

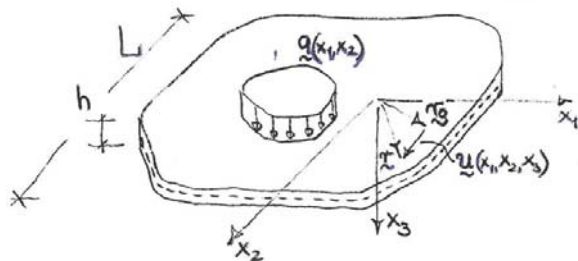
# Teoria płyt cienkich sprężystych

**Płyta** – dźwigar powierzchniowy, powierzchnia środkowa (równooddalona od powierzchni ograniczających) jest płaszczyzną, obciążenie prostopadłe do powierzchni środkowej

Ogólne obciążenie dźwigara płaskiego:

\* składniki w płaszczyźnie - **stan tarczowy** (PSN, rozkład naprężeń równomierny na grubości)

\* składniki prostopadłe do płaszczyzny – **stan płytowy**.



Płyta cienka – iloraz grubości  $h$  i wymiaru charakterystycznego

w planie (mniejszego)  $L$ :  $\frac{h}{L} \leq \frac{1}{5}$  (granica umowna)

Założenie małych przemieszczeń:  $|u_i(x_1, x_2, x_3)| \ll h$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  
zwykle w problemach inżynierii lądowej spełnione.

Założenia w teorii płyt cienkich sprężystych:

1) punkty leżące na prostej prostopadłej do powierzchni środkowej (przed obciążeniem – płaszczyzny) po odkształceniu znajdują się na prostej prostopadłej do ugiętej powierzchni płyty (ściśle: do płaszczyzny stycznej do w.w. powierzchni), jest to **założenie kinematyczne Kirchhoffa**, odpowiednik założenia Bernoulliego płaskich przekrojów w teorii belek

2) w całym obszarze płyty przyjmuje się PSN: zachodzi

$$|\sigma_{i3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}|, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \text{zatem do obliczeń } \sigma_{i3} = 0.$$

Oznaczenia przemieszczeń punktów powierzchni środkowej płyty:

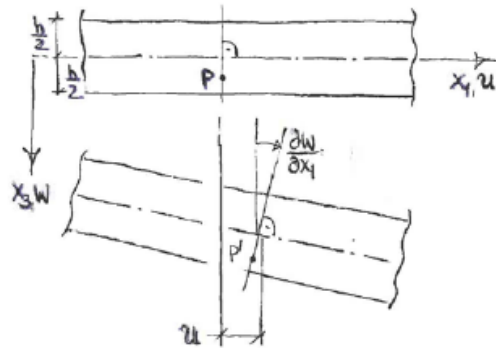
$$\left. \begin{aligned} u_1(x_1, x_2, 0) &\equiv u(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, 0) &\equiv v(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \text{ stan tarczowy}$$

$u_3(x_1, x_2, 0) \equiv w(x_1, x_2)$  - **ugięcie** – podstawowa niewiadoma,

Zadanie: wyprowadzenie równania różniczkowego z niewiadomą funkcją  $w(x_1, x_2)$ , łączące komplet równań podstawowych TS.

Przemieszczenia  $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T$  dowolnego punktu płyty (zgodnie z założeniem Kirchhoffa):

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \end{cases}$$



Związki geometryczne w płaskim stanie naprężenia:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = u_{,1} - x_3 w_{,11} \cong -x_3 w_{,11} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = v_{,2} - x_3 w_{,22} \cong -x_3 w_{,22} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (u_{,2} + v_{,1}) - x_3 w_{,12} \cong -x_3 w_{,12} \end{cases}$$

$u_{,i} \cong 0, v_{,i} \cong 0$   
gdyż  $u$  i  $v$  –  
przemieszczenia stanu  
tarczowego

## Liniowosprężyste równania fizyczne – prawo Hooke’a w PSN

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = -\frac{E}{1-\nu^2}x_3(w_{,11} + \nu w_{,22}) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = -\frac{E}{1-\nu^2}x_3(w_{,22} + \nu w_{,11}) \\ \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} = -\frac{E}{1+\nu}x_3w_{,12} \end{cases}$$

Równania równowagi:  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$  - trzy formy, w stanie 3D - pomimo, iż składowe naprężenia w kierunku  $x_3$  są znacznie mniejsze, niż składowe w płaszczyźnie  $Ox_1x_2$ , pochodne wszystkich naprężeń są ze sobą porównywalne.

Zestawienie wszystkich powyższych związków :

równanie różniczkowe płyty, z niewiadomą funkcją  $w(x_1, x_2)$  :

$$\Delta(\Delta w) = \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \frac{q(x_1, x_2)}{D} \text{ lub } w_{,1111} + w_{,2222} + 2w_{,1122} = \frac{q}{D}$$

Sztywność płytowa  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - parametr geometryczny i materiałowy

## Sily przekrojowe w płytach (na jednostkę szerokości umownego przekroju):

\* momenty zginające i skręcające - jednostka  $\left[ \frac{kNm}{m} \right]$

$$M_{11} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = -D (w_{,11} + \nu w_{,22})$$

$$M_{22} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = -D (w_{,22} + \nu w_{,11})$$

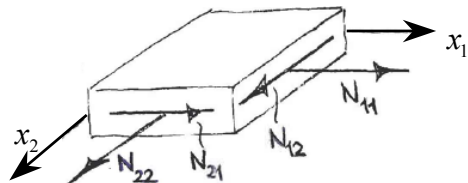
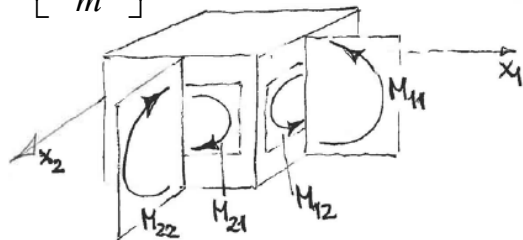
$$M_{12} = M_{21} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = -(1-\nu)D w_{,12}$$

\* siły poprzeczne - jednostka  $\left[ \frac{kN}{m} \right]$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta w, \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta w, \quad \text{zachodzi } Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_2 = \dots$$

\* siły normalne i styczne - jednostka  $\left[ \frac{kN}{m} \right]$  -

siły stanu tarczowego, pomijane w płytach



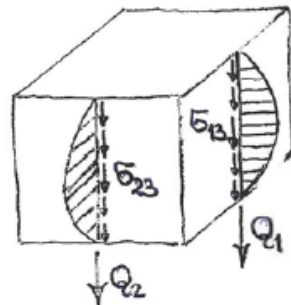
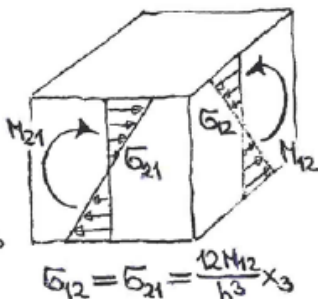
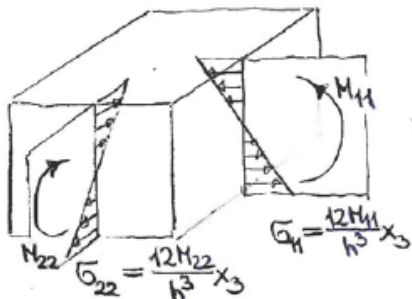
**Matematyczne definicje sił przekrojowych w płytach**, jako wypadkowych naprężeń (analogia do definicji sił przekrojowych w elementach prętowych):

\* momenty płytowe:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11} dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{22} dx_3, \quad M_{12} = M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{12} dx_3$$

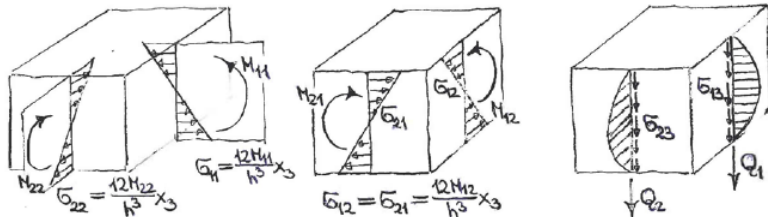
\* siły poprzeczne płytowe:  $Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3$ ,  $Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3$

\* siły tarczowe:  $N_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3$ ,  $N_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3$ ,  $N_{12} = N_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3$



Obciążenie poprzeczne  $q(x_1, x_2)$  można wyrazić względem naprężeń  $\sigma_{33}$  :

$$q = \sigma_{33}|_{x_3=0.5h} - \sigma_{33}|_{x_3=-0.5h}$$



Naprężenia tworzące PSN - normalne  $\sigma_{11}$  i  $\sigma_{22}$  oraz styczne  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  względem zmiennej  $x_3$  rozłożone liniowo, ekstrema na krawędziach płyty.

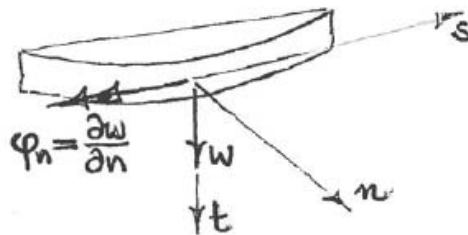
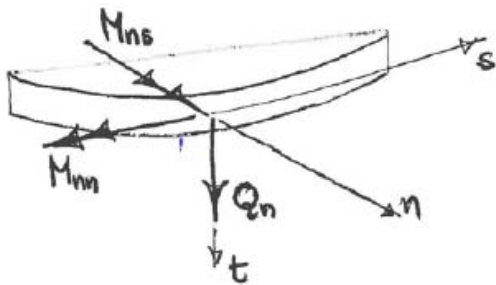
Naprężenia styczne  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  - względem zmiennej  $x_3$  rozkład paraboliczny, podobnie, jak w belkach naprężenia  $\tau$  odpowiadające sile tnącej  $T$ ,

ekstremalne – w powierzchni środkowej:  $\sigma_{13}|_{x_3=0} = \frac{3 Q_1}{2 h}$ ,  $\sigma_{23}|_{x_3=0} = \frac{3 Q_2}{2 h}$ .

Paraboliczny rozkład naprężeń stycznych  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  wynika z równań równowagi, przykładowo, przy braku sił objętościowych pierwsze równanie równowagi  $\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} = 0$  daje  $\sigma_{31,3} = -\sigma_{11,1} - \sigma_{21,2}$ . Prawa strona jest funkcją liniową zmiennej  $x_3$ , stąd funkcja  $\sigma_{31}$  jest względem  $x_3$  kwadratowa.

Zachodzi wspomniana już zależność:  $|\sigma_{i3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}|$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$

# Warunki brzegowe elementu płytowego



Oznaczenia:  $s$  – oś styczna do brzegu płyty,  $n$  – oś normalna, obie w płaszczyźnie środkowej,  $t$  – oś prostopadła do płaszczyzny środkowej

Brzegowe wartości sił przekrojowych płytowych:

$M_{nn}$  - moment zginający,  $M_{ns}$  - moment skręcający,  $Q_n$  - siła poprzeczna

Brzegowe przemieszczenia uogólnione:

$w$  - ugięcie,  $\varphi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = w_{,n}$  - kąt obrotu normalnej

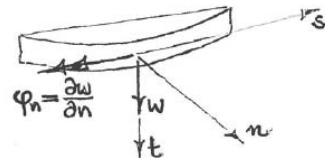
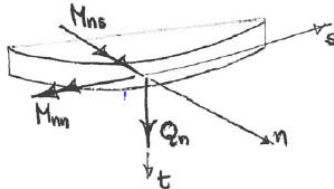
W płytach o płaszczyźnie środkowej  $Ox_1x_2$  zachodzi  $t \equiv x_3$ . Przypadki:

\* kierunki  $n \equiv x_1$ ,  $s \equiv x_2$ : momenty  $M_{11}$  i  $M_{12}$ , siła poprzeczna  $Q_1$ , kąt  $\varphi_1$

\* kierunki  $n \equiv x_2$ ,  $s \equiv x_1$ : momenty  $M_{22}$  i  $M_{21}$ , siła poprzeczna  $Q_2$ , kąt  $\varphi_2$



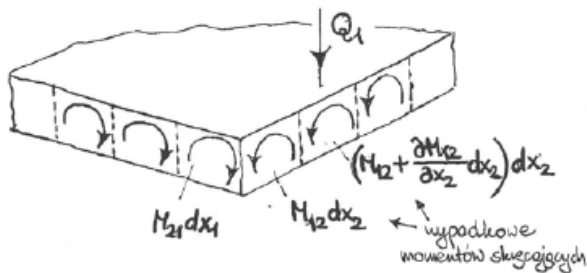
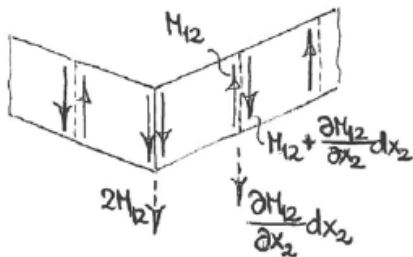
Równanie różniczkowe płyty, czwartego rzędu, wymaga warunków brzegowych obejmujących cztery wielkości: dwie statyczne i dwie geometryczne.



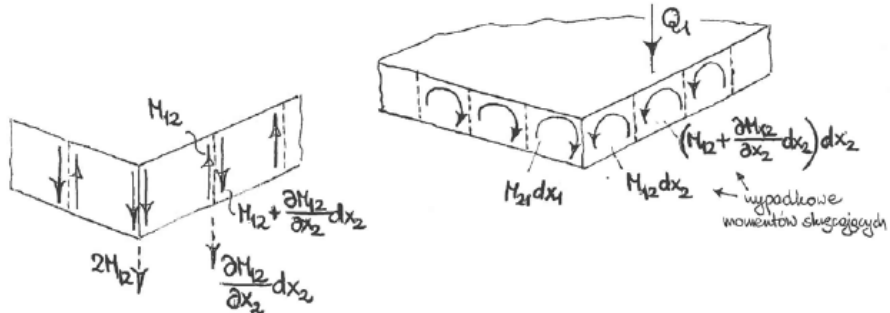
Rysunki – pięć wielkości brzegowych (trzy statyczne, dwie geometryczne). Redukcja zbioru sił brzegowych do dwóch wielkości – wprowadzenie tzw.

**zastępczej siły poprzecznej  $V$**  na brzegu. Wzór:  $V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$ .

Uzasadnienie, na brzegu prostoliniowym w płaszczyźnie  $Ox_1x_2$



Uzasadnienie,  
na brzegu  
prostoliniowym  
o normalnej  $x_1$

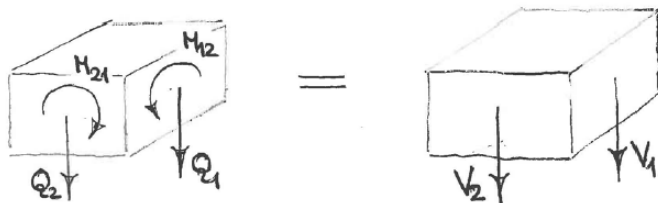


Siła poprzeczna, równoważna momentowi skręcającemu  $M_{12}$ , obliczona na jednostkę długości brzegu, wynosi  $\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$ . Łączne działanie siły poprzecznej

$Q_1$  i momentu skręcającego  $M_{12}$  - zastępcza siła poprzeczna  $V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}$ .

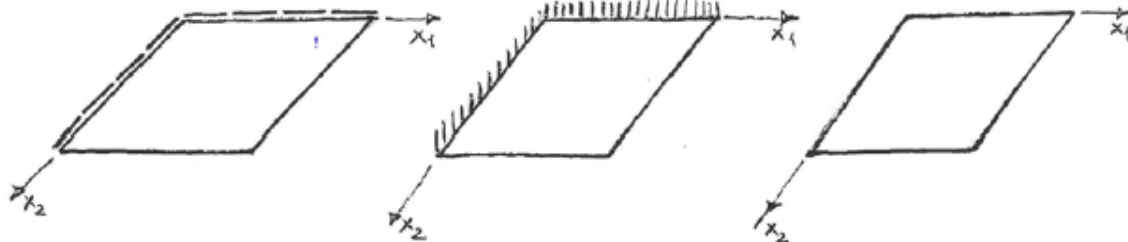
Podobnie  $V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}$ .

W narożu prostokątnym  
reakcja  $R = 2M_{12}$  [kN/m]



Zalecenie w płytach żelbetowych  
krzyżowo zbrojonych – dodatkowe zbrojenie dwukierunkowe w narożach.

# Typowe, proste sposoby podparcia płyt w układzie kartezjańskim



swobodne podparcie

$$x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ M_{11} = 0 \Leftrightarrow w_{,11} = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ M_{22} = 0 \Leftrightarrow w_{,22} = 0 \end{cases}$$

utwierdzenie

$$x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w_{,1} = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w_{,2} = 0 \end{cases}$$

brzeg swobodny

$$x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_{11} = 0 \\ V_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_{22} = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

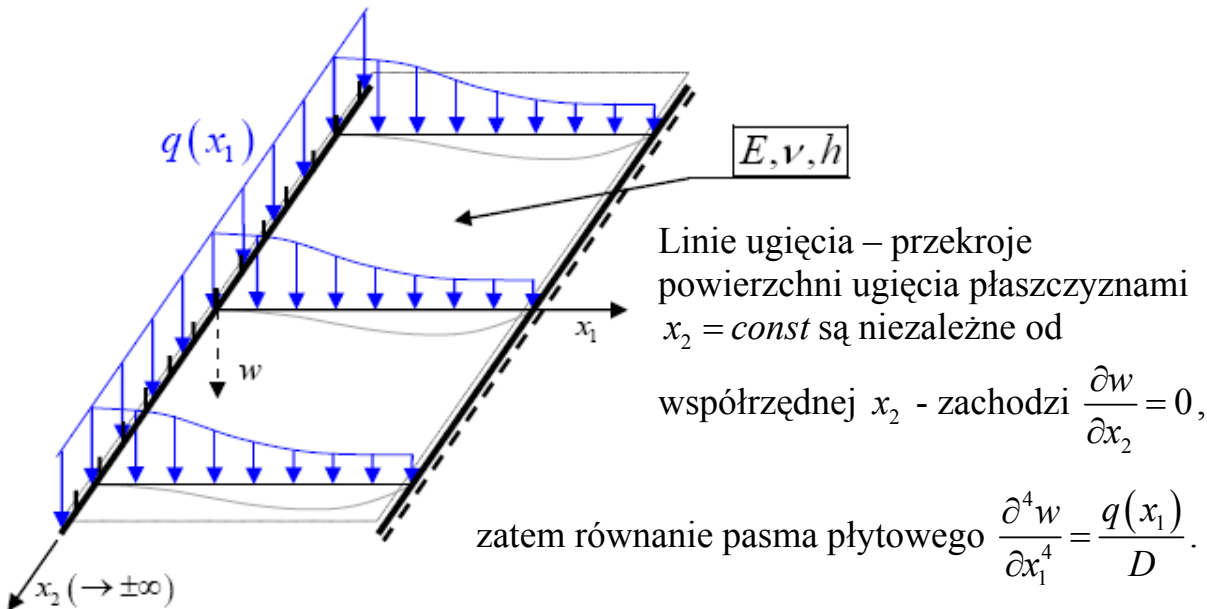
Warunki te są analogiczne do warunków belkowych:

- zerowy moment zginający na brzegu swobodnie podpartym oznacza zerową drugą pochodną funkcji ugięcia względem współrz. prostopadłej do brzegu
- brzeg swobodny – zerowy moment zginający w płaszczyźnie prostopadłej do brzegu oraz zerowa **zastępcza** siła poprzeczna

## Przykład: **PASMO PŁYTOWE**

$$\text{Równanie różniczkowe płyty: } \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}$$

Założenie **symetrii translacyjnej**: obciążenie, geometria i warunki brzegowe są jedynie funkcją współrzędnej  $x_1$ , druga, nieaktywna współrzędna  $x_2 \in \mathbf{R}$



Równanie pasma płytowego obejmuje jedną zmienną, w rozwiązaniu można zatem stosować symbol pochodnej zwyczajnej:  $\frac{d^4 w}{dx_1^4} = w^{IV}(x_1) = \frac{q(x_1)}{D}$ .

Przykład: **pasmo płytowe swobodnie podparte**, pod obciążeniem  $q = \text{const}$  zakres  $x_1 \in \langle 0, a \rangle$ , dane:  $E, \nu, h$ .

Równanie:  $Dw^{IV} = q$

Rozwiązanie:  $Dw^{III} = q(x_1 + C_1)$ ,

$Dw'' = q(x_1^2/2 + C_1 x_1 + C_2)$ ,  $Dw' = q(x_1^3/6 + C_1 x_1^2/2 + C_2 x_1 + C_3)$ ,

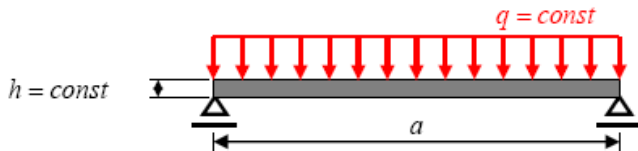
$Dw = q(x_1^4/24 + C_1 x_1^3/6 + C_2 x_1^2/2 + C_3 x_1 + C_4)$

Warunki brzegowe:  $w(0) = 0$ ,  $w''(0) = 0$ ,  $w(a) = 0$ ,  $w''(a) = 0$ ,

z układu równań stałe całkowania:  $C_2 = C_4 = 0$ ,  $C_1 = -qa^2/2$ ,  $C_3 = qa^4/24$ .

Rozwiązanie:  $w(x_1) = \frac{q}{D} \left( \frac{x_1^4}{24} - \frac{ax_1^3}{12} + \frac{a^3 x_1}{24} \right) = \frac{qa^4}{24D} \left[ \left( \frac{x_1}{a} \right)^4 - 2 \left( \frac{x_1}{a} \right)^3 + \frac{x_1}{a} \right]$ .

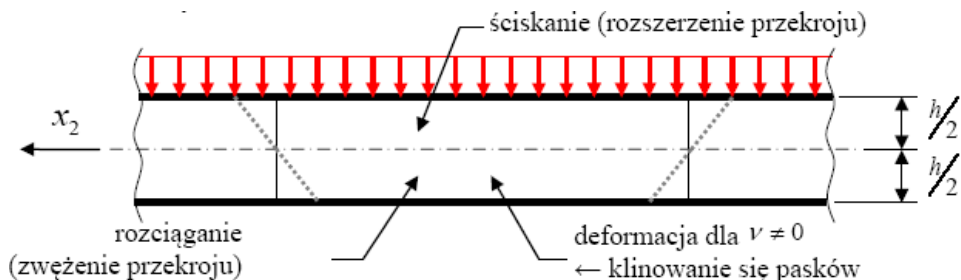
Ugięcie maksymalne:  $w_{\max} = w\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{qa^2}{D}$ .



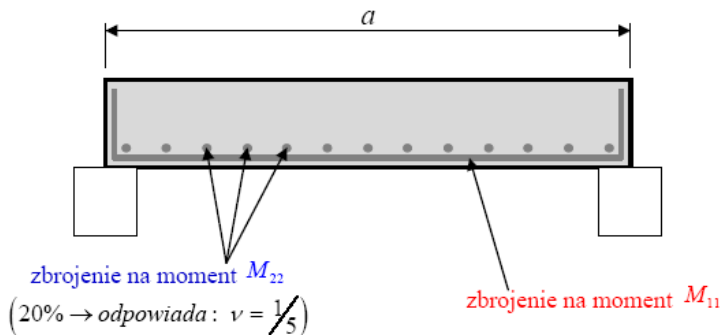


Porównanie ugięcia pasma płytowego  $w_p$  z ugięciem belki  $w_b$  o tych samych parametrach  $E, \nu, h$  i szerokości przekroju  $b = 1[m]$ :

$$\frac{w_p}{w_b} = \frac{EI}{D} = \frac{Eh^3}{12} \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} = 1 - \nu^2 \leq 1 - \text{przy niezerowej liczbie } \nu \text{ jest } w_p < w_b$$

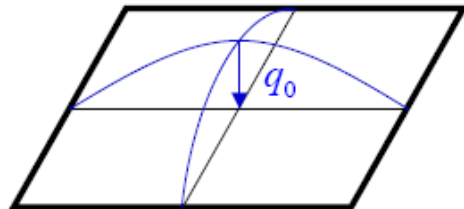
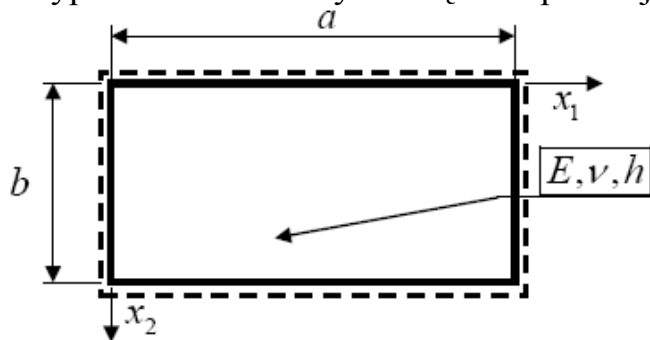


Istnieje konieczność dwukierunkowego zbrojenia pasma płytowego (przyjmując w betonie  $\nu = 0.2$  procent zbrojenia w kierunku  $x_2$  może stanowić 1/5 procentu zbrojenia wzdłuż osi  $x_1$ ).



## Przykład: **PLYTA PROSTOKĄTNA**

Przypadek elementarny: obciążenie podwójnie sinusoidalne



Funkcja obciążenia - sinusoidalna „kopuła”:  $q(x_1, x_2) = q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$

Równanie płyty:  $\nabla^4 w = \frac{q(x_1, x_2)}{D} = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$

Warunki brzegowe:  $\begin{cases} x_1 = 0 \text{ lub } x_1 = a: & w = 0, w_{,11} = 0 \\ x_2 = 0 \text{ lub } x_2 = b: & w = 0, w_{,22} = 0 \end{cases}$

Przewidywane rozwiązanie  $w(x_1, x_2) = w_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$  - w.b. spełnione



Podstawienie do równania płyty:

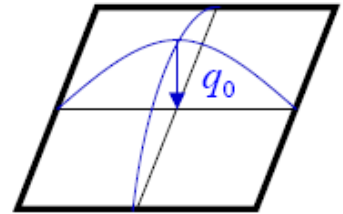
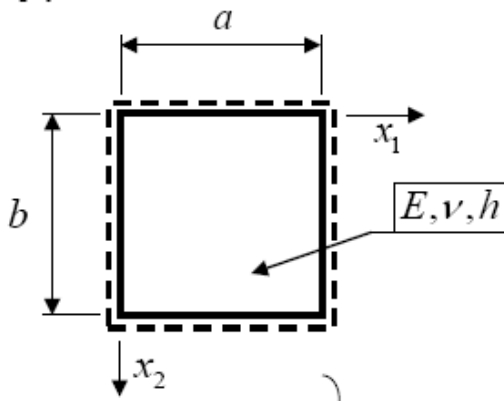
$$w_0 \left( \frac{\pi^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} \right) = w_0 \pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{q_0}{D}, \text{ stąd } w_0 = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2},$$

tym samym  $w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$ . Momenty płytowe:

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) = \frac{q_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) = \frac{q_0}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$$

$$M_{12} = -D(1 - \nu)w_{,12} = -\frac{q_0(1 - \nu)}{\pi^2 ab \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}$$



Przypadek płyty kwadratowej ( $a = b$ )

Wartości maksymalne, w środku płyty ( $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$ ):

\* ugięcie  $w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^2 D} \cong 0.00257 \frac{q_0 a^4}{D}$ ,

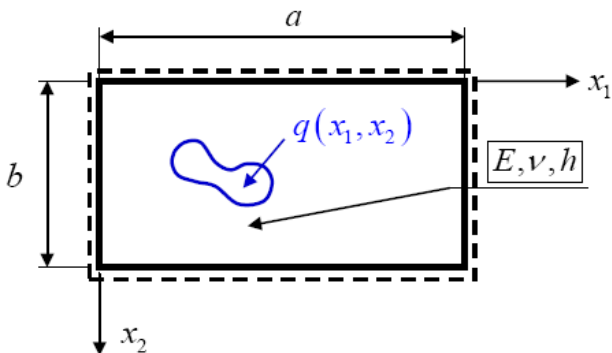
\* momenty zginające  $M_{11,\max} = M_{22,\max} = (1 + \nu) \frac{q_0 a^2}{4\pi^2}$

**Płyta prostokątna swobodnie podparta na wszystkich brzegach, obciążona dowolnie na całej powierzchni**

Postać obciążenia – podwójny szereg trygonometryczny, obciążenie jednego znaku w obrębie płyty

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \text{ gdzie}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2$$



	$a$	$a$	$a$
$b$	+	-	+
$b$	-	+	-
$b$	+	-	+

Przykład: rozwinięcie w podwójny szereg obciążenia stałego  $q(x_1, x_2) = q_0$ .

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 = \frac{4q_0}{ab} \left( -\frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \right) \Big|_0^a \left( -\frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x_2}{b} \right) \Big|_0^b$$

stąd  $a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \frac{2a}{m\pi} \frac{2b}{n\pi} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$  przy obu  $m, n$  nieparzystych, inaczej  $a_{mn} = 0$ .

Przewidywane rozwiązanie w ogólnym przypadku obciążenia:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} -$$

- funkcja spełniająca warunki brzegowe swobodnego podparcia.

Podstawienie do równania płyty  $\nabla^4 w = q(x_1, x_2)/D$  i porównanie ogólnych

wyrazów dwóch równych szeregów daje  $D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} = a_{mn}$ ,

tym samym  $w(x_1, x_2) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$

W przypadku  $q(x_1, x_2) = q_0 = \text{const}$  jest

$$w(x_1, x_2) = \frac{16q_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

gdy oba  $m, n$  nieparzyste

$$q(x_1, x_2) = q_0 \Rightarrow w(x_1, x_2) = \frac{16q_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

oba  $m, n$  nieparzyste. Ugięcie maksymalne w środku płyty,  $x_1 = 0.5a, x_2 = 0.5b$

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{0.5(m+n)-1}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \text{ Jest to szereg szybkozbieżny, dobrym}$$

przybliżeniem może być pierwszy wyraz ( $m = n = 1$ ).

1) płyta kwadratowa ( $a = b$ ), pierwszy wyraz ( $m = n = 1$ ) – rezultat

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^6} \cong 0.00416 \frac{q_0 a^4}{D}, \text{ większa liczba wyrazów: } w_{\max} \cong 0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}$$

2) gdy  $b = 3a$  ugięcie, wzór z większą liczbą wyrazów  $w_{\max} \cong 0.0122 \frac{q_0 a^4}{D}$

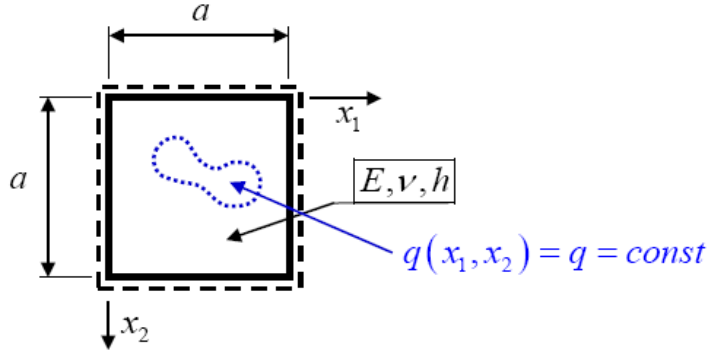
3) gdy  $b \rightarrow \infty$  - pasmo,  $w_{\max} \cong 0.0130 \frac{q_0 a^4}{D}$ . Gdy obciążenie  $q \cong \text{const}$

przybliżenie pasmem płytowym można stosować przy proporcjach  $b > 3a$ .

# płyta kwadratowa – momenty płytowe

(beton  $\rightarrow \nu \cong 0.2$ )

pod obciążeniem stałym  $q_0$ .



Funkcja ugięć, przy  $a = b$ :

$$w(x_1, x_2) = \frac{16q_0 a^4}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a}$$

Z symetrii wyrażenia wynika  $w_{,11} = w_{,22}$ , tym samym funkcje  $M_{11} = M_{22}$ .

**Momenty zginające:**  $M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) = -Dw_{,11}(1 + \nu)$ ,

$$\text{gdzie } w_{,11} = -\frac{16q_0 a^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a}$$

pierwszy wyraz ( $m = n = 1$ ), moment w środku płyty

$$M_{11, \max} = \frac{4q_0 a^2}{\pi^4} (1 + \nu) \cong 0.048 q_0 a^2, \text{ na brzegach momenty } M_{11} \text{ i } M_{22} \text{ zerowe.}$$

**Momenty skręcające:**  $M_{12} = -D(1-\nu)w_{,12}$ ,

gdzie  $w_{,12} = \frac{16q_0a^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{a}$

pierwszy wyraz ( $m = n = 1$ ), moment w narożu płyty

$$M_{12,extr} = -\frac{4q_0a^2}{\pi^4}(1-\nu) \cong -0.032q_0a^2, \text{ w } \text{środku momenty } M_{12} \text{ zerowe.}$$

Momenty płytowe w układzie obróconym o kąt  $\varphi = 45^\circ$ :

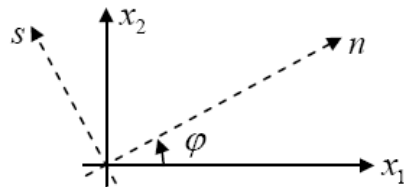
Ze wzorów transformacyjnych naprężeń wynika transformacja ich wypadkowych – momentów (jednakowa reguła całkowania)

\* moment zginający  $M_{nn} = M_{11} \cos^2 \varphi + M_{22} \sin^2 \varphi + M_{12} \sin 2\varphi$

\* moment skręcający  $M_{ns} = 0.5(M_{22} - M_{11}) \sin 2\varphi + M_{12} \cos 2\varphi$

Gdy  $\varphi = 45^\circ$  jest

$$M_{nn} = M_{11} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M_{22} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M_{12} = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) + M_{12} = M_{11} + M_{12}$$



## Wykres momentów zginających $M_{mn}$ na przekątnej płyty

\* wartość w środku płyty

( $x_1 = x_2 = 0.5a$ ):

$$M_{mn} = 0.048 q_0 a^2$$

\* wartość w narożu płyty

( $x_1 = x_2 = 0$ ):

$$M_{mn} = -0.032 q_0 a^2$$

W narożu płyty, w kierunku przekątnej istnieje ujemny moment zginający – stąd w

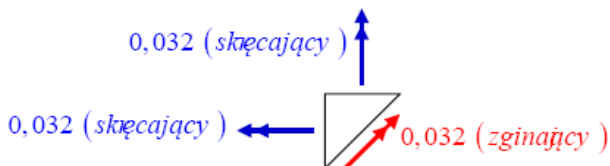
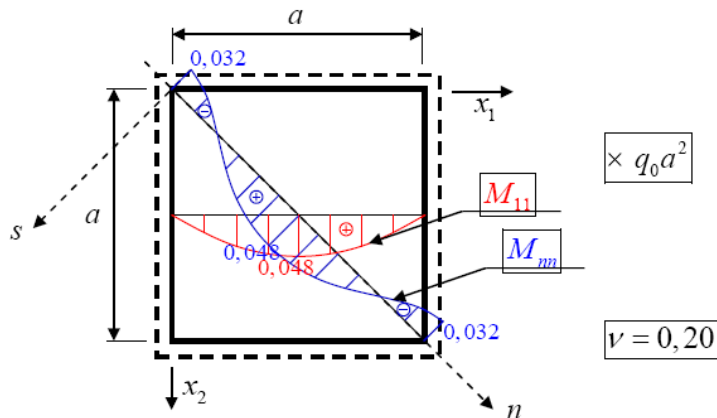
płytach żelbetowych potrzeba zbrojenia w narożach góra w zasięgu ok.  $0.2a$ .

Równowaga momentów zginających i skręcających w otoczeniu naroża płyty

Każdy z momentów płytowych jest momentem rozłożonym na długości

– **równowaga** musi być dokonana **względem wypadkowych**, o

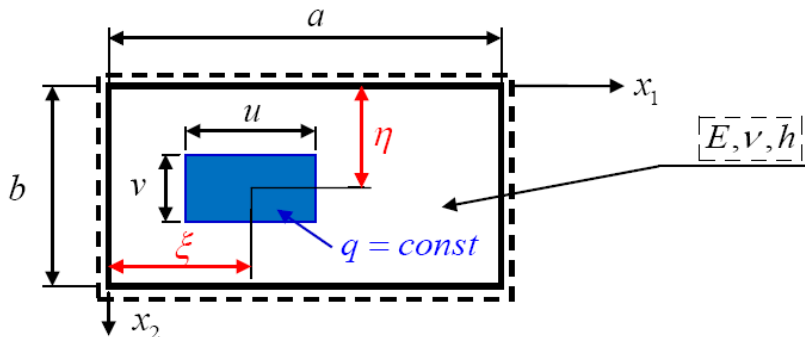
jednostkach momentu, zebranych z odpowiednich odcinków





**Płyta prostokątna**  
swobodnie podparta,  
**obciążona równo-**  
**miernie na dowolnej**  
**części**

$u, v$  - wymiary strefy  
obciążenia, o środku  
( $\xi, \eta$ ), wypadkowa  
obciążenia wynosi  $P = quv$



Obciążenie:  $q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$ ,

gdzie  $a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{\xi-\frac{u}{2}}^{\xi+\frac{u}{2}} \int_{\eta-\frac{v}{2}}^{\eta+\frac{v}{2}} q(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2$ .

Podstawiając  $q = \frac{P}{uv}$  jest  $a_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-\frac{u}{2}}^{\xi+\frac{u}{2}} \int_{\eta-\frac{v}{2}}^{\eta+\frac{v}{2}} q(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2$

$$a_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \int_{\eta - \frac{v}{2}}^{\eta + \frac{v}{2}} q(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{4P}{abuv} \frac{a}{m\pi} \frac{b}{n\pi} \left( \cos \frac{m\pi x_1}{a} \right) \Big|_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \left( \cos \frac{n\pi x_2}{b} \right) \Big|_{\eta - \frac{v}{2}}^{\eta + \frac{v}{2}}$$

$$a_{mn} = \frac{4P}{\pi^2 mn uv} \left( \cos \frac{m\pi \left( \xi + \frac{u}{2} \right)}{a} - \cos \frac{m\pi \left( \xi - \frac{u}{2} \right)}{a} \right) \left( \cos \frac{n\pi \left( \eta + \frac{v}{2} \right)}{b} - \cos \frac{n\pi \left( \eta - \frac{v}{2} \right)}{b} \right)$$

Wzór trygonometryczny:  $\cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , przekształcenia:

$$\frac{1}{a} \left[ m\pi \left( \xi + \frac{u}{2} \right) + m\pi \left( \xi - \frac{u}{2} \right) \right] = \frac{2m\pi\xi}{a}, \quad \frac{1}{a} \left[ m\pi \left( \xi + \frac{u}{2} \right) - m\pi \left( \xi - \frac{u}{2} \right) \right] = \frac{m\pi u}{a}$$

i analogicznie w zestawie  $\{n, \eta, v\}$ ,

tym samym

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mn uv} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b}$$

Sprawdzenie: przypadek obciążenia równomiernego  $q$  na całej powierzchni

$$\xi = \frac{a}{2}, \eta = \frac{b}{2}, u = a, v = b, P = qab \Rightarrow a_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mnab} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \frac{16q}{\pi^2 mn}$$

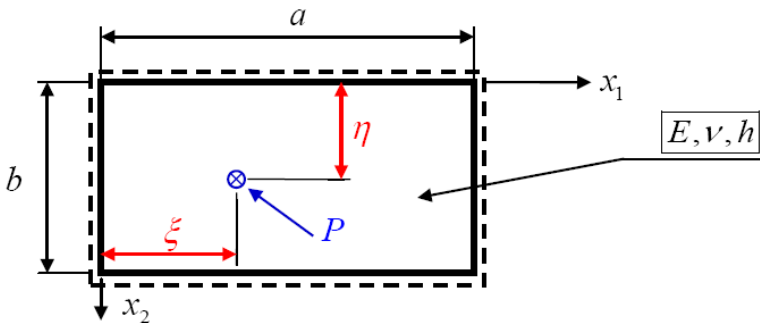
przy obu  $m, n$  nieparzystych, w pozostałych przypadkach  $a_{mn} = 0$ .

$$\text{Funkcja ugięcia: } w(x_1, x_2) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

**Płyta prostokątna swobodnie podparta, obciążona siłą skupioną  $P$**

$(\xi, \eta)$  – współrzędne punktu przyłożenia siły

Jest to przypadek obciążenia prostokątnego, którego wymiary  $u, v$  dążą (granice matematyczne) do zera



Granice wyrażeń zawierających wymiary  $u$  i  $v$ , z poprzedniego rozwiązania:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{m\pi u}{2a}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{m\pi}{2a} \cos \frac{m\pi u}{2a} = \frac{m\pi}{2a} \Rightarrow \boxed{a_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi v}{2b}}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{n\pi}{2b} \cos \frac{n\pi v}{2b} = \frac{n\pi}{2b}$$

Funkcja ugięcia:  $w(x_1, x_2) = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$   
(szereg szybkozbieżny)

Ugięcie w środku płyty, wywołane siłą centryczną ( $\xi = x_1 = \frac{a}{2}$ ,  $\eta = x_2 = \frac{b}{2}$ )

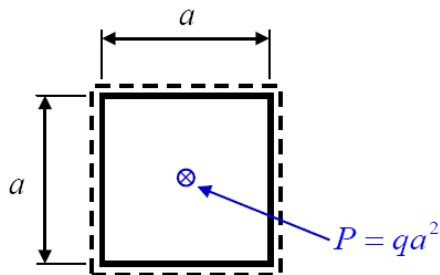
$$w_{\max} = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad \text{przy obu } m \text{ i } n \text{ nieparzystych}$$

Płyta kwadratowa ( $a = b$ ):  $w_{\max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[m^2 + n^2]^2}$ ,  $m$  i  $n$  nieparzyste

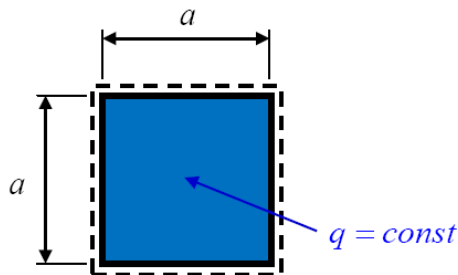
Obliczenie z udziałem jedynie czterech wyrazów rozwinięcia:

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \left[ 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{324} \right] \cong 0.01121 \frac{Pa^2}{D}.$$

Przyjmując  $P = qa^2$  powyższy wynik jest ok. trzykrotnie większy od rezultatu działania obciążenia  $q = \text{const}$ .

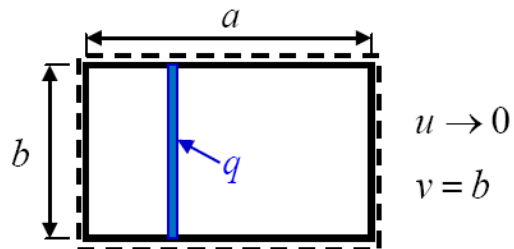
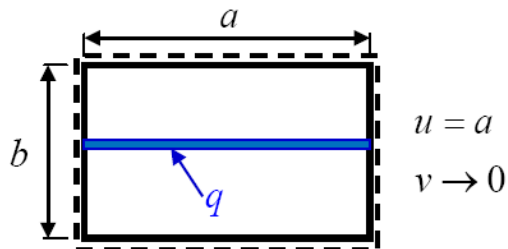


$$\max w = 0,01121 \frac{Pa^2}{D} = 0,01121 \frac{qa^4}{D}$$



$$\max w = 0,00406 \frac{qa^4}{D}$$

**Dyskusja! Przepadek szczególny: ścianki działowe na stropie**



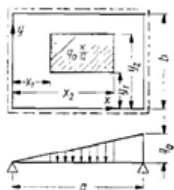
**WARTO UCZYĆ SIĘ SPRĘŻYN,  
BY WYBUDOWAĆ ŁADNY DOM!**

Współczynniki rozwinięcia obciążenia  $q(x, y)$  w podwójny szereg sinusowy

$$q(x, y) = \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

Lp.	Schemat	$q_{mn}$	$m, n$
1		$\frac{4P}{ab} \sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0$ <p>dla <math>x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}</math>:</p> $\frac{4P}{ab}$	1,2,3... 1,3,5,...
2		$\frac{4 \sin \alpha_m x_0}{ab} \int_0^b \bar{q}(y) \sin \beta_n y dy$ <p>dla: a) <math>\bar{q}(y) = \bar{q}_0 = \text{const}</math>:</p> $\frac{8 \bar{q}_0}{a} \frac{\sin \alpha_m x_0}{n\pi}$ <p>b) <math>\bar{q}(y) = \bar{q}_0 \frac{y}{b}</math>:</p> $\frac{4 \bar{q}_0}{a} (-1)^{n+1} \frac{\sin \alpha_m x_0}{n\pi}$ <p>c) <math>\bar{q}(y) = \frac{4 \bar{q}_0}{b^2} y(b-y)</math>:</p> $\frac{64 \bar{q}_0}{a} \frac{\sin \alpha_m x_0}{(n\pi)^2}$	1,2,3,... $m = 1,2,3, \dots$ $n = 1,3,5, \dots$ 1,2,3,... $m = 1,2,3, \dots$ $n = 1,3,5, \dots$
3		$4q_0 \frac{\cos \alpha_m x_1 - \cos \alpha_m x_2}{m\pi} \frac{\cos \beta_n y_1 - \cos \beta_n y_2}{n\pi}$ <p>dla: a) <math>y_1 = 0, y_2 = b</math>:</p> $8q_0 \frac{\cos \alpha_m x_1 - \cos \alpha_m x_2}{m\pi n\pi}$ <p>b) <math>x_2 = a - x_1, y_2 = b - y_1</math>:</p> $16q_0 \frac{\cos \alpha_m x_1}{m\pi} \frac{\cos \beta_n y_1}{n\pi}$ <p>c) <math>x_1 = y_1 = 0, x_2 = a, y_2 = b</math>:</p> $\frac{16q_0}{m\pi n\pi}$	1,2,3,... $m = 1,2,3, \dots$ $n = 1,3,5, \dots$ 1,3,5,... 1,3,5,...

4



$$4q_0 \frac{\sin \alpha_m x_2 - \alpha_m x_2 \cos \alpha_m x_2 - \sin \alpha_m x_1 + \alpha_m x_1 \cos \alpha_m x_1}{(m\pi)^2} \frac{\cos \beta_n y_1 - \cos \beta_n y_2}{n\pi}$$

1,2,3,...

dla: a)  $x_1 = 0, x_2 = a$ :

$$4q_0(-1)^{m+1} \frac{\cos \beta_n y_1 - \cos \beta_n y_2}{m\pi n\pi}$$

1,2,3,...

b)  $x_1 = 0, x_2 = a, y_2 = b - y_1$ :

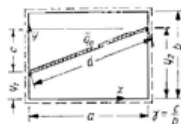
$$8q_0(-1)^{m+1} \frac{\cos \beta_n y_1}{m\pi n\pi}$$

 $m = 1,2,3, \dots$   
 $n = 1,3,5, \dots$ 
c)  $x_1 = y_1 = 0, x_2 = a, y_2 = b$ :

$$8q_0(-1)^{m+1} \frac{1}{m\pi n\pi}$$

 $m = 1,2,3, \dots$   
 $n = 1,3,5, \dots$ 

5



$$\begin{cases} 4\bar{q}_0 \frac{d}{ab} \frac{m\pi}{(m\pi)^2 - (n\pi y)^2} [\sin \beta_n y_1 + (-1)^{m+1} \sin \beta_n y_2] \\ 2\bar{q}_0 \frac{d}{ab} \cos \beta_n y_1 \end{cases}$$

1,2,3,...

 $m \neq n\gamma$  $m = n\gamma$ dla: a)  $y_1 = 0, y_2 = b, \gamma = 1$ :

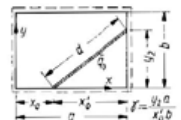
$$2\bar{q}_0 \frac{d}{ab}$$

 $m = n = 1,2,3, \dots$ b)  $y_1 = b, y_2 = 0, \gamma = -1$ :

$$2\bar{q}_0 \frac{d}{ab} (-1)^{n+1}$$

 $m = n = 1,2,3, \dots$ 

6



$$\begin{cases} 4\bar{q}_0 \frac{d}{x_0' b} \frac{(-1)^{m+1} m\pi \sin \beta_n y_2 - n\pi \gamma \sin \alpha_m x_0}{(m\pi)^2 - (n\pi \gamma)^2} \\ 2\bar{q}_0 \frac{d}{ab} \left( \cos \alpha_m x_0 + \frac{a}{x_0'} \frac{\sin \alpha_m x_0}{m\pi} \right) \end{cases}$$

1,2,3,...

 $m \neq n\gamma$  $m = n\gamma$