ZAGADNIENIA MECHANIKI PĘKANIA

Redukcja wytrzymałości materiału w stosunku do wytrzymałości teoretycznej wynika z defektów geometrycznych i materiałowych:

defekty 1. rodzaju – geometryczne, niezwiązane ze strukturą materiału – ostre szczeliny, wycięcia (karby) o dowolnym kształcie,

defekty 2. rodzaju – niejednorodność wewnętrznej budowy materiału – dyslokacje, pustki na granicy cząstek materialnych (ziaren), wtrącenia obcego materiału (np. węgiel w metalach).

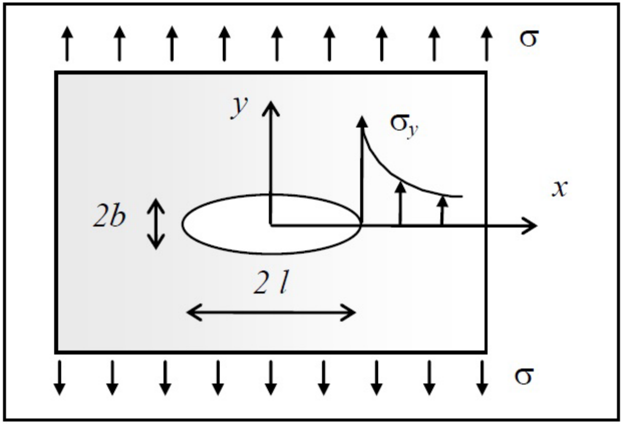
Defekty 1. rodzaju – makroskopowe – wymagają analizy wychodzącej poza zakres Teorii Sprężystości kontinuum – rozwiązania te w punktach nieciągłości (np. promień krzywizny wycięcia zmierzający do zera) skutkują nieskończonymi naprężeniami przy dowolnym obciążeniu. Rozwój mechaniki zniszczenia układów z makroskopowymi defektami geometrycznymi (mechaniki pękania) – od lat 20-tych XX w., początkowa wiedza intuicyjna – np. przy danym obciążeniu obecna w układzie szczelina nie może przekroczyć pewnej długości krytycznej, prowadzącej do zniszczenia.

Początek analizy ciał z defektami makroskopowymi – Charles Inglis (1913) https://pl.scribd.com/doc/301198950/1913-Inglis-Stress-in-a-Plate-Due-to-the-Presence-of-Cracks-and-Sharp-Corners-0

przypadek pasma rozciąganego, osłabionego eliptycznym otworem

Przy $b \neq 0$ maksymalne naprężenia, na brzegach otworu ($|x| = l$), równe są

$$\sigma_{y,\max} = \sigma_y\Big|_{x=l} = \sigma\left(1 + 2\frac{l}{b}\right).$$



Przypadki szczególne:

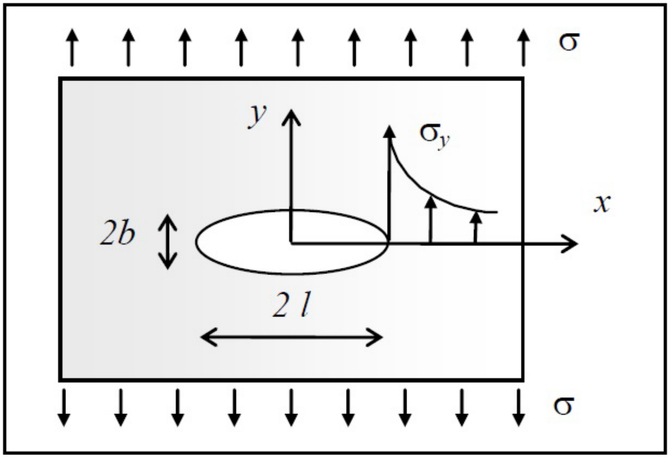
$b \to 0$ - **szczelina o nieskończenie małej grubości**, $x \in \langle -l, l \rangle$ jest obszarem nieciągłości przemieszczeń pionowych v - zachodzi $v^+ = v\big|_{y=0+dy} \neq v^- = v\big|_{y=0-dy}$, naprężenia σ_y dążą do nieskończoności,

$b = l$ - **otwór kołowy** – naprężenia na brzegu $\sigma_y = 3\sigma$ - rozwiązanie rozciąganej jednoosiowo tarczy z otworem kołowym (Ernst Gustav Hirsch, 1898, http://www.fracturemechanics.org/fm/hole.html)

Ch. Inglis (1913), przypadek szczeliny ($b=0$) naprężenia σ_y i przemieszczenie pionowe v w płaszczyźnie szczeliny - na zewnątrz i w jej obrębie:

$$|x| \geq l \;\Rightarrow\; \sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1}} \frac{1}{\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1}\right]},\; v = 0$$

$$|x| < l \;\Rightarrow\; \sigma_y = 0,\;\; v = \frac{2\sigma}{E}\left(l^2 - x^2\right)\;\text{(PSN)},\;\; v = \frac{2\sigma\left(1-\nu^2\right)}{E}\left(l^2 - x^2\right)\;\text{(PSO)}$$



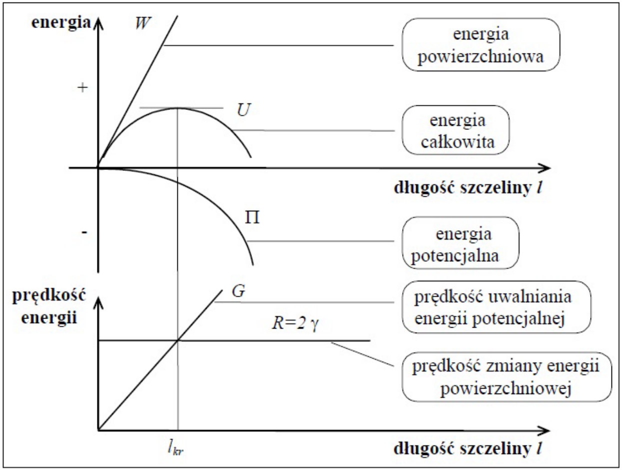
Alan Arnold Griffith (1893-1963) – pionier współczesnej mechaniki pękania
"The phenomena of rupture and flow in solids", Phil. Transact. of the Royal Society (1921)

podstawa – bilans energetyczny:

* **praca związana z rozwarciem szczeliny** (ujemny przyrost energii potencjalnej) Π wynosi (zastosowanie wzoru Inglisa przy $x \in \langle -l, l \rangle$, mnożnik równy 2 – dwa brzegi szczeliny, mnożnik równy 0.5 - sprężystość)

$$\Pi = 2\left(-\frac{1}{2}\sigma \int_{-l}^{l} v\, dx\right) = -\frac{\pi l^2 \sigma^2}{E} \text{ (PSN)}$$

$$\text{lub } \Pi = -\left(1-\nu^2\right)\frac{\pi l^2 \sigma^2}{E} \text{ (PSO)}$$



* **praca** W potrzebna do **utworzenia** się wewnątrz ciała **swobodnej powierzchni** (o wymiarze długości równym $4l$): $W = 4l\gamma$, gdzie γ jest energią utworzenia jednostki (długości) swobodnej powierzchni.

Bilans energii W i Π, energia całkowita $U = W + \Pi$, w funkcji wymiaru l.

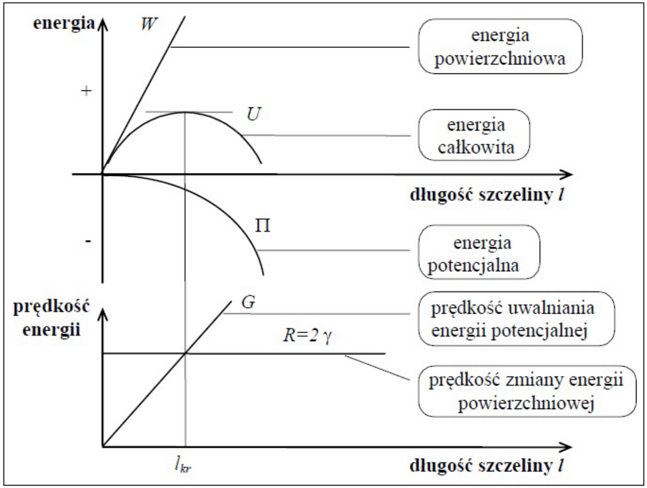
Funkcja $U(l)$ osiąga maksimum w punkcie $l = l_{kr}$, w którym

$$\left.\frac{dU}{dl}\right|_{l=l_{kr}} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{dW}{dl}\right|_{l=l_{kr}} = -\left.\frac{d\Pi}{dl}\right|_{l=l_{kr}}$$

co w rezultacie daje

$$\frac{2\pi l_{kr}\sigma^2}{E} = 4\gamma \ \text{(PSN)}$$

lub $\left(1-\nu^2\right)\dfrac{2\pi l_{kr}\sigma^2}{E} = 4\gamma$ (PSO).



Wprowadzamy wielkość K_c, równą odpowiednio $K_c = \sqrt{2E\gamma}$ (PSN) lub $K_c = \sqrt{\dfrac{2E\gamma}{1-\nu^2}}$ (PSO). Tym samym warunek krytyczny – rozpoczęcia pękania (propagacji szczeliny) w obu przypadkach ma postać $\sigma\sqrt{\pi l} = K_c$.

Wielkość K_c to tzw. odporność materiału na pękanie (fracture toughness) - krytyczna wartość **współczynnika intensywności naprężeń** (stress intensity factor) K o jednostce $\left[kN\, m^{-1.5}\right]$.

Warunek pękania $\sigma\sqrt{\pi l} = K_c$ może być osiągnięty dwoma sposobami:

a) przy danym obciążeniu σ długość szczeliny przekroczy wartość krytyczną

$$l_{kr} = \frac{K_c^2}{\pi\sigma^2} = \begin{cases} \dfrac{2E\gamma}{\pi\sigma^2} & \text{(PSN)} \\ \dfrac{2E\gamma}{\pi\sigma^2\left(1-\nu^2\right)} & \text{(PSO)} \end{cases}$$

b) przy danym wymiarze szczeliny l obciążenie przekroczy wartość krytyczną

$$\sigma_{kr} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E\gamma}{\pi l}} & \text{(PSN)} \\ \sqrt{\dfrac{2E\gamma}{\pi l\left(1-\nu^2\right)}} & \text{(PSO)} \end{cases}$$

Teoria Griffitha - po spełnieniu warunku krytycznego następuje zjawisko lawinowe – pękanie. Teoria ta ma obecnie znaczenie historyczne, zawiera jednak wszystkie elementy teorii zniszczenia ciał idealnie sprężystych, jest to więc **liniowosprężysta teoria pękania**.

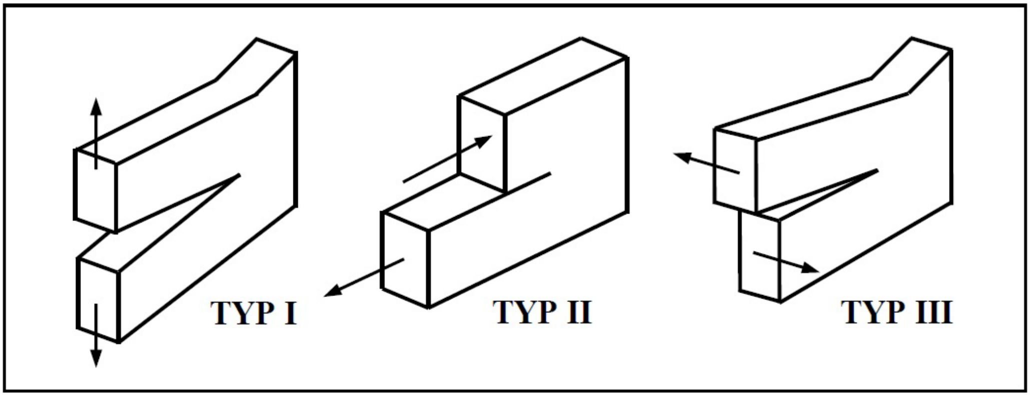
Pomimo osobliwości postaci $x^{-0.5}$ w wierzchołku można zaprojektować bezpieczną szczelinę – określić warunki, aby nie ulegała ona propagacji.

Trzy typy obciążenia szczelin, wyróżniane w mechanice pękania:

Typ I – **rozrywanie** (opening mode) – rozrywane powierzchnie rozchodzą się w kierunku prostopadłym do frontu szczeliny,

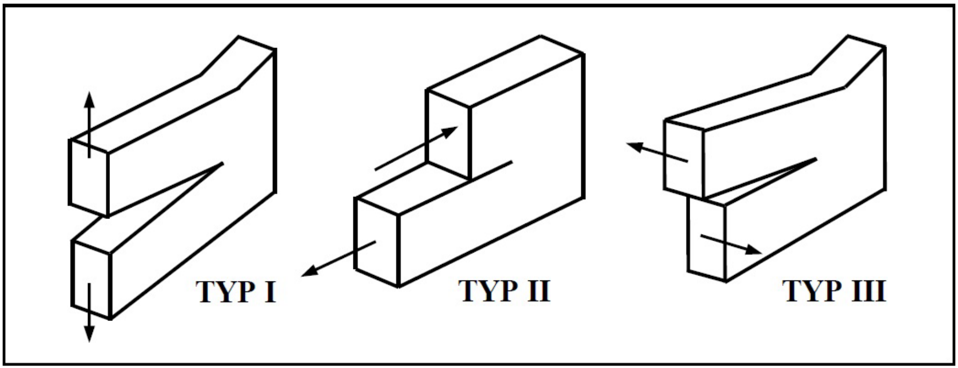
Typ II – **podłużne ścinanie** (sliding mode) – powierzchnie szczeliny ślizgają się w kierunku prostopadłym do frontu szczeliny,

Typ III – **poprzeczne ścinanie** (tearing mode) – powierzchnie szczeliny przesuwają się w kierunku równoległym do frontu szczeliny.



Każdemu z typów obciążenia szczeliny odpowiada rozkład naprężeń (pole tensorowe) w postaci $\sigma_{ij}^{T} = \dfrac{K_T}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{T}(\theta)$,

gdzie r i θ są współrzędnymi biegunowymi układu o początku w wierzchołku szczeliny, $T = I, II, III$ określa typ obciążenia szczeliny, $K_T \in \{K_I, K_{II}, K_{III}\}$ jest współczynnikiem intensywności naprężeń danego typu obciążenia szczeliny, f_{ij}^{T} - funkcją tensorową współrzędnej θ, zależną od typu obciążenia szczeliny.



Wyznaczanie pól naprężeń, przemieszczeń i odkształceń wokół wierzchołka szczeliny (nieciągłość funkcji przemieszczeń) – zagadnienie trudne, wymagające zaawansowanych matematycznych metod. Możliwe podejście – **wykorzystanie zmiennych zespolonych**: N. Muscheliszwili (1933) i H.M. Westergaard (1939).

Do obliczeń przyjmowana jest analityczna funkcja φ zmiennej zespolonej $z = x_1 + ix_2,\ i = \sqrt{-1}$, analityczne są również funkcje:

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \varphi''(z) = \frac{d\varphi'}{dz}, \quad \overline{\varphi}(z) = \int \varphi\left(z\right)dz, \quad \overline{\overline{\varphi}}(z) = \int \overline{\varphi}\left(z\right)dz$$

Ogólna postać funkcji naprężeń Airy: $F = \operatorname{Re}\overline{\overline{\varphi}}\left(z\right) + x_2 \operatorname{Im}\overline{\varphi}\left(z\right)$.

Obie części: rzeczywista i urojona dowolnej funkcji analitycznej zmiennej zespolonej są funkcjami harmonicznymi (o zerowym laplasjanie), można wykazać, że powyżej określona funkcja F jest biharmoniczna – spełnia równanie Airy.

Znajomość funkcji zespolonej φ danego zagadnienia pozwala na wyznaczenie składowych naprężeń:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \operatorname{Re}\varphi(z) - x_2 \operatorname{Im}\varphi'(z) \\ \sigma_{22} = \operatorname{Re}\varphi(z) + x_2 \operatorname{Im}\varphi'(z) \\ \sigma_{12} = -x_2 \operatorname{Re}\varphi'(z) \end{cases}$$

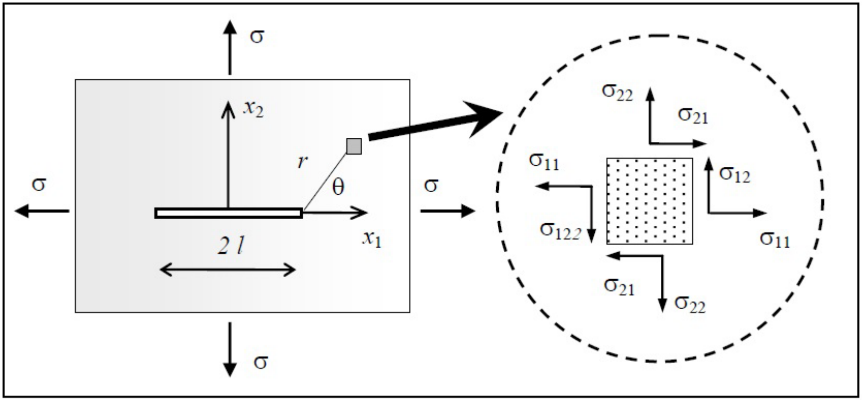
oraz przemieszczeń, dzięki związkom geometrycznym i liniowosprężystemu prawu Hooke'a:

$$\begin{cases} 2G u_1(x_1, x_2) = \dfrac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Re}\overline{\varphi}(z) - x_2 \operatorname{Im}\varphi(z) \\ 2G u_2(x_1, x_2) = \dfrac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Im}\overline{\varphi}(z) - x_2 \operatorname{Re}\varphi(z) \end{cases}$$

gdzie $2G = \dfrac{E}{1+\nu}$, $\kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ (PSN) lub $\kappa = 3 - 4\nu$ (PSO)

Rozwiązanie **Westergaarda – typ I**

szczelina o długości równej $2l$ w nieskończonym paśmie rozciąganym dwuosiowo naprężeniem σ - **obciążenie typu I** (rozrywanie)



Warunki brzegowe na linii szczeliny ($x_2 = 0$):

* w obrębie szczeliny ($|x_1| < l$) zachodzi $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$,

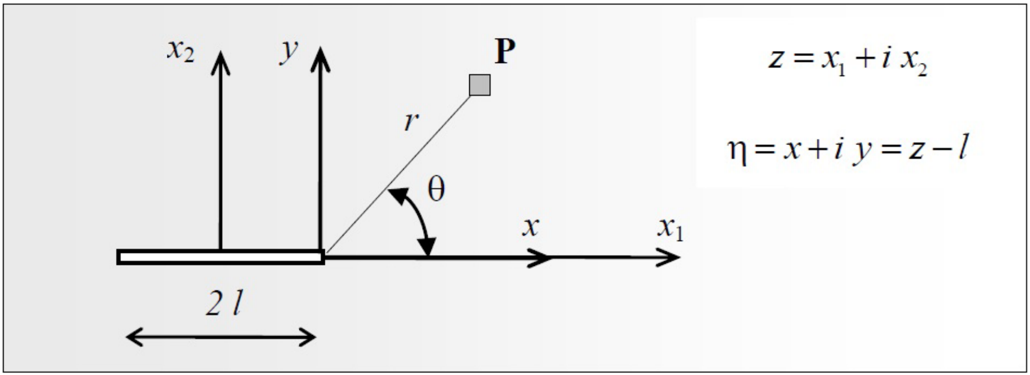
* przy wierzchołkach szczeliny ($|x_1| \to l$) jest $\sigma_{22} \gg \sigma$

* z dala od szczeliny ($|x_1| \to \infty$) jest $\sigma_{22} \to \sigma$

Powyższe warunki spełnia funkcja zespolona $\varphi(z) = \sigma \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}}$.

Przeprowadzona zostaje transformacja układów współrzędnych (x_1, x_2) do postaci (x, y) o początku w wierzchołku szczeliny, tym samym określona jest zmienna zespolona $\eta = x + iy$. Układ biegunowy o początku w wierzchołku szczeliny to (r, θ), gdzie

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\eta|$ - moduł η , zaś $\theta = arctg \dfrac{y}{x}$ - jej argument



Zmienna η w postaciach: trygonometrycznej i wykładniczej:

$$\eta = |\eta|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = e^{i\theta}$$

Funkcja φ względem zmiennej η: $\varphi(\eta) = \sigma l\left(\frac{\eta}{l}+1\right)\left[\eta l\left(\frac{\eta}{l}+2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$

Makroskopowa szczelina powoduje znaczną koncentrację naprężeń) w sąsiedztwie jej wierzchołków, stąd dalsza analiza zostaje ograniczona do tej strefy. W sąsiedztwie wierzchołka szczeliny ($x_1 \to l,\ x_2 \to 0$) zachodzi $\frac{\eta}{l} \to 0$, zatem $\varphi(\eta) = \sigma\sqrt{\frac{l}{2\eta}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\eta}}$,

gdzie współczynnik intensywności naprężeń (stała) $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}$.

Przedstawiając w postaci trygonometrycznej funkcje φ, φ' (reguły potęgowania i pierwiastkowania liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej) oraz rozwijając wyrażenia: $x_2 \operatorname{Im}\varphi'$ i $x_2 \operatorname{Re}\varphi'$ otrzymuje się rozkład naprężeń – składowych kartezjańskich, w funkcji r i θ:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 + \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right), \quad \sigma_{33} = \begin{cases} 0 \; (\mathrm{PSN}) \\ \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) = \\ = \dfrac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2} \; (\mathrm{PSO}) \end{cases} \\ \sigma_{12} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{cases}$$

Pole naprężeń w układzie kartezjańskim można więc zapisać w jednolitej, wcześniej podanej postaci $\sigma_{ij}^{I} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta)$

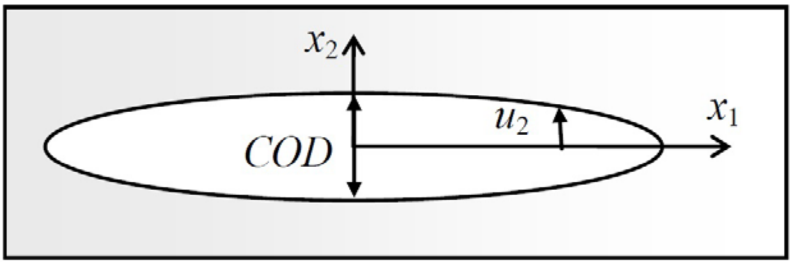
George R. Irwin (1962) – powyższa funkcja opisuje stan naprężenia przy dowolnej szczelinie i dowolnym obciążeniu typu I. Geometrię szczeliny, jej długość oraz sposób przyłożenia obciążenia uwzględnia współczynnik K_I, który tym samym jest nadrzędnym parametrem w opisie naprężeń przy wierzchołku szczeliny.

Stan przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny:

$$u_1 = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - \cos\theta\right), \quad u_2 = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa - \cos\theta\right)$$

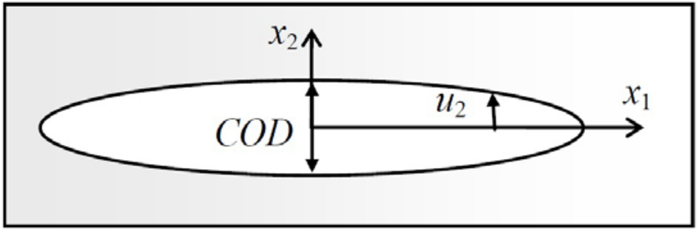
Ze względu na kryteria zniszczenia w mechanice pękania ważne jest rozwarcie brzegów szczeliny. Zastosowanie ogólnej postaci funkcji $\varphi(z)$ w początkowej formie, całym obrębie szczeliny, obliczenie $\overline{\varphi}(z)$ daje rezultat - przemieszczenia pionowe na linii szczeliny:

$$u_2(x_1) = c\sigma\sqrt{l^2 - x_1^2}\text{, gdzie } c = \frac{2}{E} \text{ (PSN) lub } c = \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E} \text{ (PSO).}$$



Maksymalne rozwarcie szczeliny (crack opening displacement – COD), w połowie jej długości ($x_1 = 0$), wynosi $2u_2\big|_{x_1=0} = 2c\sigma l$.

Kształt rozwartej szczeliny – przekształcenie uprzednio zapisanej funkcji $u_2\left(x_1\right)$,



do postaci $\dfrac{u_2^2}{D^2} + \dfrac{x_1^2}{l^2} = 1$ - jest to **równanie elipsy**.

W podobny sposób otrzymuje się rozwiązania, w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny, w funkcji r i θ:

* obciążenie typu II (ścinanie τ w płaszczyźnie Ox_1x_2 prostopadłej do frontu szczeliny): naprężenia $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$,przemieszczenia u_1, u_2,

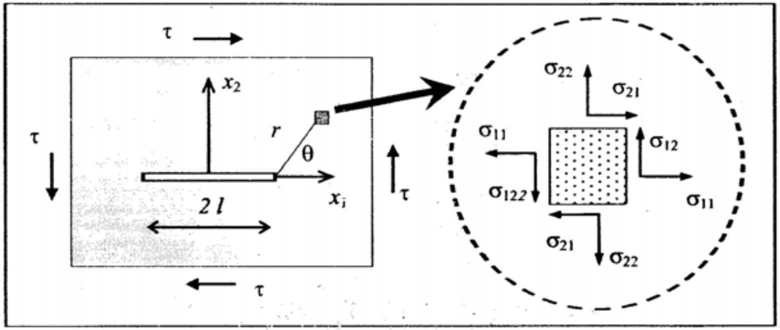
* obciążenie typu III (ścinanie τ w płaszczyźnie Ox_1x_3 frontu szczeliny) – naprężenia: σ_{13}, σ_{23} i przemieszczenia u_3,

w obu przypadkach zachodzi $K_{II} = K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}$.

rozwiązanie **Westergaarda**, typ II - szczelina o długości $2l$ w nieskończonym paśmie ścinanym podłużnie naprężeniem τ - **obciążenie typu II** (ścinanie podłużne)

Funkcja naprężeń przyjęta w postaci:

$$\varphi = -i\frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - l^2}}$$



Naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(2+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

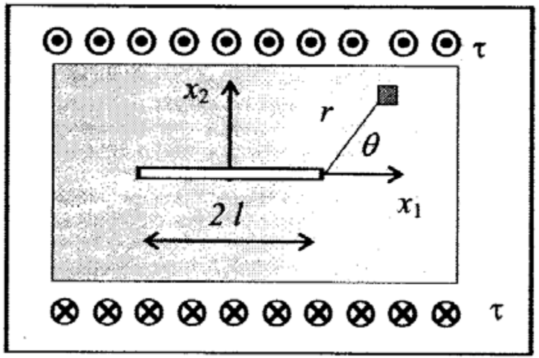
$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0\ (\mathrm{PSN}) \\ \nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right) = \\ \quad = -\dfrac{2\nu K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\ (\mathrm{PSO}) \end{cases}$$

Stan przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny:

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\kappa+\cos\theta\right), \quad u_2 = \frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(2-\kappa-\cos\theta\right)$$

Współczynnik intensywności naprężeń $K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}$.

rozwiązanie Westergaarda, typ III - szczelina o długości $2l$ w nieskończonym paśmie ścinanym poprzecznie naprężeniem τ - **obciążenie typu III** (ścinanie poprzeczne)



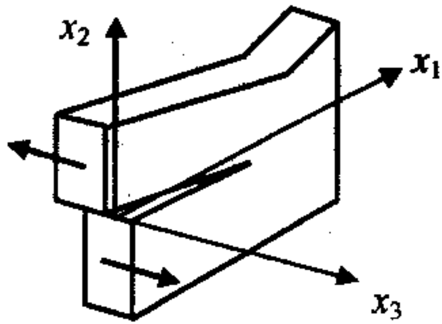
Niezerowe naprężenia:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2} \\[2ex] \sigma_{23} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

Przemieszczenie: $u_3 = \dfrac{2K_{III}}{G}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\dfrac{\theta}{2}$,

gdzie współczynnik intensywności naprężeń $K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}$.

Zadanie: W próbce ze szczeliną pod obciążeniem typu III przyjęto funkcję przemieszczeń $u_3 = w(r,\theta) = r^\lambda f(\theta)$. Podać naprężenia i odkształcenia.



Funkcje przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w problemie szczeliny z obciążeniem typu III:

$$u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = w \equiv w(x_1, x_2).$$

Składowe tensora małych odkształceń:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0,\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}$$

Składowe tensora naprężeń Cauchy:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = G\frac{\partial w}{\partial x_1},\ \sigma_{23} = G\frac{\partial w}{\partial x_2}$$

W układzie równań równowagi (brak sił objętościowych) dwa pierwsze: $\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\sigma_{13,3}=0$ oraz $\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+\sigma_{23,3}=0$ spełnione są tożsamościowo.

Trzecie równanie: $\sigma_{13,1}+\sigma_{23,2}+\sigma_{33,3}=0$ daje w rezultacie zapis

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=\nabla^2 w=0$ - funkcja *w* jest **harmoniczna**.

Zerowy laplasjan przewidywanej funkcji $w=r^{\lambda}f\left(\theta\right)$ - zapis

$\dfrac{\partial^2 f\left(\theta\right)}{\partial\theta^2}+\lambda^2 f\left(\theta\right)=0$. Rozwiązanie: $f\left(\theta\right)=A\sin\lambda\theta+B\cos\lambda\theta$.

Ze względu na antysymetrię oddziaływania i odpowiedzi zachodzi $f\left(0\right)=0$, stąd $B=0$, czyli $f\left(\theta\right)=A\sin\lambda\theta$ (składnik antysymetryczny).

Warunek brzegowy wzdłuż powierzchni szczeliny: $\tau_{\theta z}\Big|_{\theta=\pm\pi}=0$.

Z zapisu $\tau_{z\theta}=\dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}$ wynika $\cos\lambda\pi=0$, stąd $\lambda=\pm\dfrac{n}{2}$, $n=1,3,5,\ldots$

Ujemne wartości n prowadzą do nieskończenie dużych przemieszczeń w wierzchołku szczeliny, przy $r \to 0$. Przyjmując $n = 1$ funkcja przemieszczeń przyjmuje postać $w(r,\theta) = Ar^{1/2} \sin\frac{\theta}{2}$.

Naprężenia we współrzędnych (r,θ): $\tau_{rz} = G\frac{\partial w}{\partial r}$, $\tau_{\theta z} = \frac{G}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$,

po podstawieniu: $\tau_{rz} = \frac{G}{2}Ar^{-1/2} \sin\frac{\theta}{2}$, $\tau_{\theta z} = \frac{G}{2}Ar^{-1/2} \cos\frac{\theta}{2}$.

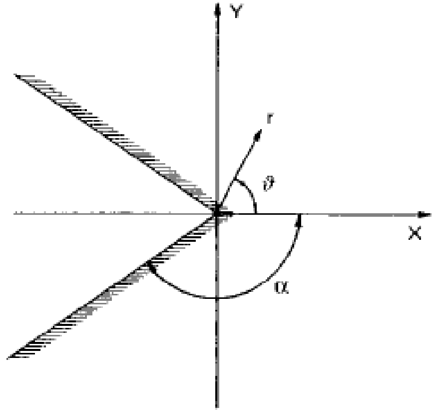
Wprowadzając $A = \frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ naprężenia i przemieszczenie:

$$w = \frac{2K_{III}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}.$$

Są to funkcje w pełni zgodne z przedstawionym rozwiązaniem zagadnienia szczeliny z obciążeniem typu III.

Metoda Williamsa (1952)

– rozwinięcie funkcji naprężeń Airy i naprężeń w szeregi potęgowe. Model: płaszczyzna z kątowym wycięciem równym 2α, układ biegunowy (r, ϑ) o początku w wierzchołku wycięcia.



Funkcja Airy: $F(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n + 1} f_n(\vartheta)$.

Rozdzielenie czynników: potęga, z wykładnikiem równym $\lambda_n + 1$(osobliwość rozkładu naprężeń w sąsiedztwie wierzchołka) zależy od warunków brzegowych swobodnej krawędzi, funkcja $f_n(\vartheta)$ zależy od obciążenia przełożonego z dala od wycięcia („w nieskończoności” – far-field stress).

Naprężenia, otrzymane w układzie biegunowym z funkcji Airy:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \left[f_n''(\vartheta) + (\lambda_n + 1) f_n(\vartheta) \right] \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \left[\lambda_n (\lambda_n + 1) f_n(\vartheta) \right] \\ \sigma_{r\vartheta} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \lambda_n f_n'(\vartheta) \end{cases}$$

Sprawdzenie spełnienia równania biharmonicznego:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = \sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \left[f_n''(\vartheta) + (\lambda_n + 1)^2 f_n(\vartheta) \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2 F = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 3} (\lambda_n - 1)(\lambda_n - 2) \left[f_n'' + (\lambda_n + 1)^2 f_n \right]$$

obliczenia:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 F = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 3} (\lambda_n - 1) \left[f_n'' + (\lambda_n + 1)^2 f_n \right]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\nabla^2 F = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 3} \left[f_n^{IV} + (\lambda_n + 1)^2 f_n'' \right]$$

Równanie biharmoniczne:

$$\nabla^4 F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2}\right)\nabla^2 F =$$

$$: \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n - 3}\left\{\left(\lambda_n + 1\right)^2\left[f_n'' + \left(\lambda_n + 1\right)^2 f_n\right] + \left[f_n^{IV} + \left(\lambda_n + 1\right)^2 f_n''\right]\right\} = 0$$

Spełnienie równania - zerowanie się funkcji, po przekształceniach:

$f_n^{IV} + 2\left(\lambda_n^2 + 1\right) f_n'' + \left(\lambda_n^2 - 1\right)^2 f_n = 0$, rozwiązaniem ogólnym jest

$$f_n(\vartheta) = A_n \cos(\lambda_n + 1)\vartheta + B_n \cos(\lambda_n - 1)\vartheta + C_n \sin(\lambda_n + 1)\vartheta + D_n \sin(\lambda_n - 1)\vartheta$$

Dwa pierwsze wyrazy, ze stałymi A_n i B_n tworzą rozwiązanie symetryczne (typ I szczeliny), kolejne, ze stałymi C_n i D_n – rozwiązanie antysymetryczne (typ II szczeliny).

Warunki brzegowe na krawędziach: naprężenia normalne obwodowe oraz styczne zerowe: $\sigma_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=\pm\alpha} = 0$, $\sigma_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pm\alpha} = 0$, przy dowolnym $r > 0$, tym samym zachodzi $f_n(\pm\alpha) = 0$, $f_n'(\pm\alpha) = 0$.

Podstawienie podanego rozwiązania ogólnego, z rozdzieleniem rozwiązań: symetrycznego i antysymetrycznego tworzy układ równań jednorodnych:

Typ I: $$\begin{cases} A_n \cos(\lambda_n + 1)\alpha + B_n \cos(\lambda_n - 1)\alpha = 0 \\ A_n(\lambda_n + 1)\sin(\lambda_n + 1)\alpha + B_n(\lambda_n - 1)\sin(\lambda_n - 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

Typ II: $$\begin{cases} C_n \sin(\lambda_n + 1)\alpha + D_n \sin(\lambda_n - 1)\alpha = 0 \\ C_n(\lambda_n + 1)\cos(\lambda_n + 1)\alpha + D_n(\lambda_n - 1)\cos(\lambda_n - 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

Rozwiązania niezerowe układów równań jednorodnych mogą być jedynie zależne od stałych współczynników, w przypadku pierwszym stałe A i B zależne od współczynnika K_I, w przypadku drugim stałe C i D zależne od współczynnika K_{II} . Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest zerowanie się wyznaczników

$$(\lambda_n - 1)\sin(\lambda_n - 1)\alpha \cos(\lambda_n + 1)\alpha - (\lambda_n + 1)\cos(\lambda_n - 1)\alpha \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0$$

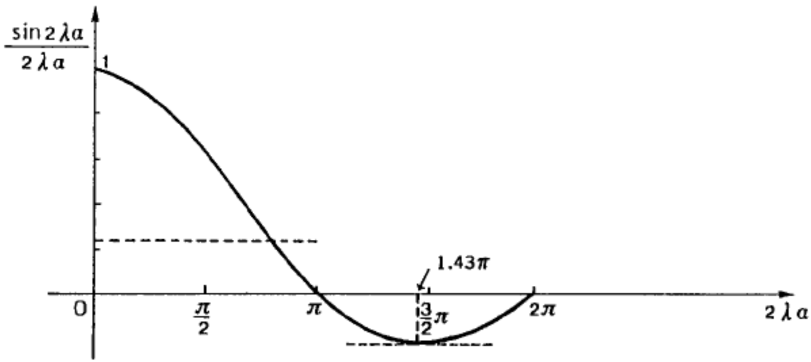
$$(\lambda_n + 1)\sin(\lambda_n - 1)\alpha \cos(\lambda_n + 1)\alpha - (\lambda_n - 1)\cos(\lambda_n - 1)\alpha \sin(\lambda_n + 1)\alpha = 0$$

Transformacje trygonometryczne → przekształcenie odpowiednio do form $\sin 2\lambda_n\alpha + \lambda_n \sin 2\alpha = 0$ oraz $\sin 2\lambda_n\alpha - \lambda_n \sin 2\alpha = 0$,

lub jednolicie: $\dfrac{\sin 2\lambda_n\alpha}{2\lambda_n\alpha} = \pm\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$

Jest to problem własny, rozwiązaniem są wartości własne λ odpowiednio problemów: symetrycznego λ_I i antysymetrycznego λ_{II}.

Badanie przebiegu funkcji $y = \dfrac{\sin 2\lambda\alpha}{2\lambda\alpha}$ prowadzi do określenia wartości λ_I i λ_{II} w odpowiednich przedziałach.



Wpływ skończonych wymiarów i efektu skali

Sformułowania wybranych problemów mechaniki pękania – naprężenia w otoczeniu szczeliny, obciążenia przyłożone w nieskończonej odległości.

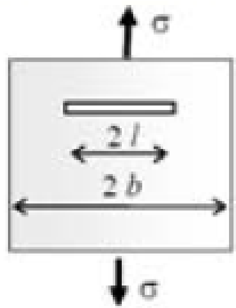
Układy o wymiarach skończonych – rozkłady naprężeń w otoczeniu szczelin niemożliwe w postaci zamkniętej. Przypadki szczególne – rozwiązania w postaci tabel, wykresów lub funkcji parametru – proporcji wymiarów.

Poniżej – wartości współczynników K_I w wybranych układach szczelin i obciążenia, z dwóch podanych wartości jedna dotyczy próbek normowych

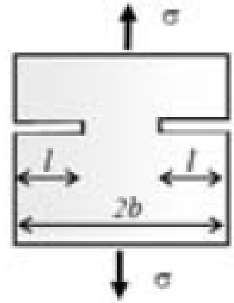
1) Szczelina centralna w paśmie rozciąganym

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\sqrt{\sec\frac{\pi l}{2b}} = \sigma\sqrt{\pi l}\left(\cos\frac{\pi l}{2b}\right)^{-0.5}$$

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\left[1 + 0.128\frac{l}{b} - 0.288\left(\frac{l}{b}\right)^2 + 1.523\left(\frac{l}{b}\right)^3\right]$$



2) Dwie szczeliny krawędziowe w paśmie rozciąganym



$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi l}$ przy małych ilorazach l/b

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\left[1.12 + 0.2\frac{l}{b} - 1.2\left(\frac{l}{b}\right)^2 + 1.93\left(\frac{l}{b}\right)^3\right]$$

3) Belka trójpunktowo zginana, szczelina krawędziowa

$$K_I = \frac{PS}{BW^{1.5}}\left[2.9\left(\frac{l}{W}\right)^{0.5} - 4.6\left(\frac{l}{W}\right)^{1.5} + 21.8\left(\frac{l}{W}\right)^{2.5} - 37.6\left(\frac{l}{W}\right)^{3.5} + 38.7\left(\frac{l}{W}\right)^{4.5}\right]$$