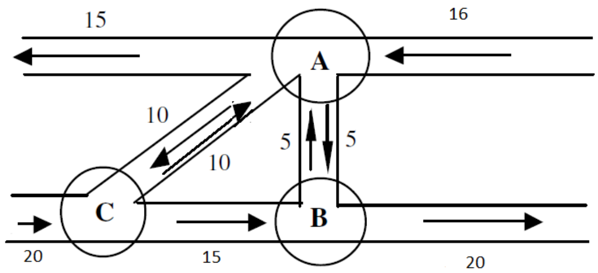
Programowanie nieliniowe



Laboratorium 2 Teoria grafów. Maksymalny przepływ w sieci.

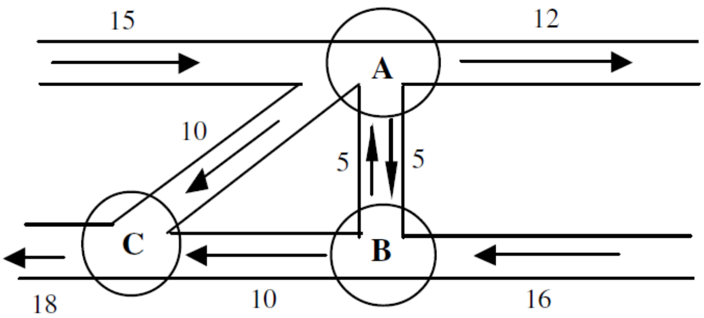
Problemy do rozwiązania

Zadanie 1. Dany jest układ komunikacyjny zawierający ulice jednokierunkowe, dwukierunkowe i 3 skrzyżowania. Na rysunku oznaczono przepustowość ulic. Przepustowość skrzyżowania A wynosi 16, skrzyżowania C wynosi 20 a skrzyżowanie B nie ma ograniczeń przepustowości.



Wyznacz maksymalną liczbę pojazdów, która może przejechać przez dany układ komunikacyjny. Władze miasta rozważają modernizację skrzyżowania A lub C. Która modernizacja może zwiększyć przepustowość całego układu?

Zadanie 2. Dany jest układ komunikacyjny zawierający ulice jednokierunkowe, dwukierunkowe i 3 skrzyżowania. Na rysunku oznaczono przepustowość ulic. Przepustowość skrzyżowania A wynosi 17, skrzyżowania B wynosi 12 a skrzyżowanie C nie ma ograniczeń przepustowości.

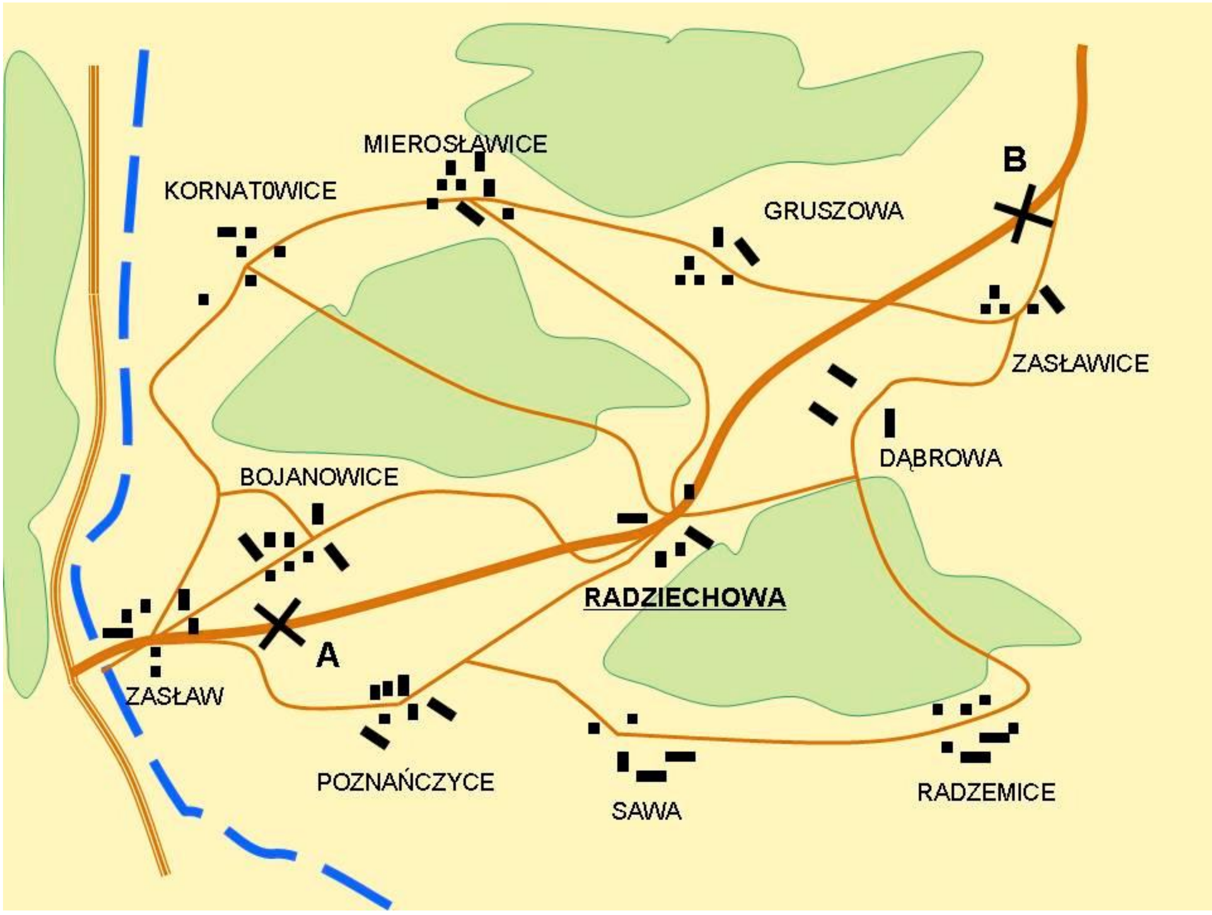


Wyznacz maksymalną liczbę pojazdów, która może przejechać przez dany układ komunikacyjny. Władze miasta rozważają modernizację skrzyżowania A lub B. Która modernizacja może zwiększyć przepustowość całego układu?

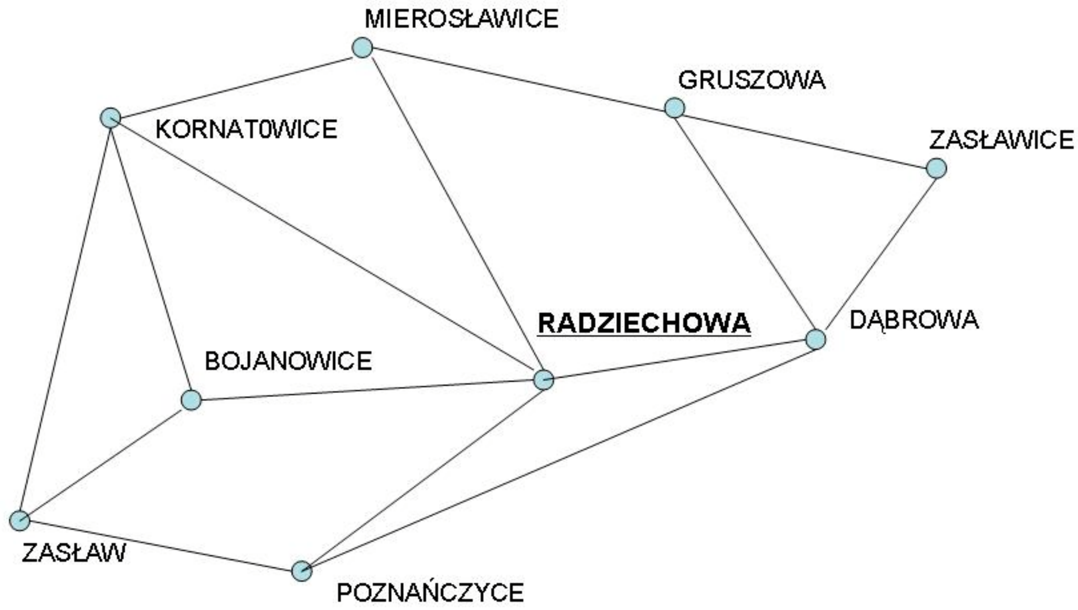
Zadanie 3. Do samodzielnego rozwiązania na Laboratorium 3 - sprawozdanie

Źródło: Woźniak A., „Grafy i sieci w technikach decyzyjnych”, Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi PAN w Krakowie, Kraków 2010

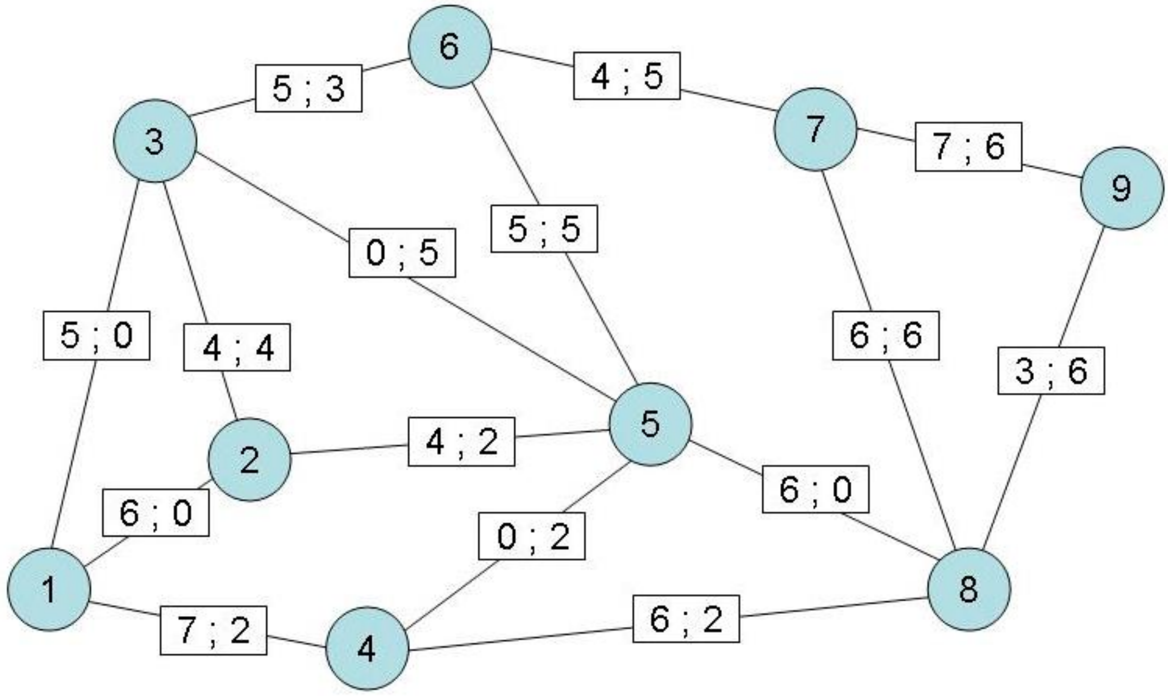
Przebiegająca przez obszar pewnej gminy droga wojewódzka ma być czasowo zamknięta dla ruchu z powodu prowadzonych prac remontowych. Z przeprowadzonych badań wynika, że natężenie ruchu pojazdów na tym odcinku, w godzinach szczytu komunikacyjnego wynosi 6 pojazdów na minutę. Problem przygotowania tras objazdu wyłączonego odcinka istniejącą siecią dróg gminnych pozostaje do rozwiązania przez władze gminy. Możliwości objazdu obejmują pewne odcinki dróg o różnym standardzie nawierzchni; są one również zróżnicowane pod względem ograniczeń prędkości, jak i możliwości poruszania się w obydwu kierunkach. Zróżnicowanie to powoduje różne przepustowości tych odcinków dróg. Sytuację drogową i możliwości komunikacyjne w gminie przedstawia rysunek.



Rozpatrywana alternatywna sieć transportowa, która zastąpi okresowo wyłączony z ruchu drogi wojewódzkiej między punktami A i B, została przedstawiona na rysunku.



Powyższy schemat transportowy został zastąpiony grafem, którego wierzchołki oznaczają miejscowości, a krawędzie odcinki dróg pomiędzy miejscowościami. Graf połączeń drogowych przedstawia rysunek.

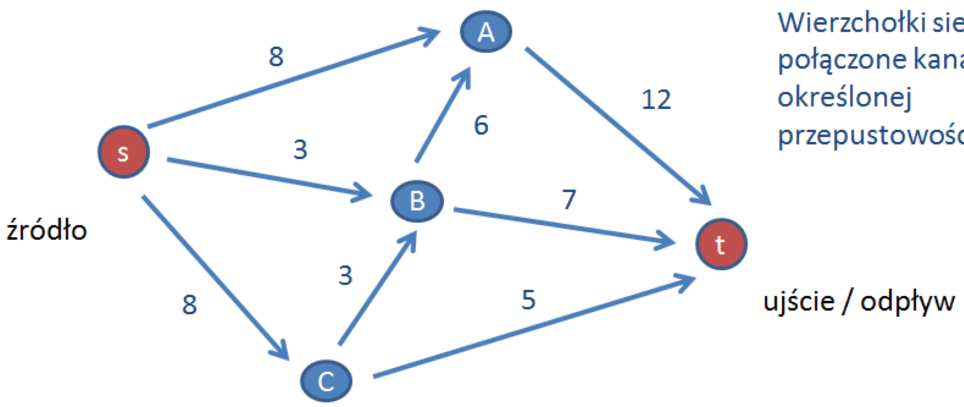


Każda krawędź została opisana za pomocą dwóch parametrów, określających możliwości przepływu w obydwu kierunkach. Należy wyznaczyć maksymalny przepływ w rozpatrywanej sieci i ustalić, czy jest on wystarczający dla spodziewanego natężenia ruchu. Łączny, wymagany przepływ przez wyznaczone drogi zastępcze nie powinien być mniejszy niż zbadane natężenie przepływu na wyłączonym odcinku drogi wojewódzkiej, wynoszące 6 pojazdów na minutę. Należy również wyznaczyć trasy, na które należy kierować przejeżdżające pojazdy, zapewniające ten maksymalny przepływ.

Teoria

Sieci przepływowe

Sieć przepływowa – spójny graf skierowany G=(V,E), w którego krawędziach odbywa się przepływ (towarów, pasażerów itp.)



Wierzchołki sieci połączone kanałami o określonej przepustowości

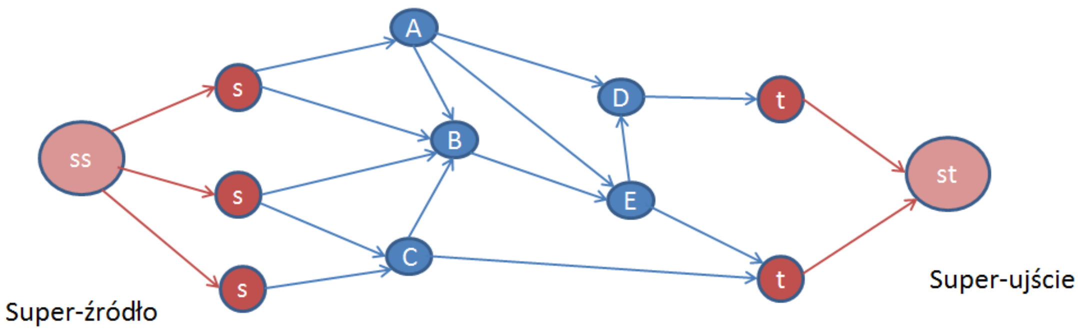
Ograniczenia przepustowości – przepływ nie przewyższa przepustowości $\bigwedge_{u,v\in V} f(u,v) \leq c(u,v)$

Skośna symetria $\bigwedge_{u,v\in V} f(u,v) = -f(v,u)$

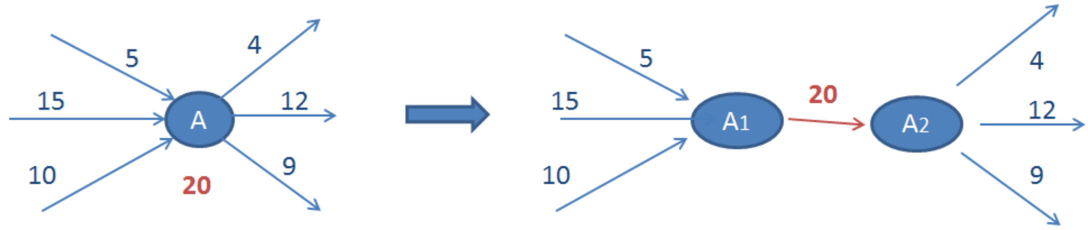
Zachowanie przepływu – suma wszystkich przepływów wpływających do wierzchołka równa jest sumie przepływów wypływających z wierzchołka

Modelowanie sieci przepływowych

Sieć o wielu źródłach s i wielu ujściach t



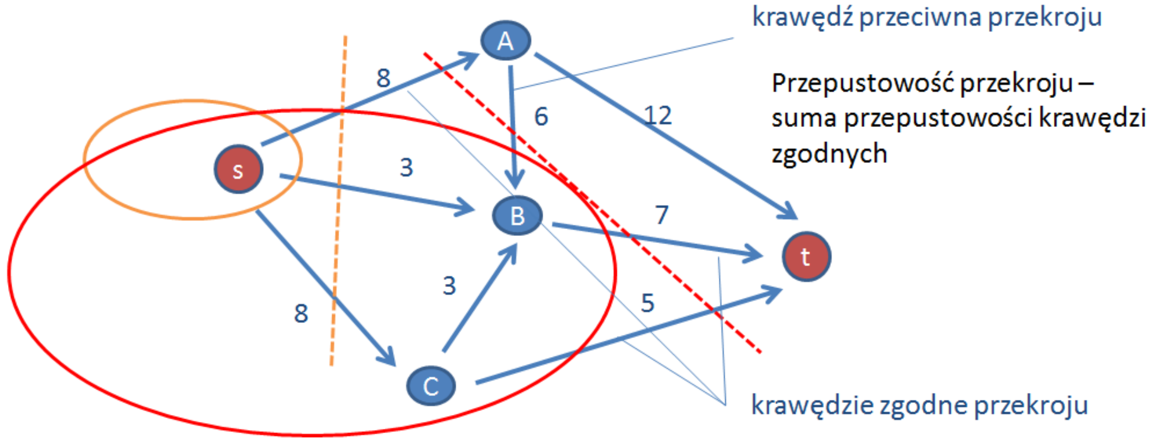
Ograniczenie przepływu przez węzeł sieci



Sieci przepływowe

Przekrój sieci – podzbiór wierzchołków S, taki że krawędzie (i,j) spełniają zależność:

$$i \in S, j \in S' \, gdzie \; S' = V \backslash S$$



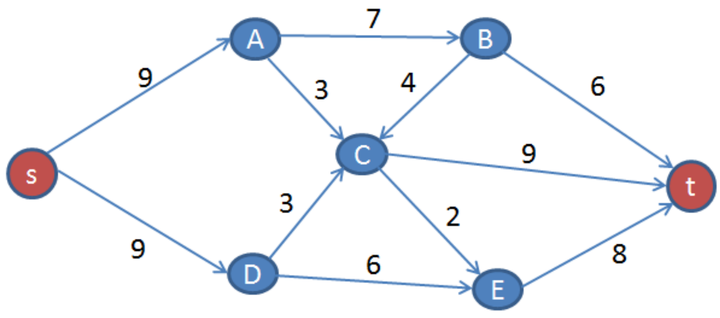
Przepływ w danej sieci jest nie większy od przepustowości dowolnego przekroju tej sieci

Przekrój *s-t* sieci to przekrój [S,S'] taki, że $s \in S, t \in S' \, gdzie \; S' = V \backslash S$

Problem maksymalnego przepływu

Dane są G, s, t oraz przepustowości [c_{ij}]

Znaleźć funkcję przepływu [f_{ij}] maksymalizującą wartość przepływu oraz spełniającą warunki ograniczenia przepustowości, skośnej symetrii i zachowania przepływu



FC: $x_{SA} + x_{SD} =$ Przepływ $\rightarrow max$

$$\begin{cases} x_{SA} = x_{AB} + x_{AC} \\ x_{AB} = x_{BC} + x_{Bt} \\ x_{AC} + x_{DC} + x_{BC} = x_{CE} + x_{Ct} \\ x_{SD} = x_{DC} + x_{DE} \\ x_{CE} + x_{DE} = x_{Et} \\ \boldsymbol{x_{SA} + x_{SD} = x_{Bt} + x_{Ct} + x_{Et}} \\ x_{SA} \le 9, x_{AB} \le 7,\ x_{AC} \le 3 \\ x_{SD} \le 9, x_{DC} \le 3,\ x_{DE} \le 6 \\ x_{BC} \le 4, x_{Bt} \le 6,\ x_{CE} \le 2 \\ x_{Ct} \le 9, x_{Et} \le 8, x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Sformułowanie zagadnienia programowania liniowego

Twierdzenie

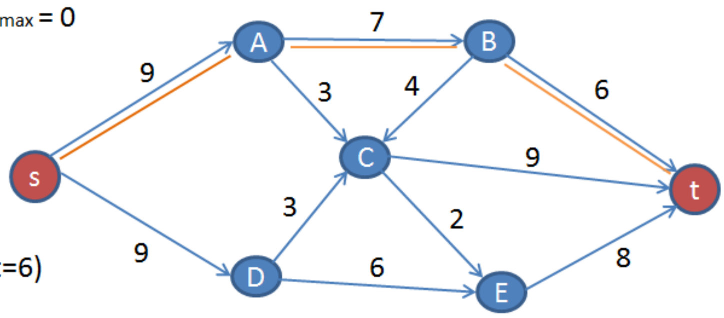
Maksymalny przepływ w sieci ze źródłem *s* i ujściem *t* jest równy **minimalnej przepustowości** przekroju *s-t* tej sieci

Problem maksymalnego przepływu

Algorytm Forda-Fulkersona

0. $f_{max} = 0$

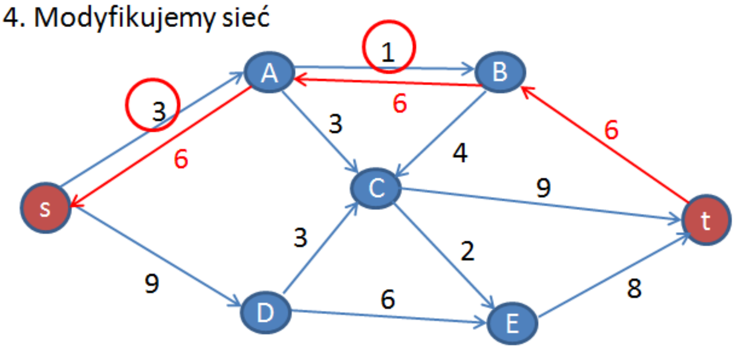
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (Bt=6)

3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: $f_{max} = 6$

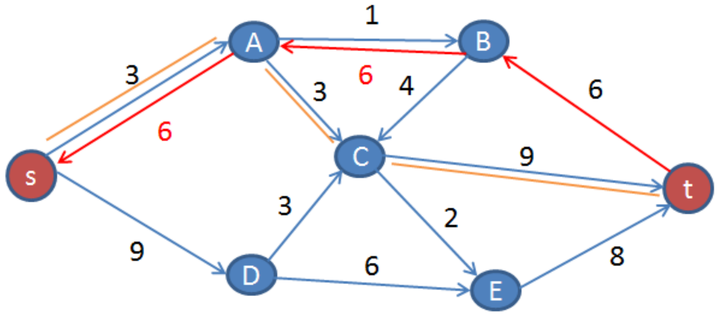
4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 2

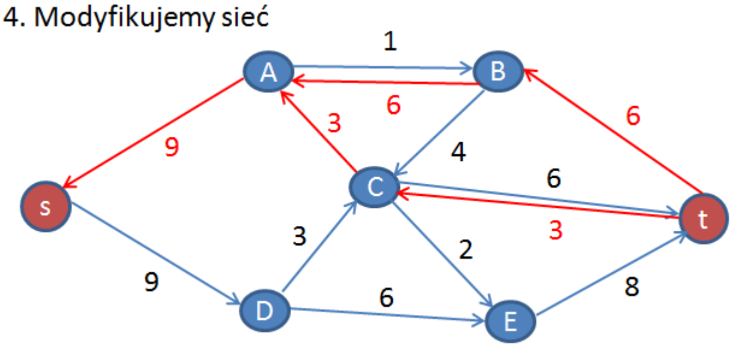
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (sA=AC=3)

3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: f_{max} = 6+3=9

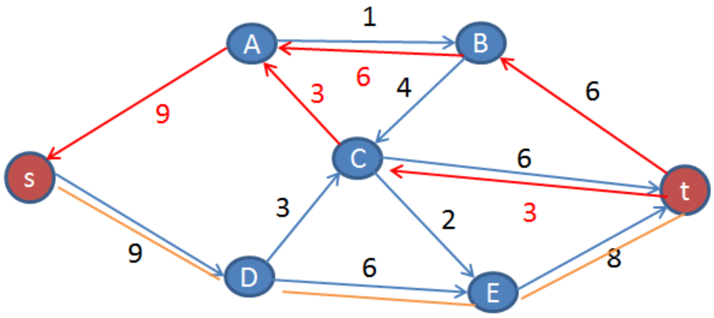
4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 3

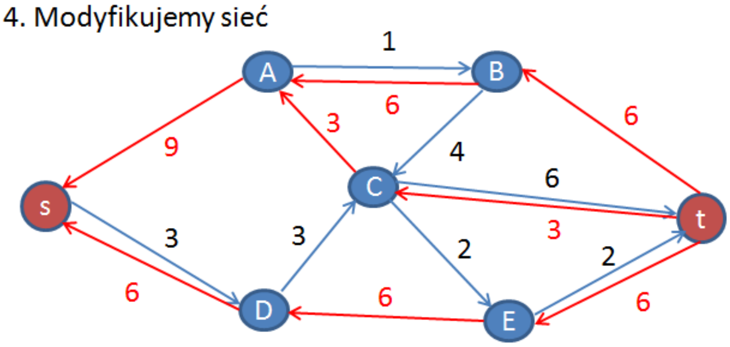
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (DE=6)

3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: f_{max} = 9+6=15

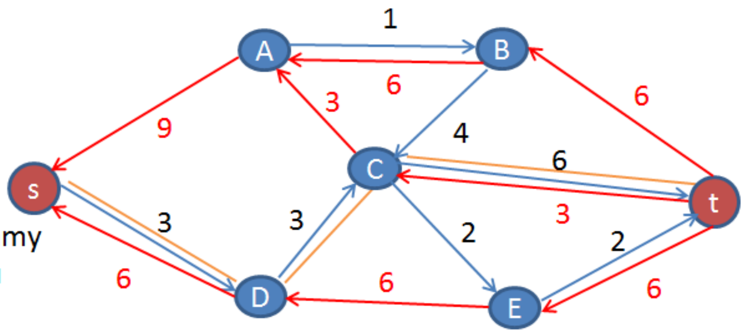
4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 4

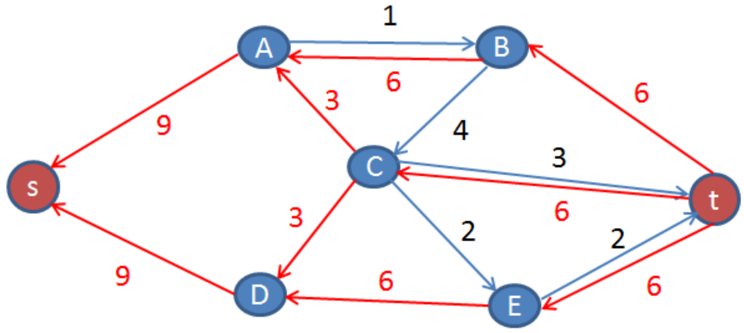
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (sD=DC=3)

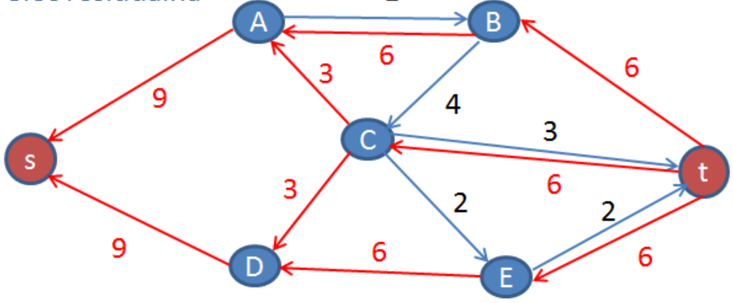
3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: f_{max} = 15+3=18

4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

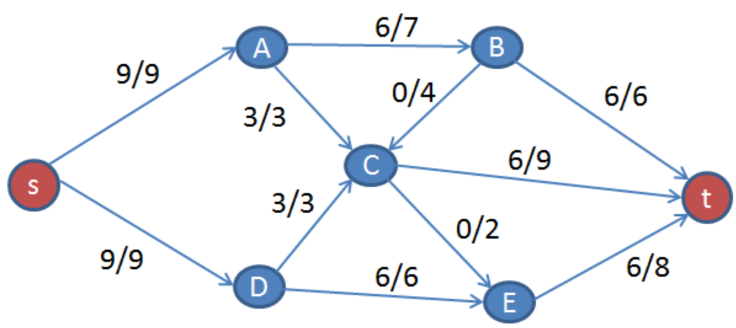
Sieć residualna



Brak ścieżki rozszerzającej - koniec

f_{max}=18

Sieć początkowa

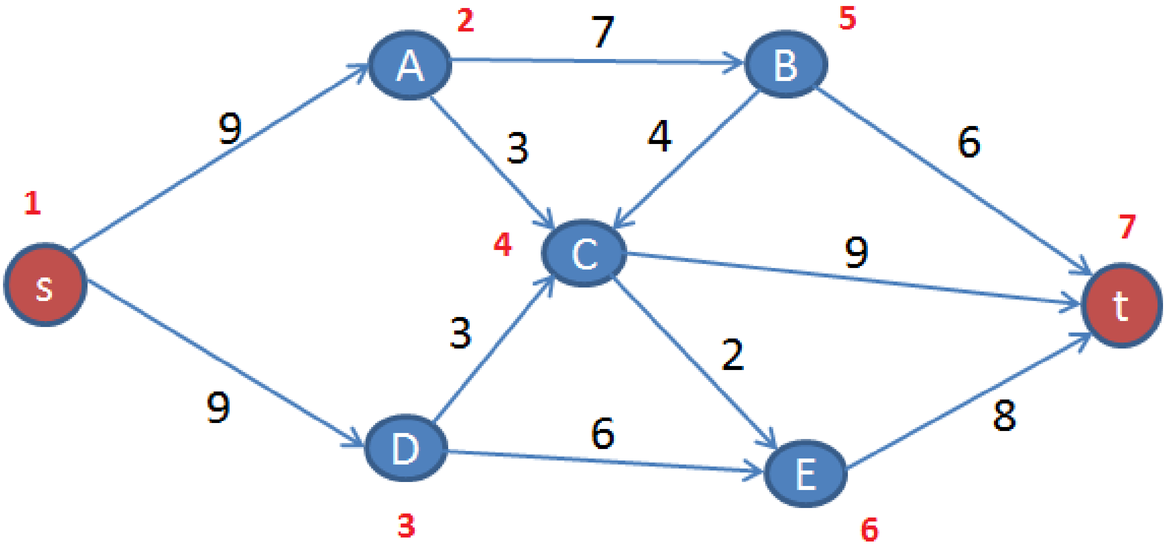


Rozkład przepływów w poszczególnych kanałach

Narzędzia

- Solver - zagadnienie programowania liniowego
- WinQSB
- **SciLab / MatLab - toolbox Metanet**

Przykład

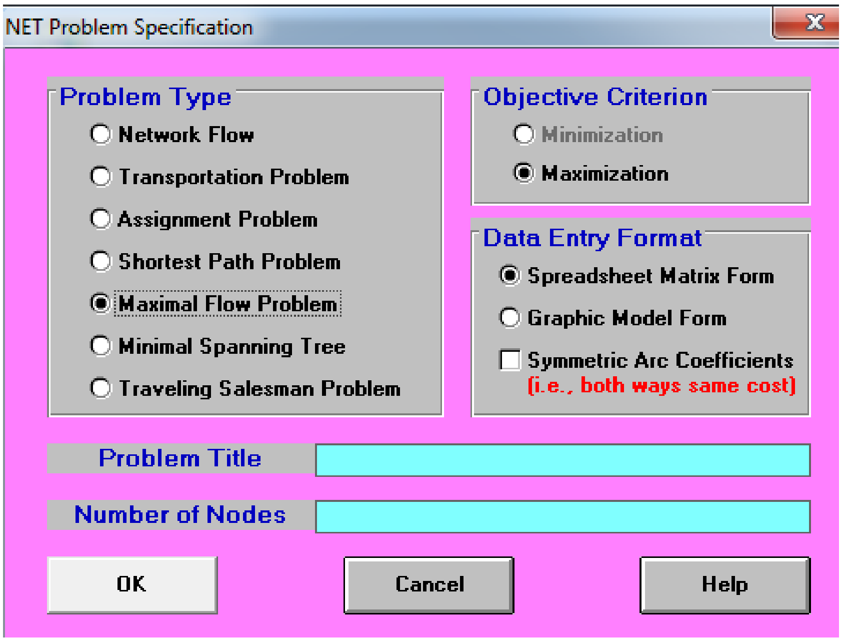


1. Numerujemy wierzchołki grafu 1-7 (czerwony kolor)

```
ta=[1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6];
he=[2 3 4 5 4 6 6 7 4 7 7];
cap=[9 9 3 7 3 6 2 9 4 6 8];

g=make_graph('gr1',1,7,ta,he);
g=add_edge_data(g,'max_cap',cap);
g=add_edge_data(g,'min_cap',ones(1,11));
[v,p,f]=max_flow(1,7,g)

f  =     1
p  =     9.   9.   3.   6.   3.   6.   0.   6.   0.   6.   6.
v  =     18.
```



From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5	Node6	Node7
Node1		9	9				
Node2				3	7		
Node3				3		6	
Node4						2	9
Node5				4			6
Node6							8
Node7							

10-18-2017	From	To	Net Flow		From	To	Net Flow
1	Node1	Node2	9	6	Node3	Node6	6
2	Node1	Node3	9	7	Node4	Node7	6
3	Node2	Node4	3	8	Node5	Node7	6
4	Node2	Node5	6	9	Node6	Node7	6
5	Node3	Node4	3				
Total	Net Flow	From	Node1	To	Node7	=	18