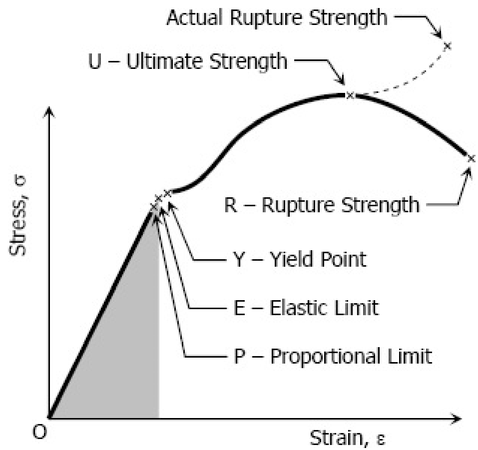
ELEMENTY TEORII PLASTYCZNOŚCI

Podstawą przyjmowania modeli materiałowych (w skali punktu, mikroskopowej – zależności $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$) są próby laboratoryjne, najczęściej – **statyczna próba rozciągania / ściskania osiowego**

Przykładowy wykres – stal konstrukcyjna o średniej zawartości węgla (medium-carbon)
Granica plastyczności (możliwe oznaczenia: $\sigma_{pl}, \sigma_p, f_Y$,

Y – yield – plastyczne płynięcie, wyraźna granica plastyczności (dolna, górna) odpowiadająca rozpoczęciu zachowania niesprężystego – proces nieodwracalny, w cyklu obciążenie – odciążenie pozostaje odkształcenie trwałe

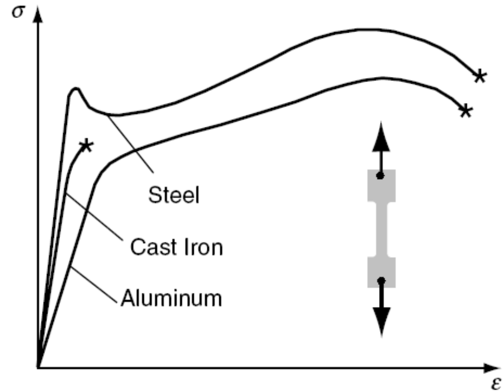


Stress-strain diagram of a medium-carbon structural steel

Granica plastyczności nie jest uniwersalnym parametrem materiałów konstrukcyjnych (np. w metalach i ich stopach)

Stal konstrukcyjna - wyraźna granica plastyczności

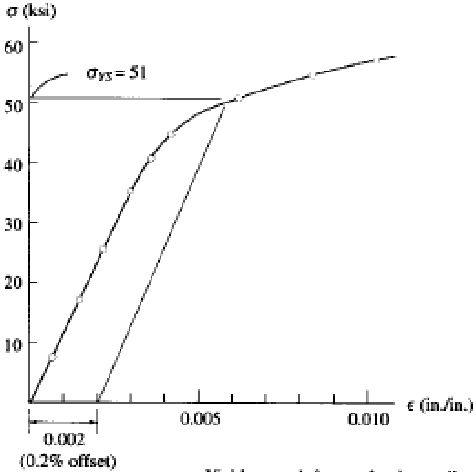
Żeliwo – zachowanie kruche: brak odkształceń plastycznych (lub nieznaczna ich wielkość) przed zniszczeniem, definiowana granica wytrzymałości σ_m, σ_r (wyjątek: żeliwo ciągliwe, żeliwo sferoidalne)



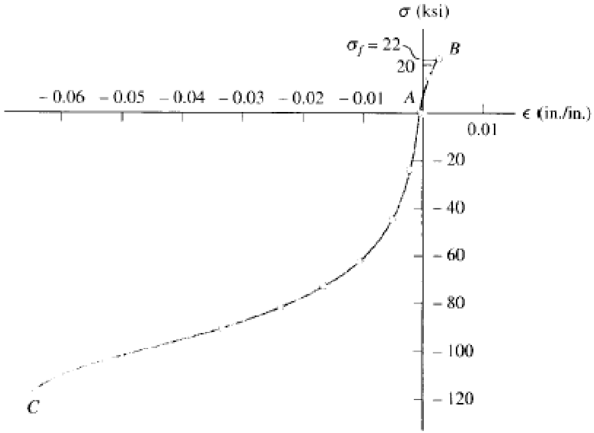
Typical uniaxial stress-strain curves for three structural metals.

Stopy aluminium – brak wyraźnej granicy plastyczności, wyznacza się tzw. **umowną granicę plastyczności** (offset yield strength), odpowiadającą w cyklu obciążenie-odciążenie 0.2 % odkształcenia trwałego ($\varepsilon_{pl} = 0.2\%$).

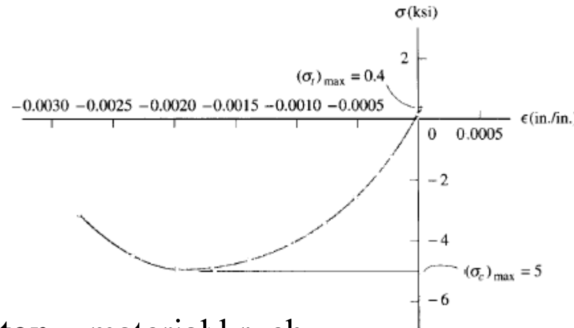
Stopy aluminium – tzw. **umowna granica plastyczności**, odpowiadającą w cyklu obciążenie-odciążenie 0.2 % odkształcenia trwałego ($\varepsilon_{pl} = 0.2\%$).



Yield strength for an aluminum alloy

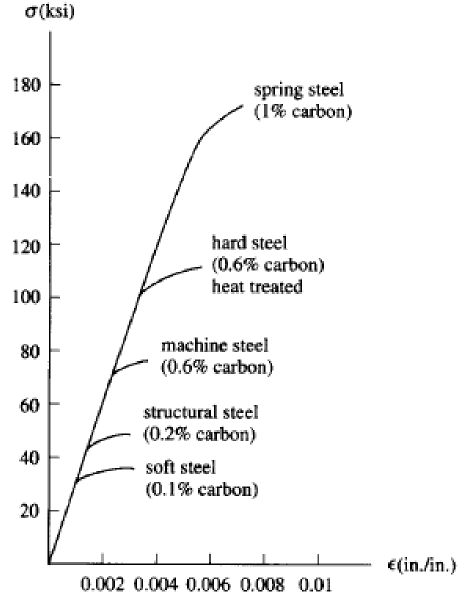


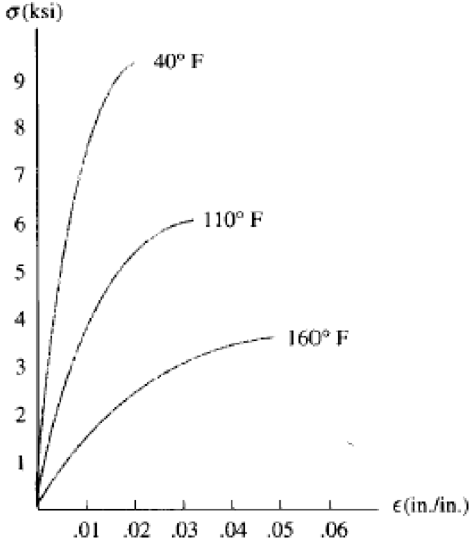
Żeliwo szare - materiał kruchy – granica wytrzymałości: na rozciąganie i ściskanie



Beton – materiał kruchy

Stal konstrukcyjna – zawartość jej składników (tu: węgla) wpływa tak na wartość naprężeń granicznych (granica plastyczności σ_{pl}, wytrzymałości σ_r) jak i zachowanie materiału (plastyczne, kruche).



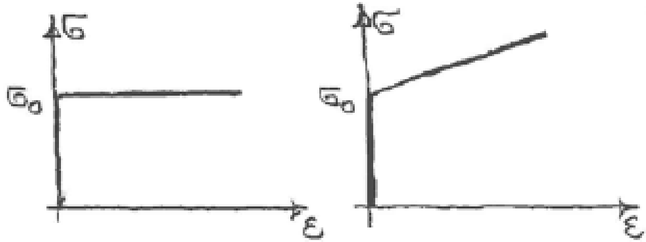


σ - ϵ diagrams for a methacrylate plastic

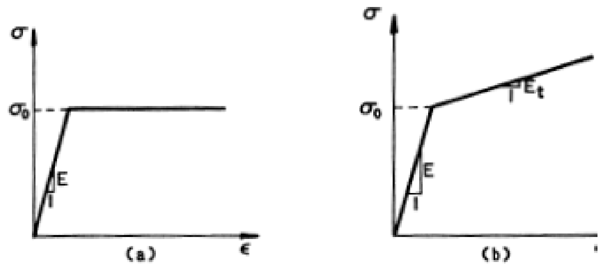
Temperatura może wykazywać wpływ na własności materiału, rys. **polimetakrylan metylu** (pleksiglas, szkło organiczne) wysokie temperatury – materiał twardy, kruchy, niskie temperatury – miękki, ciągliwy (plastyczny)

Uproszczone modele materiałowe – o fragmentach liniowych:

* idealnie sztywnoplastyczny
oraz sztywnoplastyczny
ze wzmocnieniem liniowym

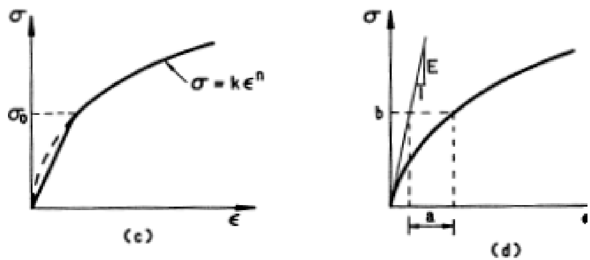


* idealnie sprężystoplastyczny
oraz sprężystoplastyczny
ze wzmocnieniem liniowym



modele materiałowe nieliniowe lub o fragmentach nieliniowych:

* model sprężysty ze
wzmocnieniem wykładniczym
* model Ramberga – Osgooda
($\varepsilon = f\left(\sigma\right)$ - funkcja potęgowa)



Teoria plastyczności – dział mechaniki ciała stałego, w jej zakresie opis warunków powstawania i rozwoju (propagacji) zjawisk plastycznych, zakres teorii plastyczności:

* **początek procesu uplastycznienia** – pojawienie się odkształceń plastycznych (stałych, nieodwracalnych) → warunki (kryteria) uplastycznienia, hipotezy wytrzymałościowe (hipotezy wytężenia materiału)

* **rozwój uplastycznienia** – propagacja stref uplastycznienia w ciele stałym – teorie idealnej plastyczności,

* **zjawisko wzmocnienia plastycznego**, rodzaje wzmocnienia, opis analityczny i graficzny,

* opis odkształceń odwracalnych, towarzyszących zjawiskom plastycznym.

Założenie: istnienie funkcji skalarnej $F\left(\sigma_{ij}, k_m\right)$ stanu naprężenia oraz grupy parametrów, w ogólnym przypadku zależnych od stanu odkształcenia, położenia punktu, kierunku oraz historii obciążenia.

Założenie: istnienie **funkcji stanu granicznego** – funkcji skalarnej $F\left(\sigma_{ij}, k_m\right)$ stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ oraz grupy parametrów k_m, w ogólnym przypadku zależnych od stanu odkształcenia, położenia punktu $\mathbf{x} \equiv x_i$ oraz historii obciążenia. Granicę stanów: sprężystego i plastycznego określa równość $F\left(\sigma_{ij}, k_m\right) = 0$

Kolejne możliwe uproszczenia, przyjmowane w badaniu początku uplastycznienia (przejścia ze stanu sprężystego do plastycznego):

* **materiał jednorodny** – uplastycznienie niezależne od wektora $\mathbf{x} \equiv x_i$,
* **materiał izotropowy** – warunek plastyczności możliwy do zapisania w przestrzeni naprężeń głównych $\left\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right\}$,
* uplastycznienie niezależne od stanu odkształcenia ani od historii obciążenia – **parametry** k_m są **wartościami liczbowymi**,
* redukcja zbioru parametrów k_m do **jednej wartości** $k \equiv \sigma_0$ - granicy plastyczności, w rozszerzeniu na materiały kruche – granicy wytrzymałości, osiąganych w eksperymentach jednoosiowych.

Warunki (kryteria) plastyczności definiują wytężenie materiału (przejście w stan plastyczny) w złożonych stanach naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ (2D, 3D) na podstawie rezultatów prób jednoosiowych.

Każdy z warunków plastyczności definiuje w wielowymiarowej przestrzeni naprężeń tzw. **obszar bezpieczny**, o granicy (powierzchni granicznej) danej równaniem $F = 0$.

Warunki plastyczności zależne od jednego parametru $k \equiv \sigma_0$, materiałowych naprężeń granicznych, wspólnych przy rozciąganiu i ściskaniu – **kryteria** (hipotezy) **jednoparametrowe**.

Przegląd kryteriów plastyczności (kurs Wytrzymałości Materiałów):

* hipoteza **Galileusza** (XVIII w.) – **Rankine** (1850) – miarą wytężenia są **maksymalne naprężenia normalne** (naprężenia główne)

* hipoteza **de St. Venanta** – miarą wytężenia materiału są **ekstremalne odkształcenia podłużne** (odkształcenia główne)

Przegląd kryteriów plastyczności – c.d.

* hipoteza **Treski** (Henri Tresca, 1864), lub Treski–Guesta (TG)

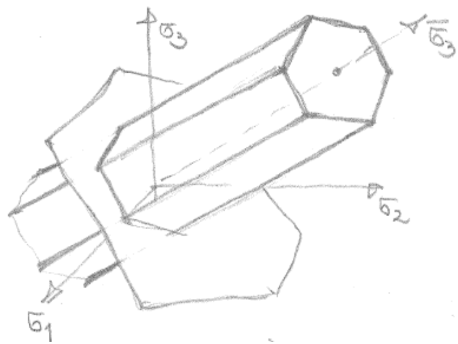
miarą wytężenia materiału są **ekstremalne naprężenia styczne**.
Wartości ekstremalnych naprężeń stycznych w 3D, wyrażone poprzez naprężenia główne: $\tau_{\max} = \max\left(\tau_1, \tau_2, \tau_3\right)$, gdzie

$$\tau_1 = \frac{\left|\sigma_2 - \sigma_3\right|}{2},\ \tau_2 = \frac{\left|\sigma_3 - \sigma_1\right|}{2},\ \tau_3 = \frac{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|}{2},\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$ - naprężenia główne

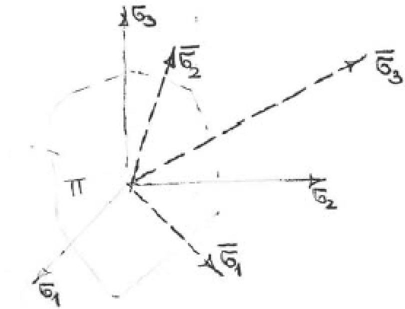
Ekstremalne naprężenia styczne w granicznym stanie jedno-osiowym ($\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) są równe $\tau_0 = 0.5\sigma_0$,
stąd w przestrzeni naprężeń głównych $\left\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right\}$ obszar bezpieczny wg Treski jest dany nierównościami:

$$\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| \le \sigma_0, \left|\sigma_2 - \sigma_3\right| \le \sigma_0, \left|\sigma_3 - \sigma_1\right| \le \sigma_0$$

powierzchnia graniczna składa się z sześciu fragmentów płaszczyzn.



Transformacja w przestrzeni naprężeń (obrót układu współrzędnych): układ $\left\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\right\}$ taki, że oś $\bar{\sigma}_3$ dana jest równaniem $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ - jest to tzw. **oś hydrostatyczna**, każdy jej punkt reprezentuje stan naprężenia dany tensorem kulistym – jednakowe naprężenie normalne w każdym kierunku, jest to stan odkształcenia objętościowego – jednakowe odkształcenie podłużne w każdym kierunku.

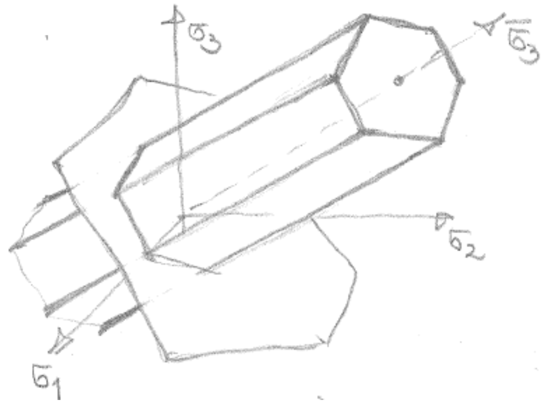


Płaszczyzna zawierająca osie $\bar{\sigma}_1$ i $\bar{\sigma}_2$ dana jest równaniem $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, zawiera stany naprężenia dane dewiatorem (zerowy ślad tensora naprężenia), jest to tzw. **płaszczyzna dewiatorowa**. Wersory układu $\left\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\right\}$:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}, \ \bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}, \ \bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \text{ transformacja:}$$

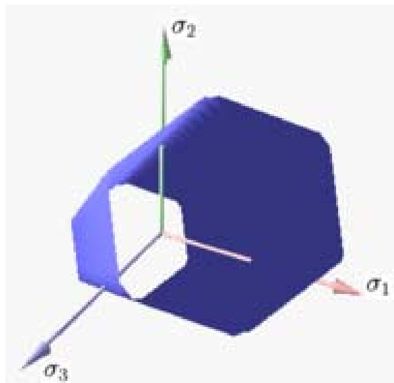
$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\sigma}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_3, \ \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\sigma}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_3, \ \sigma_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\sigma}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_3$$

Zestaw płaszczyzn granicznych hipotezy Treski w układzie naprężeń $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$ dany jest równaniami:

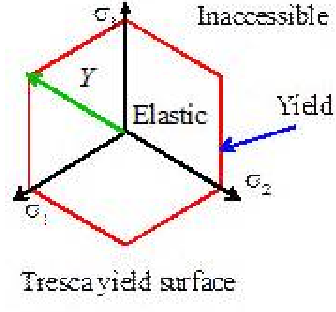


$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = -\bar{\sigma}_2\sqrt{2} = \pm\sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\sqrt{6} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2\sqrt{2} = \pm\sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_1 = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\sqrt{6} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2\sqrt{2} = \pm\sigma_0 \end{cases}$$

Jest to zbiór płaszczyzn równoległych do osi hydrostatycznej $\bar{\sigma}_3$ (współrzędna $\bar{\sigma}_3$ nie występuje w równaniach), ograniczający **nieskończony graniastosłup prawidłowy sześciokątny**.



Przekrój graniastosłupa płaszczyzną dewiatorową $\bar{\sigma}_3 = 0$ – sześciokąt foremny.

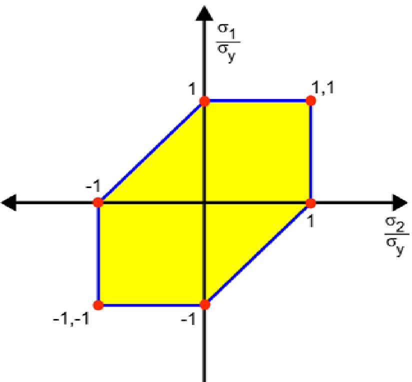


PSN w płaszczyźnie $O\sigma_1\sigma_2$ $(\sigma_3 = 0)$ – obszar bezpieczny Treski:

$$\left|\sigma_1\right| \le \sigma_0, \ \left|\sigma_2\right| \le \sigma_0, \ \left|\sigma_1 - \sigma_2\right| \le \sigma_0$$

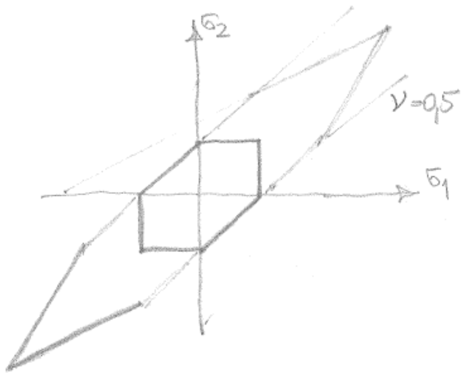
PSO w płaszczyźnie $O\sigma_1\sigma_2$ $(\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$ – obszar bezpieczny:

$$\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| \le \sigma_0, \left|\sigma_1 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right| \le \sigma_0, \left|\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right| \le \sigma_0$$



PSO, $\nu = 0.5$ - pasmo równoległe

$$\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| = \sigma_0$$



* hipoteza **Hubera –Misesa - Hencky** (HMH) - Maksymilian Tytus Huber (1904), Richard von Mises (1913), Heinrich Hencky (1924)

miarą wytężenia materiału jest **energia właściwa odkształcenia postaciowego** (nieobjętościowego) – jedynie zmiana postaci (kształtu), bez zmiany objętości

Energia właściwa – gęstość energii, energia na jednostkę objętości, odniesiona do nieskończenie małego otoczenia punktu.

Jest to **hipoteza energetyczna**. Warunki Galileusza-Rankine i Treski – **naprężeniowe**, hipoteza de st. Venanta – **odkształceniowa** (klasyfikacja – podstawowe sformułowanie warunku wytężenia).

Całkowita energia właściwa odkształcenia sprężystego

$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ (działanie tensorowe – zwężenie pełne)

Rozkład każdego z tensorów $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ na część kulistą i dewiator:

$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + e_{ij}$, z zapisem o zerowym śladzie każdego z dewiatorów: $tr\,\mathbf{s} = s_{ij}\delta_{ij} = 0$, $tr\,\mathbf{e} = e_{ij}\delta_{ij} = 0$ daje

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\sigma_m\,\delta_{ij}+s_{ij}\right)\left(\varepsilon_m\,\delta_{ij}+e_{ij}\right)=\frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m+\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}=W_V+W_\gamma$$

Składniki energii całkowitej:

$W_V=\dfrac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m$ - energia odkształcenia objętościowego, ze związku

$\sigma_m=\dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m$ jest $W_V=\dfrac{3E}{2\left(1-2\nu\right)}\varepsilon_m^2=\dfrac{3\left(1-2\nu\right)}{2E}\sigma_m^2$

$W_\gamma=\dfrac{1}{2}s_{ij}\,e_{ij}$ - energia odkształcenia postaciowego, ze związku

$s_{ij}=2Ge_{ij}$ wynika $W_\gamma=\dfrac{1}{2}s_{ij}\,e_{ij}=Ge_{ij}\,e_{ij}=\dfrac{1}{4G}s_{ij}\,s_{ij}$

Drugi niezmiennik symetrycznego tensora II walencji $\mathbf{A}\equiv A_{ij}$ wynosi

$II_A=\dfrac{1}{2}\left[\left(tr\mathbf{A}\right)^2-tr\mathbf{A}^2\right]=\dfrac{1}{2}\left[A_{ii}A_{jj}-A_{ij}A_{ij}\right]$, w odniesieniu do

dewiatora **s** zachodzi $II_s=-\dfrac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$, tak więc $W_\gamma=-\dfrac{1}{2G}II_s$

Drugi niezmiennik dewiatora naprężeń **s** ($\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}$) można wyrazić względem składowych tensora $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ wzorem

$$II_s = -\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)\right],$$

zatem energia odkształcenia postaciowego wyrażona przez $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$:

$$W_\gamma = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)\right]$$

Wyrażenie to jest niezmiennikiem tensorowym, zatem w układzie osi głównych $\left\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right\}$ jego wartość wynosi

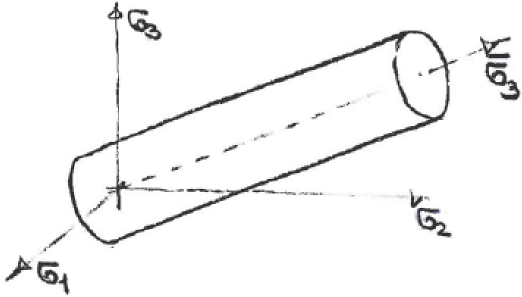
$$W_\gamma = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right].$$ Stan jednoosiowy:

$(\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \Leftrightarrow W_\gamma = \dfrac{1}{12G} 2\sigma_0^2$, stąd obszar bezpieczny:

$$\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right) \le 2\sigma_0^2$$

lub w układzie osi głównych $\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 \le 2\sigma_0^2$.

Granica obszaru bezpiecznego, wyrażona względem drugiego niezmiennika dewiatora naprężeń: $3II_s + \sigma_0^2 = 0$.

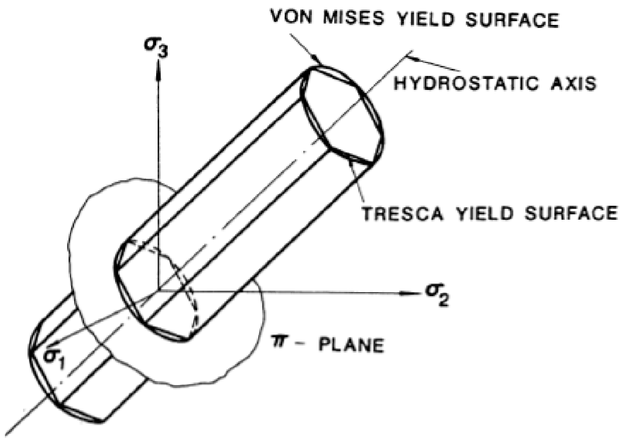


W przestrzeni naprężeń $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$

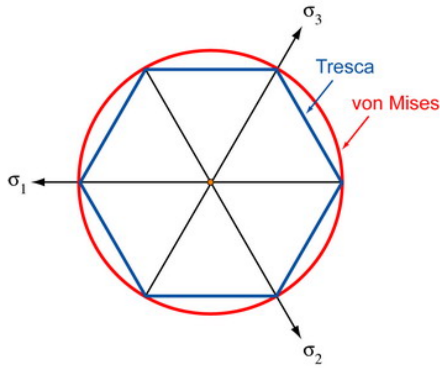
jest to **nieskończony walec kołowy** o równaniu $\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 = \frac{2}{3}\sigma_0^2$

o osi będącej osią hydrostatyczną $\bar{\sigma}_3$ i promieniu podstawy (w płaszczyźnie dewiatorowej) równemu $R = \sigma_0 \sqrt{3}/6$.

Jest to walec opisany na graniastosłupie – granicy obszaru bezpiecznego Treski.



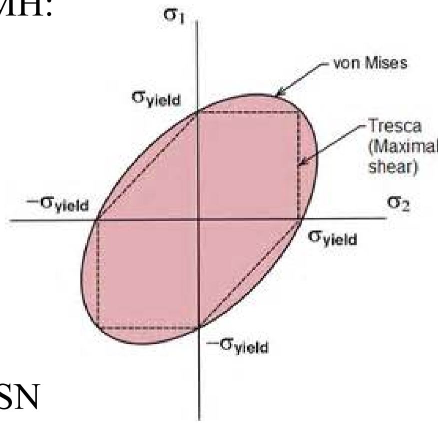
Przekrój walca HMH płaszczyzną dewiatorową $\bar{\sigma}_3 = 0$ jest okręgiem opisanym na sześciokącie foremnym Treski.



PSN w płaszczyźnie $O\sigma_1\sigma_2$ $(\sigma_3 = 0)$ – obszar bezpieczny HMH – elipsa $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2$ o osiach symetrii $\sigma_1 = \pm\sigma_2$, także opisana na sześciokącie Treski.

W dowolnym płaskim stanie naprężeń warunek HMH:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_0^2$$



PSO w pł. $O\sigma_1\sigma_2$ $(\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$:

obszar bezpieczny: ogólne równanie elipsy o tych samych, co w PSN osiach symetrii

$$\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\left(1 - \nu + \nu^2\right) - \sigma_1\sigma_2\left(1 + 2\nu - 2\nu^2\right) = \sigma_0^2$$

Przypadki: $\nu = 0$ - obszar pokrywający się z PSN

$\nu \in (0, 0.5)$ - poszerzenie obszaru w stosunku do PSN

$\nu = 0.5$ przypadek graniczny, pasmo o granicach $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\sigma_0\sqrt{3}/3$

Zastosowanie hipotez wytrzymałościowych: ocena bezpieczeństwa złożonego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ (3D, 2D) na podstawie rezultatu próby jednoosiowej – wartości σ_0. Stan bezpieczny – należący do obszaru bezpiecznego w przestrzeni naprężeń można określić warunkiem wytrzymałościowym $\sigma_{zast} \le \sigma_0$ (analogicznym do warunku stanu jednoosiowego), gdzie σ_{zast} (lub σ_{eff}) – naprężenia zastępcze (zredukowane) wg danej hipotezy.

W przypadku hipotezy HMH w stanie przestrzennym jest

$$\sigma_{zast} = \sqrt{0.5\left[\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)\right]}$$

układ osi głównych: $\sigma_{zast} = \sqrt{0.5\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]}$.

Hipoteza HMH – płaski stan naprężenia:

$$\sigma_{zast} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \text{ lub } \sigma_{zast} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}.$$

Zadanie: Stosując hipotezy: Treski i HMH obliczyć graniczną wartość naprężenia stycznego τ w stanie czystego jednopłaszczyznowego ścinania, mając dany wynik próby jednoosiowej σ_0.

Stan wyjściowy (jedna z możliwości): $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Hipoteza Treski: naprężenia główne: $\sigma_1 = \tau,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -\tau$,

ekstremalne naprężenia styczne $\tau_{\max} = 0.5(\tau + \tau) = \tau$,

graniczne naprężenia styczne $\tau_0 = 0.5\sigma_0$,

tym samym graniczna wartość $\tau_T = 0.5\sigma_0$

Hipoteza HMH: wersja w dowolnym układzie współrzędnych

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 2\sigma_0^2$$

Po podstawieniu $6\tau^2 = 2\sigma_0^2$, stąd $\tau_{HMH} = \sigma_0 \sqrt{3}/3 \cong 0.577\sigma_0$

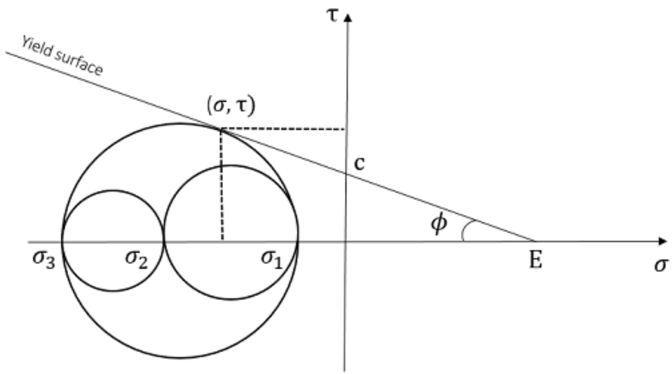
Hipotezy dwuparametrowe – wykorzystujące dwie wartości naprężeń granicznych: przy rozciąganiu $\sigma_0^+ \equiv R_t$ i przy ściskaniu $\sigma_0^- \equiv R_c$. Zastosowanie: np. beton, materiały kruche (naprężenia graniczne – granica wytrzymałości)

* hipoteza **Mohra** (Christian Otto Mohr, 1900) – **Coulomba** (Charles Coulomb, 1773) - miarą wytężenia są ekstremalne naprężenia styczne, z uwzględnieniem towarzyszących naprężeń normalnych.

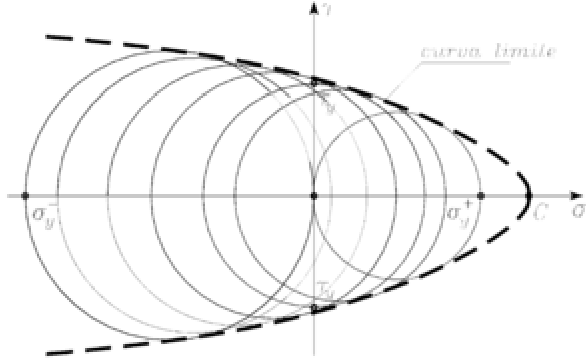
Ch. Coulomb – obserwacja materiałów sypkich – koło Mohra naprężeń: styczna do koła Mohra jest linią

$$\tau = C - K\sigma \ ,$$

gdzie C – kohezja (miara spójności), $K = tg\varphi$, φ - kąt tarcia wewnętrznego.



Ch. Mohr – stany graniczne naprężeń stycznych (ścinanie) wyznaczane na podstawie obwiedni kół Mohra, przy kilku stanach naprężenia.



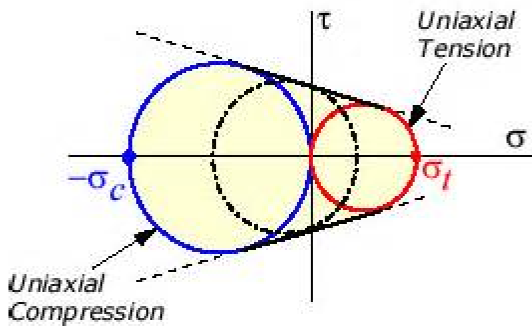
Przyjmując w przybliżeniu, że do stycznej należą skrajne punkty koła Mohra $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ zachodzi:

$$\pm 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) = C - 0.5K(\sigma_1 + \sigma_2),$$

rozszerzenie na pozostałe wymiary:

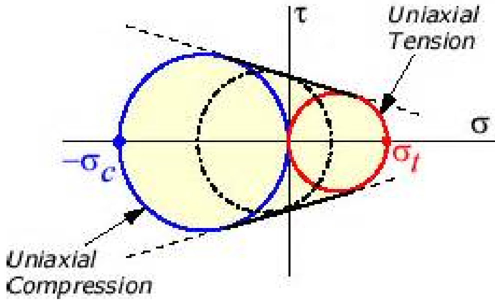
$$\pm 0.5(\sigma_2 - \sigma_3) = C - 0.5K(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\pm 0.5(\sigma_3 - \sigma_1) = C - 0.5K(\sigma_3 + \sigma_1)$$



Parametry C i K można wyznaczyć na podstawie dwóch prób jednoosiowych: rozciągania i ściskania, w każdej z nich tworząc koło Mohra.

W obu próbach jednoosiowych jest:
$\pm 0.5\sigma_1 = C - 0.5K\sigma_1 \Rightarrow \pm\sigma_1 + K\sigma_1 = 2C$
Próba rozciągania: $\sigma_1 = R_t$, podstawiając dodatnią wartość σ_1 jest $R_t = 2C/(1+K)$.
Próba ściskania: $\sigma_1 = -R_c$, podstawiając ujemną wartość σ_1 jest $R_c = 2C/(1-K)$.



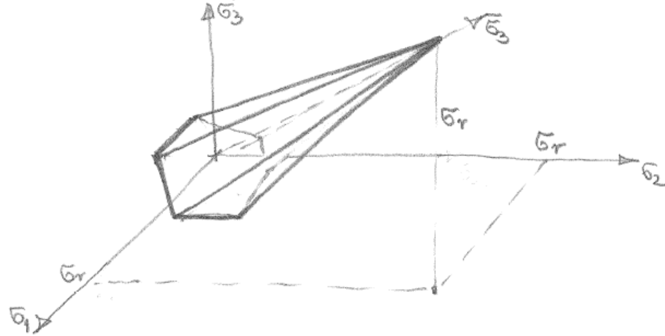
Gdy $m = \dfrac{R_c}{R_t}$ jest $K = \dfrac{m-1}{m+1}$, $C = R_c \dfrac{1}{m+1} = R_t \dfrac{m}{m+1}$, wtedy równania

$$\begin{cases} \pm 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) = R_t \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{m-1}{m+1}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \pm 0.5(\sigma_2 - \sigma_3) = R_t \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{m-1}{m+1}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \pm 0.5(\sigma_3 - \sigma_1) = R_t \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{m-1}{m+1}(\sigma_3 + \sigma_1) \end{cases}$$

sześć płaszczyzn w przestrzeni $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ - granice obszaru bezpiecznego

Na osi hydrostatycznej $\bar{\sigma}_3$ wszystkie płaszczyzny graniczne Mohra – Coulomba przecinają się w punkcie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r$, danym

wzorem $\sigma_r = R_t \dfrac{m}{m-1}$.



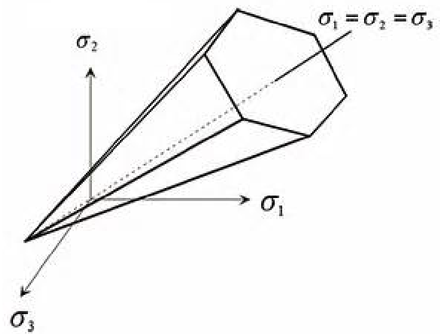
Gdy $R_c > R_t \Leftrightarrow m > 1$

obrazem geometrycznym powierzchni granicznej jest **nieskończony ostrosłup sześciokątny** o wierzchołku

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r = R_t \frac{m}{m-1}$$

Przekroje ostrosłupa płaszczyznami $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const$ są sześciokątami foremnymi.

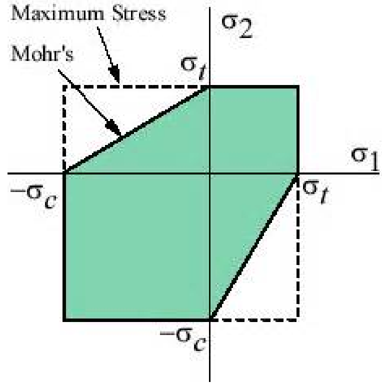
Przy $m = 1 \Leftrightarrow R_t = R_c$ warunek MC i kryterium Treski są tożsame (powierzchnia graniczna - graniastosłup).



obraz od strony ujemnych półosi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

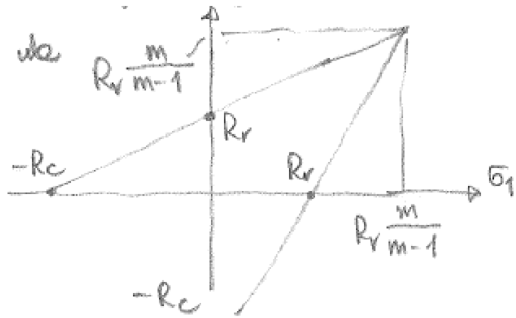
Płaski stan naprężenia ($\sigma_3 = 0$):

$$\begin{cases} \pm 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) = C - 0.5K(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \pm 0.5\sigma_2 = C - 0.5K\sigma_2 \\ \pm 0.5\sigma_1 = C - 0.5K\sigma_1 \end{cases}$$



Powracając do symboliki R_t i R_c jest

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{R_t} - \dfrac{\sigma_2}{R_c} = 1, \quad \dfrac{\sigma_2}{R_t} - \dfrac{\sigma_1}{R_c} = 1 \\ \sigma_2 = \pm R_c, \quad \sigma_1 = \pm R_t \end{cases}$$



Płaski stan odkształcenia
(ilustracja w przypadku $\nu = 0.5$)

* hipoteza **Druckera** (Drucker) – **Pragera** (Prager), 1952 - miarą wytężenia są odkształcenia postaciowe (drugi niezmiennik dewiatora naprężeń, II_s), z wpływem odkształceń objętościowych (ślad tensora naprężenia, I_σ).

Nawiązanie: hipoteza HMH: $3II_s + \sigma_0^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-II_s} = K$, gdzie $K = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$

Warunek Druckera – Pragera: $\alpha I_\sigma + \sqrt{-II_s} = K$,

niezmienniki, w układzie osi głównych: $I_\sigma = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$,

$$II_s = -\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = -\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right].$$

Dwa parametry: próby jednoosiowe, w których: $\alpha\sigma_1 + \left|\sigma_1\right|\sqrt{3}/3 = K$

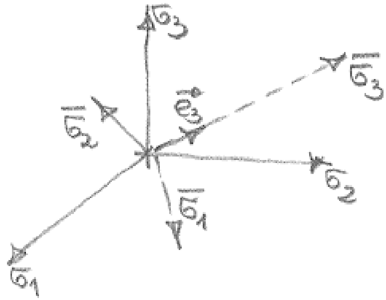
Gdy $\sigma_1 = R_t$ jest $\alpha R_t + R_t\dfrac{\sqrt{3}}{3} = K$

Gdy $\sigma_1 = -R_c$ jest $-\alpha R_c + R_c\dfrac{\sqrt{3}}{3} = K$

stąd $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{m-1}{m+1} \\ K = \dfrac{2R_c}{\sqrt{3}\left(m+1\right)} \end{cases}$, $m = \dfrac{R_c}{R_t}$

Równoważna forma warunku DP:

$$\left(m-1\right)I_{\sigma}+\left(m+1\right)\sqrt{-3II_{s}}=2R_{c}$$



W przestrzeni naprężeń $\left\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3\right\}$
(oś hydrostatyczna $\bar{\sigma}_3$ i płaszczyzna dewiatorowa $O\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2$) niezmienniki są równe

$$I_{\sigma}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\bar{\sigma}_3\sqrt{3},\ II_{s}=-\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2\right),$$

stąd $\alpha\bar{\sigma}_3\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2\right)}=K$,

lub $\left(m-1\right)\bar{\sigma}_3\sqrt{3}+\left(m+1\right)\sqrt{\frac{3}{2}\left(\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2\right)}=2R_{c}$

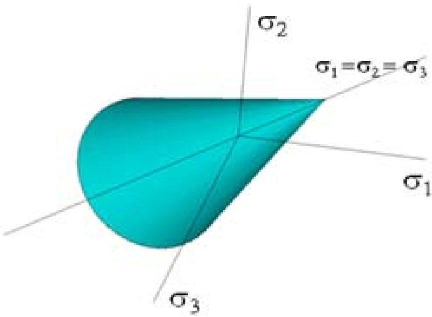
$$\left(m+1\right)\sqrt{\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_2^2}=2R_{c}\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(m-1\right)\bar{\sigma}_3\sqrt{2}$$

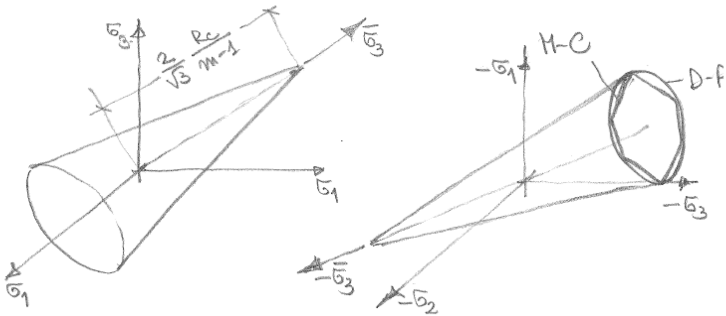
W przypadku $m=1 \Leftrightarrow R_t=R_c$ warunki DP i HMH są tożsame.

Równanie powierzchni granicznej DP w przestrzeni $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$ to

$(m+1)\sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2} = 2R_c\sqrt{\frac{2}{3}} - (m-1)\bar{\sigma}_3\sqrt{2}$ - **nieskończony stożek obrotowy** o osi $\bar{\sigma}_3$. Przekroje płaszczyznami $\bar{\sigma}_3 = c = const$ są okręgami o promieniach $\frac{1}{m+1}\left[2R_c\sqrt{\frac{2}{3}} - (m-1)\bar{\sigma}_3\sqrt{2}\right]$

Zerowe wyrażenie określające promień $\rightarrow$ wierzchołek stożka, współrzędna $\bar{\sigma}_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{R_c}{m-1}$, lub $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{3}\frac{R_c}{m-1}$





Przypadek PSN $(\sigma_3 = 0)$: $I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, II_s = -\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2\right)$

$(m-1)I_\sigma + (m+1)\sqrt{-3II_s} = 2R_c$ po podstawieniu i uporządkowaniu

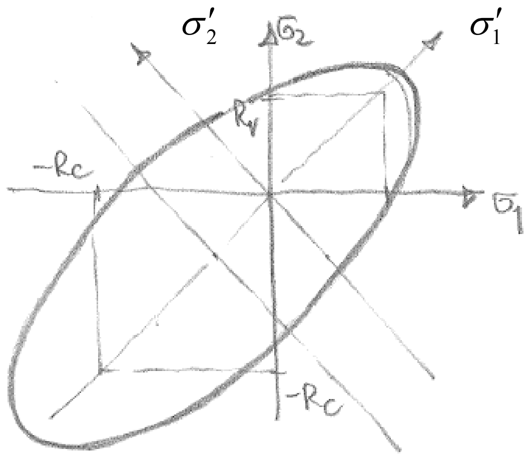
$$4m\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) - \sigma_1\sigma_2\left(3m^2 - 2m + 3\right) + 4R_c(m-1)(\sigma_1 + \sigma_2) = 4R_c^2.$$

Jest to równanie elipsy o osi symetrii $\sigma_1 = \sigma_2$.

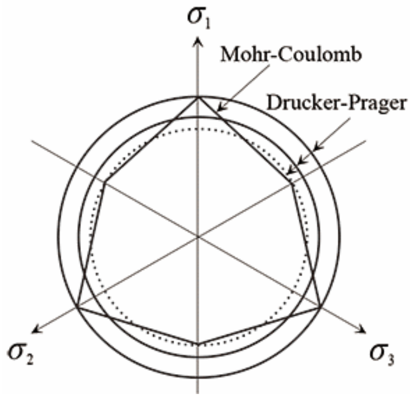
Obliczenie przy $m = 2 \Leftrightarrow R_c = 2R_t$

W układzie $O\sigma_1'\sigma_2'$ obszar bezpieczny jest elipsą

$$\left(\frac{\sigma_1' + 0.4R_c}{1.362R_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2'}{0.586R_c}\right)^2 = 1$$



Przykładowy przekrój powierzchni granicznych MC i DP płaszczyzną dewiatorową $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$



Zadanie: Obliczyć graniczną wartość p w stanie wszechstronnego rozciągania $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ stosując warunki MC i DP. Dane: $R_t, R_c,\ m = R_c / R_t$

Hipoteza MC: Zapis $\pm 0.5(\sigma_1 - \sigma_2) = R_t \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{m-1}{m+1}(\sigma_1 + \sigma_2)$ daje

$mR_t = p(m-1)$, stąd $p_{gr,MC} = R_t \dfrac{m}{m-1} = R_c \dfrac{1}{m-1}$

Hipoteza DP: w stanie trójosiowego równomiernego rozciągania jest $I_\sigma = 3p,\ II_s = 0$, zatem zapis $(m-1) I_\sigma + (m+1)\sqrt{-3II_s} = 2R_c$ jest tożsamy z formą $3p(m-1) = 2R_c$, czyli $p_{gr,DP} = \dfrac{2}{3} R_t \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{2}{3} R_c \dfrac{1}{m-1}$.

W stanie wszechstronnego równomiernego obciążenia jest $p_{gr,DP} = \dfrac{2}{3} p_{gr,MC}$.