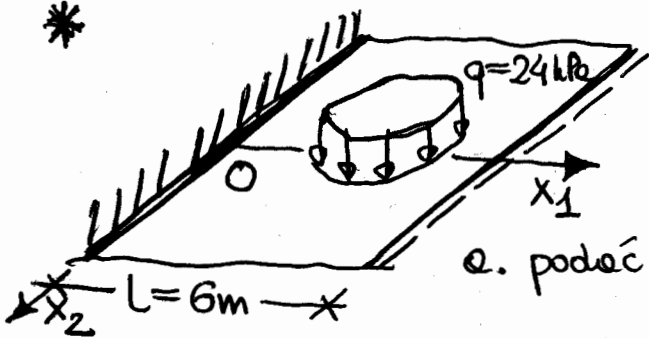


TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI ĆWICZENIA 11

*



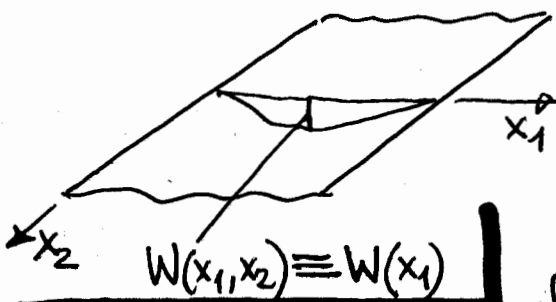
Prosto płytowe o szerokości $L=6m$ i grubości $h=6cm$ obciążone jest równomiernie, $q=24 kPa$.
Materiał: $E=200 GPa$, $\nu=0,2$. (1)

a. podać funkcje i wykresy: $W(x_2=0)$, $M_{11}(x_2=0)$, $M_{22}(x_1=0)$

b. podać wykresy naprężeń σ_{11} i σ_{22} w dowolnym punkcie lewej (utwardzonej) krawędzi, np. w punkcie O.

c. podać ekstremalne naprężenie zredukowane wg hipotezy H-M-H w p. O

OGÓLNA SYTUACJA PASMA PŁYTOWEGO:



- symetria transkcyjna - wszystkie parametry: geometria, obciążenie, warunki brzegowe są jedynie funkcjami x_1 , stąd odpowiedź geometryczna W , oraz statyczne: momenty M_{11} i M_{22} zależne jedynie od x_1 .

Równanie ogólne płyty:

$$\Delta(\Delta W(x_1, x_2)) = \frac{q(x_1, x_2)}{D} \Rightarrow W_{,1111} + 2W_{,1122} + W_{,2222} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

W przypadku pasma przyjmuje postać $W^{IV}(x_1) = \frac{q(x_1)}{D}$.

Momenty płytowe - ogólnie

$$M_{11} = -D(W_{,11} + \nu W_{,22})$$

$$M_{22} = -D(W_{,22} + \nu W_{,11})$$

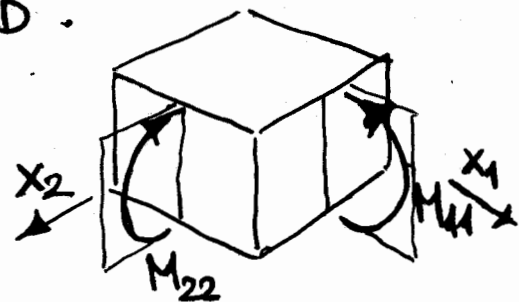
$$M_{12} = M_{21} = -D(1-\nu)W_{,12}$$

wzrostki pasma

$$M_{11} = -DW_{,11}''$$

$$M_{22} = -\nu DW_{,11}'' = \nu M_{11}$$

$$M_{12} = 0$$



Przykład - zadanie: $q(x_1) = q = 24 kPa$

Warunki brzegowe:

stąd $DW^{IV} = q$

$$DW''' = q(x_1 + C_1)$$

$$DW'' = q\left(\frac{x_1^2}{2} + C_1 x_1 + C_2\right)$$

$$DW' = q\left(\frac{x_1^3}{6} + C_1 \frac{x_1^2}{2} + C_2 x_1 + C_3\right)$$

$$DW = q\left(\frac{x_1^4}{24} + C_1 \frac{x_1^3}{6} + C_2 \frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) W(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ 2) W'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{geometryczne} \\ \text{utwardzenie} \end{array}$$

$$3) W(6) = 0 \Rightarrow 54 + 36C_1 + 18C_2 = 0 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = -3$$

$$4) M_{11}(6) = -DW''(6) = 0 \Rightarrow 18 + 6C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow 6C_1 + C_2 = -18$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{15}{4} = 3,75; C_2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$DW = 24\left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{15}{4} \frac{x_1^3}{6} + \frac{9}{2} \frac{x_1^2}{2}\right) = 24\left(\frac{x_1^4}{24} - \frac{5}{8} x_1^3 + \frac{9}{4} x_1^2\right) = x_1^4 - 15x_1^3 + 54x_1^2$$

$$DW' = 4x_1^3 - 45x_1^2 + 108x_1; DW'' = 12x_1^2 - 90x_1 + 108; DW''' = 24x_1 - 90$$

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI ĆWICZENIA 11

Sztywność płytowa: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 0,06^3}{12(1-0,04)} = 3750 \text{ kNm} \quad (2)$

Ekstremalne ugięcie: $DW''(x_1) = x_1(4x_1^2 - 45x_1 + 108) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,471 \text{ m}$

$W_{\max} = \frac{1}{3750} (3,471^4 - 15 \cdot 3,471^3 + 54 \cdot 3,471^2) = 4,49 \text{ cm}$

Momenty płytowe (zginające):

$M_{11}(x_1) = -DW''(x_1) = -12x_1^2 + 90x_1 - 108$

Ekstremalny moment w przęśle:

$DW'''(x_1) = 24x_1 - 90 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,75 \text{ m} = \frac{15}{4}$

$(M_{11})_{\max} = M_{11}(3,75) = -12 \cdot 3,75^2 + 90 \cdot 3,75 - 108 = 60,75 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$

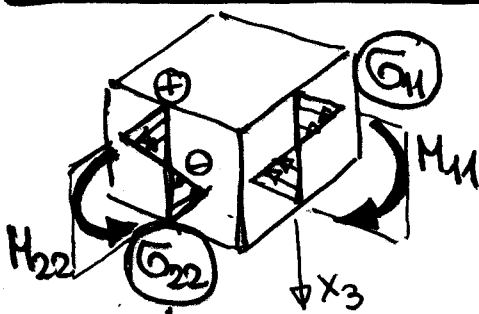
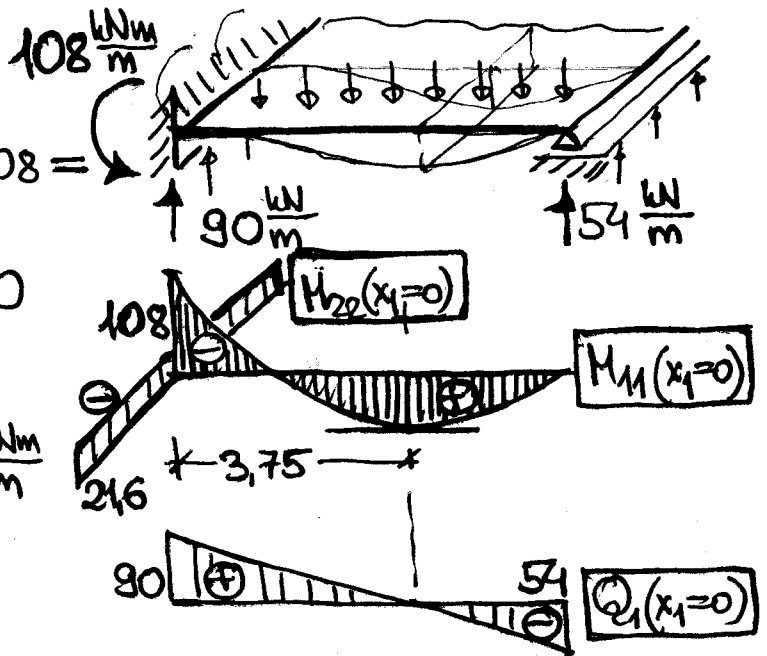
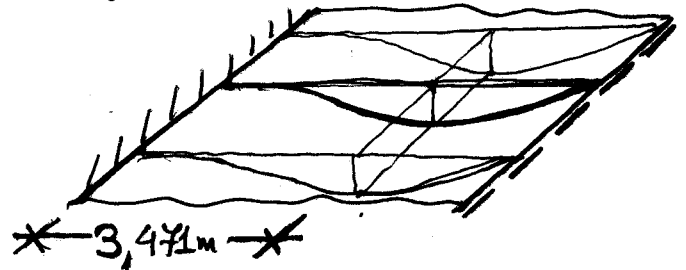
skrajne: $M_{11}(0) = -108 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} ; M_{11}(6) = 0$

$M_{22} = \nu \cdot M_{11} \rightarrow$ w p. 0 i na całej

linii $x_1 = 0$ jest $M_{22} = -0,2 \cdot 108 = -21,6 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$

Siła poprzeczna:

$Q_1(x_1) = -DW'''(x_1) = 90 - 24x_1 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$



Sytuacja w p. 0 (oba momenty zginające ujemne)
Rozkłady naprężeń normalnych (względem osi x_3):

$\sigma_{11} = \frac{12M_{11}}{h^3} x_3 = -\frac{12 \cdot 108}{0,06^3} x_3 = -6 \cdot 10^6 x_3 \text{ [kPa]}$

$\sigma_{22} = \frac{12M_{22}}{h^3} x_3 = -\frac{12 \cdot 21,6}{0,06^3} x_3 = -1,2 \cdot 10^6 x_3 \text{ [kPa]}$

ekstremalne naprężenie - skrajne: $\sigma_{11} = 180 \text{ MPa} ; \sigma_{22} = 36 \text{ MPa}$

sg to naprężenie główne (brak skrajności $\Rightarrow \sigma_{12} = 0$), na pow. górnej lub dolnej płyty jednego znaku

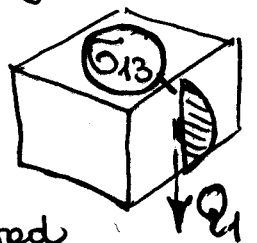
stąd $\sigma_{\text{zast}} = \sqrt{180^2 + 36^2} - 180 \cdot 36 = 164,97 \text{ MPa} < 180 \text{ MPa}$

W rzeczywistości na górnej powierzchni płyty działa obciążenie

$q \Rightarrow \sigma_{33} = -q = -24 \text{ kPa} = -0,024 \text{ MPa}$

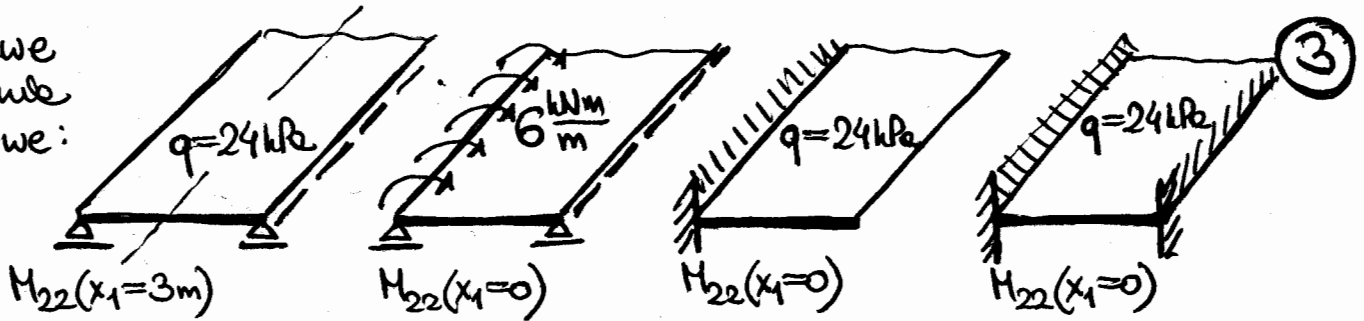
Siła poprzecznej Q_1 powoduje naprężenie styczne σ_{13} , rozkład paraboliczny (jak w belce), w p. 0 jest $Q_1 = 90 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $(\sigma_{13})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_1}{h} = \frac{3}{2} \frac{90}{0,06} = 2,25 \text{ MPa}$

POLECENIE: podać q_{dop} , gdy $W_{\text{dop}} = 6 \text{ cm}$, $R_G = 200 \text{ MPa}$

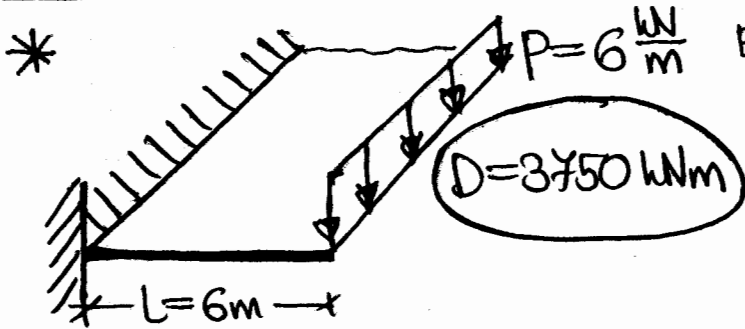


TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI ĆWICZENIA 11

Możliwe zadania domowe:



Polecenie jak w zadaniu poprzednim; $L=6m$; $E=200GPa$; $\nu=0,2$; $h=0,06m$



$E=200GPa$; $\nu=0,2$; $h=0,06m$

Posmo płytowe wspornikowe

Równanie różniczkowe: $DW^{IV} = 0$

$$DW^{III} = C_1$$

$$DW^{II} = C_1 x_1 + C_2$$

$$DW^I = C_1 \frac{x_1^2}{2} + C_2 x_1 + C_3$$

$$DW = C_1 \frac{x_1^3}{6} + C_2 \frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4$$

Warunki brzegowe:

1) $W(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$
 2) $W'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$ } warunki geometryczne-
 utwierdzenie

3) $M_{11}(6) = -DW''(6) = 0 \Rightarrow 6C_1 + C_2 = 0$

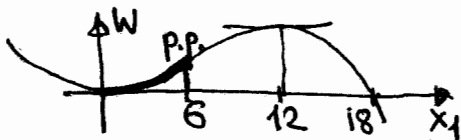
4) $V_1(6) \equiv Q_1(6) = -DW'''(6) = 6 \Rightarrow C_1 = -6; C_2 = 36$

Stąd $DW(x_1) = -6 \frac{x_1^3}{6} + 36 \frac{x_1^2}{2} = -x_1^3 + 18x_1^2 = -x_1^2(x_1 - 18)$

$DW'(x_1) = -3x_1^2 + 36x_1 = -3x_1(x_1 - 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_1 = 12$ ekstremum

$DW''(x_1) = -6x_1 + 36 = -6(x_1 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 6$ punkt przegięcia

$W_{max} = W(6) = \frac{1}{3750} \cdot 36 \cdot 12 = 11,5cm$



Momenty zginające:

$M_{11}(x_1) = -DW''(x_1) = 6x_1 - 36 \left[\frac{kNm}{m} \right]$

$M_{22} = \nu M_{11}$, $M_{22}(0) = -7,2 \frac{kNm}{m}$

Ekstremalne naprężenia normalne σ_{11} i σ_{22} w p. O płyty (także krawędzi $x_1=0$) - analogicznie do zadania poprzedniego, także σ_{zost} , HMM

