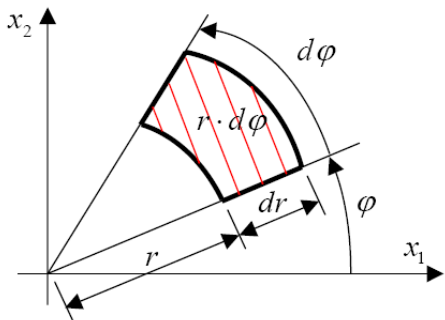


Analiza zagadnień dwuwymiarowych w biegunowym układzie współrzędnych

Istnieją zadania dwuwymiarowe (PSN, PSO), w których, ze względu na geometrię, korzystna jest analiza w układzie biegunowym.



Biegunowy układ współrzędnych (r, φ) ,
relacje między współrzędnymi (x_1, x_2) :

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

Aby stosować w układzie biegunowym metodę funkcji naprężeń Airy F należy znać ogólną postać operatorów $\Delta F \equiv \nabla^2 F$ oraz $\nabla^4 F$ jako kombinacji pochodnych F w funkcji r i φ . Po rozwiązaniu równania stan naprężeń w układzie biegunowym należy także zdefiniować w funkcji pochodnych F (analogicznie do definicji F w układzie kartezjańskim).

Operator Laplace w biegunowym układzie współrzędnych

Zadanie: $\nabla^2 F(x_1, x_2) = \nabla^2 F[r(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)] = \nabla^2 F(r, \varphi)$

Relacje między pochodnymi cząstkowymi w obu układach:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

Pochodne funkcji złożonej $F(x_1, x_2) = F[r(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{r} \right)$$

Powyższe operatory – różniczkowanie funkcji F względem x_1 i x_2 ,
wyrażone we współrzędnych biegunowych r i φ .

Wykorzystanie powyższych wzorów – obliczenie drugich pochodnych F względem x_1 i x_2 , także wyrażone we współrzędnych r i φ .

Drugie pochodne funkcji F , względem x_1 i x_2 , włącznie z pochodną mieszaną:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \\ &- \frac{2}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \\ &+ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \cos 2\varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos 2\varphi - \frac{1}{2r} \frac{\partial F}{\partial r} \sin 2\varphi - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

(drugie pochodne osobno względem x_1 i x_2 - do obliczenia laplasjanu oraz naprężeń normalnych, pochodna mieszana – do naprężeń stycznych)

Laplasjan funkcji F (także w symbolicznej notacji przecinkowej)

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = F_{,rr} + \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}$$

Równanie Airy zagadnienia dwuwymiarowego w układzie biegunowym zawiera **operator biharmoniczny** – podwójny laplasjan. Ze względu na objętość obliczeń – zapis operatorowy:

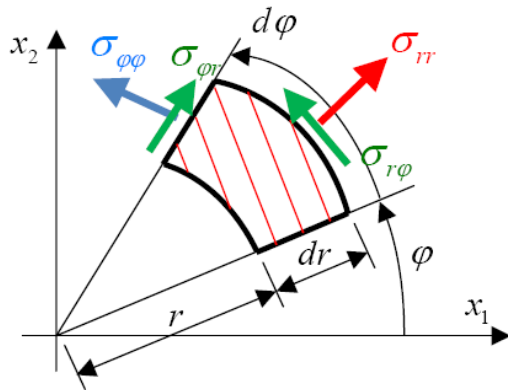
$$\nabla^4 F = \Delta(\Delta F) = \left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \cdot}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

Naprężenia w układzie biegunowym

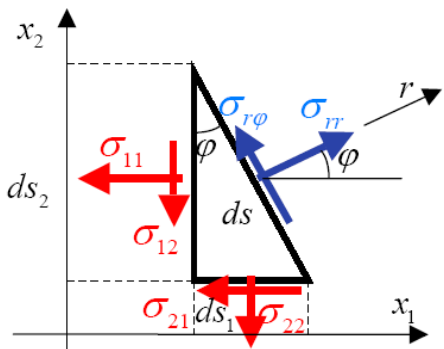
σ_{rr} - naprężenia normalne radialne
(promieniowe)

$\sigma_{\varphi\varphi}$ - naprężenia normalne obwodowe
(pierścieniowe), ang. *hoop stresses*

$\sigma_{r\varphi}$ - naprężenia styczne



Relacje między składowymi stanu naprężenia 2D w układach: kartezjańskim ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$) i biegunowym ($\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}$):



Równowaga elementów płaskich, dane:

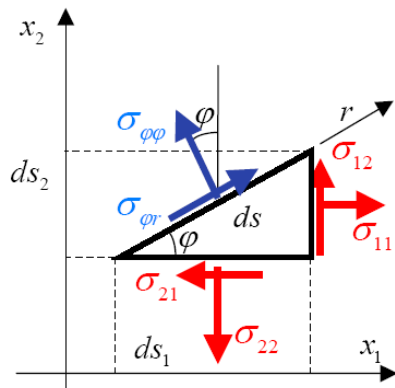
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, szukane: $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}$

Równanie $\sum F_r = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi$$

Równanie $\sum F_s = 0$ (styczna) \Rightarrow

$$\sigma_{r\varphi} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi$$



Równanie $\sum F_s = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi$$

Równanie $\sum F_r = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_{\varphi r} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi$$

Tym samym dane są wzory transformacyjne naprężeń z układu kartezjańskiego do biegunowego (obrót o kąt φ)

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi \\ \sigma_{r\varphi} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi \end{cases}$$

Jest to płaska transformacja, w postaci $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}^T$, gdzie $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \angle(r, x_1) & \cos \angle(r, x_2) \\ \cos \angle(s, x_1) & \cos \angle(s, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Transformacja odwrotna: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{A}$ (obrót o kąt przeciwny, równy $-\varphi$)

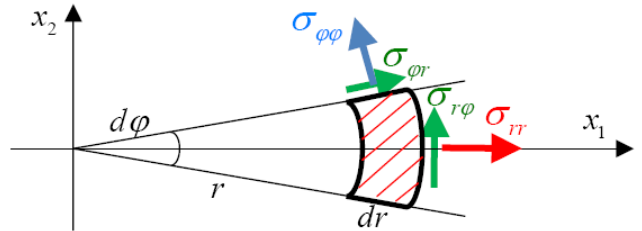
$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi \\ \sigma_{22} = \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi \\ \sigma_{12} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{r\varphi} \cos 2\varphi \end{cases}$$

Naprężenia w zadaniu 2D w układzie biegunowym są kombinacją pochodnych funkcji F . Rozpatrywany jest różniczkowy element w otoczeniu osi x_1 (współrz. $\varphi = 0$), gdy $d\varphi \rightarrow 0$ zachodzi $\sigma_{rr} \rightarrow \sigma_{11}$, $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow \sigma_{22}$, $\sigma_{r\varphi} \rightarrow \sigma_{12}$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11}|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

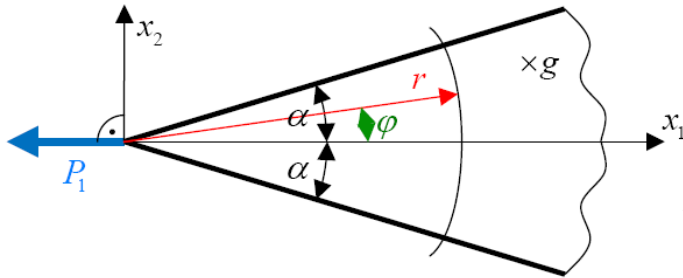
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{22}|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{12}|_{\varphi=0} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$



Są to odpowiedniki wzorów: $\sigma_{11} = F_{,22}$, $\sigma_{22} = F_{,11}$, $\sigma_{12} = -F_{,12}$ z układu kartezjańskiego (przy $\mathbf{f} = \mathbf{0}$). Zachodzi także $\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = \Delta F$

Modelowe zadanie 2D: **sprężysty klin tarczowy**, określić rozkład naprężeń $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$. Dane: g – grubość, 2α – kąt wierzchołkowy



obciążenie symetryczne P_1 :

Przyjęto funkcję Airy

$$F(r, \varphi) = Cr\varphi \sin \varphi.$$

Należy wykazać, że jest ona biharmoniczna (spełniająca równanie $\nabla^4 F = \Delta(\Delta F) = 0$)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(Cr\varphi \sin \varphi) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(Cr\varphi \sin \varphi) = \frac{C}{r} \varphi \sin \varphi$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(Cr\varphi \sin \varphi) = \frac{C}{r}(2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)$$

$$\text{stad } \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{2C}{r} \cos \varphi$$

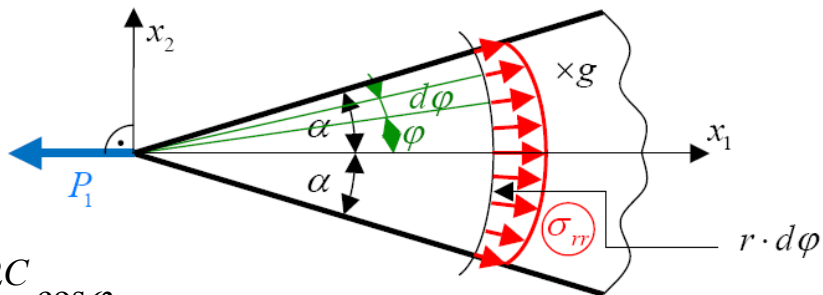
$$\nabla^4 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{2C}{r} \cos \varphi = \frac{4C}{r^3} \cos \varphi - \frac{2C}{r^3} \cos \varphi - \frac{2C}{r^3} \cos \varphi = 0$$

Stan naprężenia
w symetrycznie
obciążonym klinie
tarczowym

$$F(r, \varphi) = Cr\varphi \sin \varphi$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{2C}{r} \cos \varphi$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = 0$$



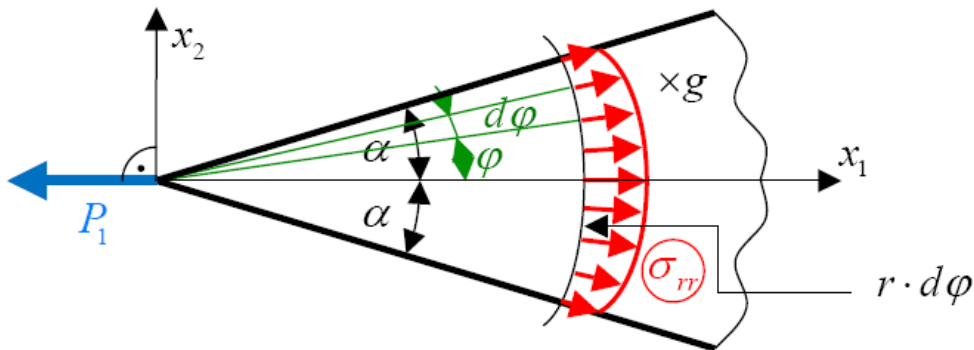
Obliczenie stałej C - rzut na oś Ox_1 : siły P_1 i naprężeń na łuku $r = const$:

$$\sum P_{x_1} = 0 \Rightarrow 2 \int_0^{\alpha} \sigma_{rr} g \cos \varphi r d\varphi = P_1, \text{ gdzie } gr d\varphi = dA - \text{element powierzchni}$$

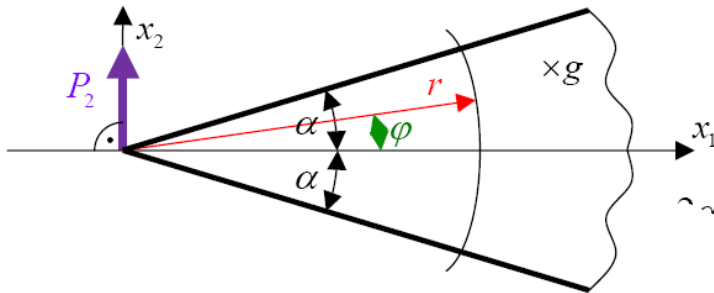
czyli $4Cg \int_0^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi = P_1$. Ponieważ $\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + D$, zatem

$$\text{stała } C = \frac{P_1}{g(2\alpha + \sin 2\alpha)} \text{ oraz naprężenia } \sigma_{rr}(r, \varphi) = \frac{2P_1}{g(2\alpha + \sin 2\alpha)} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Klin tarczowy – obciążenie symetryczne:
$$\sigma_{rr}(r, \varphi) = \frac{2P_1}{g(2\alpha + \sin 2\alpha)} \frac{\cos \varphi}{r}$$



Niezerowe są jedynie naprężenia normalne radialne, rozchodzące się „promieniście” od obciążonego wierzchołka do rozpatrywanego punktu. Rozkład σ_{rr} : • na łuku - przy ustalonym r - funkcja parzysta względem współrzędnej φ (wykres symetryczny względem osi Ox_1), • na półprostej o stałej współrzędnej φ (np. $\varphi = 0$) funkcja odwrotnie proporcjonalna do r – malejąca przy $r \rightarrow \infty$, zaś w pewnym otoczeniu wierzchołka poza zakresem sprężystym materiału ($|\sigma_{rr}| > \sigma_{dop}$).



obciążenie

antysymetryczne P_2 :

Przyjęto funkcję Airy

$$F(r, \varphi) = Cr\varphi \cos \varphi.$$

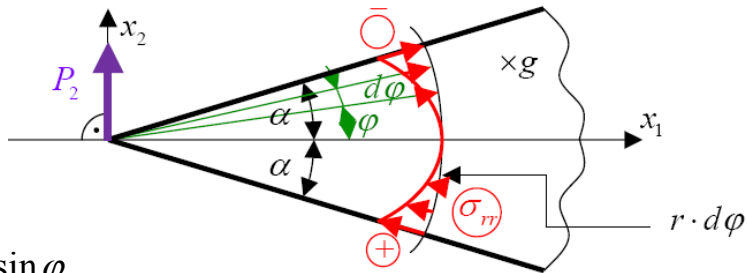
Można wykazać, że jest ona biharmoniczna (spełniająca równanie $\nabla^4 F = \Delta(\Delta F) = 0$)

Stan naprężenia
w symetrycznie obciążonym
klinie tarczowym

$$F(r, \varphi) = Cr\varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -\frac{2C}{r} \sin \varphi$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = 0$$



Obliczenie stałej C - rzut na oś Ox_1 : siły P_2 i naprężeń na łuku $r = const$:

$$\sum P_{x_2} = 0 \Rightarrow -2 \int_0^\alpha \sigma_{rr} g \sin \varphi r d\varphi = P_2, \quad gr d\varphi = dA \text{ - element powierzchni}$$

czyli $4Cg \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi = P_2$. Ponieważ $\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + D$, zatem

$$\text{stała } C = \frac{P_2}{g(2\alpha - \sin 2\alpha)} \text{ oraz naprężenia } \sigma_{rr}(r, \varphi) = -\frac{2P_2}{g(2\alpha - \sin 2\alpha)} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Własności:

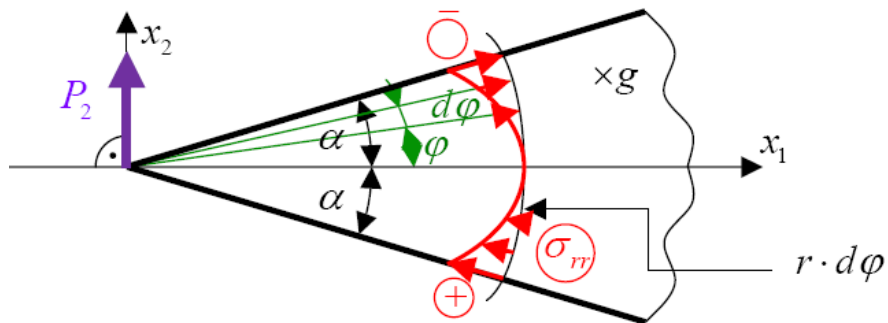
naprężenia

σ_{rr} "promieniście"

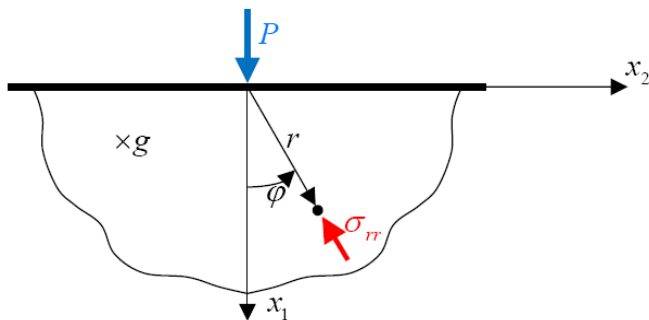
od obciążonego wierzchołka do danego punktu.

- na łuku - przy danym r - funkcja σ_{rr} nieparzysta

względem współrzędnej φ (wykres antysymetryczny względem osi Ox_1)



Klin tarczowy – szczególny przypadek - półpłaszczyzna sprężysta, obciążenie siłą skupioną na brzegu – **zagadnienie Flamanta**



$$\alpha = 90^\circ, P_1 = -P, P_2 = 0$$

jedynie naprężenia radialne

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P \cos \varphi}{\pi g r}$$

(rys. - zwrot rzeczywisty – ściskanie)

gdy $r \rightarrow 0$ jest $\sigma_{rr} \rightarrow \infty$

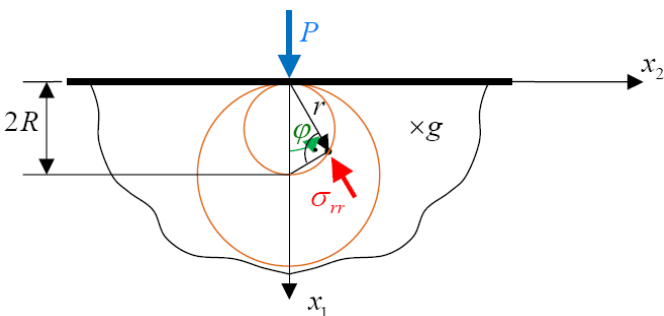
Interpretacja rozkładu σ_{rr}

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P \cos \varphi}{\pi g r} = -\frac{P}{\pi g R}$$

(zachodzi $r = 2R \cos \varphi$)

Okrąg o danym promieniu R , styczny do krawędzi tarczy jest zbiorem punktów o stałych

σ_{rr} oraz o stałych $\tau_{\max} = 0.5 |\sigma_{rr}|$ (σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ to naprężenia główne).



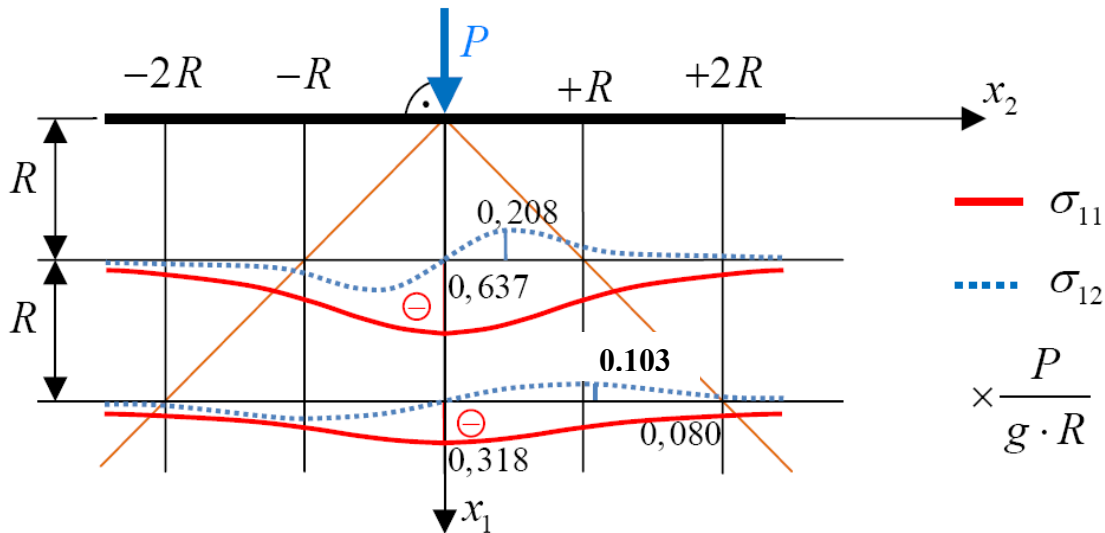
Naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej (zagadnienie Flamanta) –

w układzie biegunowym $\sigma_{rr} = -\frac{2P \cos \varphi}{\pi g r}, \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0.$

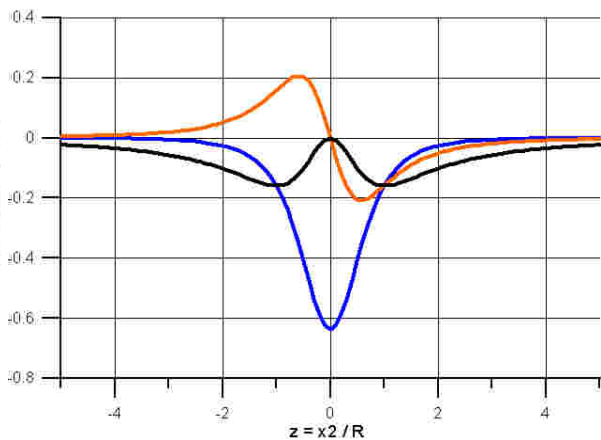
Odpowiadające naprężenia w układzie kartezjańskim (transformacja odwrotna):

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{rr} \cos^2 \varphi = -\frac{2P x_1 x_1^2}{\pi g r^2 r^2} = -\frac{2P x_1^3}{\pi g r^4} = -\frac{2P x_1^3}{\pi g (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \sigma_{22} = \sigma_{rr} \sin^2 \varphi = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi g r^2 r^2} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi g r^4} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi g (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \sigma_{12} = \sigma_{rr} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{2P x_1 x_1 x_2}{\pi g r^2 r^2} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi g r^4} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi g (x_1^2 + x_2^2)^2} \end{array} \right.$$

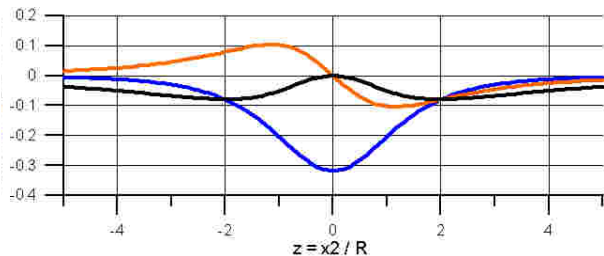
Przykładowe wykresy naprężeń σ_{11} i σ_{12} w tarczy obciążonej siłą skupioną na brzegu, sporządzone na liniach $x_1 = R$ i $x_1 = 2R$.



Wykresy te przedstawiają „rozchodzenie” się naprężeń pochodzących od siły skupionej w półpłaszczyźnie sprężystej, materiał izotropowy i jednorodny. Istotne pod względem inżynierskim naprężenia działają w obszarze ograniczonym dwusiecznymi kątów prostych układu.



a)



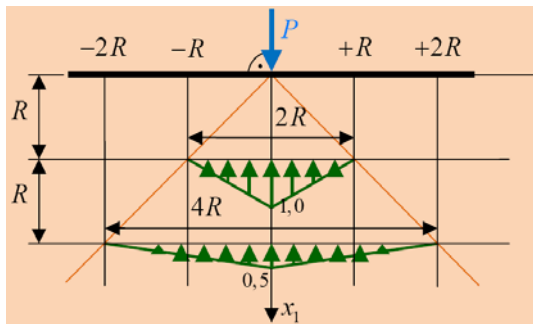
b)

Naprężenia: σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} na głębokościach:

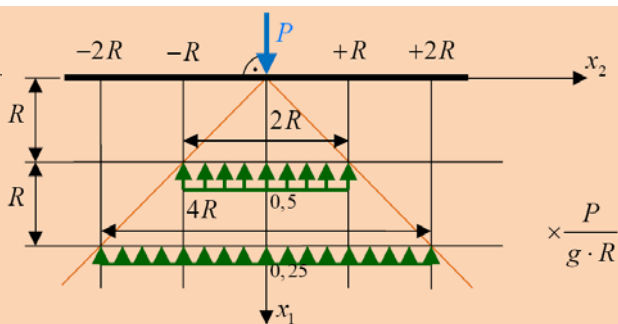
$$\text{a) } x_1 = R, \text{ b) } x_1 = 2R, \text{ mnożnik } \frac{P}{gR}$$

Przybliżenia rozkładów naprężeń normalnych σ_{11} :

a) trójkątne

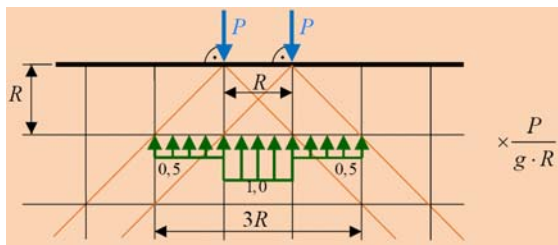


b) prostokątne



wartość w osi symetrii – z nadmiarem, na brzegach wartości zerowe

rozkład równomierny wartość w osi symetrii – z niedomiarem



Istnieje możliwość superpozycji

Zastosowania uproszczonych rozwiązań inżynierskich:

- obecność otworów w ścianach
- określenie, przy danym obciążeniu, stref o wysokim / niskim wyężeniu

Obrotowosymetryczne zadania dwuwymiarowe (PSN, PSO)

W przypadku symetrii obrotowej, ze względu na obciążenie, geometrię i warunki brzegowe, rozwiązanie układu (naprężenia, przemieszczenia, odkształcenia) zależy jedynie od współrzędnej r .

Tym samym funkcja naprężeń Airy ma postać $F \equiv F(r)$.

Równanie biharmoniczne w przypadku obrotowej symetrii

$$\nabla^4 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \text{ może być rozwinięte w sposób}$$

jawny, z użyciem symbolu pochodnej zwyczajnej, bez konieczności przewidywania matematycznej postaci funkcji F .

Rozwinięcie, wraz z redukcją wyrazów podobnych:

$$\frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dF}{dr} = 0$$

Powyższe równanie, poprzez podstawienie $r = e^t$ może być przedstawione w postaci $\frac{d^4 F}{dt^4} + 2\frac{d^3 F}{dt^3} - \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{dF}{dt} = 0$.

Rozwiązanie ogólne równania biharmonicznego, względem zmiennej r : $F(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$.

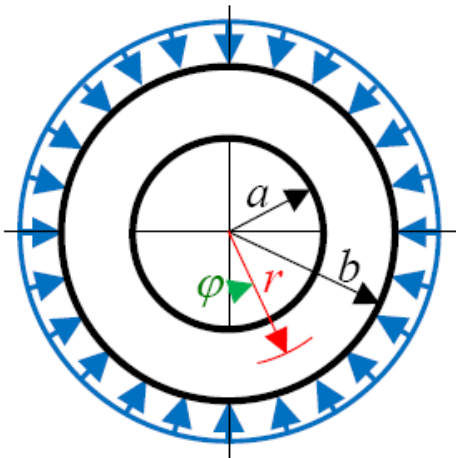
Naprężenia w układzie biegunowym, przy obrotowej symetrii:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r) = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0 \end{array} \right.$$

brak naprężeń stycznych – σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ są naprężeniami głównymi

Powyższe wzory mogą służyć rozwiązaniu zadań obrotowosymetrycznych, tak PSN (tarcze kołowe i pierścieniowe) jak i PSO (rury grubościennne o znacznej długości).

Układ pierścieniowy pod stałym ciśnieniem zewnętrznym p , w dwóch wariantach: • tarcza pierścieniowa (PSN), • rura grubościenna (PSO). Zakres zmienności: $a \leq r \leq b$



Ogólna postać wzorów na naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ zawiera trzy stałe, do dyspozycji są dwa warunki brzegowe – wartości brzegowe naprężeń radialnych.

Wniosek (M.T.Huber): naprężenia w tarczy winny być wielkościami skończonymi, przy dużej średnicy zewnętrznej b wyrazy logarytmiczne we wzorach na naprężenia wskazują na ich rozbieżność, zatem stała $B = 0$.

Zapis warunków brzegowych: 1) $\sigma_{rr}(b) = -p$, 2) $\sigma_{rr}(a) = 0$ daje

w rezultacie stałe całkowania $A = p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ i $2C = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2}$.

$$\sigma_{rr}(r) = p \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right)$$

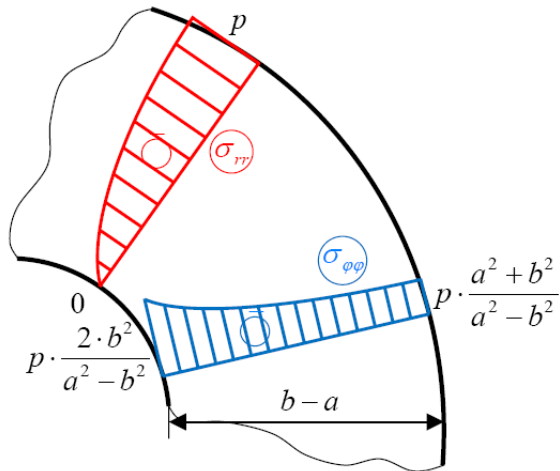
W przypadku tarczy kołowej pełnej jest $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = p = const$ równomierne ściskanie w 2D.

W **PSN** (tarcza) odkształcenia podłużne prostopadłe do płaszczyzny układu (kierunek osi x_3)

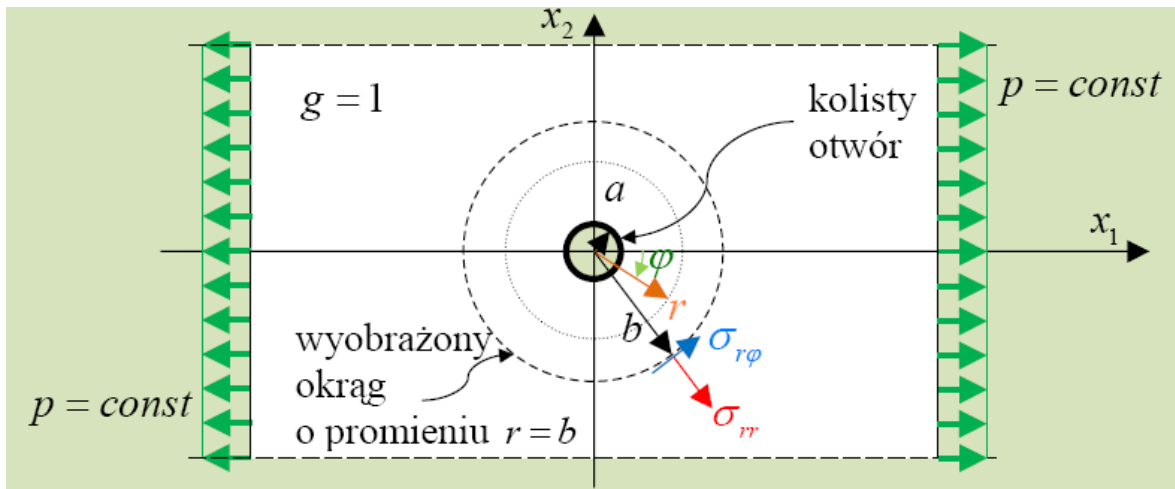
$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = \frac{2\nu p}{E} \frac{b^2}{b^2 - a^2} = const - \text{brak deplanacji}$$

Przypadek **PSN** – tylko naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$. Przypadek **PSO** (rura

grubościenna) także $\sigma_{33} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = -2\nu p \frac{b^2}{b^2 - a^2} = const$.



Tarcza z otworem kołowym, rozciągana jednokierunkowo



Założenia: 1) średnica otworu, równa $2a$, mała w porównaniu z wymiarami tarczy w płaszczyźnie Ox_1x_2 , 2) wpływ otworu na naprężenia ograniczony jest do pewnego kołowego otoczenia (na rysunku otoczenie o promieniu b), poza tym otoczeniem stan równomiernego rozciągania: $\sigma_{11} = p$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$

Na okręgu o myślowym promieniu b – pierwotny stan naprężenia $\sigma_{11} = p$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ w układzie biegunowym ma postać:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(b) = \sigma_{11} \cos^2 \varphi = p \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p \cos 2\varphi \\ \sigma_{r\varphi}(b) = -\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\varphi = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi \end{cases}$$

Myślowy układ pierścieniowy o promieniach: wewnętrznym a i zewnętrznym b , na brzegu zewnętrznym obciążony jest kombinacją:

I. równomierne rozciąganie radialne równe $0.5p$ - rozwiązanie tarczy pierścieniowej przy założeniu $b^2 \gg a^2$ i dodatnim obciążeniu

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^I(r) = \frac{pb^2}{2(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{p}{2(1 - a^2/b^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \approx \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^I(b) = \frac{pb^2}{2(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{p}{2(1 - a^2/b^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \approx \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

II. pozostała część to obciążenie funkcyjne: normalne $0.5p \cos 2\varphi$ i styczne równe $0.5p \sin 2\varphi$ - przyjęto funkcję $F(r, \varphi) = f(r) \cos 2\varphi$. Podstawienie do równania biharmonicznego $\nabla^4 F(r, \varphi) = 0$ daje równanie różniczkowe zwyczajne z niewiadomą funkcją $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0, \text{ o rozwiązaniu ogólnym:}$$

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D. \text{ Napreżenia wywołane obciążeniem II:}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{II} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{II} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_{r\varphi}^{II} = -\left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\varphi \end{cases}$$

Warunki brzegowe: naprężenia na brzegach $r = b$ i $r = a$:

$$1) \sigma_{rr}^{II}(b) = \frac{1}{2} p \cos 2\varphi \Rightarrow 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{p}{2}$$

$$2) \sigma_{r\varphi}^{II}(b) = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi \Rightarrow 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{p}{2}$$

$$3) \sigma_{rr}^{II}(a) = 0 \Rightarrow 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0$$

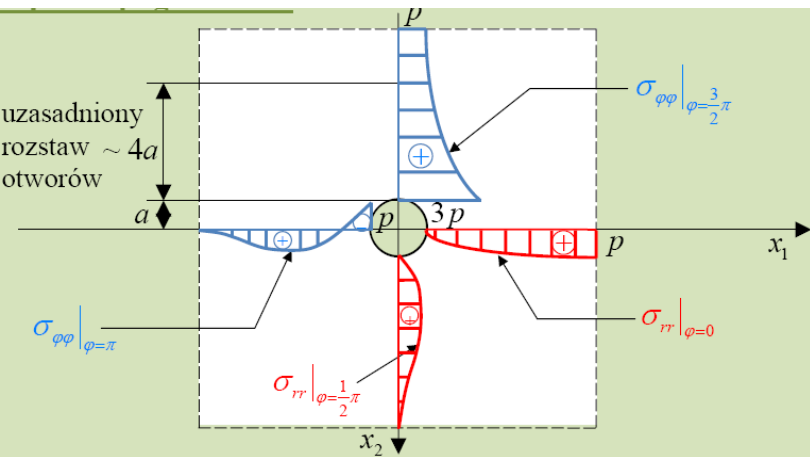
$$4) \sigma_{r\varphi}^{II}(a) = 0 \Rightarrow 2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0$$

Przy założeniu $\frac{a^2}{b^2} \approx 0$ można obliczyć stałe

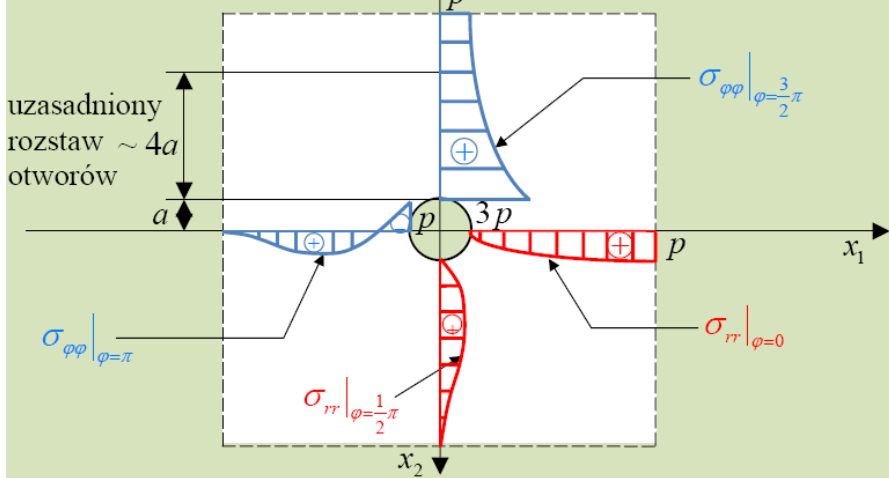
$$A = -\frac{1}{4} p, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{4} pa^4, \quad D = \frac{1}{2} pa^2$$

oraz podać wzory na naprężenia w układzie biegunowym, po dodaniu składowych funkcji stanów I i II:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \\ \sigma_{r\varphi}(r) = -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\varphi \end{cases}$$



Przebieg wykresów naprężeń radialnych i obwodowych na osiach: poziomej i pionowej poprowadzonych przez środek otworu – rys.



Spostrzeżenia:

- na osi pionowej ($\varphi = 0.5\pi$ lub $\varphi = 1.5\pi$) $\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right)$

przy $r \rightarrow a$ jest $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow 3p$ - **efekt koncentracji naprężeń**

- na osi poziomej ($\varphi = 0$ lub $\varphi = \pi$) jest $\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right)$, przy

$r \rightarrow a$ jest $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow -p$ - **lokalne naprężenia ściskające** (kier. pionowy)