**Pochodne funkcji jednej zmiennej**

**Wzór podstawowy:**

\left(x ^{n}\right) ^\prime= n  \cdot  x ^{n-1}

Przykład 1

f\left(x\right)=x   
f^\prime\left(x\right)=1

Przykład 2  
f\left(x\right)=x ^{2}  
f^\prime\left(x\right)=2 \cdot x

Przykład 3

f\left(x\right)=x ^{3}  
f^\prime\left(x\right)=3 \cdot x ^{2}

Przykład 4

f\left(x\right)= 10 \cdot  x ^{5}  
f^\prime\left(x\right)=10 \cdot  5 \cdot x ^{4} =50 x ^{4}

Przykład 5

f\left(x\right)= 10  
f^\prime\left(x\right)= 0   
I tak z każdą stałą np   
\left(\ln 5\right) ^\prime=0  
\left(  \sqrt{100} \right) ^\prime=0  
\left(  150 \right) ^\prime=0  
\left(   \pi  \right) ^\prime=0  
\left(    e  \right) ^\prime=0  
\left(    e  ^{2}  \right) ^\prime=0  
\left(   \sin \left(1\right)  \right) ^\prime=0  
Przykład 6

f\left(x\right)=\sin x  
f^\prime\left(x\right)= \cos x

Przykład 7

f\left(x\right)=\cos x  
f^\prime\left(x\right)= -\sin x

Przykład 8

f\left(x\right)= \ln x  
f^\prime\left(x\right)=   \frac{1}{x}

Przykład 9 (ważny)

f\left(x\right)=   \frac{1}{x} =x ^{-1}  
f^\prime\left(x\right)=    -1  \cdot x ^{-1-1}= -  x ^{-2}=  \frac{-1}{x ^{2} }   
f ^{\prime\prime} \left(x\right)=     2 x ^{-2-1}=  2  x ^{-3}=  \frac{ 2}{x ^{3} }   
f ^{\prime\prime}^\prime \left(x\right)=     2  \cdot  \left(-3 \right) x ^{-3-1}=  -6  \cdot   x ^{-4}=  \frac{ -6}{x ^{4} }

Przykład 10

f\left(x\right)=   x \cdot  \sin x  
f^\prime\left(x\right)=  \left( x\right)^\prime  \cdot  \sin x +     x \cdot \left( \sin x  \right)^\prime= \sin x+ x \cdot  \cos x

Przykład 11

f\left(x\right)=   x ^{8}  \cdot  \ln x  
f^\prime\left(x\right)=  \left( x  ^{8} \right)^\prime  \cdot  \ln  x +     x ^{8}  \cdot \left( \ln x  \right)^\prime=  8x ^{7}  \cdot \ln x  + x ^{8}  \cdot    \frac{1}{x}= 8x ^{7}  \cdot \ln x + x ^{7}

Przykład 12 (ważny )

f\left(x\right)=  \sqrt{x}= x ^{ \frac{1}{2} }  
f^\prime\left(x\right)=    \frac{1}{2}  x ^{ \frac{1}{2}-1  } = \frac{1}{2}  \cdot  x ^{ -\frac{1}{2}   }=  \frac{1}{2 \sqrt{x} }

Przykład 13 (ważny )

f\left(x\right)=    \sqrt[3]{x} = x ^{ \frac{1}{3} }  
f^\prime\left(x\right)=    \frac{1}{3}  x ^{ \frac{1}{3}-1  } = \frac{1}{3}  \cdot  x ^{ -\frac{2}{3}   }=  \frac{1}{3   \sqrt[3]{x ^{2} }  }

Przykład 14

f\left(x\right)=     \frac{ x+1}{x}  
1 sposób:  
f\left(x\right)=     \frac{ x+1}{x}= 1+ \frac{1}{x}  
f^\prime \left(x\right)=       - \frac{1}{x ^{2} }  
2 sposób ( wzór na pochodną ilorazu ):  
f^\prime\left(x\right)=     \frac{ \left(x+1\right)^\prime  \cdot x - \left(x+1\right)  \cdot  x\prime}{x ^{2} }=   \frac{    x - \left(x+1\right)  }{x ^{2} } =  - \frac{1}{x ^{2} }  
Przykład 15

f\left(x\right)=     \left(x+1\right)  ^{2}  
Sposób 1 ( wzór na pochodną funkcji złożonej):  
f^\prime \left(x\right)=    2  \cdot  \left(x+1\right) \cdot  \left(x+1\right)^\prime=   2  \cdot  \left(x+1\right) \cdot 1= 2  \cdot  \left(x+1\right)  =2x+2  
Sposób 2 ( wzór skróconego mnożenia):  
f\left(x\right)=     \left(x+1\right)  ^{2}=x ^{2}+2x+1  
f^\prime\left(x\right)=     \left(x ^{2}\right)^\prime+\left(2x\right)^\prime+\left(1 \right)^\prime= 2x +2+0=2x+2  
Przykład 16

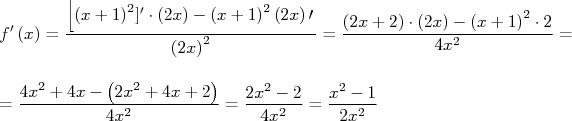
f\left(x\right)=     \left(x ^{2} +1\right)  ^{2}  
( wzór na pochodną funkcji złożonej):  
f^\prime \left(x\right)=    2  \cdot  \left(x ^{2} +1\right) \cdot  \left(x ^{2} +1\right)^\prime=   2  \cdot  \left(x ^{2} +1\right) \cdot 2x = 4x  \cdot  \left(x ^{2} +1\right)  
Przykład 17

f\left(x\right)=    \ln   \left(x ^{2} +1\right)  
f^\prime\left(x\right)=      \frac{1}{ \left(x ^{2} +1\right) }  \cdot  \left(x ^{2} +1\right)^\prime   =\frac{2x}{ \left(x ^{2} +1\right) }  
Przykład 18

f\left(x\right)=     \sqrt{ 2x }  
f^\prime\left(x\right)=        \frac{1}{2 \cdot \sqrt{ 2x } } \cdot  \left(2x\right)^\prime=    \frac{2}{2 \cdot \sqrt{ 2x } }= \frac{1}{   \sqrt{ 2x } }

Przykład 19 (bardzo ważny )

f\left(x\right)=       e^{g\left(x\right) }  
f^\prime\left(x\right)=       e^{g\left(x\right) } \cdot  g^\prime\left(x\right)  
1. f\left(x\right)=       e^{ 2x }  
f^\prime\left(x\right)=       e^{ 2x } \cdot  \left(2x\right)^\prime=e^{ 2x } \cdot 2  
2. f\left(x\right)=       e^{ x ^{2}  }  
f^\prime\left(x\right)=       e^{ x ^{2}  } \cdot  \left(x ^{2} \right)^\prime =e^{ x ^{2} } \cdot 2x  
3. f\left(x\right)=       e^{ x ^{2}+x  }  
f^\prime\left(x\right)=       e^{ x ^{2} +x  } \cdot  \left(x ^{2}+x \right)^\prime =e^{ x ^{2}+x } \cdot \left(2x+1\right)  
Przykład 20

f\left(x\right)=\frac{\left(x+1\right) ^{2} }{2x}  
  


**Teraz kilka zadań z Krysickiego:**

Przykład 21

f\left(x\right)=  \frac{x}{2} + \frac{2}{x}  
f^\prime\left(x\right)=    \frac{1}{2}  -  \frac{2}{x ^{2} }  
Przykład 22

f\left(x\right)=   x ^{2}   + \frac{1}{x ^{2} }  
f^\prime\left(x\right)=  2 x      - \frac{2}{x ^{3} }

Przykład 23

f\left(x\right)=   x   \cdot   \sqrt{4-x  ^{2} }  
f^\prime\left(x\right)=\sqrt{4-x  ^{2} } + x \cdot  \frac{ -2x}{2 \sqrt{4-x  ^{2} }}=\sqrt{4-x  ^{2} } -     \frac{  x ^2 }{  \sqrt{4-x  ^{2} }}  
Przykład 24

f\left(x\right)=  x  \cdot  \left(3-x \right) ^{2}  
f^\prime \left(x\right)=    \left(3-x \right) ^{2}  - x  \cdot  2 \left(3-x \right)  
Przykład 25

f\left(x\right)=    \sqrt{ \sin  \left(x ^{2}\right) }  
f^\prime\left(x\right)=     \frac{ 2x \cdot \cos  \left(x ^{2}\right)}{2 \sqrt{ \sin  \left(x ^{2}\right) }}  
Przykład 26

f\left(x\right)=    \sin x  \cdot  \cos 2x  
f^\prime\left(x\right)=    \cos x   \cdot  \cos 2x-  2 \sin x  \cdot  \sin 2x  
Przykład 27

f\left(x\right)=    \sin  ^{2} x  \cdot  \cos x  
f^\prime\left(x\right)=    2\sin x  \cdot  \cos x \cdot  \cos x -  \sin  ^{2} x \sin x  
Przykład 28

f\left(x\right)=      \sqrt{1-\cos x}  
f^\prime \left(x\right)=       \frac{\sin x}{2 \sqrt{1-\cos x}}

Przykład 29

f\left(x\right)=     x-2 \arctan x  
f\left(x\right)=     1-2   \frac{1}{1+x ^{2} }=  \frac{1+ x ^{2} }{1+ x ^{2}} - \frac{2}{1+x ^{2} }=  \frac{-1+x ^{2}  }{1+x ^{2} }