

TSiP - ćwiczenie 13/1

1 ■ Określić zapas bezpieczeństwa wg hipotez Treski i H-M-H

w odniesieniu do podanego stanu naprężenia.

Próba jednoosiowego rozciągania/ściskania materiału

wykorzystuje naprężenie graniczne $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$.

Przyjąć w stanie złożonym równomierny wzrost wszystkich naprężeń

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 35 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Hipoteza Treski: stan wyjściowy - obliczenie naprężeń głównych:

$$\sigma_{1,2} = \frac{35-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35+5}{2}\right)^2 + 15^2} = 15 \pm 25 = \begin{cases} 40 \text{ MPa} = \sigma_1 \\ -10 \text{ MPa} = \sigma_2 \end{cases}; \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 35 \text{ MPa} < \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 40 \text{ MPa} - \text{stan wyjściowy jest bezpieczny}$$

stan aktualny - wszystkie składowe naprężenia z mnożnikiem z
(bezwymiarowym, dodatnim) $\rightarrow \sigma_1 = 40z; \sigma_2 = -10z; \sigma_3 = -30z$

$$\tau_{\max} = 35z [\text{MPa}]$$

$$\underline{\sigma} = z \begin{bmatrix} 35 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

stan graniczny: $\tau_{\max} = \tau_0 \Rightarrow 35z = 40 \Rightarrow z_T = \frac{8}{7} = 1,143$

Hipoteza H-M-H: kryterium (przekształcone wyrażenie energii):

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)] \leq 2\sigma_0^2$$

stan wyjściowy: $L = [40^2 + 25^2 + 65^2 + 6 \cdot 15^2] = 7800 \text{ MPa}^2$; $P = 2 \cdot 80^2 = 12800 \text{ MPa}^2$

$L < P \rightarrow$ stan wyjściowy jest bezpieczny

stan aktualny: $\underline{\sigma} = z \begin{bmatrix} 35 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$, $L = 7800z^2 [\text{MPa}^2]$
 $P = 12800 \text{ MPa}^2$

stan graniczny: $L = P \Rightarrow 7800z^2 = 12800 \Rightarrow z_H = 1,2810$

Forma równoważna: $\sigma_{\text{zast}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \dots]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 7800} = 62,45 \text{ MPa}$

w stanie wyjściowym kryterium $\sigma_{\text{zast}} < \sigma_0$ spełnione

stan aktualny: $\sigma_{\text{zast}} = z \cdot 62,45 [\text{MPa}]$

stan graniczny: $\sigma_{\text{zast}} = \sigma_0 \Rightarrow z \cdot 62,45 = 80 \Rightarrow z_H = 1,2810$

Wyrażenie po lewej stronie wzorku H-M-H jest niezmiennikiem -
- zachowuje się wartość w układzie osi głównych

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

stan wyjściowy:

$$L = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 50^2 + 20^2 + 70^2 = 7800 \text{ MPa}^2$$

także $\sigma_{\text{zast}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 7800} = 62,45 \text{ MPa}$

TSiP - ĆWICZENIA 13/2

- 2 ■ Rozwiązać poprzednie zadanie przyjmując wzrost jedynie składowej σ_{33}

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 35 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -30z \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Stan wyjściowy jest bezpieczny wg obu hipotez \rightarrow zapas $z > 1$

Stan aktualny: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 35 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -30z \end{bmatrix} [\text{MPa}]$

Hipoteza Treski: $\sigma_1 = 40$; $\sigma_2 = -10$; $\sigma_3 = -30z$ [MPa]

$$\sigma_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{40 + 30z}{2} = (20 + 15z) [\text{MPa}] ; \sigma_0 = \frac{\sigma_2}{2} = 40 \text{ MPa}$$

stan graniczny: $\sigma_{\max} = \sigma_0 \Rightarrow \underline{z_T = 1,333}$

Hipoteza H-M-H:

$$L = 40^2 + (35 + 30z)^2 + (-5 + 30z)^2 + 6 \cdot 15^2 = 1800z^2 + 1800z + 4200 [\text{MPa}^2]$$

$$P = 12800 \text{ MPa}^2$$

$$L = P \Rightarrow 1800z^2 + 1800z - 8600 = 0$$

$$z = -2,7422 \quad \vee \quad z = 1,7423$$

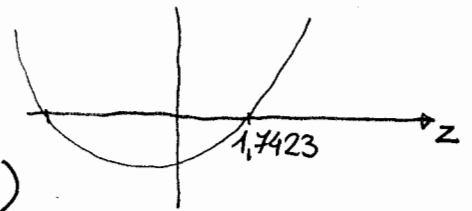
($L < P$, obszar bezpieczny) $\Rightarrow z \in (-2,7422; 1,7423)$

ponieważ $z > 0$ jest $\underline{z_H = 1,7423}$

ew. $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -30z \end{bmatrix} [\text{MPa}]$

$$L = (40 + 30z)^2 + (-10 + 30z)^2 + 50^2 = \dots$$

spendzenie samodzielne



- 3 ■ Określić zapas bezpieczeństwa

wg hipotez: Treski i H-M-H

przy równomiernym wzroście wszystkich naprężeń

samodzielnie - przy tablicy + w domu

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 3 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

$$\sigma_0 = 25 \text{ MPa}$$

- 4 ■ Należy określić obszary bezpieczne w PSN

wg hipotez: Treski i H-M-H przy $\sigma_0 = 20 \text{ MPa}$

samodzielnie -
przy tablicy + w domu

Oceń, czy następujące stany są bezpieczne wg obu hipotez:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}] ; \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

TSiP - ćwiczenie 13/3

■ Określić obszar bezpieczny wg hipotez: Treski i HMH

odnośnie stanu wyjściowego: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 10 \text{ MPa}$;

pozostałe składowe zerowe. Dane są naprężenia graniczne

(z próby jednoosiowej) materiału: $\sigma_0 \equiv R_0 = 30 \text{ MPa}$.

stan wyjściowy: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$.

Sprawdzenie wg hipotezy Treski wymaga obliczenia naprężeń głównych, jest to stan przestrzenny - wymagane jest obliczenie wartości własnych, pierwiastków równania charakterystycznego

$$\sigma^3 - I_{\sigma} \sigma^2 + II_{\sigma} \sigma - III_{\sigma} = 0 \quad \text{współczynniki - inwarianty stanu naprężenia}$$

$$I_{\sigma} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

$$II_{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -200$$

$$III_{\sigma} = 0 \quad \rightarrow \text{równanie: } \sigma^3 - 200\sigma = 0$$

$$\sigma(\sigma - \sqrt{200})(\sigma + \sqrt{200}) = 0$$

$$\sigma_1 = -\sqrt{200} = -14,142 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sqrt{200} = 14,142 \text{ MPa}$$

sprawdzenie: wyznaczniki macierzy $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_i \underline{\underline{I}})$, $i=1,2,3$ zerowe:

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{200} & 10 & 0 \\ 10 & \sqrt{200} & 10 \\ 0 & 10 & \sqrt{200} \end{bmatrix} = 200\sqrt{200} - 100\sqrt{200} - 100\sqrt{200} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\sqrt{200} & 10 & 0 \\ 10 & -\sqrt{200} & 10 \\ 0 & 10 & -\sqrt{200} \end{bmatrix} = -200\sqrt{200} + 100\sqrt{200} + 100\sqrt{200} = 0$$

trzeba: wyjście

Hipoteza Treski: $\sigma_{\max} = \frac{14,142 + 14,142}{2} = 14,142 \text{ MPa}, \quad \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 15 \text{ MPa}$

wzrostek graniczny: $\sigma_{\max} \cdot z_T = \tau_0 \Rightarrow 14,142 z_T = 15, \quad z_T = 1,061$

Hipoteza H-M-H: stan wyjściowy: $L = 6(100 + 100) = 1200 \text{ MPa}^2$

$$L \cdot z_{HMH}^2 = P \Rightarrow 1200 z_{HMH}^2 = 1800 \quad P = 2 \cdot 30^2 = 1800 \text{ MPa}^2$$

$$z_{HMH} = 1,225 > z_T$$

chwytanie: sprawdzić wzrostek H-M-H w układzie naprężeń głównych