TSiP – ćwiczenie 8/1

Stany płaskie – PSN, PSO – 3 składowe naprężenia, 2 równania równowagi – statycznie niewyznaczalne (gdy chcemy naprężenia jedynie z równań równowagi)

Możliwe rozwiązanie – funkcja Airy $F(x_1,x_2)$ taka, że $\begin{cases} \sigma_{11}=F_{,22}\ ;\ \sigma_{22}=F_{,11} \\ \sigma_{12}=-F_{,12}-\rho b_1 x_2-\rho b_2 x_1 \end{cases}$

Jedno równanie: $F_{,1111}+2F_{,1122}+F_{,2222}=0$

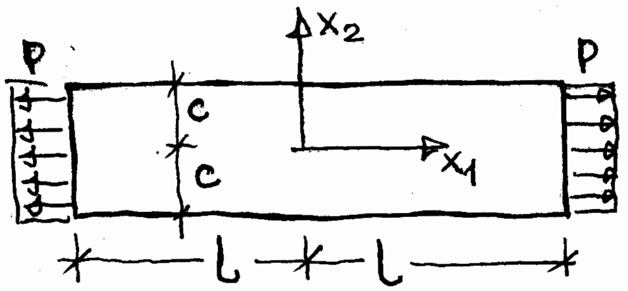
(gdy $\underset{\sim}{b}=\text{const}$ ta sama postać w PSN i PSO).

Jest to tzw. równanie biharmoniczne, potrzebne cztery warunki brzegowe (4 stałe całkowania), istotne – przewidywanie matematycznej postaci funkcji F.

Wielomiany w układzie kartezjańskim – wszystkie do stopnia 3. włącznie spełniają równanie tożsamościowo. Wielomiany wyższych rzędów – relacje między stałymi

---

1



Tarcza o jednostkowej grubości, wymiary $2L\times 2c$, obciążenie rozciągające równe p

Przewidywana funkcja Airy: $F(x_1,x_2)=Ax_2^2$

Stan naprężenia: $\sigma_{11}=2A\ ;\ \sigma_{22}=\sigma_{12}=0$. Warunki brzegowe:

– ścianki pionowe: $\sigma_{11}(\pm L,x_2)=p\ ;\ \sigma_{12}(\pm L,x_2)=0$

– ścianki poziome: $\sigma_{22}(x_1;\pm c)=0\ ;\ \sigma_{12}(x_1;\pm c)=0$

stąd $A=\frac{p}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{11}=p\ ;\ \sigma_{22}=\sigma_{12}=0}$ w każdym punkcie jednorodne rozciąganie osiowe

Stan odkształceń: $\varepsilon_{11}=\frac{p}{E}\ ;\ \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\nu\frac{p}{E}\ ;\ \varepsilon_{12}=0$

Stan przemieszczeń: $\underset{\sim}{u}=\{u_1\ u_2\}$

$$\varepsilon_{11}=\frac{p}{E}\Rightarrow u_1=\frac{p}{E}x_1+f(x_2)$$

$$\varepsilon_{22}=-\nu\frac{p}{E}\Rightarrow u_2=-\nu\frac{p}{E}x_2+g(x_1)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=0\Rightarrow f'(x_2)+g'(x_1)=0$$

stąd $\left.\begin{aligned} f(x_2)&=-\omega_0x_2+u_0 \\ g(x_1)&=\omega_0x_1+V_0 \end{aligned}\right\}$ u_0, V_0 – translacja ciała sztywnego, ω_0 – sztywny obrót wokół osi x_3. Oba składniki zawsze obecne przy całkowaniu $\underset{\sim}{\varepsilon}\rightarrow\underset{\sim}{u}$

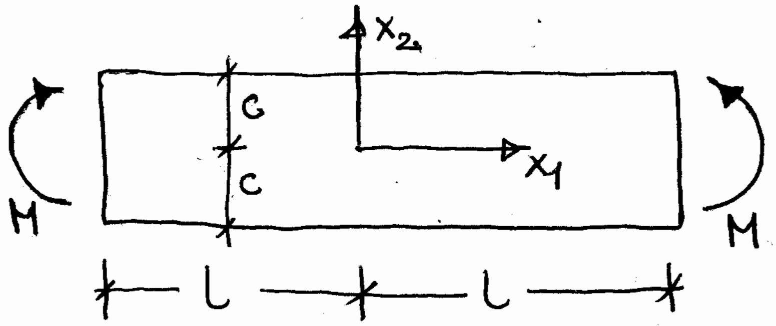
$$u_1\equiv u=\frac{p}{E}x_1-\omega_0x_2+u_0$$

$$u_2\equiv v=-\nu\frac{p}{E}x_2+\omega_0x_1+V_0$$

Gdy punkt $O(0,0)$ nieruchomy i brak obrotu osi x_1, jest $f=g=0$

TSiP – ćwiczenie 8/2

2■



Tarcza o jednostkowej grubości wymiary $2l \times 2c$
wypadkowe obciążeń na ściankach bocznych – momenty skupione M

Przewidywana funkcja Airy:

$$F(x_1,x_2) = A x_2^3$$

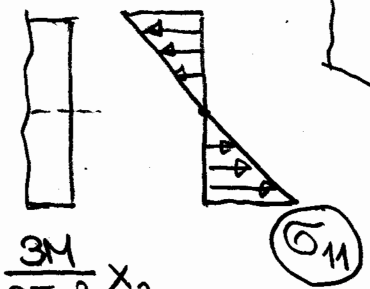
stąd $\sigma_{11} = 6A x_2$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$

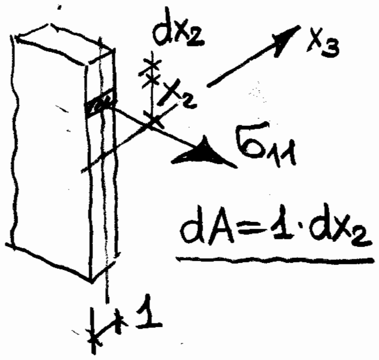
Warunki brzegowe:

- $\sigma_{22}(x_1, \pm c) = \sigma_{12}(x_1, \pm c) = 0$
- $\int_{-c}^{c} \sigma_{11}(\pm l, x_2)\, dx_2 = 0$; $\int_{-c}^{c} \sigma_{11}(\pm l, x_2)\, x_2\, dx_2 = -M$

ostatni z warunków: $\int_{-c}^{c} 6A x_2^2\, dx_2 = -M$

stąd $A = -\frac{M}{4c^3} \Rightarrow \sigma_{11} = -\frac{3M}{2c^3} x_2$





$dA = 1 \cdot dx_2$

odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{3M}{2Ec^3} x_2 \; ; \; \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} = \nu \frac{3M}{2Ec^3} x_2$$

stąd $u \equiv u_1 = -\frac{3M}{2Ec^3} x_1 x_2 + f(x_2)$; $v \equiv u_2 = \nu \frac{3M}{4Ec^3} x_2^2 + g(x_1)$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0 \Rightarrow f'(x_2) + g'(x_1) - \frac{3M}{2Ec^3} x_1 = 0$$

$$f(x_2) = -\omega_0 x_2 + u_0$$
$$g(x_1) = \omega_0 x_1 + v_0 + \frac{3M}{4Ec^3} x_1^2$$

Warunki swobodnego podparcia (analogicznie do belki)

$u_2(\pm l, 0) = 0$; $u_1(-l, 0) = 0$

wtedy $u_0 = \omega_0 = 0$; $v_0 = -\frac{3Ml^2}{4Ec^3}$

Porównanie z teorią belek: $I \equiv I_{x_3} = \frac{1(2c)^3}{12} = \frac{2}{3} c^3$

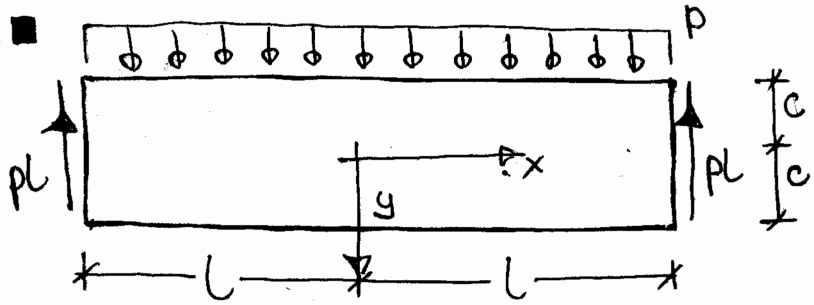
wtedy $\sigma_{11} = -\frac{M}{I} x_2$ $\left(\sigma = -\frac{M}{I} y\right)$

$$u_1 = -\frac{M}{EI} x_1 x_2 \; ; \; u_2 = \frac{M}{2EI}\left[\nu x_2^2 + x_1^2 - l^2\right]$$

sprowadzone do osi belki ($x_2 = 0$): $u_2 = \frac{M}{2EI}(x_1^2 - l^2)$,

w środku $u_2 = -\frac{Ml^2}{2EI}$

3



Tarcza o grubości jednostkowej, wymiarach $2l\times 2c$, pod obciążeniem poprzecznym p, zrównoważonym na ściankach bocznych symbole osi – x, y

Warunki brzegowe:

- ścianki poziome $\tau_{xy}(x,\pm c)=0$; $\sigma_y(x,c)=0$; $\sigma_y(x,-c)=-p$
- ścianki pionowe $\int_{-c}^{c}\sigma_x(\pm l,y)\,dy=0$; $\int_{-c}^{c}\sigma_x(\pm l,y)\,y\,dy=0$; $\int_{-c}^{c}\tau_{xy}(\pm l,y)\,dy=\pm pl$

Przewidywana postać funkcji Airy:

$$F(x,y)=Ax^2+Bx^2y+Cy^3+Dx^2y^3-\frac{1}{5}Dy^5$$

ostatni wyraz – dla spełnienia równania biharmonicznego

Naprężenia:

$$\sigma_x=6Cy+6D\left(x^2y-\frac{2}{3}y^3\right)$$
$$\sigma_y=2A+2By+2Dy^3$$
$$\tau_{xy}=-2Bx-6Dxy^2$$

wartości stałych z warunków brzegowych:

$$A=-\frac{p}{4}\ ;\ B=\frac{3p}{8c}\ ;\ D=-\frac{p}{8c^3}\ ;\ C=\frac{p}{8c}\left(\frac{l^2}{c^2}-\frac{2}{5}\right)$$

---

stąd

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{3p}{4c}\left(\dfrac{l^2}{c^2}-\dfrac{2}{5}\right)y-\dfrac{3p}{4c^3}\left(x^2y-\dfrac{2}{3}y^3\right)\\ \sigma_y=-\dfrac{p}{2}+\dfrac{3p}{4c}y-\dfrac{p}{4c^3}y^3\\ \tau_{xy}=-\dfrac{3p}{4c}x+\dfrac{3p}{4c^3}xy^2\end{cases}$$

Przyjmując $I=\frac{2}{3}c^3$:

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{p}{2I}(l^2-x^2)y+\dfrac{p}{I}\left(\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{c^2y}{5}\right)\\ \sigma_y=-\dfrac{p}{2I}\left(\dfrac{y^3}{3}-c^2y+\dfrac{2}{3}c^3\right)\\ \tau_{xy}=-\dfrac{p}{2I}x(c^2-y^2)\end{cases}$$

Porównanie z rozwiązaniem Wytrzymałości Materiałów – belka

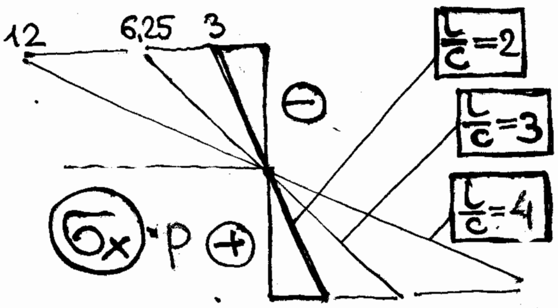
$$\sigma_x=\frac{M}{I}y=\frac{p}{2I}(l^2-x^2)y\ ;\ \sigma_y=0\ ;\ \tau_{xy}=\frac{TS_x}{It}=-\frac{p}{2I}x(c^2-y^2)$$

gdzie

$M=\frac{p}{2}(l^2-x^2)$

$T=-px$

$S_x=\frac{1}{2}(c^2-y^2)$



Wykresy σ_x – liniowe wg wzoru WM, rozwiązanie TS – nieliniowe, maksymalna różnica na skrajnych krawędziach wynosi 0,2p.

Geometria (skrócony tok postępowania):

- odkształcenia: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$; $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right]$; $\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$
- przemieszczenia: $u = \int \varepsilon_x \, dx + f(y)$; $v = \int \varepsilon_y \, dy + g(x)$;

  równanie dodatkowe: $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

stąd funkcje u i v, w nich wyrazy u_0, v_0 i ω_0 związane z translacją i obrotem ciała sztywnego.

Ich postać – skomplikowana:

$$u = \frac{p}{2EI}\left[\left(l^2x - \frac{x^3}{3}\right)y + x\left(\frac{2y^3}{3} - \frac{2c^2y}{5}\right) + \nu x\left(\frac{y^3}{3} - c^2y + \frac{2c^3}{3}\right)\right]$$

$$v = -\frac{p}{2EI}\left\{\frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2c^3y}{3} + \nu\left[\left(l^2 - x^2\right)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{c^2y^2}{5}\right] - \frac{x^4}{12} + \left[\frac{l^2}{2} + \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)c^2\right]x^2\right\} + \frac{5pl^4}{24EI}\left[1 + \frac{12}{5}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\frac{c^2}{l^2}\right]$$

przemieszczenie p. O: $v(0,0) = \frac{5pl^4}{24EI}\left[1 + \frac{12}{5}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\frac{c^2}{l^2}\right]$

rozwiązanie WM: $v_{max} = \frac{5pl^4}{24EI}$, pozostały składnik – wpływ siły tnącej na ugięcie przy $l \gg c$ jest on nieznaczny.

wnioski: – przekroje nie pozostają płaskie
– w rozwiązaniu TS równanie Eulera $M = -EI\frac{d^2v}{dx^2}$ nie jest spełnione