Prognozowanie i symulacje
Wykład 7/8

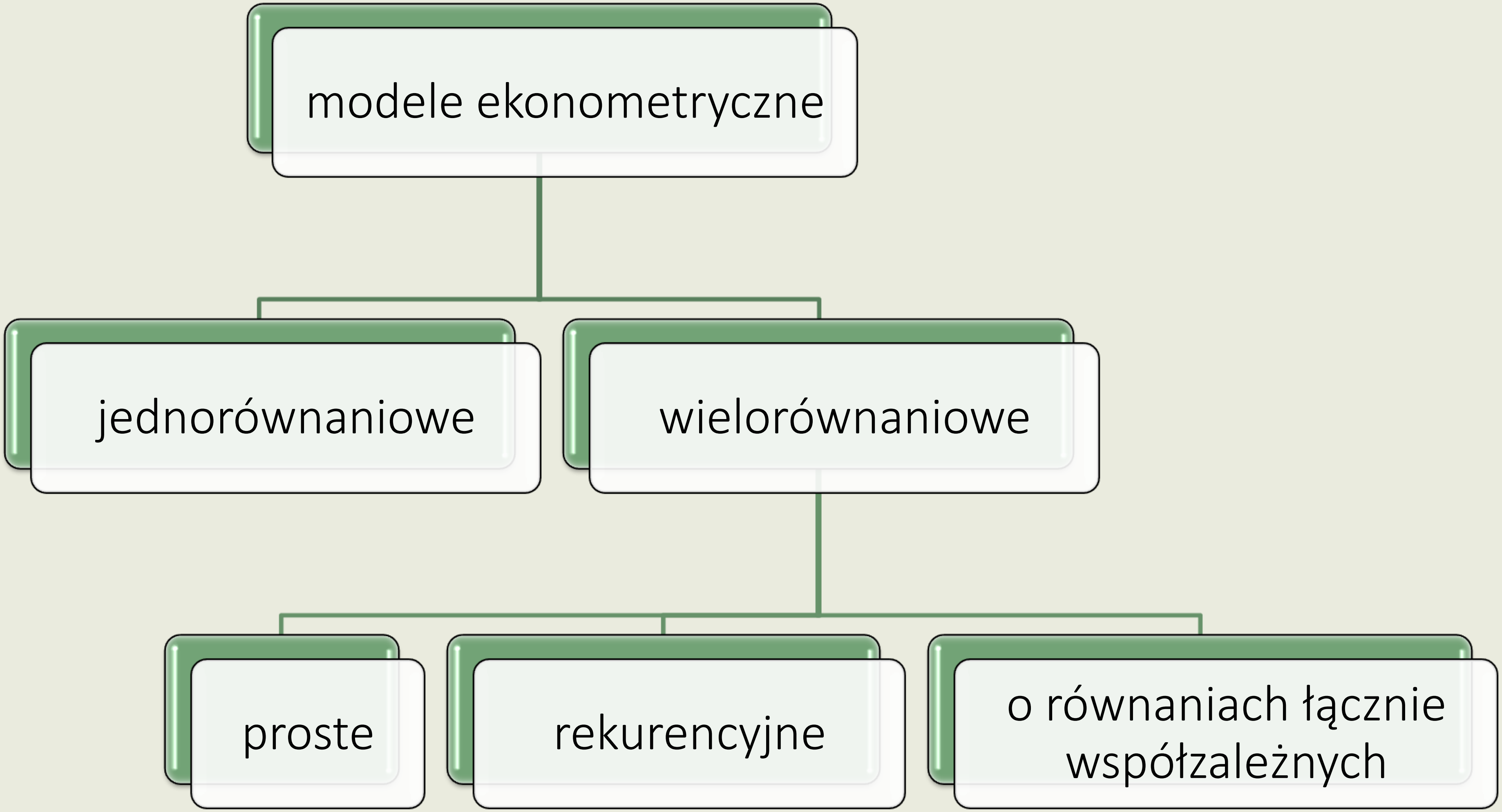
Podział modeli ekonometrycznych

- Wartość poznawcza
- Rola czasu w równaniach modelu
- Postać analityczna modelu
- Występowanie zakłóceń losowych
- **Liczba równań modelu**
- **Charakter powiązań pomiędzy zmiennymi endogenicznymi modelu wielorównaniowego**

Modele jednorównaniowe vs. wielorównaniowe

- w modelu wielorównaniowym istotne jest <u>łączne</u> wyjaśnienie wektora zmiennych endogenicznych, z uwzględnieniem powiązań jakie występują pomiędzy tymi zmiennymi.
- możliwość występowania równań deterministycznych obok równań stochastycznych
- równania deterministyczne mogą mieć charakter bilansowy bądź definicyjny (np. równania równowagi)

Modele jednorównaniowe vs. wielorównaniowe



Typy zmiennych w modelach wielorównaniowych

Zmienne endogeniczne bieżące Zmienne łącznie współzależne	Zmienne endogeniczne opóźnione w czasie Zmienne z góry ustalone
Zmienne z góry ustalone Zmienne egzogeniczne bieżące	Zmienne z góry ustalone Zmienne egzogeniczne opóźnione w czasie

Typy modeli wielorównaniowych

Podział na modele wielorównaniowe

- proste,
- rekurencyjne,
- o równaniach łącznie współzależnych

jest dokonywany na podstawie <u>powiązań pomiędzy zmiennymi endogenicznymi bieżącymi</u> (zmiennymi łącznie współzależnymi)

Zapis strukturalnego modelu wielorównaniowego

$$y_{t1} = \gamma_{12} y_{t2} + \gamma_{13} y_{t3} + \beta_{10} + \beta_{11} x_{t1} + \beta_{12} x_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = \gamma_{23} y_{t3} + \beta_{20} + \beta_{21} x_{t1} + \beta_{23} x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = \beta_{30} + \beta_{32} x_{t2} + \beta_{33} x_{t3} + \varepsilon_{t3}$$

- *γ* parametry stojące przy zmiennych łącznie współzależnych
- β Parametry stojące przy zmiennych z góry ustalonych
- subskrypty przy parametrach – pierwszy oznacza numer równania, drugi oznacza kolejną zmienną łącznie współzależną / z góry ustaloną
- Poszczególne równania nie muszę zawierać wszystkich zmiennych
- Taka postać modelu to postać strukturalna opisująca rzeczywiste powiązania pomiędzy zmiennymi ekonomicznymi

Powiązania między zmiennymi zależnymi a typ modelu

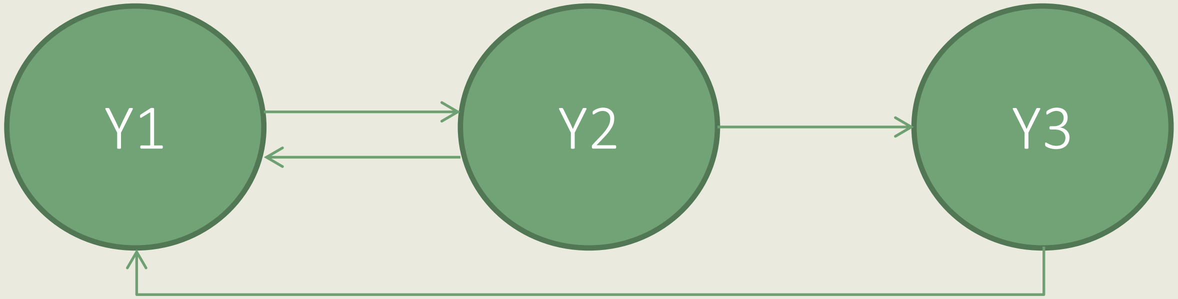
<u>model prosty</u> – charakteryzuje się brakiem bezpośrednich powiązań między zmiennymi łącznie współzależnymi,

Powiązania między zmiennymi zależnymi a typ modelu

<u>model rekurencyjny</u> – charakteryzuje się występowaniem powiązań bezpośrednich między zmiennymi łącznie współzależnymi, powiązania te mają charakter jednokierunkowym (niezwrotnym),

Powiązania między zmiennymi zależnymi a typ modelu

<u>model o równaniach współzależnych</u> – charakteryzuje się występowaniem bezpośrednich oraz zwrotnych zależności między zmiennymi łącznie współzależnymi.



Zapis macierzowy strukturalnego modelu wielorównaniowego

$$Y\Gamma + X\mathrm{B} = \varepsilon$$

- Y – wektor zmiennych łącznie współzależnych
- X – wektor zmiennych z góry ustalonych
- Γ – macierz parametrów strukturalnych wziązanych ze zmiennymi łącznie współzależnymi
- B – macierz parametrów strukturalnych związanych ze zmiennymi z góry ustalonymi
- ε – wektor składników losowych

Macierze Γ - identyfikacja typu modelu

- Model prosty

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Model rekurencyjny

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_{12} & 1 & 0 \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

- Model o równaniach współzależnych

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_{21} & 0 \\ -\gamma_{12} & 1 & -\gamma_{32} \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze Γ i B

$$y_{t1} = \gamma_{12} y_{t2} + \gamma_{13} y_{t3} + \beta_{10} + \beta_{11} x_{t1} + \beta_{12} x_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = \gamma_{23} y_{t3} + \beta_{20} + \beta_{21} x_{t1} + \beta_{23} x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = \beta_{30} + \beta_{32} x_{t2} + \beta_{33} x_{t3} + \varepsilon_{t3}$$

Wszystkie elementy poza składnikiem losowym przenosimy na lewą stronę

$$y_{t1} - \gamma_{12} y_{t2} - \gamma_{13} y_{t3} - \beta_{10} - \beta_{11} x_{t1} - \beta_{12} x_{t2} = \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} - \gamma_{23} y_{t3} - \beta_{20} - \beta_{21} x_{t1} - \beta_{23} x_{t3} = \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} - \beta_{30} - \beta_{32} x_{t2} - \beta_{33} x_{t3} = \varepsilon_{t3}$$

Macierze Γ i B

$$y_{t1} - \gamma_{12} y_{t2} - \gamma_{13} y_{t3} - \beta_{10} - \beta_{11} x_{t1} - \beta_{12} x_{t2} = \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} - \gamma_{23} y_{t3} - \beta_{20} - \beta_{21} x_{t1} - \beta_{23} x_{t3} = \varepsilon_{t2}$$

$$y_{t3} - \beta_{30} - \beta_{32} x_{t2} - \beta_{33} x_{t3} = \varepsilon_{t3}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_{12} & 1 & 0 \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & -\beta_{32} \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix}$$

To jest model rekurencyjny !

Zapis macierzowy strukturalnego modelu wielorównaniowego

$$\begin{bmatrix} y_{t1} & y_{t2} & y_{t3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_{12} & 1 & 0 \\ -\gamma_{13} & -\gamma_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & x_{t1} & x_{t2} & x_{t3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta_{10} & -\beta_{20} & -\beta_{30} \\ -\beta_{11} & -\beta_{21} & 0 \\ -\beta_{12} & 0 & -\beta_{32} \\ 0 & -\beta_{23} & -\beta_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2} & \varepsilon_{t3} \end{bmatrix}$$

Postać zredukowana modelu wielorównaniowego

- Postać zredukowana to model wielorównaniowy w którym zmienne łącznie współzależne opisywane są tylko i wyłącznie zmiennymi z góry ustalonymi
  - jest to model prosty
  - w każdym równaniu występuje pełen zastaw zmiennych z góry ustalonych

$$
\begin{aligned}
y_{t1} &= \Pi_{10} + \Pi_{11}x_{t1} + \Pi_{12}x_{t2} + \Pi_{13}x_{t3} + \upsilon_{t1} \\
y_{t2} &= \Pi_{20} + \Pi_{21}x_{t1} + \Pi_{22}x_{t2} + \Pi_{23}x_{t3} + \upsilon_{t2} \\
y_{t3} &= \Pi_{30} + \Pi_{31}x_{t1} + \Pi_{32}x_{t2} + \Pi_{33}x_{t3} + \upsilon_{t3}
\end{aligned}
$$

Zależność pomiędzy postacią strukturalną i postacią zredukowaną

$$-\mathrm{B}\Gamma^{-1} = \Pi$$

- W szczególnym przypadku na podstawie parametrów postaci zredukowanej można wyznaczyć parametry postaci strukturalnej (poprzez rozwiązanie układu równań)
- Ma to miejsce, gdy model jest jednoznacznie identyfikowalny – tzn. gdy postaci zredukowanej odpowiada tylko jedna postać strukturalna

Identyfikowalność modelu wielorównaniowego

- Sprawdzamy ile zmiennych (zmiennych łącznie współzależnych i z góry ustalonych) znajduje się w całym modelu
- Następnie w każdym równaniu sprawdzamy brakujące zmienne
- Liczbę brakujących zmiennych w danym równaniu porównujemy z łączną liczbą równań pomniejszoną o 1

Liczba zmiennych występujących w modelu ale nie występujących w danym równaniu = liczbie równań-1 → równanie jest jednoznacznie identyfikowane

Liczba zmiennych występujących w modelu ale nie występujących w danym równaniu > liczbie równań-1 → równanie jest niejednoznacznie identyfikowane

Liczba zmiennych występujących w modelu ale nie występujących w danym równaniu < liczbie równań-1 → równanie jest niedentyfikowane

Badanie identyfikowalności

$$y_{t1} = \beta_{10} + \gamma_{12} y_{t2} + \beta_{11} x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = \beta_{20} + \gamma_{21} y_{t1} + \beta_{22} x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

	Liczba zmiennych występujących w modelu ale nie występujących w danym równaniu	liczba równań modelu-1	wniosek
Równanie I	1 (brakuje zmiennej x2)	2-1=1	jednoznacznie identyfikowalne
Równanie II	1 (brakuje zmiennej x1)	2-1=1	jednoznacznie identyfikowalne

Metody estymacji modeli wielorównaniowych

- Modele proste – KMNK – każde równanie niezależnie
- Modele rekurencyjne – KMNK – rekurencyjnie zaczynając od modelu, w którym zmienna łącznie współzależna nie jest determinowana inną zmienną łącznie współzależną
- Modele o równaniach współzależnych
  - jednoznacznie identyfikowalne – Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów i 2MNK
  - niejednoznacznie identyfikowalne – 2MNK

Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów

- W modelach o równaniach łącznie współzależnych – zmienne łącznie współzależne są determinowane składnikiem losowym – estymatory KMNK nie są zgodne

$$y_{t1} = \beta_{10} + \gamma_{12} y_{t2} + \beta_{11} x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = \beta_{20} + \gamma_{21} y_{t1} + \beta_{22} x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

- 2MNK do estymacji modelu wielorównaniowego jednoznacznie i niejednoznacznie identyfikowalnego
- Metoda najmniejszych kwadratów jest wykorzystywana w procesie szacowania dwukrotnie

Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów

Estymator 2MNK:

- Zgodny przy endogenicznych zmiennych objaśniających
- Odporny na współliniowość zmiennych i błędy w specyfikacji modelu
- Trudny do wykorzystania w przypadku dużych modeli (dużej liczby zmiennych – próba musi być również duża)
- Szczególny przypadek Metody Zmiennych Instrumentalnych

Metoda Zmiennych Instrumentalnych

- Stosowana jest do modeli gdzie założenie o egzogeniczności zmiennych nie jest spełnione
- Ma to miejsce np. w modelach wielorównaniowych o równaniach współzależnych

Instrumenty w MZI powinny:

- Egzogeniczne
- Nieskorelowane ze składnikiem losowym
- Skorelowane ze zmiennymi objaśniającymi które zastępują

Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów

- Krok 1
  - Za pomocą KMNK szacowane są parametry strukturalne postaci zredukowanej
  - Obliczane są wartości teoretyczne zmiennych egzogenicznych
- Krok 2
  - Wartości teoretyczne z poprzedniego kroku traktowane są jako instrumenty endogenicznych zmiennych objaśniających w strukturalnej postaci modelu wielorównaniowego
  - Za pomocą KMNK szacowane są indywidualnie równania postaci strukturalnej

Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów - przykład

$$y_{t1} = \beta_{10} + \gamma_{12} y_{t2} + \beta_{11} x_{t1} + \beta_{12} x_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = \beta_{20} + \gamma_{21} y_{t1} + \beta_{23} x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$

- Zmienne endogeniczne łącznie współzależne y1 i y2
- Zmienne z góry ustalone x1, x2, x3
- Łączna liczba zmiennych – 5
- W pierwszym równaniu brakuje zmiennej x3 – równanie jednoznacznie identyfikowalne
- W drugim równaniu brakuje zmiennych x1 i x2 – równanie niejednoznacznie identyfikowalne
- Cały układ – niejednoznacznie identyfikowalny

Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów - przykład

- Postać zredukowana modelu

$$y_{t1} = \Pi_{10} + \Pi_{11} x_{t1} + \Pi_{12} x_{t2} + \Pi_{13} x_{t3} + \upsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \Pi_{20} + \Pi_{21} x_{t1} + \Pi_{22} x_{t2} + \Pi_{23} x_{t3} + \upsilon_{t2}$$

```
Model 1: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 1999:1-2016:1 (N = 69)
Zmienna zależna (Y): Y1

             współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
  ---------------------------------------------------------------
  const      93385,7        6059,39           15,41       2,19e-023 ***
  X1            0,735854       0,0575609      12,78       2,11e-019 ***
  X2            1,32876        0,0386720      34,36       2,11e-043 ***
  X3         -295,606        342,503          -0,8631     0,3913
```

```
Model 2: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 1999:1-2016:1 (N = 69)
Zmienna zależna (Y): Y2

             współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
  ---------------------------------------------------------------
  const      84448,2         5077,31           16,63       4,14e-025 ***
  X1            -0,272469       0,0482317      -5,649      3,85e-07  ***
  X2             0,949762       0,0324042      29,31       3,50e-039 ***
  X3           -74,6759       286,992          -0,2602     0,7955
```

- Zapamiętujemy wartości teoretyczne obu modeli y1^ i y2^
- Szacujemy równania postaci strukturalnej KMNK zastępując endogeniczne zmienne objaśniające wartościami teoretycznymi

$$y_{t1} = \beta_{10} + \gamma_{12}\hat{y}_{t2} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{12}x_{t2} + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \beta_{20} + \gamma_{21}\hat{y}_{t1} + \beta_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$

```
Model 3: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 1999:1-2016:1 (N = 69)
Zmienna zależna (Y): Y1

            współczynnik   błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
  ----------------------------------------------------------------
  const     -240904         382143            -0,6304     0,5306
  yhat2           3,95851        4,58653       0,8631     0,3913
  X1              1,81443        1,25919       1,441      0,1544
  X2             -2,43089        4,38313      -0,5546     0,5811
```

```
Model 4: Estymacja KMNK, wykorzystane obserwacje 1999:1-2016:1 (N = 69)
Zmienna zależna (Y): Y2

            współczynnik  błąd standardowy  t-Studenta  wartość p
  ---------------------------------------------------------------
  const     49872,6       12337,7              4,042    0,0001    ***
  yhat1         0,471714      0,0306797       15,38     1,69e-023 ***
  X3        -1158,32        525,450           -2,204    0,0310    **
```

Dziękuję za uwagę!

Aleksandra.Kordalska@pg.edu.pl