TSiP – ĆWICZENIA 7/1

1 ■ Dany jest tensor naprężeń $\underset{\sim}{\sigma}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$ [MPa]. Obliczyć wektor naprężenia w przekroju o normalnej będącej dwusieczną kąta między dodatnimi półosiami x_2 i x_3.

$$\underset{\sim}{n}=\left[0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^T,\quad \underset{\sim}{t}=\underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{n}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix}-1\\1\\5\end{Bmatrix}\ [\mathrm{MPa}]$$

zadanie domowe: polecenie j.w., w przekroju o normalnej równonachylonej do dodatnich półosi x_1, x_2 i x_3.

2 ■ Dany jest tensor małych odkształceń $\underset{\sim}{\varepsilon}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ -1 & 5 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot 10^{-5}$.
Obliczyć odkształcenie podłużne w kierunku będącym linią przecięcia płaszczyzn: $3x-4y=0$, $3x-z=12$.

jest to równanie krawędziowe prostej. $x=0 \Rightarrow y=0,\ z=-12$ $\quad A(0,0,-12)$

$z=0 \Rightarrow x=4,\ y=3$ $\quad B(4,3,0)$

$\overrightarrow{AB}=[4,3,12]$, $\underset{\sim}{n}=\frac{1}{13}[4,3,12]$

$$\varepsilon=\underset{\sim}{n}^T\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{n}=\frac{1}{169}[4\ 3\ 12]\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ -1 & 5 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}4\\3\\2\end{Bmatrix}\cdot 10^{-5}=\frac{1}{169}\{53\ 11\ -8\}\begin{Bmatrix}4\\3\\12\end{Bmatrix}\cdot 10^{-5}=$$

$$=\frac{149}{169}\cdot 10^{-5}=8{,}817\cdot 10^{-6}$$

3 ■ Dany jest tensor naprężenia $\underset{\sim}{\sigma}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 15\\ 0 & 15 & 25\end{bmatrix}$ [MPa]
Obliczyć ekstremalne naprężenia styczne.

Zadanie domowe

$\sigma_1=-6$ MPa; $\sigma_2=-20$ MPa; $\sigma_3=30$ MPa $\Rightarrow \underline{\tau_1=25\ \mathrm{MPa}}$; $\tau_2=18$ MPa; $\tau_3=7$ MPa

4 ■ Dany jest wektor przemieszczeń $\begin{cases}u_1=3x_1-2x_2\\ u_2=x_2+3x_3\\ u_3=4x_1-x_2+x_3\end{cases}$

Zadanie domowe

- utworzyć tensor małych odkształceń
- utworzyć tensor naprężeń Cauchy

$E=200$ GPa, $\nu=0{,}25$, $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$

$$\underset{\sim}{\sigma}=\lambda\underset{\sim}{I}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}+2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij}$$

TSiP – ĆWICZENIA 7/2

5 ■ Dany jest tensor naprężeń $\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ [MPa].

- rozłożyć $\underset{\sim}{\sigma}$ na dwa składniki: tensor kulisty $\sigma_m \underset{\sim}{I}$ i dewiator $\underset{\sim}{S}$
- obliczyć I_S i II_S, sprawdzić tożsamość $II_S = -\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$
- obliczyć wartość $L = -\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\right]$

$$\sigma_m = \frac{5+1+6}{3} = 4 \quad ; \quad \sigma_m \underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}], \quad \underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

$$I_S = 1-3+2=0 \quad ; \quad II_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -3-4+2-1-6 = -12$$

$$-\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = -\frac{1}{2}(3\cdot 1 + 3\cdot 4 + 9) = -\frac{1}{2}\cdot 24 = -12$$

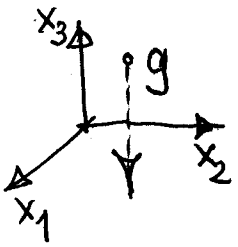
$$L = -\frac{1}{6}(4^2+5^2+1^2+6\cdot 4+6\cdot 1) = -\frac{1}{6}\cdot 72 = -12$$

Zadanie domowe: wykazać $L = II_S$ (ogólne wielkości)

---

6 ■ Dany jest tensor naprężeń $\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 5ax_2 & 3 \\ & 3x_2 & bx_3 \\ & & cx_3 \end{bmatrix}$ [MPa], x_i [m]

Dobrać stałe a, b, c tak,
by przy działaniu jako jedynej siły ciężkości w kierunku osi x_3 (rys.)
w każdym punkcie panowała równowaga. $\rho = 20 \frac{kg}{m^3}$; $g = 10 \frac{m}{s^2}$



ZADANIE DOMOWE

---

7 ■ Podać równanie płaszczyzny przekroju zawierającego p.O
wiedząc, że w danym stanie $\underset{\sim}{\sigma}$ wektor naprężenia w tym
przekroju jest wektorem normalnym. ZADANIE DOMOWE **

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

---

8 ■ W jakim przypadku tensor $\underset{\sim}{\varepsilon}$ może opisywać
stan odkształcenia w punkcie?

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} cx_2^2 & 6ax_1x_2 \\ & x_1^2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{11,22} = 2c \; ; \; \varepsilon_{22,11} = 2 \; ; \; \varepsilon_{12,12} = 6a . \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \Rightarrow 2c+2-12a=0$$

---

9 ■ Podać wszystkie niezależne formy wyrażenia $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$
ZADANIE DOMOWE **

---

10 ■ Dane jest pole przemieszczeń w 2D: $\begin{cases} u_1 = 3x_1x_2^3 \\ u_2 = 2x_1x_2^3 - x_2^2 \end{cases} \cdot 10^{-5}$

Wyznaczyć tensor małych odkształceń,
sprawdzić warunki nierozdzielności

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 3x_2^3 \; ; \; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 6x_1x_2^2 - 2x_2 \; ; \; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(9x_1x_2^2 + 2x_2^3)$$

$$\varepsilon_{11,22} = 18x_2 \; ; \; \varepsilon_{22,11} = 0 \; ; \; \varepsilon_{12,12} = \frac{1}{2}\cdot 18x_2 = 9x_2 . \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \checkmark$$