Elementy teorii powłok cienkich sprężystych

Powłoki – dźwigary powierzchniowe o powierzchni środkowej z krzywizną pojedynczą lub podwójną. Inaczej, niż w dźwigarach płaskich, stan tarczowy i stan zginania są ze sobą sprzężone, stąd zaawansowanie rozwiązań powłok w stosunku do rozwiązań dźwigarów płaskich. Kategorie dźwigarów płaskich – tarcze i płyty – mogą być traktowane jako szczególne przypadki powłok, o początkowej powierzchni środkowej płaskiej (o zerowych krzywiznach).

Założenia (pierwsze – słuszne w płytach i tarczach, pozostałe - w płytach)

* mała grubość dźwigara w porównaniu z pozostałymi wymiarami

* ugięcia powłoki (względem nieodkształconej powierzchni środkowej) małe w stosunku do jej grubości,

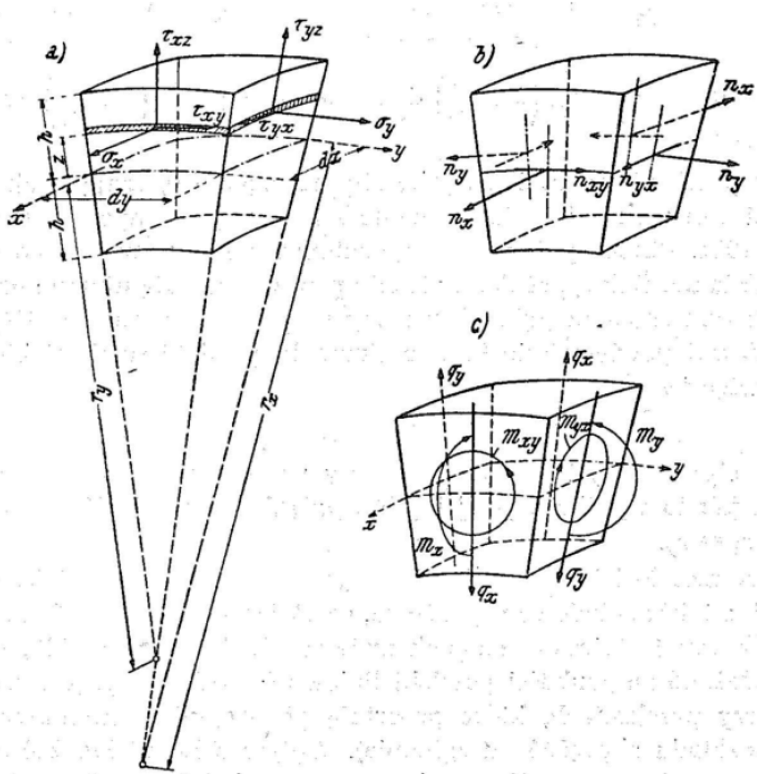
* odcinek prostopadły do płaszczyzny stycznej do nieodkształconej powierzchni środkowej jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do odkształconej powierzchni środkowej,

* naprężenia normalne prostopadłe do stycznej do powierzchni środkowej są pomijalnie małe.

Oznaczenia, za książką K. Girkmann „Dźwigary powierzchniowe” Arkady 1957

Płaszczyzna styczna xy, oś normalna z, r_x, r_y - promienie krzywizny, stała grubość powłoki równa $2h$.

Siły przekrojowe (wypadkowe naprężeń, na jednostkę długości) ze wskaźnikami xy, oznaczane małymi literami, np. m_{xy} - moment skręcający $[kNm/m]$.



Jednostkowej szerokości przekroju na powierzchni $z=0$ odpowiada na wysokości z szerokość równa odpowiednio $\left(r_y+z\right)/r_y$ lub $\left(r_x+z\right)/r_x$.

Siły normalne i styczne (odpowiedniki sił tarczowych w dźwigarach płaskich):

$$n_x=\int_{-h}^{h}\sigma_x\left(1+\frac{z}{r_y}\right)dz,\quad n_y=\int_{-h}^{h}\sigma_y\left(1+\frac{z}{r_x}\right)dz$$

$$n_{xy}=\int_{-h}^{h}\tau_{xy}\left(1+\frac{z}{r_y}\right)dz,\quad n_{yx}=\int_{-h}^{h}\tau_{yx}\left(1+\frac{z}{r_x}\right)dz$$

Momenty zginające i skręcające (odpowiedniki momentów płytowych):

$$m_x=-\int_{-h}^{h}\sigma_x\left(1+\frac{z}{r_y}\right)zdz,\quad m_y=-\int_{-h}^{h}\sigma_y\left(1+\frac{z}{r_x}\right)zdz$$

$$m_{xy}=-\int_{-h}^{h}\tau_{xy}\left(1+\frac{z}{r_y}\right)zdz,\quad m_{yx}=-\int_{-h}^{h}\tau_{yx}\left(1+\frac{z}{r_x}\right)zdz$$

Siły poprzeczne (odpowiedniki sił płytowych)

$$q_x=-\int_{-h}^{h}\tau_{xz}\left(1+\frac{z}{r_y}\right)dz,\quad q_y=-\int_{-h}^{h}\tau_{yz}\left(1+\frac{z}{r_x}\right)dz$$

Powierzchnie boczne nieskończenie małego elementu powłoki są do siebie prostopadłe, naprężenia styczne są równe: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Inaczej, niż w przypadku płyt, wypadkowe tych naprężeń: siły styczne n_{xy}, n_{yx} oraz momenty skręcające m_{xy}, m_{yx} w ogólnym wypadku nie są parami równe – równość zachodzi, gdy $r_x = r_y$.

W powłokach z uwagi na zmienną szerokość umownego przekroju rozkład naprężeń na grubości powłoki nie jest liniowy (porównanie z rozwiązaniami belek i płyt), na gruncie teorii prętów nieliniowość wykresów naprężeń występowała w elementach silnie zakrzywionych.

Przy dużych promieniach krzywizny, w porównaniu z wymiarem h wpływ zakrzywienia jest pomijalnie mały, przekroje w przybliżeniu są prostokątami zaś rozkłady naprężeń w płaszczyźnie Oxy w przybliżeniu liniowe.

Powłoki – stan naprężenia błonowy (membranowy)

Istnieją przypadki obciążenia powłok, w których naprężenia leżące w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ można traktować jako równomiernie rozłożone na grubości $\delta = 2h$, niezależne od współrzędnej *z*. Brak wpływu krzywizny -zachodzi

$n_x = \delta\sigma_x$, $n_y = \delta\sigma_y$, $n_{xy} = n_{yx} = \delta\tau_{xy}$, brak zginania i skręcania

$m_x = m_y = m_{xy} = m_{yx} = 0$ i sił poprzecznych $q_x = q_y = 0$.

Stan ten w danym punkcie równoważny jest stanowi tarczowemu w płaszczyźnie stycznej do powierzchni powłoki. Jest to tzw. **błonowy** (membranowy) **stan naprężenia** powłoki. Do jego rozwiązania pozostają trzy równania równowagi (zagadnienie płaskie), pozwalające na określenie trzech niewiadomych sił – jest to więc **problem statycznie wyznaczalny**.

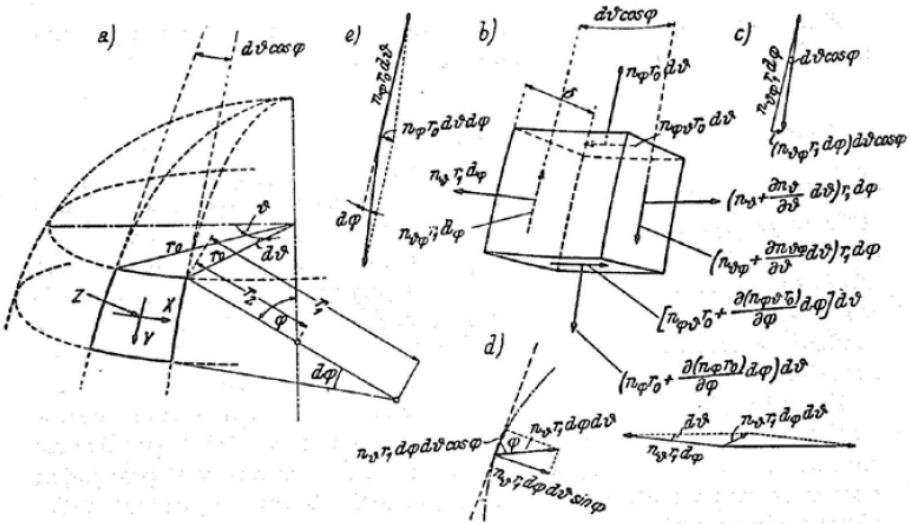
Warunki stanu błonowego powłoki, wolnego od zginania:
* zakrzywienie powierzchni środkowej jest ciągłe,
* grubość powłoki stała lub zmienna w sposób ciągły,
* obciążenia powierzchniowe rozłożone w sposób ciągły, o małej zmienności,
* siły brzegowe skierowane stycznie do powierzchni środkowej,
* więzi podporowe i reakcje - w płaszczyznach stycznych do powierzchni środkowej.

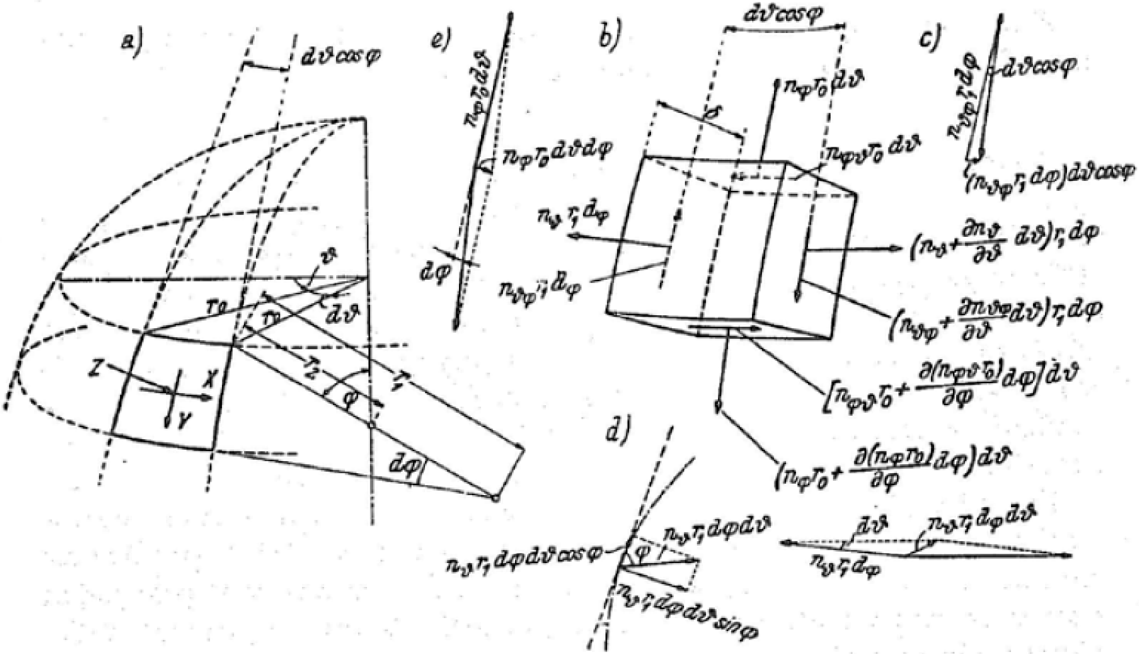
W dalszej kolejności rozpatrzone zostaną **powłoki obrotowe**. Ich powierzchnia środkowa powstaje w wyniku obrotu krzywej płaskiej (tworzącej, południka) wokół linii leżącej w jej płaszczyźnie (oś powłoki).

Punkt powierzchni środkowej opisany jest współrzędnymi kątowymi: południkową ϑ i równoleżnikową φ . Podwójna krzywizna:
* środek krzywizny w płaszczyźnie obrotu leży na osi obrotu, na danym równoleżniku stały, promień krzywizny wynosi r_0,
* środek krzywizny w płaszczyźnie tworzącej (południkowej) na długości południka może być zmienny, zmienny promień równy r_1.

Element powłoki obrotowej o współrzędnych: południkowej ϑ i równoleżnikowej φ oraz odpowiednich kątach rozwarcia $d\vartheta$ i $d\varphi$. Obciążenie powierzchniowe jest wektorem o odpowiednich składowych: stycznej do równoleżnika X, stycznej do południka Y i normalnej do powierzchni Z.

Niewiadomymi są trzy siły przekrojowe powłokowe $n_\vartheta, n_\varphi, n_{\vartheta\varphi} = n_{\varphi\vartheta}$ do ich określenia wystarczą trzy równania równowagi.

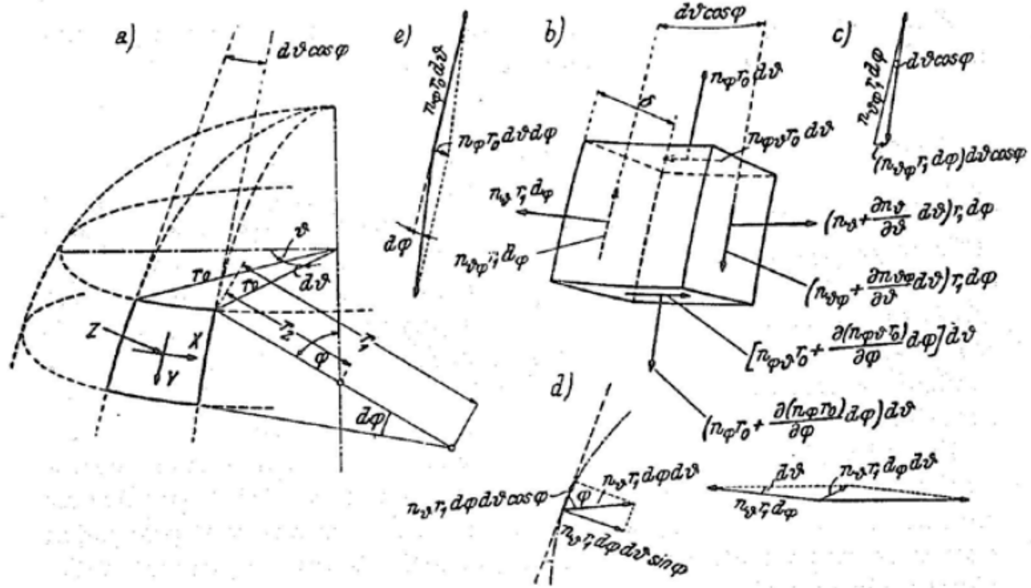




Równania równowagi:

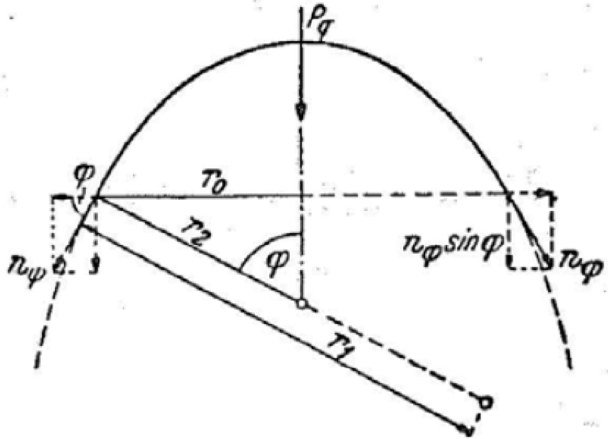
suma rzutów na kierunek stycznej do równoleżnika

$$\frac{\partial n_\vartheta}{\partial \vartheta} r_1 + \frac{\partial\left(r_0\, n_{\varphi\vartheta}\right)}{\partial \varphi} + n_{\varphi\vartheta} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0$$



suma rzutów na kierunek stycznej do południka	$$\frac{\partial n_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} r_1 + \frac{\partial \left(r_0 \, n_\varphi \right)}{\partial \varphi} - n_\vartheta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0$$
suma rzutów na kierunek normalnej do powłoki	$$\frac{n_\vartheta}{r_2} + \frac{n_\varphi}{r_1} = -Z \text{ , gdzie } r_0 = r_2 \sin\varphi$$

Powłoki obrotowe pod obciążeniem obrotowosymetrycznym



Obrotowosymetryczne obciążenie nie zależy od współrzędnej południkowej ϑ, znika składowa X, zatem jest $n_{\varphi\vartheta} = n_{\vartheta\varphi} = 0$.

Równania równowagi dają jako rezultat pozostałe siły przekrojowe:

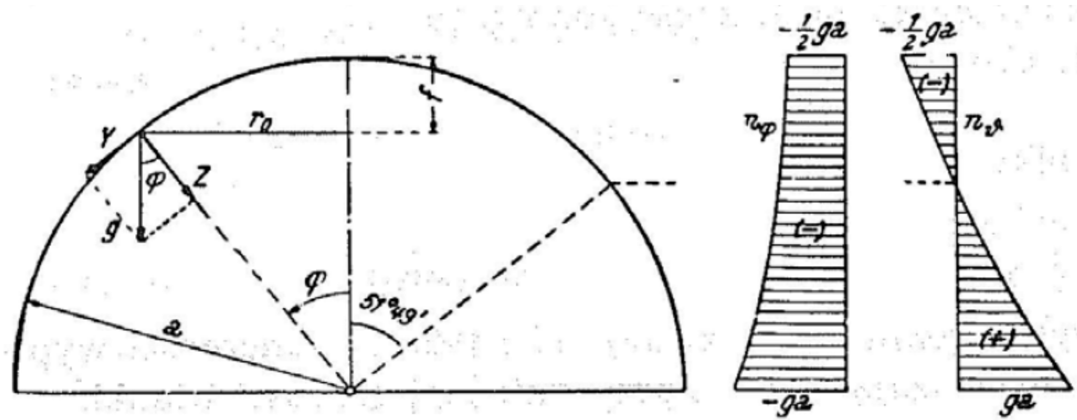
* siły w płaszczyźnie południka $n_\varphi = \dfrac{P_\varphi}{2\pi r_0 \sin\varphi}$, gdzie P_φ jest wypadkową obciążenia działającego ponad równoleżnikiem o kącie φ,

* siły pierścieniowe $n_\vartheta = -r_2\left(Z + \dfrac{n_\varphi}{r_1}\right)$.

Przykład: **Powłoka kulista, obciążenie ciężarem własnym**

Obciążenie: stały ciężar g na jednostkę powierzchni środkowej.
Składowe obciążenia w punkcie o współrzędnej φ:
$X = 0$, $Y = g\sin\varphi$, $Z = g\cos\varphi$. Powierzchnia części powłoki nad równoleżnikiem φ wynosi $A_\varphi = 2\pi a f = 2\pi a^2\left(1-\cos\varphi\right)$, stąd obciążenie tej części $P_\varphi = gA_\varphi = 2\pi g a^2\left(1-\cos\varphi\right)$.

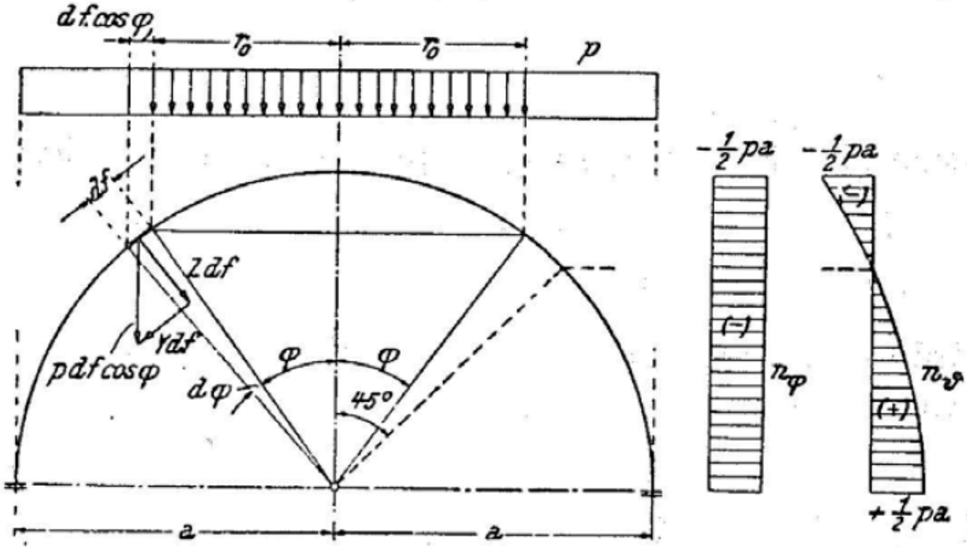
Siły wewnętrzne powłokowe: $n_\varphi = -\dfrac{ga}{1+\cos\varphi}$, $n_\vartheta = ga\left(\cos\varphi - \dfrac{1}{1+\cos\varphi}\right)$



Przykład: **Powłoka kulista nieważka, obciążenie śniegiem**

Obciążenie p równomiernie rozłożone na powierzchnię rzutu kopuły, stąd w punkcie o współrzędnej φ jest $X = 0$, $Y = p\sin\varphi\cos\varphi$, $Z = p\cos^2\varphi$.

Siły wewnętrzne powłokowe: $n_\varphi = -\dfrac{pa}{2} = const$, $n_\vartheta = -\dfrac{pa}{2}\cos 2\varphi$



Przykład: **Powłoka obrotowa hiperboliczna, ciężar własny** g

Równanie południka: $\dfrac{r_0^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$. Wprowadzając $\alpha=\dfrac{a^2}{b^2}$ rozkład sił:

$$n_\varphi=-\frac{ga^2r_2}{2r_0^2}\left[\frac{zr_2}{a^2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}\ln C\left(\frac{z}{a}+\frac{r_2}{a\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}\right)\right],\quad n_\vartheta=-g\alpha z+\frac{\alpha a^2}{r_2^2}n_\varphi$$

stała C wyznaczana z warunku brzegowego, np. przy górnym brzegu nieobciążonym naprężenia n_φ na tym brzegu zerowe.