

Analiza płyt w biegunowym układzie współrzędnych

Szczególne przypadki dźwigarów płytowych – kołowe bądź pierścieniowe – korzystna analiza w układzie biegunowym (r, φ) .

W dowolnym punkcie PSN stan naprężenia można wyrazić składowymi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ w układzie kartezjańskim Ox_1x_2 lub składowymi $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}$ w układzie kartezjańskim (r, φ) .

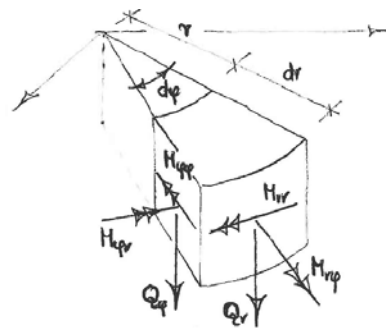
Adnotacja: równania transformacji naprężeń, w obie strony: kartezjański \leftrightarrow biegunowy.

W układzie Ox_1x_2 wypadkowymi naprężeń $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ płyty są odpowiednio momenty płytowe M_{11}, M_{22}, M_{12} oraz siły poprzeczne Q_1, Q_2 .

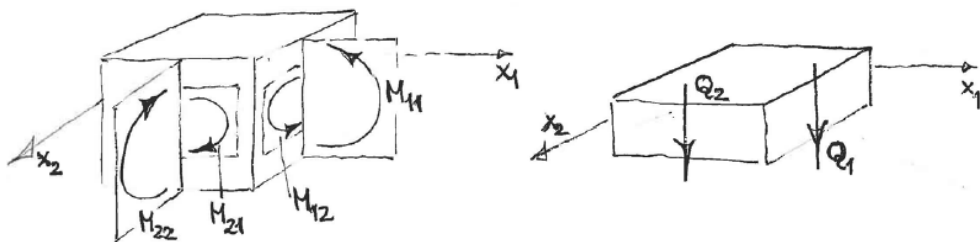
W układzie (r, φ) wypadkowymi naprężeń $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ płyty są odpowiednio * momenty płytowe zginające: radialny M_{rr} i obwodowy $M_{\varphi\varphi}$

* moment płytowy skręcający $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$

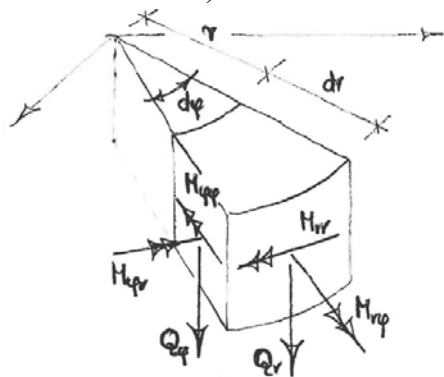
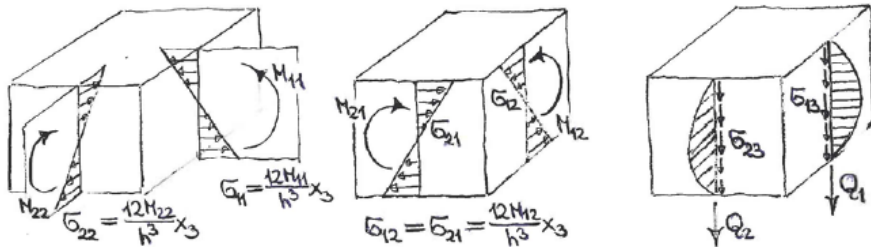
* siły poprzeczne płytowe Q_r, Q_φ .



Układ
 Ox_1x_2 :



Układ (r, φ)
 (momenty
 przedstawione
 wektorowo)



Zadanie: wykonać w układzie biegunowym szkice rozkładów naprężeń, analogicznie do powyższej sytuacji w układzie prostokątnym, zapisując, jak powyżej, funkcje rozkładów naprężeń między składowymi naprężeniami a momentami o jednakowych

wskaźnikach, np. $\sigma_{11} = \frac{12M_{11}}{h^3} x_3 \Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{12M_{rr}}{h^3} x_3$ oraz

wykresy naprężeń $\sigma_{r3}, \sigma_{\varphi 3}$ odpowiadających Q_r, Q_φ .

Zestawienie: siły wewnętrzne (przekrojowe) w biegunowym układzie współrzędnych są wypadkowymi naprężeń:

* działających w płaszczyźnie płyty (PSN):

moment zginający radialny M_{rr} - wypadkowa naprężeń normalnych σ_{rr}

moment zginający obwodowy $M_{\varphi\varphi}$ - wypadkowa naprężeń normalnych $\sigma_{\varphi\varphi}$

moment skręcający $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$ - wypadkowa naprężeń stycznych $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}$

* działających w kierunku pionowym - osi x_3 :

siła poprzeczna Q_r - wypadkowa naprężeń stycznych σ_{r3}

siła poprzeczna Q_φ - wypadkowa naprężeń stycznych $\sigma_{\varphi 3}$

Siły wewnętrzne płytowe w układzie biegunowym, podobnie, jak w układzie kartezjańskim, wyrażone zostaną w funkcji ugięcia $w \equiv w(r, \varphi)$.

Przyjmując, że kierunek radialny pokrywa się z osią x_1 ($\varphi = 0$), zachodzą związki (podobieństwo matematyczne do wzorów na naprężenia w układzie biegunowym z funkcji Airy F):

$$w_{,11}|_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad w_{,22}|_{\varphi=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad w_{,12}|_{\varphi=0} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$M_{rr} = M_{11}|_{\varphi=0} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22})|_{\varphi=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$M_{\varphi\varphi} = M_{22}|_{\varphi=0} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11})|_{\varphi=0} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = M_{12}|_{\varphi=0} = -D(1-\nu)w_{,12}|_{\varphi=0} = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w \text{ i } Q_\varphi = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w, \text{ gdzie } \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

Równanie różniczkowe płyty: $\Delta(\Delta w) = \nabla^4 w = \frac{q(r, \varphi)}{D}$, forma rozwinięta:

$$\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \cdot}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D}.$$

Przypadek obrotowosymetryczny

W przypadku, gdy parametry geometryczne i materiałowe, obciążenie i warunki brzegowe spełniają warunek obrotowej symetrii, zmienna kątowna φ nie jest obecna w wyrażeniach – matematycznie - problem względem jednej zmiennej r . Równanie:

$$\nabla^4 w(r) = \frac{q(r)}{D}, \text{ gdzie } \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

(od tego momentu możliwe jest użycie pochodnej zwyczajnej).

Siły wewnętrzne płytowe – momenty i siły poprzeczne:

$$M_{rr} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), M_{\varphi\varphi} = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), M_{r\varphi} = 0$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), Q_\varphi = 0, \text{ siła zastępcza } V_r = Q_r.$$

Przekształcenie równania różniczkowego płyty:

$$\Delta(\Delta w(r)) = \nabla^4 w(r) = \frac{q(r)}{D}, \text{ gdzie } \Delta \cdot = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right), \text{ rozwinięte:}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) \right) = \frac{q(r)}{D}. \text{ Możliwe całkowanie, etapami:}$$

$$* \text{ mnożenie przez } r \text{ i całkowanie: } r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{D} \int r q(r) dr + \tilde{C}_1$$

$$* \text{ dzielenie przez } r \text{ i całka: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \int r q(r) dr^2 + \tilde{C}_1 \ln r + \tilde{C}_2$$

$$* \text{ mnożenie: } r \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{D} \int r \int \frac{1}{r} \int r q(r) dr^3 + \tilde{C}_1 \frac{r^2}{4} (2 \ln r - 1) + \tilde{C}_2 \frac{r^2}{2} + \tilde{C}_3$$

$$* w = \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r q(r) dr^4 + \tilde{C}_1 \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + \tilde{C}_2 \frac{r^2}{4} + \tilde{C}_3 \ln r + \tilde{C}_4$$

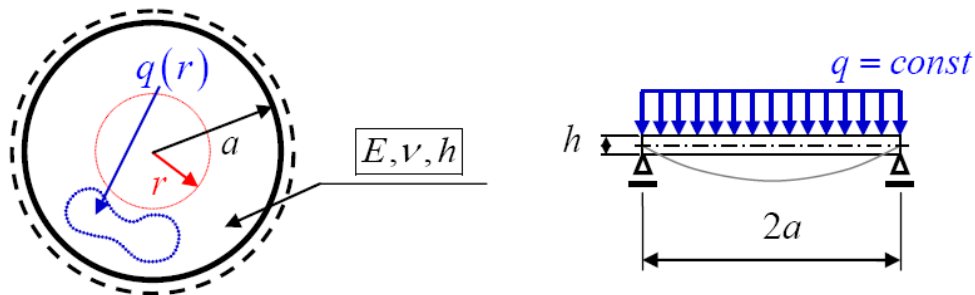
Uporządkowanie wyrazów podobnych, dobór innych stałych całkowania, forma $w = w_O + w_S$, wg zapisu

$$w = \underbrace{\frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r q(r) dr^4}_{w_S - \text{rozw. szczególne równania niejedn.}} + \underbrace{C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4}_{w_O - \text{rozw. ogólne równania jednorodnego}}$$

Przykład: wyprowadzenie rozwiązania w_S przy obciążeniu $q = \text{const}$:

$$\begin{aligned} w_S &= \frac{1}{D} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r q(r) dr^4 = \frac{q}{D} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r dr^4 = \\ &= \frac{q}{2D} \int \frac{1}{r} \int r \int r dr^3 = \frac{q}{4D} \int \frac{1}{r} \int r^3 dr^2 = \frac{q}{16D} \int r^3 dr = \frac{qr^4}{64D} \end{aligned}$$

Przykład: płyta kołowa swobodnie podparta, obciążona równomiernie



Warunki brzegu swobodnie podpartego: 1) $w(a) = 0$, 2) $M_{rr}(a) = 0$

Warunki ograniczające w środku: 3) $w(0)$ skończone, 4) $M_{rr}(0)$ skończone.

Funkcja powierzchni ugięcia płyty: $w(r) = w_O(r) + w_S(r)$.

Rozwiązanie szczególne w przypadku $q = \text{const}$ to $w_s = \frac{qr^4}{64D}$, zatem

rozwiązanie łączne $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$.

Funkcje momentów płytowych radialnych i obwodowych zawierają pochodne

$$w_{,r} = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{qr^3}{16D} + C_1 r(1 + 2 \ln r) + 2C_2 r + \frac{C_3}{r} \text{ oraz}$$

$$w_{,rr} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{3qr^2}{16D} + C_1(3 + 2 \ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2}.$$

$$\text{Momenty płytowe radialne: } M_{rr} = -D \left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Warunek ograniczający 3) skończonych ugięć w środku płyty:

$$w(0) = \frac{q \cdot 0}{64D} + C_1 \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \ln r + C_2 \cdot 0 + C_3 \lim_{r \rightarrow 0^+} \ln r + C_4 \text{ winno być skończone.}$$

$$\text{Ponieważ } \lim_{r \rightarrow 0^+} \ln r = -\infty \text{ i } \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \ln r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln r}{r^{-2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^{-1}}{-2r^{-3}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(-\frac{r^2}{2} \right) = 0$$

zatem $w(0)$ jest skończone jedynie w przypadku, gdy $C_3 = 0$.

Warunek ograniczający 3) skończonych momentów w środku płyty:

$$M_{rr}(0) = -D \left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} \right) \Big|_{r=0} = -D \left[C_1 (3 + 2 \ln r) + 2C_2 + \nu C_1 (1 + 2 \ln r) + 2\nu C_2 \right] \Big|_{r \rightarrow 0^+} .$$

Oba wyrażenia zawierające stałą C_1 dążą do $-\infty$, stąd $M_{rr}(0)$ jest skończone jedynie w przypadku $C_1 = 0$.

$$\text{Zapis } M_{rr}(a) = 0: \frac{3qa^2}{16D} + 2C_2 a + \nu \frac{qa^2}{16D} + 2C_2 \nu = 0 \text{ daje } C_2 = -\frac{qa^2}{32D} \frac{3+\nu}{1+\nu} .$$

$$\text{Warunek } w(a) = 0: \frac{qa^4}{64D} + C_2 a^2 + C_4 = 0 \text{ daje } C_4 = \frac{qa^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu} .$$

$$\text{Ostatecznie } w(r) = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2}{32D} \frac{3+\nu}{1+\nu} r^2 + \frac{qa^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu}, \text{ lub zmienną } \frac{r}{a}$$

$$w(r) = \frac{qa^4}{64D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^4 - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right] = \frac{qa^4}{64D} (a^2 - r^2) \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right] .$$

$$\text{Ugięcie maksymalne, w środku płyty: } w_{\max} = w(0) = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D} .$$

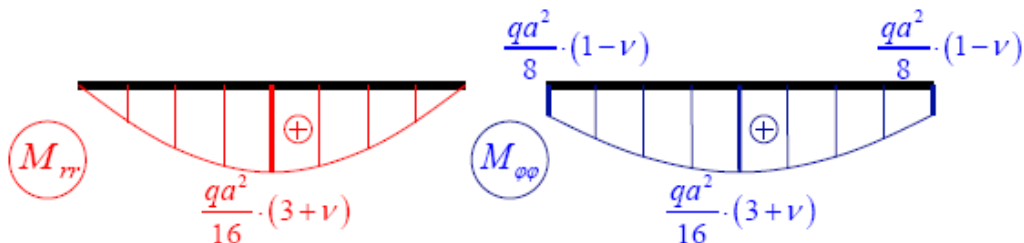
Funkcje momentów płytowych, radialnych i obwodowych:

$$M_{rr}(r) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{qa^2}{16} (3 + \nu) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

$$M_{\varphi\varphi}(r) = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \frac{qa^2}{16} (3 + \nu) \left[1 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right].$$

Momenty w środku płyty, jednakowe: $M_{rr}(0) = M_{\varphi\varphi}(0) = \frac{qa^2}{16} (3 + \nu)$

Momenty na brzegu płyty: $M_{rr}(a) = 0$, $M_{\varphi\varphi}(a) = \frac{qa^2}{8} (1 - \nu)$



Siła poprzeczna (pomocniczo laplasjan) $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{qa^2}{8} \left(2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$

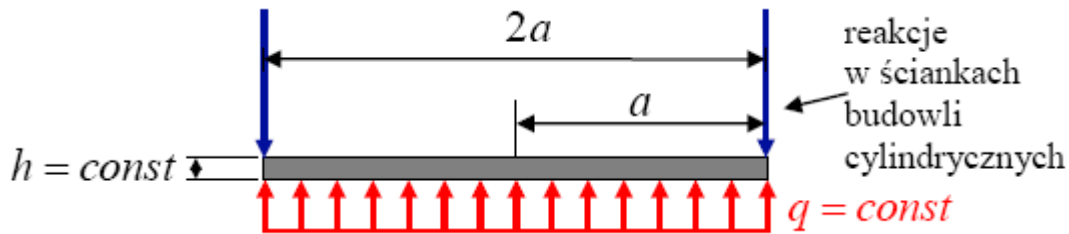
$$Q_r(r) = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{qa^2}{8} \left(2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \right] = -\frac{qr}{2}.$$

Na brzegu płyty wartość ekstremalna $|Q_r(a)| = \frac{qa}{2}$ - jest to reakcja w postaci obciążenia równomiernie rozłożonego na obwodzie, o wypadkowej równej wypadkowej obciążenia powierzchniowego: $W = \frac{qa}{2} 2\pi a = q\pi a^2$.

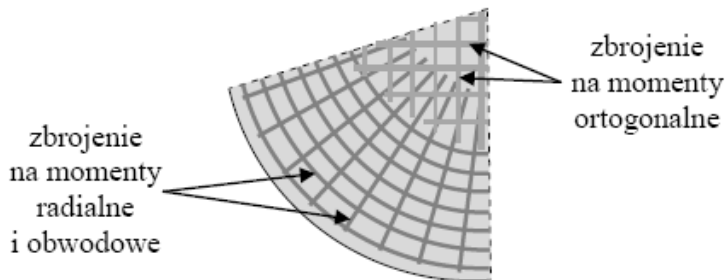
Kąt nachylenia stycznej do powierzchni środkowej na brzegu płyty

$$\varphi(a) = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = \left(\frac{qr^3}{16D} - \frac{qa^2}{16D} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \Big|_{r=a} = \frac{-qa^3}{8D(1+\nu)}$$

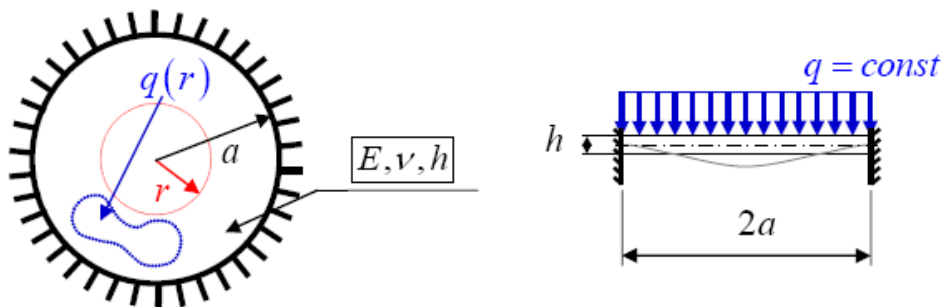
Uwagi: 1) przedstawiony schemat jest właściwy w analizie konstrukcji cylindrycznej posadowionej na sztywnym podłożu (zwrot obciążenia ku górze)



2) ze względu na niezerowe momenty zginające obwodowe w płytach żelbetowych istnieje konieczność zbrojenia obwodowego w całym obszarze płyty. W ograniczonej strefie środkowej kierunku: radialny i obwodowy są w sąsiednich punktach zbliżone (w środku płyty nierozróżnialne), stąd w otoczeniu środka płyty zbrojenie może być ortogonalne.



Przykład: płyta kołowa utwierdzona, obciążona równomiernie



Warunki brzegu utwierdzonego: 1) $w(a) = 0$, 2) $\varphi(a) = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$

Warunki ograniczające w środku: 3) $w(0)$ skończone, 4) $M_{rr}(0)$ skończone.

Funkcja powierzchni ugięcia płyty: $w(r) = w_O(r) + w_S(r)$.

Rozwiązanie szczególne w przypadku $q = const$ to $w_s = \frac{qr^4}{64D}$, zatem

rozwiązanie łączne $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$.

Wartości stałych całkowania - do samodzielnego obliczenia,

rozwiązanie szczególne: $w(r) = \frac{qa^4}{64D} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2$.

Ugięcie maksymalne, w środku płyty: $w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64D}$, w przypadku $\nu = 0$ wartość pięciokrotnie mniejsza, niż w płycie swobodnie podpartej.

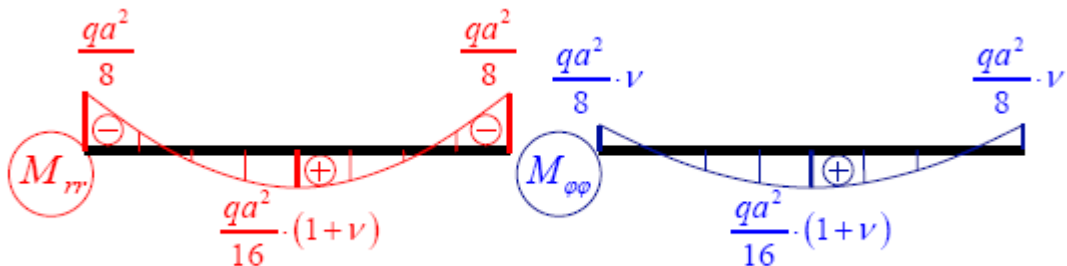
Funkcje momentów płytowych, radialnych i obwodowych:

$$M_{rr}(r) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{qa^2}{16} \left[1 + \nu - (3 + \nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

$$M_{\varphi\varphi}(r) = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \frac{qa^2}{16} \left[1 + \nu - (1 - 3\nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right].$$

Momenty w środku płyty, jednakowe: $M_{rr}(0) = M_{\varphi\varphi}(0) = \frac{qa^2}{16} (1 + \nu)$

Momenty na brzegu płyty: $M_{rr}(a) = -\frac{qa^2}{8}$, $M_{\varphi\varphi}(a) = -\frac{qa^2}{8} \nu$



Problem płyty utwardzonej pod obciążeniem ciągłym można rozwiązać jako superpozycję dwóch stanów:

- * płyta swobodnie podparta pod obciążeniem .
- * płyta obciążona rozłożonym równomiernie na obwodzie momentem M_0 .

W każdym z przypadków obliczony zostaje kąt obrotu u brzegu płyty.

Warunek zgodności kątów obrotu: $\varphi^q + \varphi^{M_0} = 0$ daje w rezultacie niewiadomą M_0 , równą momentowi radialnemu utwardzenia płyty całkowicie utwardzonej.

