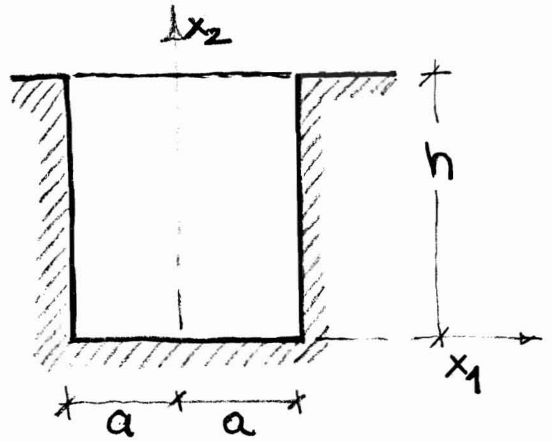
TSiP WYKŁAD – ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE 1



* Długi prostopadłościan wykonany z materiału o ciężarze objętościowym γ umieszczony został w nieodkształcalnej formie o tych samych wymiarach.
Mając daną funkcję naprężeń

$$F(x_1,x_2) = Ax_1^2x_2 + Bx_2^3 + Cx_2^2 + Dx_1^2$$

obliczyć składowe stanów: naprężenia i odkształcenia oraz przemieszczenie górnej powierzchni pod działaniem ciężaru własnego prostopadłościanu. Pominąć tarcie materiału o formę.

siły masowe $\underset{\sim}{b} = [0 \ \ -g]$, siły objętościowe $\rho b = [0 \ \ -\gamma]$

Naprężenia: $\sigma_{11} = F_{,22} = 6Bx_2 + 2C$; $\sigma_{22} = F_{,11} = 2Ax_2 + 2D$

$$\sigma_{12} = -F_{,12} - \rho b_1 x_2 - \rho b_2 x_1 = -2Ax_1 + \gamma x_1$$

Warunki brzegowe (naprężeniowe) przy $x_2 = h$:
1) $\sigma_{12} = 0 \Rightarrow (-2A+\gamma)x_1 = 0 \Rightarrow A = \frac{\gamma}{2}$
2) $\sigma_{22} = 0 \Rightarrow 2Ah + 2D = 0 \Rightarrow D = -\frac{\gamma h}{2}$

Warunek nieodkształcalności formy (geometryczny): 3) $\int_{-a}^{a} \varepsilon_{11}\, dx_1 = 0$, ponieważ ε_{11} nie zależy od x_1, więc $\varepsilon_{11} = 0$

Związek konstytutywny PSO: $\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] = 0$, więc $\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{22}$

Ponieważ $\sigma_{22} = \gamma x_2 - \gamma h$, więc $\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}\gamma(x_2 - h) = 6Bx_2 + 2C$

stąd $B = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\gamma}{6}$, $C = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\gamma h}{2}$

Odkształcenia: $\varepsilon_{11} = 0$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] = \frac{1}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\gamma(x_2 - h)$$

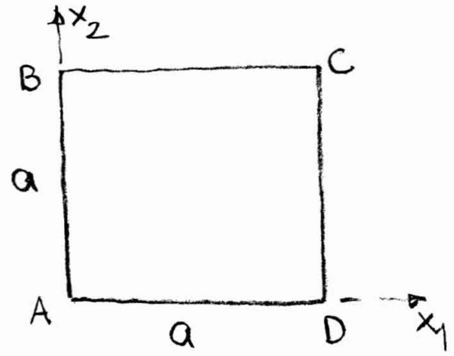
Przemieszczenia: $u_1 = \int \varepsilon_{11}\, dx_1 = 0$

$$u_2 = \int \varepsilon_{22}\, dx_2 = \frac{1}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\gamma\left(\frac{x_2^2}{2} - hx_2 + K\right)$$

Ponieważ przy $x_2 = 0$ zachodzi $u_2 = 0$ więc $K = 0$

Przemieszczenie górnej powierzchni prostopadłościanu

$$u_2\Big|_{x_2=h} = -\frac{1}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\,\frac{\gamma h^2}{2}$$



* Stan przemieszczeń tarczy kwadratowej pod działaniem obc. zewnętrznego i sił masowych dany jest wektorem

$$\underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2) \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{Bmatrix} 50 - 3x_1x_2 + 1{,}5x_1^2 \\ 20 + 15x_2^2 - x_1x_2 \end{Bmatrix}$$

Obliczyć składowe stanu naprężenia. Dane: $\nu = 0{,}2$, $E = 30\,GPa$, $a = 1m$.

Stan odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = 10^{-5}(-3x_2 + 3x_1)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} = 10^{-5}(30x_2 - x_1)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 10^{-5}(-1{,}5x_1 - 0{,}5x_2)$$

Stan naprężenia (PSN) w [MPa]

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = \frac{1}{3{,}2}(-3x_2 + 3x_1 + 6x_2 - 0{,}2x_1) = 0{,}875x_1 + 0{,}9375x_2$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = \frac{1}{3{,}2}(30x_2 - x_1 - 0{,}6x_2 + 0{,}6x_1) = -0{,}125x_1 + 9{,}1875x_2$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} = 0{,}25(-1{,}5x_1 - 0{,}5x_2) = -0{,}375x_1 - 0{,}125x_2$$

Na tej podstawie można określić składowe wektora sił objętościowych $\rho \underset{\sim}{b}$ → z równań równowagi

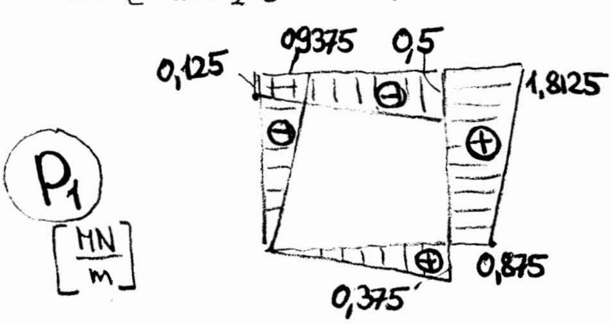
$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho b_1 = 0 \Rightarrow \rho b_1 = -\sigma_{11,1} - \sigma_{12,2} = -0{,}75$$

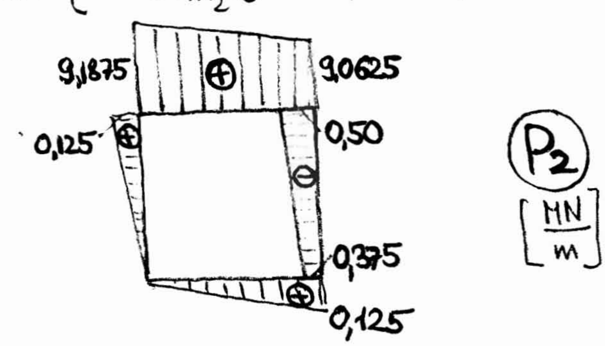
$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \rho b_2 = 0 \Rightarrow \rho b_2 = -\sigma_{12,1} - \sigma_{22,2} = -8{,}8125 \qquad \left[\frac{MN}{m^3}\right]$$

Można też określić wektor sił brzegowych $\underset{\sim}{p} = \{p_1 \; p_2\}^T$ na każdej z krawędzi

$$p_1 = \begin{cases} \text{D-C} & \sigma_{11}|_{x_1=a} = 0{,}875 + 0{,}9375x_2 \\ \text{C-B} & \sigma_{21}|_{x_2=a} = -0{,}125 - 0{,}375x_1 \\ \text{B-A} & -\sigma_{11}|_{x_1=0} = -0{,}9375x_2 \\ \text{A-D} & -\sigma_{21}|_{x_2=0} = 0{,}375x_1 \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} \text{D-C} & \sigma_{12}|_{x_1=a} = -0{,}375 - 0{,}125x_2 \\ \text{C-B} & \sigma_{22}|_{x_2=a} = 9{,}1875 - 0{,}125x_1 \\ \text{B-A} & -\sigma_{12}|_{x_1=0} = 0{,}125x_2 \\ \text{A-D} & -\sigma_{22}|_{x_2=0} = 0{,}125x_1 \end{cases}$$

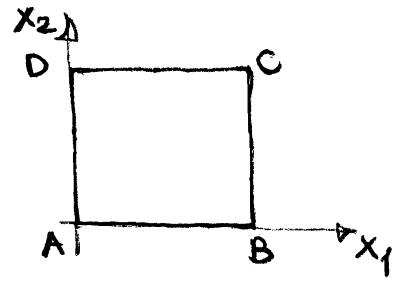




* Kwadratowa tarcza o boku $a = 1\,m$ poddana jest działaniu rozciągających obciążeń normalnych określonych stanem naprężeń głównych

$$\sigma_{11} = Cx_2 \,, \quad \sigma_{22} = Dx_1$$

Podać przewidywaną postać funkcji naprężeń F.
Wyznaczyć przemieszczenia $\underset{\sim}{u}(x_1,x_2)$ wiedząc, że punkt A tarczy jest nieruchomy, zaś styczne w p. A do odkształconych krawędzi nie ulegają obrotom.
Obliczyć przemieszczenie p. C



Dane:
$E = 210\ GPa$
$\nu = 0{,}3$
$2C = D = 10^5\ \frac{kN}{m^3}$

Stan naprężeń głównych → przewidywanie postaci funkcji F

$$\sigma_{11} = F_{,22} = Cx_2 \ ; \ \sigma_{22} = F_{,11} = Dx_1 \ ; \ \sigma_{12} = -F_{,12} = 0 \ \Rightarrow F = \frac{C}{6}x_2^3 + \frac{D}{6}x_1^3$$

Odkształcenia w PSN:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) = \frac{10^2}{2{,}1\cdot10^5}\left(0{,}5x_2 - 0{,}3x_1\right) = \frac{1}{21000}\left(5x_2 - 3x_1\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) = \frac{10^2}{2{,}1\cdot10^5}\left(x_1 - 0{,}15x_2\right) = \frac{1}{21000}\left(10x_1 - 1{,}5x_2\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = 0$$

Przemieszczenia → ze związków geometrycznych, drogą całkowania

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \Rightarrow \quad u_1 = \int \varepsilon_{11}dx_1 = \frac{1}{21000}\left(5x_1x_2 - 1{,}5x_1^2\right) + f(x_2)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \Rightarrow \quad u_2 = \int \varepsilon_{22}dx_2 = \frac{1}{21000}\left(10x_1x_2 - 0{,}75x_2^2\right) + g(x_1)$$

podstawiając otrzymane powyżej funkcje do związku geometrycznego trzeciego, mamy

$$\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = \frac{1}{21000}\cdot 5x_1 + \frac{df}{dx_2} + \frac{1}{21000}\cdot 10x_2 + \frac{dg}{dx_1} = 0$$

czyli $\quad \frac{df}{dx_2} + \frac{10}{21000}x_2 + \frac{dg}{dx_1} + \frac{5}{21000}x_1 = 0$

Drogą rozdzielenia zmiennych uzyskujemy

$$f(x_2) = -\frac{5}{21000}x_2^2 + Cx_2 + D$$
$$g(x_1) = -\frac{2{,}5}{21000}x_1^2 - Cx_1 + E$$

Warunki brzegowe
1) $u_1(0,0) = 0 \Rightarrow D = 0$
2) $u_2(0,0) = 0 \Rightarrow E = 0$
3) $u_{1,2}(0,0) = 0$ lub $u_{2,1}(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Zatem

$$u_1 = \frac{1}{21000}\left(5x_1x_2 - 1{,}5x_1^2 - 5x_2^2\right) = 4{,}7619\cdot10^{-5}\left(5x_1x_2 - 1{,}5x_1^2 - 5x_2^2\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{21000}\left(10x_1x_2 - 0{,}75x_2^2 - 2{,}5x_1^2\right) = 4{,}7619\cdot10^{-5}\left(10x_1x_2 - 0{,}75x_2^2 - 2{,}5x_1^2\right)$$

* W cienkiej tarczy dane są odkształcenia

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = Ax_1x_2 \\ \varepsilon_{22} = Bx_2^3 \\ \varepsilon_{12} = C - Dx_2^2 . \end{cases}$$

współczynniki A, B, C i D są znane. Obliczyć siły masowe b_1 i b_2. Gęstość materiału tarczy wynosi ϱ, stała

---

Stan naprężenia – PSN

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(Ax_1x_2 + \nu Bx_2^3\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(Bx_2^3 + \nu Ax_1x_2\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} = \frac{E}{1+\nu}\left(C - Dx_2^2\right)$$

Równania równowagi:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \varrho b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{\varrho}\left(\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}\right)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \varrho b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{\varrho}\left(\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}\right)$$

Obliczenie:

$$\sigma_{11,1} = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot Ax_2$$

$$\sigma_{12,2} = -\frac{E}{1+\nu}\cdot 2Dx_2$$

$$\sigma_{12,1} = 0$$

$$\sigma_{22,2} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(3Bx_2^2 + \nu Ax_1\right)$$

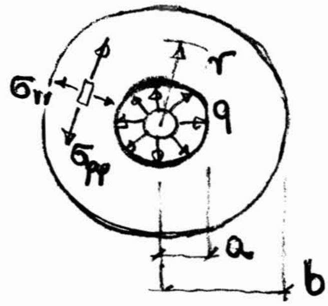
stąd

$$b_1 = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\left[2D(1-\nu) - A\right]x_2$$

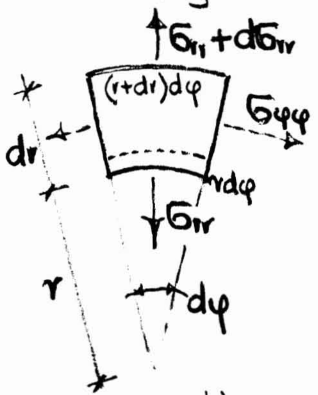
$$b_2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{E}{1-\nu^2}\left(3Bx_2^2 + \nu Ax_1\right)$$

* Tarcza pierścieniowa, obciążona ciśnieniem wewnętrznym q

Wyznaczyć stan naprężenia: $\sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$



Rozwiązanie względem przemieszczeń → funkcji $u = u(r)$



Równanie równowagi – suma rzutów na kierunek promienia

$$(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r+dr)d\varphi - \sigma_{rr} \cdot r d\varphi - 2\sigma_{\varphi\varphi} \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

po zapisaniu $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ i pominięciu nieskończenie małych wyższych rzędów → równanie równowagi $r \cdot \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0$

Wzory – odkształcenia w układzie biegunowym: $\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$ (radialne)

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r} \quad \text{(obwodowe)}$$

Płaski stan naprężenia – równania konstytutywne:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{rr}\right)$$

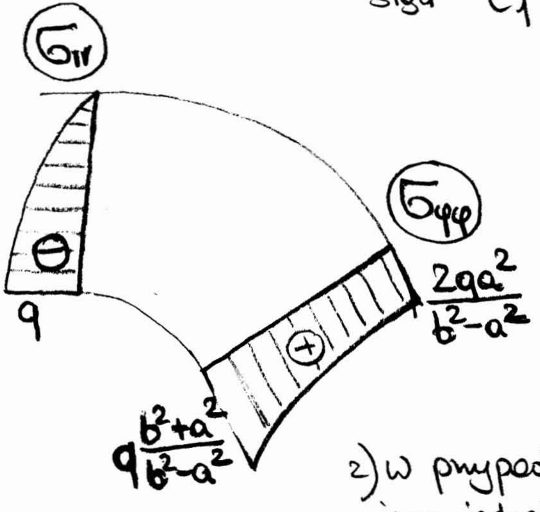
Podstawienie: $r\frac{d}{dr}\left(\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) + \varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi} - \nu\varepsilon_{rr} = 0$

względem przemieszczeń: $r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = 0$ (*) → równanie r. typu Eulera

Postać rozwiązania: $u(r) = B_1 r + \frac{B_2}{r}$, stąd $\sigma_{rr}(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$

Warunki brzegowe: 1) $\sigma_{rr}(r=a) = -q$ 2) $\sigma_{rr}(r=b) = 0$

stąd $C_1 = q\frac{a^2}{b^2-a^2}$, $C_2 = -q\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$



więc $\sigma_{rr}(r) = \frac{qa^2}{b^2-a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$

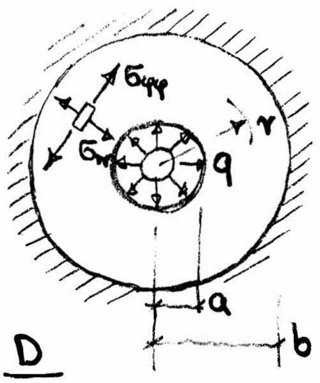
$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{rr} + r\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{qa^2}{b^2-a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

Wnioski:

1) do rozwiązania można dojść wykorzystując funkcję naprężeń F przy obrotowej symetrii → ĆWICZENIA
2) w przypadku PSO (rura grubościenna) związki konstytutywne inne, jednak równanie (*) oraz funkcje σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ identyczne

Różnica – obecność $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})$

* Rura grubościenna została umieszczona w ośrodku nieodkształcalnym i obciążona ciśnieniem wewnętrznym q. Wyznaczyć stan naprężenia $\sigma_{rr}(r)$ i $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$



Przyjmujemy funkcję przemieszczeń $u(r) = Cr + \frac{D}{r}$

Warunki brzegowe (mieszane):
1) $u(r=b) = 0 \Rightarrow Cb + \frac{D}{b} = 0 \Rightarrow D = -Cb^2$
2) $\sigma_{rr}(r=a) = -q \rightarrow$ potrzebna funkcja $\sigma_{rr}(r)$

Stan odkształceń (związki geometryczne w układzie biegunowym, obrotowa symetria → przykład 5)

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = C - \frac{D}{r^2} \quad ; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = C + \frac{D}{r^2}$$

Naprężenia radialne i obwodowe → PSO

$$(*)\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C - \frac{D}{r^2}(1-2\nu)\right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{rr}\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C + \frac{D}{r^2}(1-2\nu)\right] \end{cases}$$

Warunek brzegowy 2): $\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C - \frac{D}{a^2}(1-2\nu)\right] = -q$

Rozwiązanie układu równań 1) i 2):

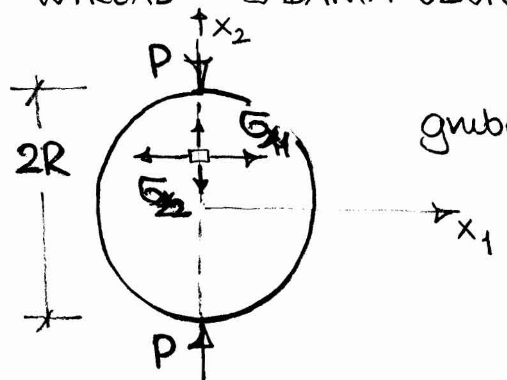
$$\begin{cases} C = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{q}{1 + \frac{b^2}{a^2}(1-2\nu)} \\ D = -Cb^2 \end{cases}$$

Ze wzorów (*) wyznaczamy naprężenia

$$\sigma_{rr} = -\frac{q}{1 + \frac{b^2}{a^2}(1-2\nu)}\left[1 + \frac{b^2}{r^2}(1-2\nu)\right]$$

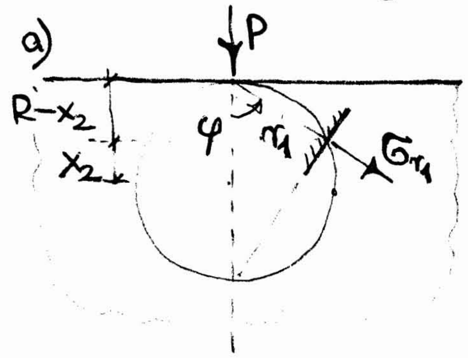
$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{q}{1 + \frac{b^2}{a^2}(1-2\nu)}\left[1 - \frac{b^2}{r^2}(1-2\nu)\right]$$

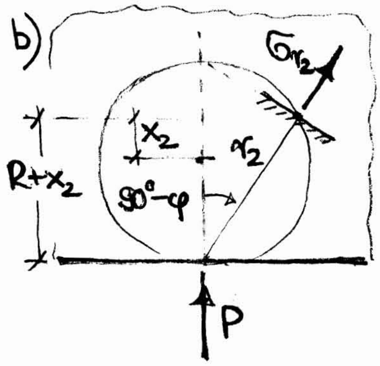
* Wyznaczyć stan naprężenia w tarczy kołowej obciążonej równoważącymi się siłami na linii działania tych sił

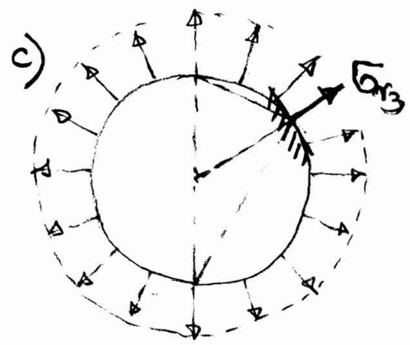


grubość g

Obciążenie działające na tarczę – superpozycja trzech stanów:
a) b) półpłaszczyzny, c) tarcza kołowa obciążona radialnie







Ogólny wzór na naprężenia w półpłaszczyźnie: $\sigma_{rr} = -\dfrac{2P}{\pi g}\cdot\dfrac{\cos\varphi}{r}$

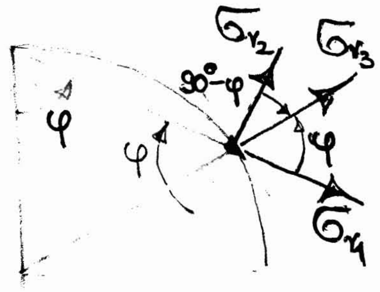
Rozpatrujemy dowolny punkt M na obwodzie tarczy.

Schemat półpłaszczyzny a) $\quad \sigma_{r_1} = -\dfrac{2P}{\pi g}\dfrac{\cos\varphi}{r_1} = -\dfrac{2P}{\pi g}\cdot\dfrac{\cos^2\varphi}{R-x_2}$

schemat półpłaszczyzny b) $\quad \sigma_{r_2} = -\dfrac{2P}{\pi g}\dfrac{\cos(90^\circ-\varphi)}{r_2} = -\dfrac{2P}{\pi g}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi}{R+x_2}$

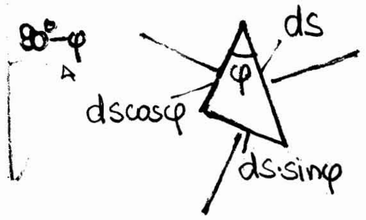
Wielkość σ_{r_3} równomiernego radialnego obciążenia zostaje dobrana tak, by na okręgu – obwodzie tarczy – łączne naprężenia były równe zeru.

Równanie równowagi w p. M (superpozycja a), b) i c)):
– suma rzutów wypadkowych naprężeń na kierunek radialny –



$$\sigma_{r_3}\, g\,ds + \sigma_{r_1}\cos\varphi\cdot g\,ds\cos\varphi + \sigma_{r_2}\sin\varphi\cdot g\,ds\sin\varphi = 0$$

Rozwiązanie powyższego równania – wielkość $\sigma_{r_3} = \dfrac{P}{\pi R g}$ (stała)



Na linii działania sił ($\varphi=0$) rozkład naprężeń w poszczególnych stanach:

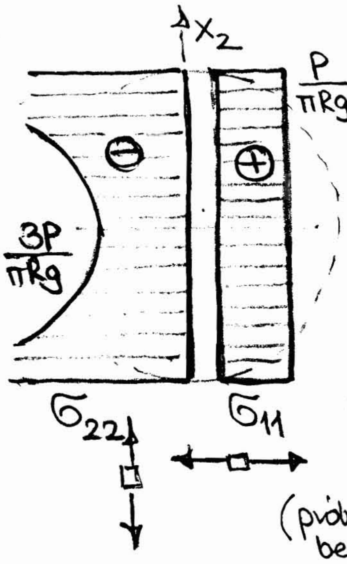
a) $\sigma_{11}=0$; $\sigma_{22} = -\dfrac{2P}{\pi g(R-x_2)}$; $\sigma_{12}=0$

b) $\sigma_{11}=0$; $\sigma_{22} = -\dfrac{2P}{\pi g(R+x_2)}$; $\sigma_{12}=0$

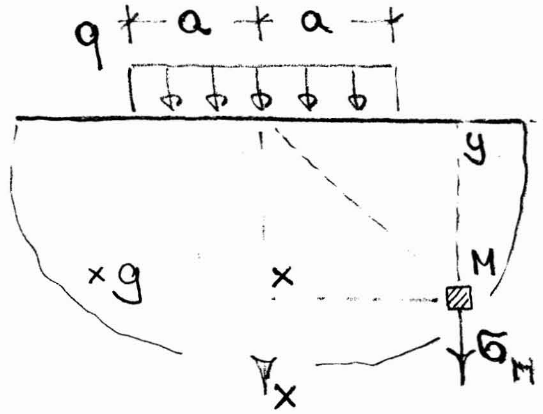
c) $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\dfrac{P}{\pi R g}$; $\sigma_{12}=0$

Łącznie: $\sigma_1 = \sigma_{11} = \dfrac{P}{\pi R g}$

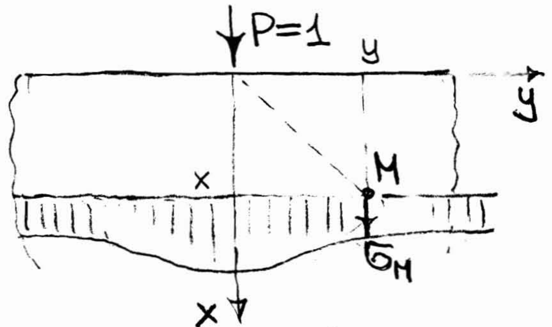
$$\sigma_2 = \sigma_{22} = \frac{P}{\pi R g}\left(1 - \frac{2R}{R-x_2} - \frac{2R}{R+x_2}\right)$$

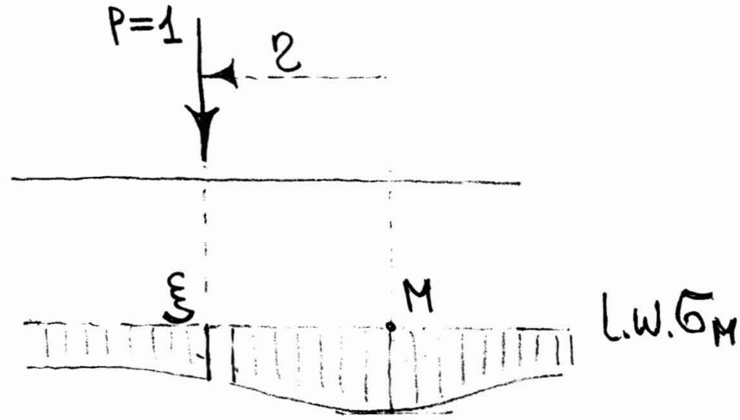


Wnioski:
1) $x_2 \to \pm R$, wtedy $\sigma_{22} \to -\infty$ (obciążenie skupione)
2) rozkład naprężeń rozciągających σ_{11} wzdłuż średnicy równomierny (próby laboratoryjne – wytrzymałość betonu na rozciąganie)



* obliczyć naprężenie σ_M w tarczy - półpłaszczyźnie z obciążeniem odcinkowym (przyjęto uproszczone oznaczenia osi)

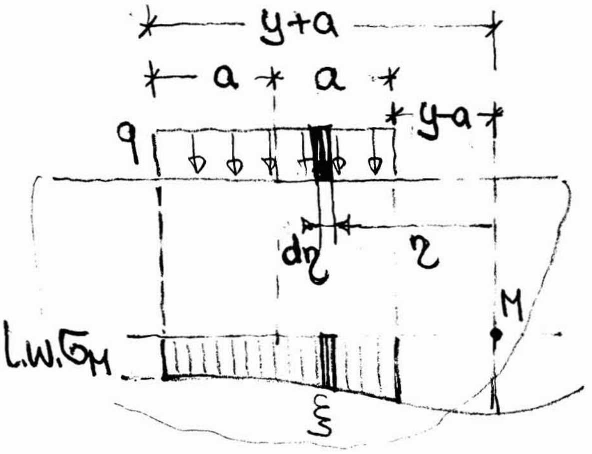




Naprężenia w punkcie M(x,y) wywołane siłą P=1 działającą w początku układu $\sigma_M = -\dfrac{2}{\pi g}\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$

Otrzymany obok wykres traktować można jak linię wpływu naprężeń σ_M — wartość ξ równa jest naprężeniom w p. M wywołanym siłą P=1 przyłożoną w punkcie oddalonym od punktu M o wielkość η.

$$\xi = \sigma_M(\eta) = -\frac{2}{\pi g}\cdot\frac{x^3}{(x^2+\eta^2)^2}$$



Elementarnemu odcinkowi $d\eta$ odpowiada siła $dP = q\,d\eta$, naprężenia $d\sigma_M$ wywołane tą siłą wynoszą

$$d\sigma_M = dP\cdot\xi = -\frac{2q}{\pi g}\cdot\frac{x^3}{(x^2+\eta^2)^2}\,d\eta$$

Sumaryczne naprężenia wywołane obc. ciągłym: $\sigma_M = \displaystyle\int_{y-a}^{y+a} d\sigma_M = -\frac{2q}{\pi g}\int_{y-a}^{y+a}\frac{x^3}{(x^2+\eta^2)^2}\,d\eta$

W powyższym wyrażeniu zmienną podcałkową jest η; x jest parametrem

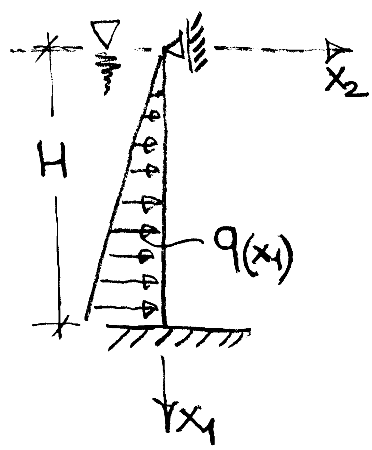
Korzystając ze wzoru rachunku całkowego: $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+b^2)^2} = \frac{t}{2b^2(t^2+b^2)} + \frac{1}{2b^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{b}$

otrzymujemy $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x^2+\eta^2)^2}\,d\eta = \frac{\eta x}{2(x^2+\eta^2)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta}{x}$

stąd $$\sigma_M = -\frac{2q}{\pi g}\left[\frac{\eta x}{2(x^2+\eta^2)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta}{x}\right]\Bigg|_{y-a}^{y+a} =$$

$$= -\frac{q}{\pi g}\left[\frac{x(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{x(y-a)}{x^2+(y-a)^2} + \mathrm{arctg}\,\frac{y+a}{x} - \mathrm{arctg}\,\frac{y-a}{x}\right]$$

* Długa ściana zbiornika stalowego, napełnionego cieczą o ciężarze objętościowym γ jest przegubowo podparta u góry i zamocowana u dołu w sztywnym dnie. Obliczyć największe przemieszczenie poziome ściany.



Dane: $\gamma = 10\,\frac{kN}{m^3}$; $H = 1{,}2\,m$; $h = 0{,}012\,m$

$E = 2{,}1\cdot 10^5\,MPa$; $\nu = 0{,}3$

Schemat statyczny – pasmo płytowe, wg rys.

Zmienne obciążenie parciem cieczy $q(x_1) = \gamma x_1 \left[\frac{kN}{m^2}\right]$

Równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją ugięcia: $\frac{d^4w}{dx_1^4} = \frac{\gamma}{D}x_1$

Rozwiązanie:

$$\frac{d^3w}{dx_1^3} = \frac{\gamma}{D}\frac{x_1^2}{2} + A$$

$$\frac{d^2w}{dx_1^2} = \frac{\gamma}{D}\frac{x_1^3}{6} + Ax_1 + B$$

$$\frac{dw}{dx_1} = \frac{\gamma}{D}\frac{x_1^4}{24} + A\frac{x_1^2}{2} + Bx_1 + C$$

$$w = \frac{\gamma}{D}\frac{x_1^5}{120} + A\frac{x_1^3}{6} + B\frac{x_1^2}{2} + Cx_1 + E$$

Warunki brzegowe:
1) $w(0) = 0$
2) $M_{11}(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2w}{dx_1^2}\right|_{(0)} = 0$
3) $w(H) = 0$
4) $\left.\frac{dw}{dx_1}\right|_{(H)} = 0$

Wartości stałych: $A = -\frac{\gamma H^2}{10D}$; $B = 0$; $C = \frac{\gamma H^4}{120D}$; $E = 0$

stąd rozwiązanie szczególne:

$$w(x_1) = \frac{\gamma}{120D}\left(x_1^5 - 2x_1^3H^2 + x_1H^4\right)$$

dodatkowo $$\frac{dw}{dx_1} = \frac{\gamma}{120D}\left(5x_1^4 - 6x_1^2H^2 + H^4\right)$$

Największe wychylenie poziome wystąpi w przekroju, w którym $\frac{dw}{dx_1} = 0$

Współrzędna ta wynosi $x_1 = 0{,}447\,H$ (rozwiązanie równania dwukwadratowego)

Stąd $$w_{max} = \frac{\gamma H^5}{120D}\left(0{,}447^5 - 2\cdot 0{,}447^3 + 0{,}447\right) =$$

$$= \frac{10\cdot 1{,}2^5}{120}\cdot\frac{12(1-0{,}3^2)}{2{,}1\cdot 10^8\cdot 0{,}012^3}\cdot 0{,}286 = 0{,}0018\,m = 0{,}18\,cm$$