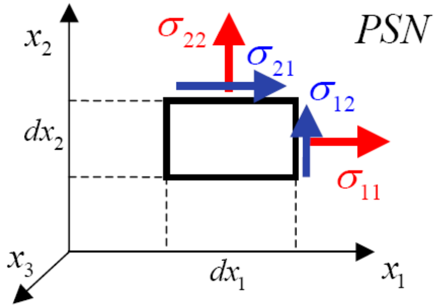
# Analiza zagadnień dwuwymiarowych układ kartezjański

Przykłady zagadnień płaskich
(ilustracja: układ prostokątny $Ox_1x_2$):




**Płaski stan naprężeń** (PSN) - w każdym punkcie i każdym ustawieniu przekroju wektor naprężenia leży w płaszczyźnie równoległej do stałej płaszczyzny ($Ox_1x_2$).

Możliwa realizacja: tarcza o małej grubości

Tensor naprężeń Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

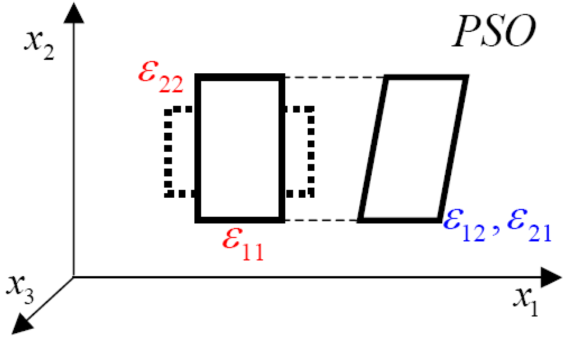
Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ponieważ odkształcenie $\varepsilon_{33}$ może być niezerowe, w ogólnym przypadku **płaski stan naprężeń** nie jest **płaskim stanem odkształceń.**

**Płaski stan odkształceń** (PSO) - - w każdym punkcie jedyne niezerowe składowe stanu odkształcenia istnieją w płaszczyznach równoległych do stałej płaszczyzny (np. $Ox_1x_2$).

Możliwa realizacja: rura grubościenna o znacznej długości




Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor naprężeń Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ponieważ naprężenie $\sigma_{33}$ może być niezerowe, w ogólnym przypadku **płaski stan odkształceń** nie jest **płaskim stanem naprężeń.**

**Relacje 3D** między naprężeniami a odkształceniami - materiał izotropowy, liniowosprężysty: **uogólnione prawo Hooke'a** (3D wariant ze stałymi inżynierskimi $E$ i $\nu$) – formy $\boldsymbol{\varepsilon} = f(\boldsymbol{\sigma})$ **i** $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon})$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{33} + \sigma_{11}\right)\right] \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{13} \end{cases}$$

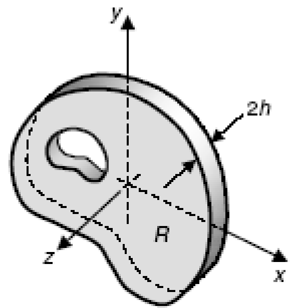
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{11} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)\right] \\ \sigma_{22} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{22} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)\right] \\ \sigma_{33} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{33} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)\right] \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{13} \end{cases}$$

Szczególne postaci równań prawa Hooke'a w problemach 2D, jedynie w funkcji składowych **σ** lub ε na płaszczyźnie $Ox_1x_2$ :

**Płaski stan naprężeń** (PSN)

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) \\ \varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{22} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \end{cases}$$




Z zapisu $\varepsilon_{33} = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)$ wynika,

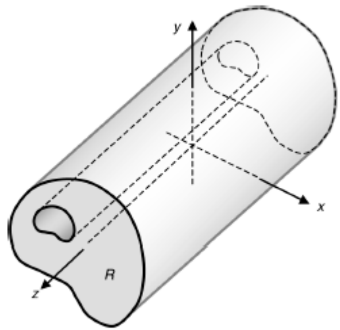
że **płaski stan naprężeń** nie jest z założenia **płaskim stanem odkształceń**.

**Płaski stan odkształceń** (PSO)

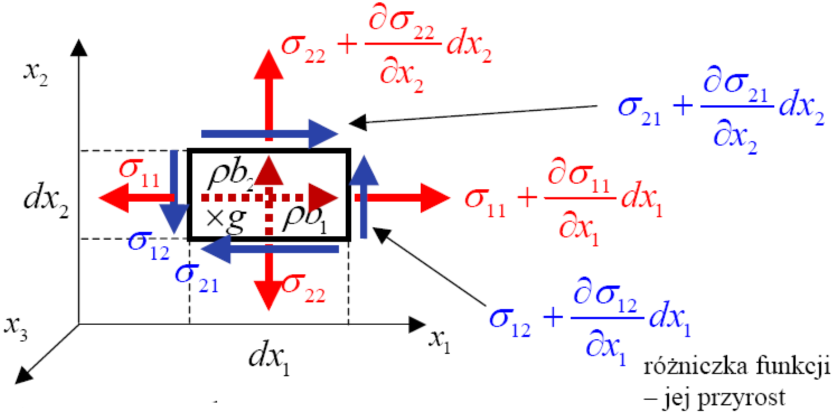
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{11} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \\ \sigma_{22} = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{22} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] \\ \sigma_{33} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = \\ \qquad = \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \end{cases}$$

Z zapisu $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ wynika, że **płaski stan odkształceń** nie jest z założenia **płaskim stanem naprężeń**.



**Równania równowagi** w punkcie ośrodka dwuwymiarowego – elementarne wyprowadzenie (uproszczenie przypadku trójwymiarowego)




Na umownie wycięty element o stałej grubości równej $g$, działają następujące siły:

1) wypadkowe naprężeń ze ścianek, naprężenia na ściankach odpowiednio równoległych różniące się o liniowe przyrosty,

2) wypadkowe sił objętościowych – składowe wektora $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$.

$\mathbf{f}\left[kN/m^3\right]$ - siła objętościowa (np. ciężar właściwy), $\rho\left[kg/m^3\right]$ - gęstość,

$\mathbf{b}\left[kN/kg\right]$ - siła masowa (na jednostkę masy, jest to przyspieszenie, np. ziemskie $g$)

Równania równowagi otoczenia punktu ośrodka dwuwymiarowego:

$$1)\ \sum P_{x_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 g + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 g + f_1 dx_1 dx_2 g = 0$$

$$2)\ \sum P_{x_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 g + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 g + f_2 dx_2 dx_1 g = 0$$

stąd: $\boxed{\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 = 0}$ oraz $\boxed{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0}$

$3)\ \sum M_o = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_{12} = \sigma_{21}}$ (pomijając nieskończenie małe składniki wyższego rzędu)

Równania 1) i 2) równoważne są zapisowi: $div\,\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f} = \mathbf{0}$, czyli $\sigma_{ji,j} + f_i = 0$, $i, j \in \{1,2\}$, są zatem równaniami równowagi ośrodka ciągłego w zagadnieniu dwuwymiarowym (sumy rzutów sił).

Jak w zagadnieniu przestrzennym, liczba **równań równowagi** jest zbyt mała, by stosując je jako wyłączne obliczyć **niewiadome statyczne** – naprężenia. Problem TS, zarówno w ujęciu 3D jak i 2D jest **statycznie niewyznaczalny**.

Podstawowe – fundamentalne – **równania geometryczne** Teorii Sprężystości, wiążące **przemieszczenia** i małe **odkształcenia** (odpowiednio: pole wektorowe przemieszczeń i pole tensorowe małych odkształceń), w płaszczyźnie $Ox_1x_2$:

zapis absolutny: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right)$

zapis wskaźnikowy: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ i,j \in \{1,2\}$

Rozwinięcie: $\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) \end{cases}$

Powyższe **trzy** równania zostaną przekształcone do jednego, zawierającego jako niewiadome jedynie odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij},\ i,j \in \{1,2\}$.

Forma wyjściowa: $$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) \end{cases}$$

Działania pomocnicze:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,22} = u_{1,122} \\ \varepsilon_{22,11} = u_{2,112} \\ \varepsilon_{12,12} = 0.5\left(u_{1,122} + u_{2,112}\right) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) \end{cases}$$

Kombinacja $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ jest

tożsamościowo równa zeru.

Równanie $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ jest tzw. **równaniem nierozdzielności** (ciągłości) ośrodka ciągłego dwuwymiarowego (2D). Jest ono jedyną w układzie płaskim formą ogólnego zapisu wskaźnikowego 3D (o sześciu niezależnych postaciach)

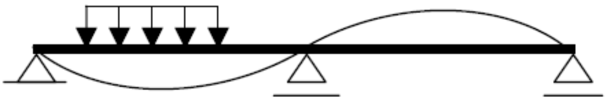
$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0\,.$$

Równania nierozdzielności, zarówno w zadaniu trójwymiarowym (6 równań) jak i płaskim (jedno równanie) wynikają wprost ze związków podstawowych – związków geometrycznych między **ε** i **u**, nie stanowią zatem kolejnej grupy równań fundamentalnych TS.

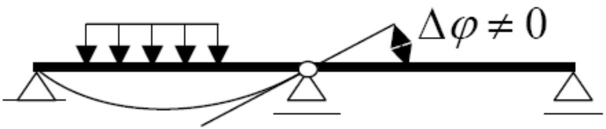
**Interpretacja równań nierozdzielności**: składowe tensora (pola tensorowego) małych odkształceń wynikają wprost z wektora (pola wektorowego) przemieszczeń, nie mogą być zatem zestawem dowolnie przyjętych funkcji.

**Interpretacja równań nierozdzielności**: składowe tensora (pola tensorowego) małych odkształceń wynikają wprost z wektora (pola wektorowego) przemieszczeń, nie mogą być zatem zestawem dowolnie przyjętych funkcji.

Obraz odpowiadający **układom prętowym** (belki) – równanie zgodności uogólnionych przemieszczeń (ciągłości) stosowane w metodzie sił

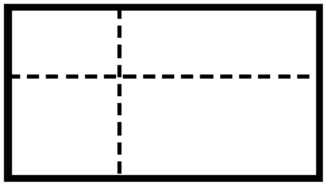


postać odkształcona
– krzywa klasy $C^1$ (belka ciągła)

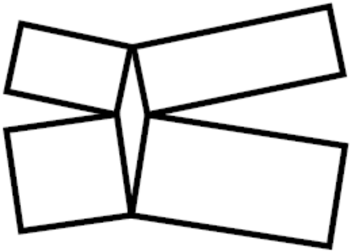



postać odkształcona
– krzywa nie jest klasy $C^1$

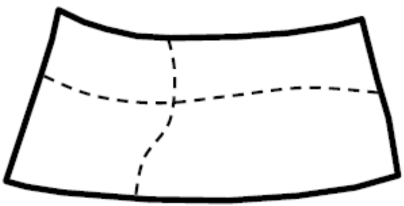
Obraz odpowiadający **problemom dwuwymiarowym**:



linie wyobrażonego podziału
– „myślowego”



brak ciągłości odkształceń
– pęknięcia



ciągłość odkształceń zachowana
– składowe wektora odkształceń:

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$

nie mogą być przyjmowane niezależnie (dowolnie)

Problem TS w obu wersjach 2D i 3D jest statycznie niewyznaczalny
Istnieje metoda, w której naprężenia w zadaniach dwuwymiarowych (trzy składowe) mogą być określone na podstawie jednej funkcji skalarnej $F(x_1, x_2)$, zwanej **funkcją naprężeń Airy** (George B. Airy, 1801–1892), zdefiniowanej w układzie kartezjańskim $Ox_1x_2$ wzorami:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = F_{,22} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = F_{,11}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - f_1 x_2 - f_2 x_1 = -F_{,12} - f_1 x_2 - f_2 x_1$$

$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ - tensor naprężeń Cauchy, $\mathbf{f} \equiv f_k$ - wektor sił objętościowych

Wzory te są tożsamościowo zgodne z równaniami równowagi 2D:

$$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11,1} = F_{,122} \\ \sigma_{21,2} = -F_{,122} - f_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + f_1 = 0$$

$$\sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{12,1} = -F_{,112} - f_2 \\ \sigma_{22,2} = F_{,112} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + f_2 = 0$$

**w dalszej części przyjmuje się, że siły objętościowe $f_i$ są co najwyżej funkcjami stałymi**

Rozwiązanie statyczne zagadnienia 2D – określenie składowych naprężeń w płaszczyźnie – jest równoznaczne z rozwiązaniem jednego równania z niewiadomą funkcją $F$ i właściwymi warunkami brzegowymi. Punkt wyjścia wyprowadzenia: równanie nierozdzielności w 2D: $\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}-2\varepsilon_{12,12}=0$.

## Przypadek I – **płaski stan naprężeń** (PSN)

Liniowosprężyste prawo Hooke'a (składowe w płaszczyźnie $Ox_1x_2$):

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}\right),\ \varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}\right),\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

Zestawienie w.w. układów: $\sigma_{11,22}-\nu\sigma_{22,22}+\sigma_{22,11}-\nu\sigma_{11,11}-2\left(1+\nu\right)\sigma_{12,12}=0$

Zastosowanie definicji funkcji F: $\sigma_{11}=F_{,22},\ \sigma_{22}=F_{,11},\ \sigma_{12}=-F_{,12}-f_1x_2-f_2x_1$

prowadzi do równania: $F_{,2222}-\nu F_{,1122}+F_{,1111}-\nu F_{,1122}+2\left(1+\nu\right)F_{,1122}=0$,

ostatecznie $F_{,1111}+F_{,2222}+2F_{,1122}=0 \iff \dfrac{\partial^4 F}{\partial x_1^4}+\dfrac{\partial^4 F}{\partial x_2^4}+2\dfrac{\partial^4 F}{\partial x_1^2\partial x_2^2}=0$

Jest to tzw. **równanie biharmoniczne** (równanie Airy), z niewiadomą funkcją naprężeń $F$ – rozwiązanie równania, przy danych warunkach brzegowych, pozwala określić rozkład naprężeń w danym zadaniu 2D (tutaj PSN).

Równanie biharmoniczne Airy można zapisać w sposób operatorowy, z użyciem różniczkowego **operatora Laplace** (laplasjanu):

laplasjan: $$\Delta F \equiv \nabla^2 F = \left\{ \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = F_{,11} + F_{,22}$$

$$\Delta\left(\Delta F\right) \equiv \nabla^4 F = \left( \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_2^2} \right)\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) =$$

operator biharmoniczny:

$$= \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = F_{,1111} + F_{,2222} + 2F_{,1122}$$

stąd równanie Airy z niewiadomą funkcją **F** ma postać $\nabla^4 F\left(x_1, x_2\right) = 0$.

Przypadek II – **płaski stan odkształceń** (PSO) – procedura analogiczna do zastosowanej w przypadku PSN, odmienne są równania prawa Hooke'a w płaszczyźnie $Ox_1x_2$ (inny układ równań liniowych), po wykonaniu przekształceń – identyczna, co w PSN postać równania: $\nabla^4 F\left(x_1, x_2\right) = 0$.

Spostrzeżenie: $\sigma_{11} + \sigma_{22} = F_{,11} + F_{,22} = \Delta F$. Adnotacje formalne:

1) funkcję $G$ nazywamy **harmoniczną**, jeśli jej laplasjan jest zerowy (spełnia równanie różniczkowe Laplace'a) – w dwóch wymiarach:

$$\Delta G \equiv \nabla^2 G = G_{,11} + G_{,22} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = 0$$

2) funkcję $H$ nazywamy **biharmoniczną**, jeśli spełnia równanie **biharmoniczne** (z operatorem podwójnego laplasjanu $\Delta\left(\Delta(\cdot)\right) \equiv \nabla^4(\cdot)$:

$$\Delta\left(\Delta H\right) \equiv \nabla^4 H = H_{,1111} + H_{,2222} + 2H_{,1122} = \frac{\partial^4 H}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 H}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4 H}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

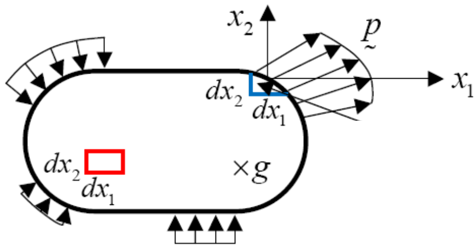
Wszystkie wielomiany do stopnia 3. włącznie są biharmoniczne, wielomiany stopni wyższych wymagają zgodności współczynników przy potęgach.

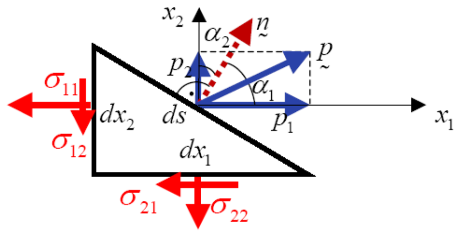
3) rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego z zastosowaniem funkcji naprężeń Airy dostosowane jest szczególnie do układów płaskich – PSN. Rozwiązanie to jest słuszne także w stanie PSO, gdzie $\sigma_{33} = \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)$.

Płaski stan odkształceń to fizycznie stan przestrzenny, jednak w obliczeniach traktowany dwuwymiarowo, stąd zaliczany do klasy stanów 2D i nazywany czasem stanem *pseudopłaskim*.

Metoda funkcji naprężeń Airy wymaga zapisania warunków brzegowych naprężeniowych – naprężeń (obciążenia)na brzegach obiektu.

Ogólnie: element brzegowy, w danym punkcie wektor normalny (do płaszczyzny stycznej) to $\mathbf{n} = \{n_1 \quad n_2\}^T$, składowe tensora naprężeń Cauchy w układzie $Ox_1x_2$ zawarte w tensorze $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$, wektor obciążenia brzegowego $\mathbf{p} = \{p_1 \quad p_2\}^T$ jest odpowiednikiem wektora naprężenia $\mathbf{t}^{(n)} = \{t_1^{(n)} \quad t_2^{(n)}\}^T$



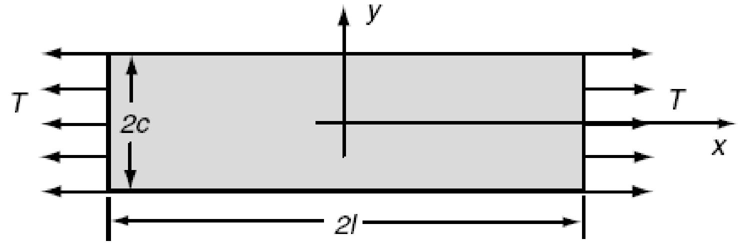

Równania równowagi elementu różniczkowego na brzegu:

$$\begin{cases} p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 \\ p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{n}, \; p_i = \sigma_{ji}n_j$$

jest to zatem równanie Cauchy wiążące wektor naprężenia (w tym przypadku brzegowego **p**) ze składowymi tensora $\boldsymbol{\sigma}$ i wektora normalnego do brzegu **n**.

# Przykładowe zadania dwuwymiarowe w układzie kartezjańskim
(układ – tarcza, na rysunkach oznaczenia osi $x$ i $y$):

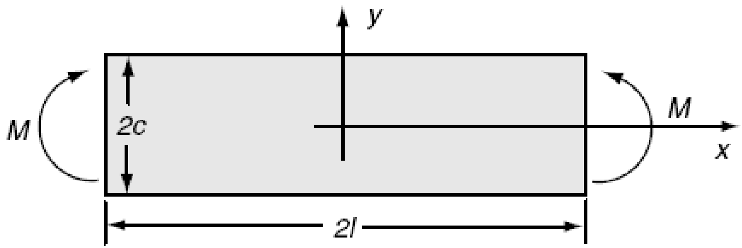
## 1) **obciążenie stałe, jednokierunkowe**




funkcja Airy kwadratowa, stan naprężenia jednorodny w całym obszarze, jednokierunkowe rozciąganie $\sigma_{11} = T$ w każdym punkcie, pozostałe naprężenia zerowe.

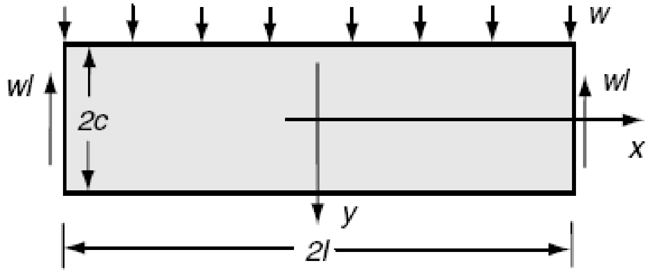
Zbieżność rozwiązania z przypadkiem WM – **rozciąganie osiowe pręta**

## 2) **równowaga dwóch brzegowych momentów skupionych**




funkcja Airy sześcienna, jedyne niezerowe naprężenie $\sigma_{11}$ liniową funkcją zmiennej $x_2$. Rozwiązanie zgodne z przypadkiem WM – **zginanie proste pręta.**

3) **obciążenie ciągłe normalne na ścianie poziomej, w równowadze z siłami na ścianach bocznych (wypadkowymi naprężeń stycznych)**




funkcja Airy – wielomian 5. stopnia, pełny płaski stan naprężeń (PSN):

$\sigma_{11}$ - rozwiązanie o dwóch składnikach: pierwszy aktualny w belce zginanej (liniowy względem $x_2$), drugi, sześcienny względem $x_2$, o maksymalnej wartości na brzegach, równej 0.2$w$,

$\sigma_{22}$ - w rozwiązaniu WM zwane naprężeniami prostopadłymi do osi belki, nieznaczne przy proporcjach wymiarów $l$ i $c$ właściwych elementom prętowym,

$\sigma_{12}$ - naprężenia styczne – funkcja w pełni zgodna z rozwiązaniem WM belki