Metody Matematyczne w Transporcie

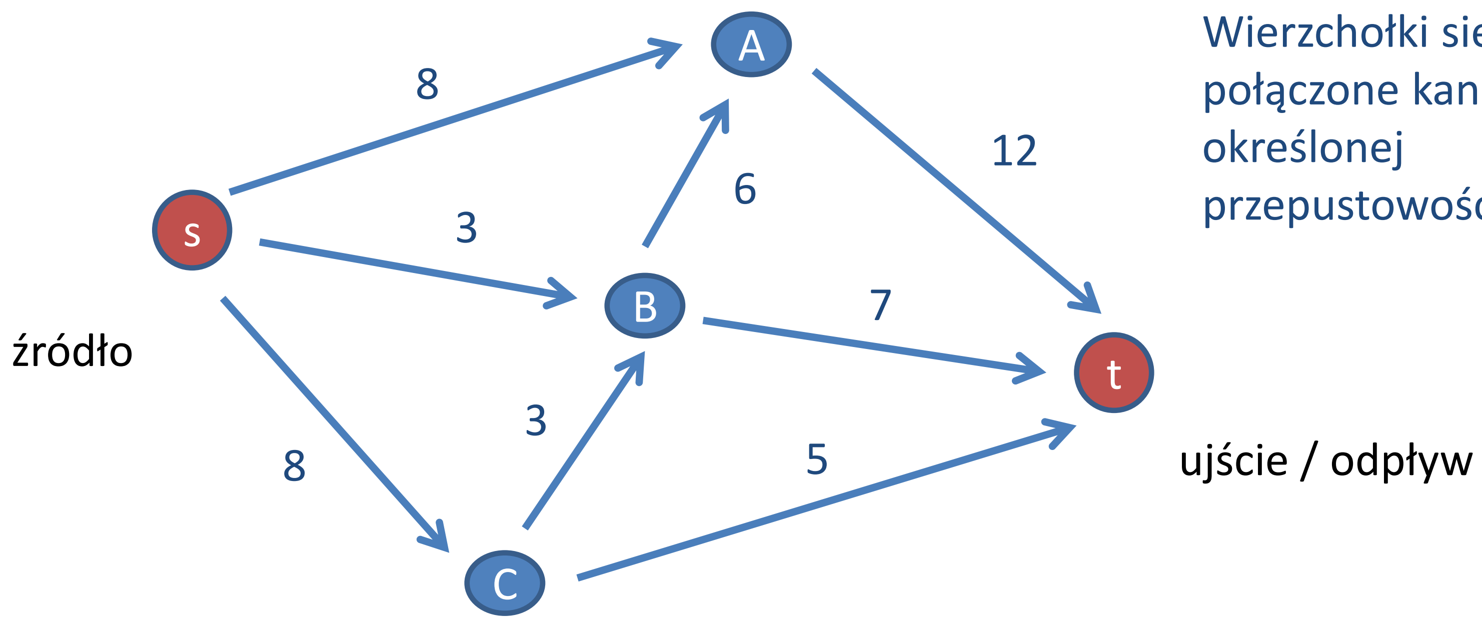
Laboratorium 2

Maksymalny przepływ w sieci

sem. II studia magisterskie Transport 2017/18

Sieci przepływowe

Sieć przepływowa – spójny graf skierowany G=(V,E), w którego krawędziach odbywa się przepływ (towarów, pasażerów itp.)



Wierzchołki sieci połączone kanałami o określonej przepustowości

Ograniczenia przepustowości – przepływ nie przewyższa przepustowości

$$\bigwedge_{u,v\in V} f(u,v) \leq c(u,v)$$

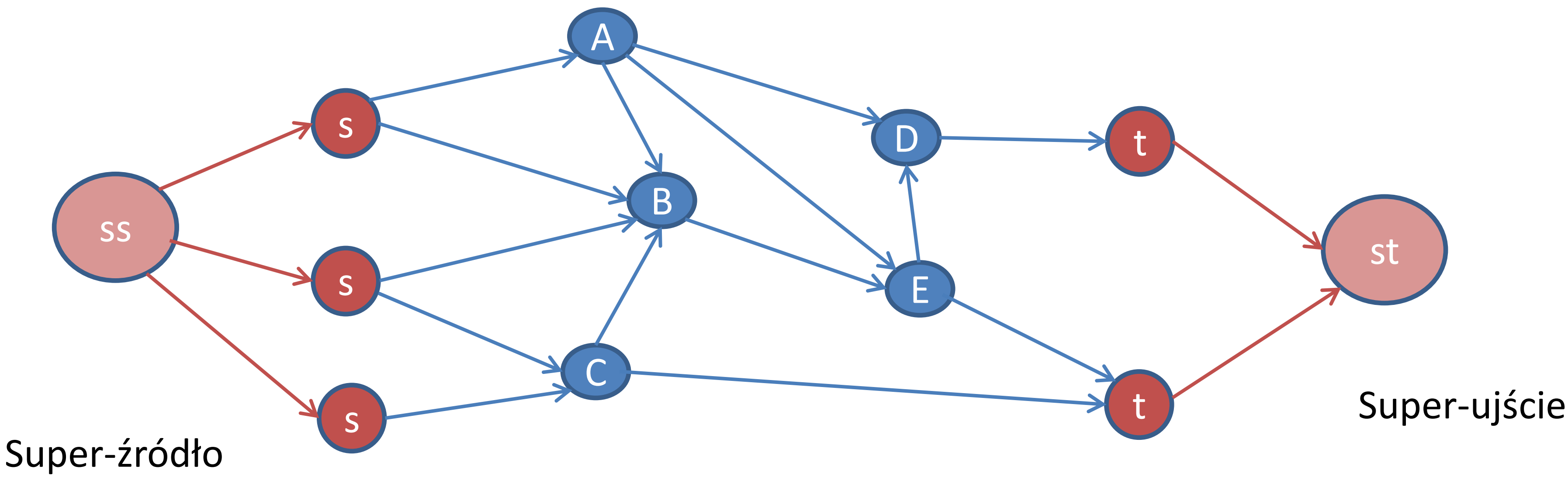
Skośna symetria

$$\bigwedge_{u,v\in V} f(u,v) = -f(v,u)$$

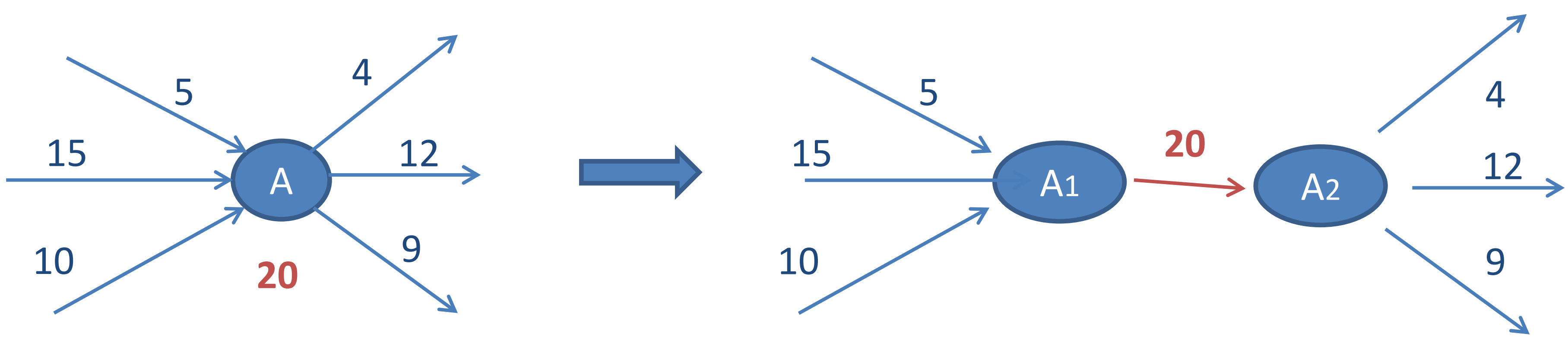
Zachowanie przepływu – suma wszystkich przepływów wpływających do wierzchołka równa jest sumie przepływów wypływających z wierzchołka

Modelowanie sieci przepływowych

Sieć o wielu źródłach s i wielu ujściach t



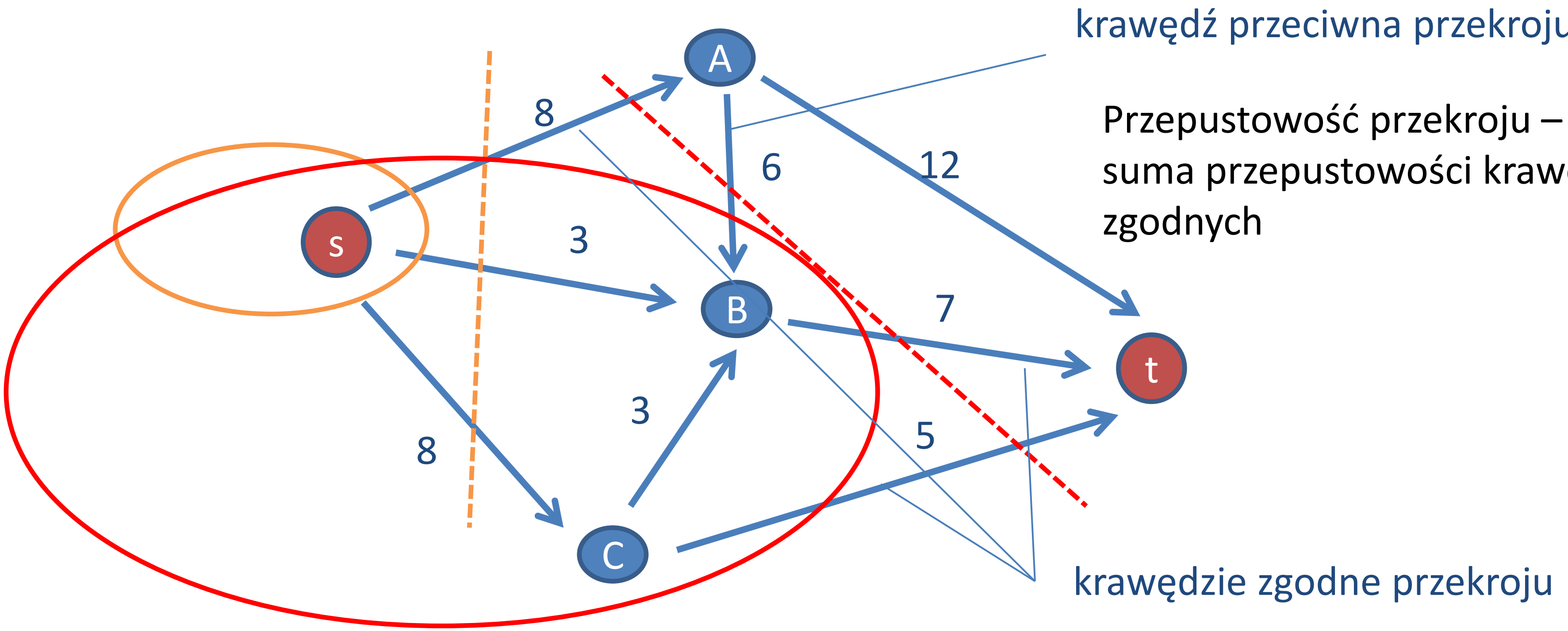
Ograniczenie przepływu przez węzeł sieci



Sieci przepływowe

Przekrój sieci – podzbiór wierzchołków S, taki że krawędzie (i,j) spełniają zależność:

$$i \in S, j \in S' \, gdzie \; S' = V \backslash S$$



Przepustowość przekroju – suma przepustowości krawędzi zgodnych

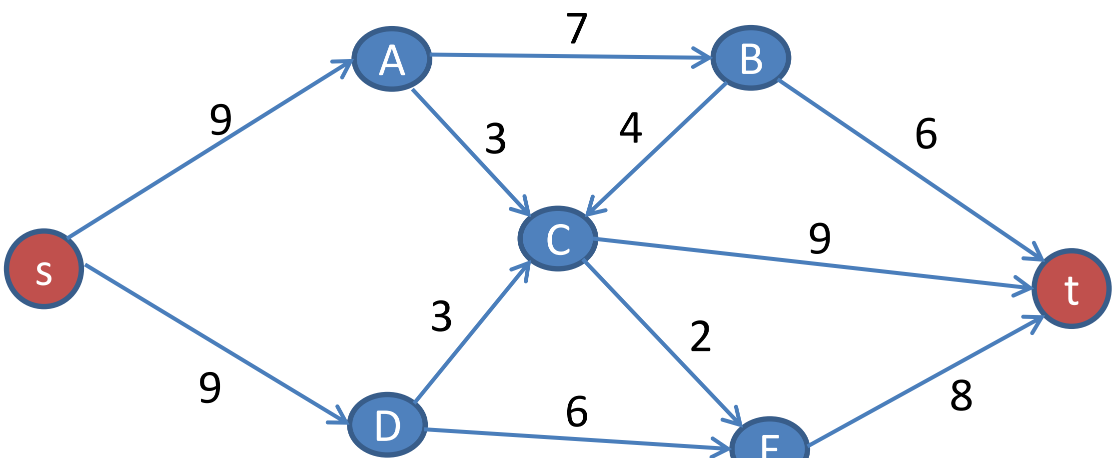
Przepływ w danej sieci jest nie większy od przepustowości dowolnego przekroju tej sieci

Przekrój *s*-*t* sieci to przekrój [S,S'] taki, że $s \in S, t \in S' \, gdzie \; S' = V \backslash S$

Problem maksymalnego przepływu

Dane są G, s, t oraz przepustowości [c_{ij}]

Znaleźć funkcję przepływu [f_{ij}] maksymalizującą wartość przepływu oraz spełniającą warunki ograniczenia przepustowości, skośnej symetrii i zachowania przepływu



FC: $x_{SA} + x_{SD} =$ Przepływ $\rightarrow max$

$$
\begin{cases}
x_{SA} = x_{AB} + x_{AC} \\
x_{AB} = x_{BC} + x_{Bt} \\
x_{AC} + x_{DC} + x_{BC} = x_{CE} + x_{Ct} \\
x_{SD} = x_{DC} + x_{DE} \\
x_{CE} + x_{DE} = x_{Et} \\
\boldsymbol{x_{SA} + x_{SD} = x_{Bt} + x_{Ct} + x_{Et}} \\
x_{SA} \le 9, x_{AB} \le 7, x_{AC} \le 3 \\
x_{SD} \le 9, x_{DC} \le 3, x_{DE} \le 6 \\
x_{BC} \le 4, x_{Bt} \le 6, x_{CE} \le 2 \\
x_{Ct} \le 9, x_{Et} \le 8, x_{ij} \ge 0
\end{cases}
$$

Sformułowanie zagadnienia programowania liniowego

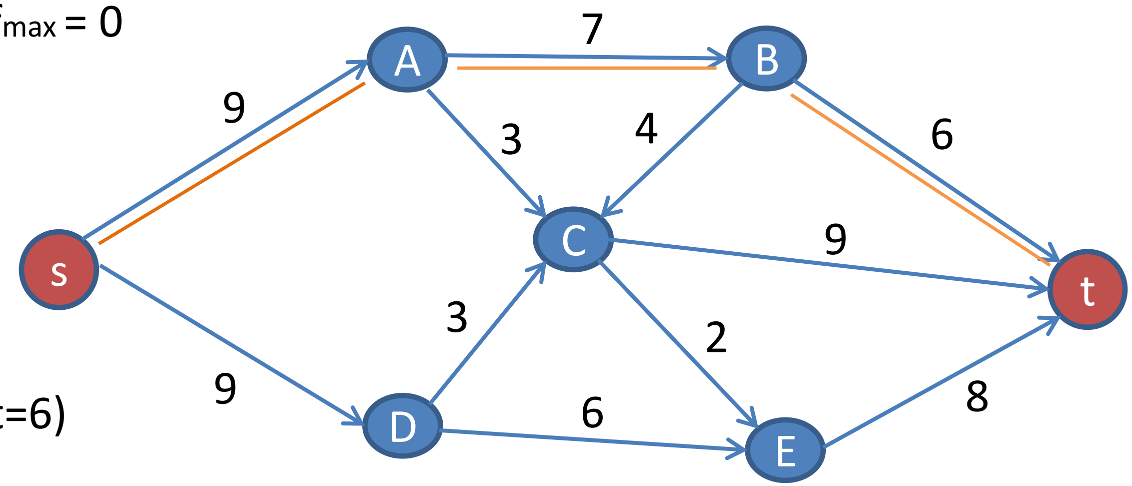
Twierdzenie

Maksymalny przepływ w sieci ze źródłem *s* i ujściem *t* jest równy **minimalnej przepustowości** przekroju *s*-*t* tej sieci

Problem maksymalnego przepływu

Algorytm Forda-Fulkersona

0. $f_{max} = 0$

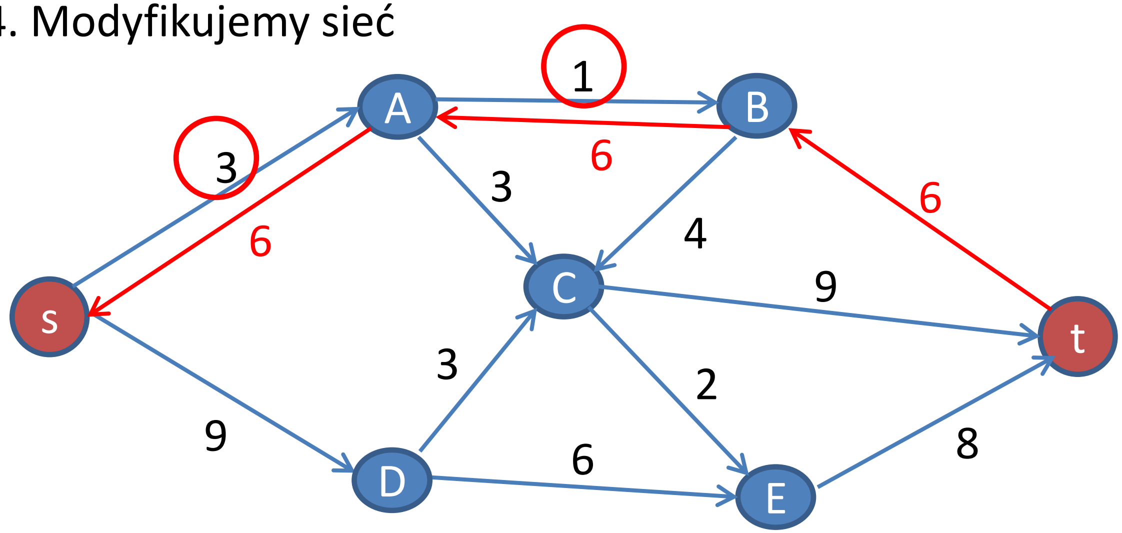


1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi

2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (Bt=6)

3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: $f_{max} = 6$

4. Modyfikujemy sieć

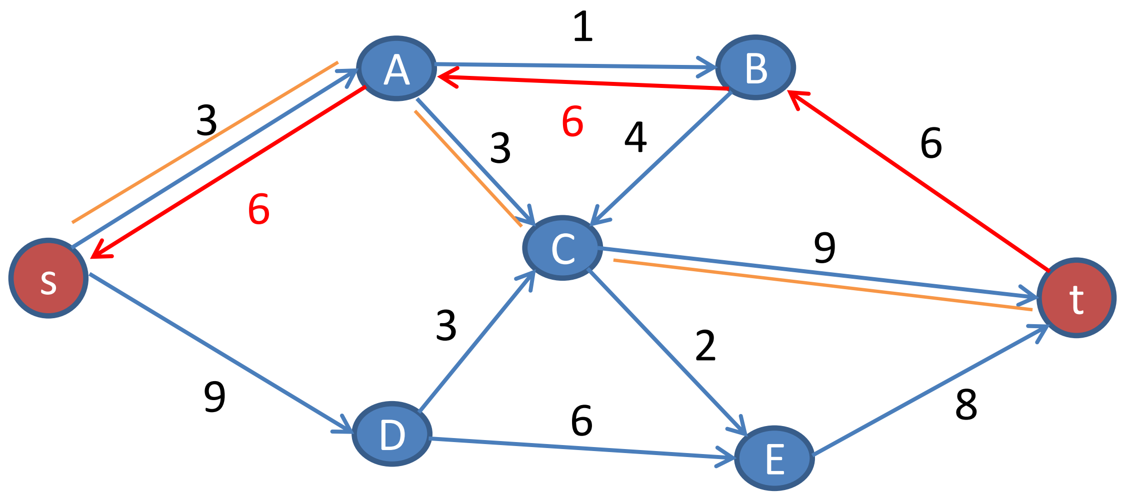


Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 2

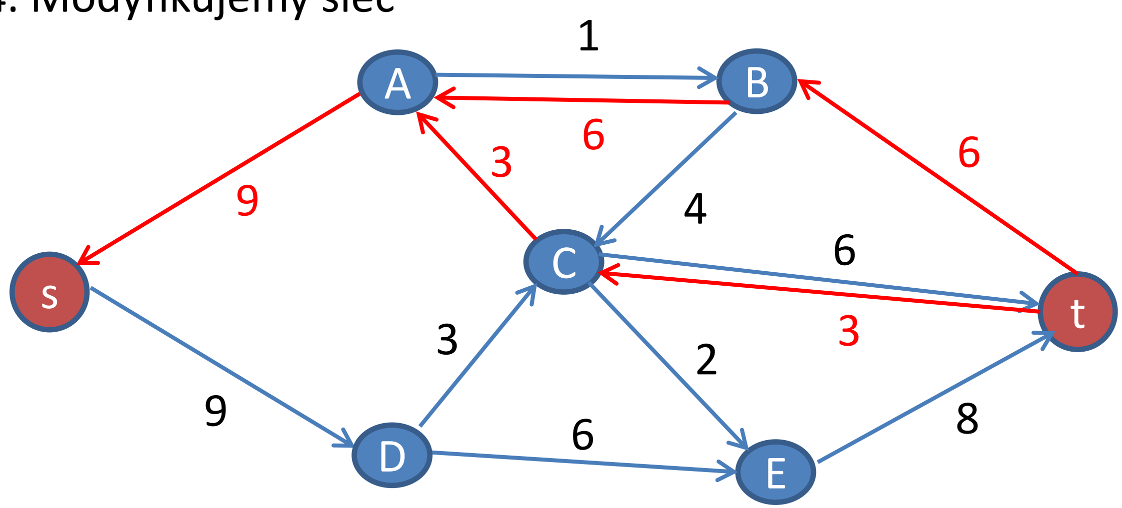
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi

2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (sA=AC=3)



3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: $f_{max} = 6+3=9$

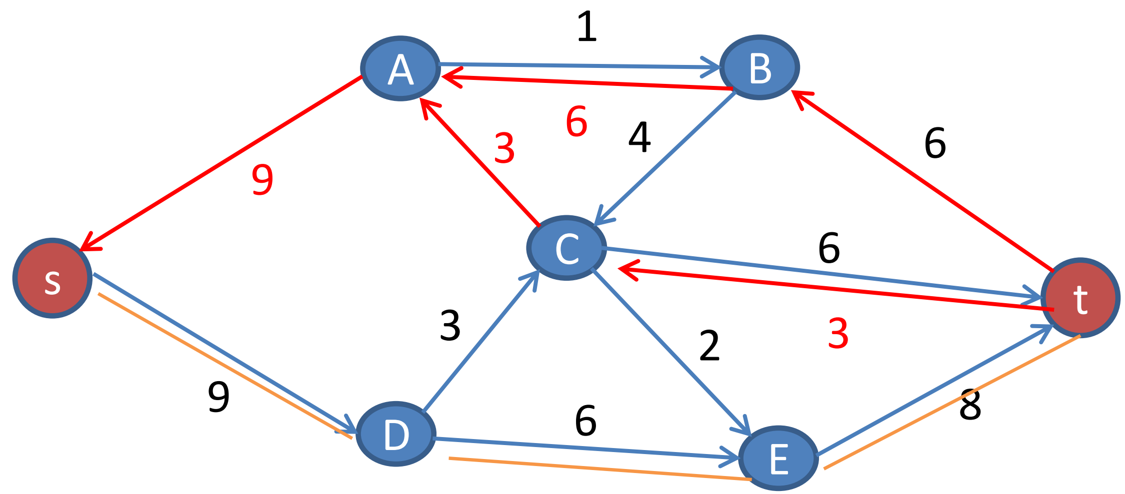
4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 3

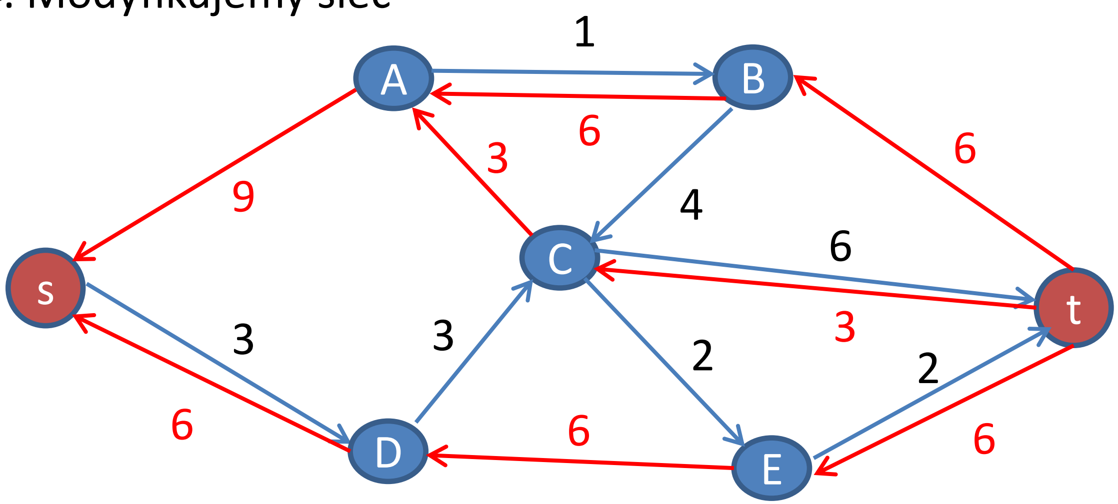
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (DE=6)

3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: $f_{max} = 9+6=15$

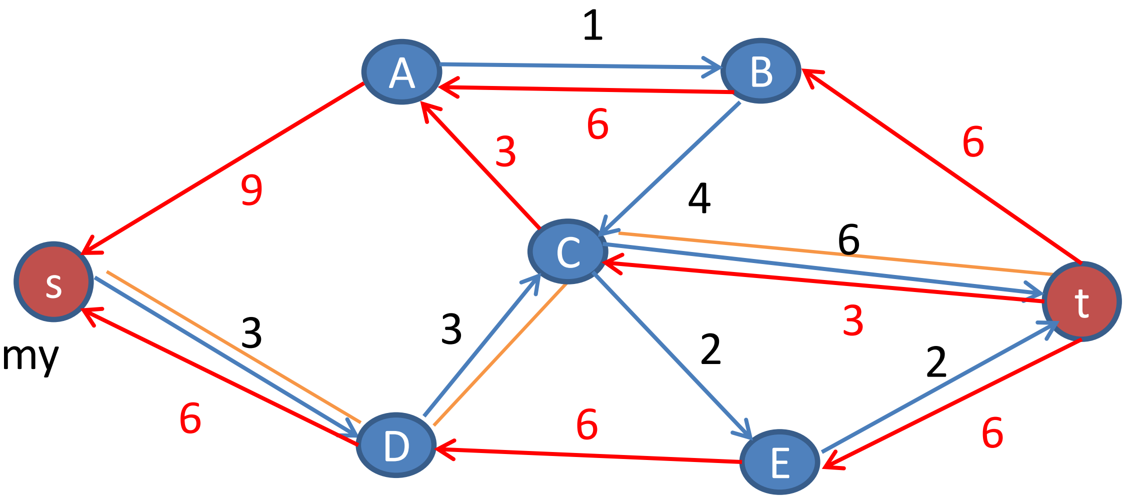
4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

Iteracja 4

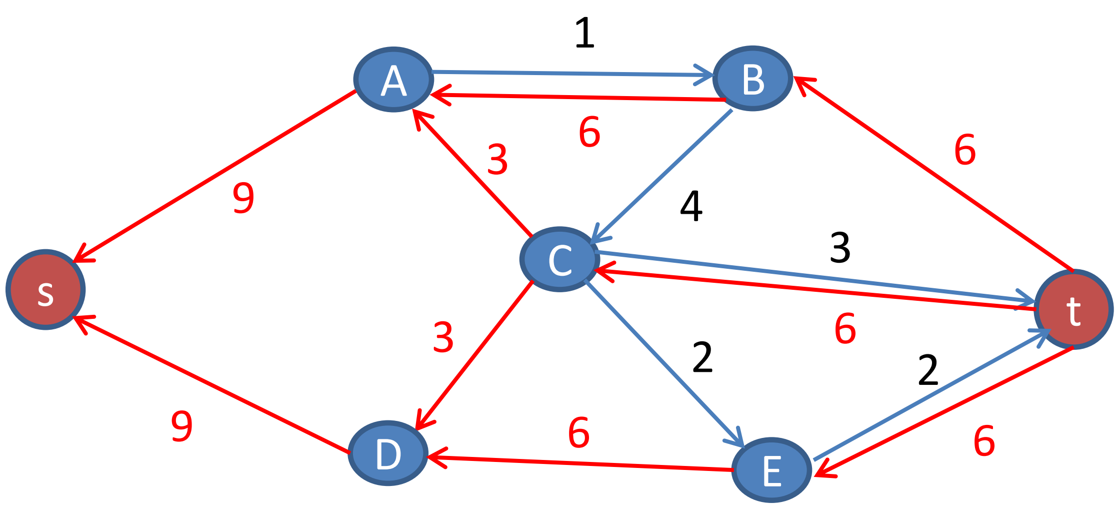
1. Szukamy ścieżki ze źródła do ujścia o najmniejszej liczbie krawędzi



2. Na znalezionej ścieżce wyznaczamy najmniejszą przepustowość kanału (sD=DC=3)

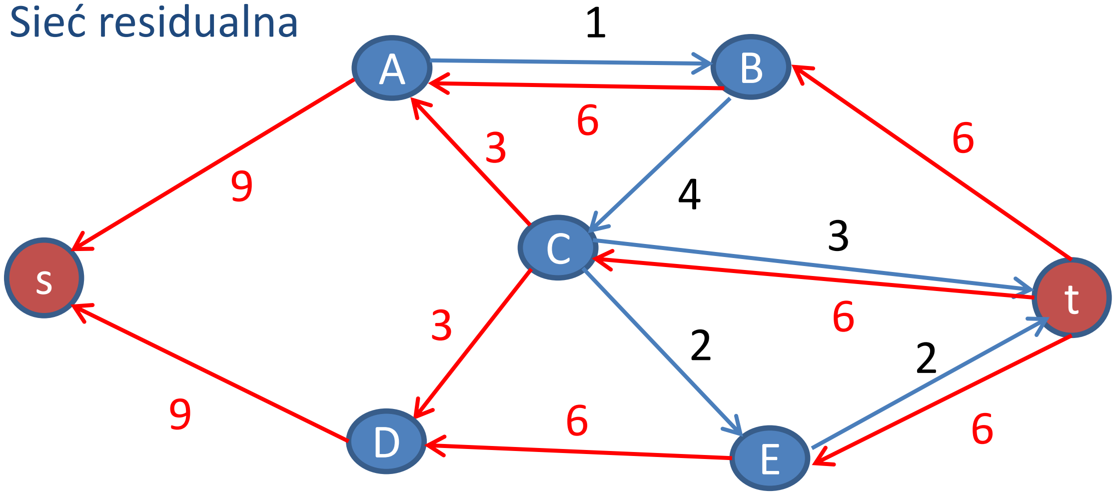
3. Zwiększamy f_{max} o najmniejszą przepustowość kanału na ścieżce: f_{max} = 15+3=18

4. Modyfikujemy sieć



Problem maksymalnego przepływu

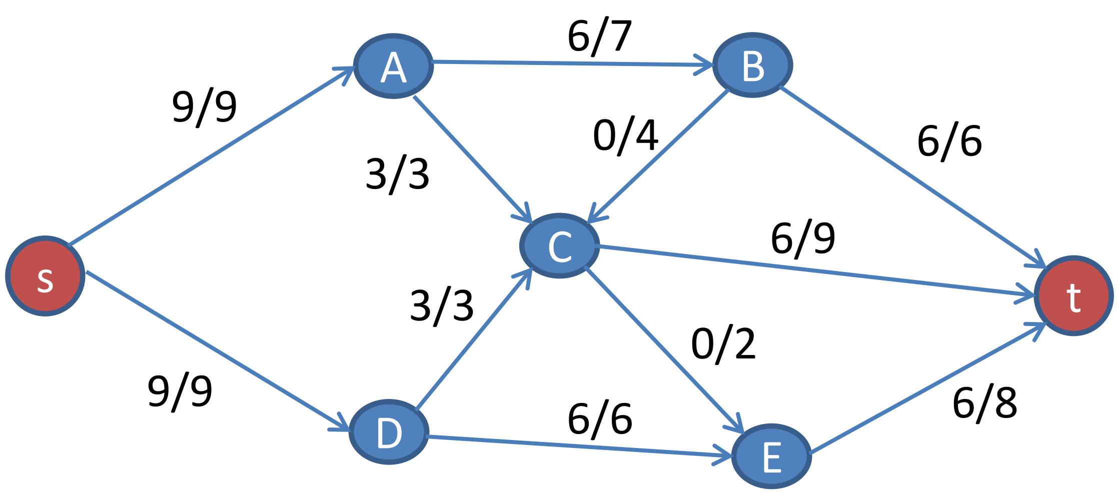
Sieć residualna



Brak ścieżki rozszerzającej - koniec

f_{max}=18

Sieć początkowa



Rozkład przepływów w poszczególnych kanałach