TSiP – ĆWICZENIA 6/1

1 ■ Podać rozwiniętą formę wyrażeń: $\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T + \varrho \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$
gdzie $\underset{\sim}{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ – pole tensorowe II walencji, $(\sigma_{ji,j} + \varrho b_i = 0_i)$ } (*)
$\underset{\sim}{b} \equiv b_k$ – pole wektorowe; ϱ – pole skalarne

---

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \quad ; \quad \underset{\sim}{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ji}$$

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T = \sigma_{ji,j} = \begin{Bmatrix} \sigma_{j1,j} \\ \sigma_{j2,j} \\ \sigma_{j3,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}^T + \varrho \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0} \\ (\sigma_{ji,j} + \varrho b_i = 0_i) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3} + \varrho b_1 = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + \varrho b_2 = 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} + \varrho b_3 = 0 \end{cases}$$

forma tradycyjna – zadanie domowe

Gdy $\underset{\sim}{\sigma}$ – tensor naprężenia w punkcie, $\underset{\sim}{b}$ – wektor sił masowych $\left[\frac{kN}{kg}\right]$; ϱ – gęstość $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
stąd $\varrho \underset{\sim}{b}$ – wektor sił objętościowych $\left[\frac{kN}{m^3}\right]$ – ciężar własny
(*) – LOKALNE RÓWNANIA RÓWNOWAGI W PUNKCIE (suma rzutów)
suma momentów: $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ lub $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ijk} = 0$.
6 NIEWIADOMYCH, 3 RÓWNANIA → PROBLEM STATYCZNIE NIEWYZNACZALNY

---

2 ■ Podać rozwiniętą formę wyrażeń $\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underset{\sim}{u} + \nabla \underset{\sim}{u}^T)$ (**)
lub $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $\quad \underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$ – pole tensorowe II rz., $\underset{\sim}{u} \equiv u_k$ – pole wektorowe

---

* $i=j$: $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, analogicznie ε_{22}, ε_{33}
* $i \neq j$: $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right) = \varepsilon_{21}$, analogicznie pozostałe

Forma $\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underset{\sim}{u} + \nabla \underset{\sim}{u}^T)$ realizuje automatycznie warunek $\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$
– macierz (tensor) $\underset{\sim}{\varepsilon}$ jest <u>SYMETRYCZNĄ CZĘŚCIĄ</u> macierzy (tensora) $\nabla \underset{\sim}{u}$ – gradientu wektora $\underset{\sim}{u}$.

Gdy $\underset{\sim}{\varepsilon}$ – pole tensorowe małych odkształceń w punkcie,
$\underset{\sim}{u}$ – pole wektorowe przemieszczeń, równanie (**)
to ZWIĄZKI KINEMATYCZNE (GEOMETRYCZNE) $\underset{\sim}{\varepsilon} \leftrightarrow \underset{\sim}{u}$ W PUNKCIE.

Mając przemieszczenie → odkształcenie łatwo, jako pochodne
mając odkształcenie → przemieszczenie drogą całkowania
warunki brzegowe – wartości przemieszczeń z góry znane
(np. podparte krawędzie układów)

c.d. strona 6/2

TSiP – ĆWICZENIA 6/2

2 ■ kontynuacja – notacja xyz:

$$\underset{\sim}{u}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix};\quad \underset{\sim}{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\&&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x&\frac{1}{2}\gamma_{xy}&\frac{1}{2}\gamma_{xz}\\&\varepsilon_y&\frac{1}{2}\gamma_{yz}\\&&\varepsilon_z\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ldots$$

gdy dany jest tensor II walencji, $\nabla\underset{\sim}{u}$:

$\underset{\sim}{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\nabla\underset{\sim}{u}+\nabla\underset{\sim}{u}^T)$ – CZĘŚĆ SYMETRYCZNA tensor małych odkształceń

$\underset{\sim}{\omega}=\frac{1}{2}(\nabla\underset{\sim}{u}-\nabla\underset{\sim}{u}^T)$ – CZĘŚĆ ANTYSYMETRYCZNA tensor obrotu – jedynie sztywny obrót

---

3 ■ Rozwinąć równanie: $\underset{\sim}{\sigma}=\lambda\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}+2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}\Rightarrow\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij}$

$i=j=1:\ \sigma_{11}=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})+2\mu\varepsilon_{11}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33}$, itd.

$i=1, j=2:\ \sigma_{12}=2\mu\varepsilon_{12}$, itd. 6 NIEZALEŻNYCH RÓWNAŃ

Gdy $\underset{\sim}{\sigma}$ – tensor naprężeń, $\underset{\sim}{\varepsilon}$ – tensor małych odkształceń – LINIOWOSPRĘŻYSTE ZWIĄZKI FIZYCZNE – PRAWO HOOKE'A (użycie stałych Lamé → λ,μ)

---

4 ■ Rozwinąć równanie: $\underset{\sim}{\varepsilon}=\frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\sigma}-\frac{\nu}{E}\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}\Rightarrow\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$

$i=j=1:\ \varepsilon_{11}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$, itd.

$i=1, j=2:\ \varepsilon_{12}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}=\frac{1}{2G}\sigma_{12}$, itd. 6 NIEZALEŻNYCH RÓWNAŃ

Gdy $\underset{\sim}{\sigma}$ – tensor naprężeń, $\underset{\sim}{\varepsilon}$ – tensor małych odkształceń – LINIOWOSPRĘŻYSTE ZWIĄZKI FIZYCZNE – PRAWO HOOKE'A (stałe techniczne E,ν)

notacja xyz: $\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]$; $\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2G}\tau_{xy}$, itp.

---

5 ■ Podać w dwuwymiarowym układzie R^2 laplasjan funkcji skalarnej F $(\nabla^2F\equiv\Delta F)$ a następnie $\Delta(\Delta F)\equiv\nabla^4F$.

$$\nabla^2F\equiv\Delta F=\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_i}=F_{,ii}=\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}=F_{,11}+F_{,22}$$

$$\nabla^4F=\nabla^2(\nabla^2F)=\Delta(\Delta F)=\left(\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial^4F}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4F}{\partial x_1^2\partial x_2^4}+\frac{\partial^4F}{\partial x_2^4}=F_{,1111}+2F_{,1122}+F_{,2222}=F_{,iijj}$$

tzw. operator biharmoniczny, stosowany w opisie stanów naprężenia 2D