Wykłady opracowano na podstawie książek:

Antoni Biegus
Probabilistyczna analiza konstrukcji

PWN 1999

Szczepan Woliński, Krystyna Wróbel
Niezawodność konstrukcji budowlanych

Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2001

1. Wprowadzenie

Analiza deterministyczna właściwości obiektu, konstrukcji, elementu polega na analizie jednego obiektu, konstrukcji lub elementu.
Na jej podstawie nie ma podstaw do wnioskowania o innych obiektach, konstrukcjach czy elementach.

Analiza probabilistyczna właściwości konstrukcji zajmuje się metodami wnioskowania o całej zbiorowości (populacji) na podstawie statystycznych badań cech pewnej części populacji (próby, próbki) obiektów realizowanych według takich samych projektów, z takich samych materiałów, spełniających tę samą funkcję·

W projektowaniu konstrukcji budowlanych ma się do czynienia z podejściem probabilistycznym, polegającym na przewidywaniu prawdopodobieństwa *a priori* - na podstawie znajomości mechaniki budowli, parametrów losowych właściwości materiałów i obciążeń.

Probabilistyczna analiza konstrukcji dotyczy prognozy właściwości, natomiast statystyczna analiza konstrukcji dotyczy zbadanych parametrów obiektów budowlanych.

Statystyka matematyczna jest podstawą metod wnioskowania o właściwościach wszystkich obiektów populacji ogólnej na podstawie znajomości poznanych właściwości obiektów należących do zbioru próby.

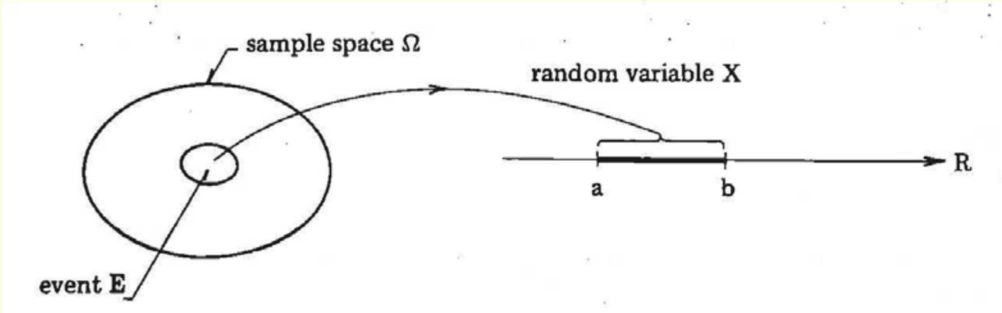
1.1 Dyskretne zmienne losowe

Wyodrębniona do badań część populacji ogólnej, nazwana **próbą**, powinna przede wszystkim być reprezentatywna – należy pobierać ją z populacji generalnej w sposób **losowy**.

Z badań eksperymentalnych cech jednostek wchodzących w skład próby otrzymuje się wielkości - **zmienne losowe** $x(\omega)$, wyrażające wartość badanej cechy.

Zmienna losowa jest to funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych, przyporządkowująca tym zdarzeniom wartości liczb rzeczywistych

$$x : \Omega \to R$$



Odwzorowanie przestrzeni zdarzeń elementarnych w zmienne losowe

Przykład (Biegus *Probabilistyczna analiza konstrukcji* 1999)
Statystyczne badanie właściwości granicy plastyczności stali
W statycznej próbie rozciągania *n* (35 sztuk) próbek stalowych otrzymano zmienne losowe granicy plastyczności stali f_{yi}, które zakwalifikowano do przedziałów klasowych (klas), o wartościach od x_i do x_{i+1} (przedziały klasowe o wartości 5 MPa).

Tablica 1.1. Wyniki badań granicy plastyczności stali

n_i [szt.]	Granica plastyczności stali f_y [MPa]					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	290–295	295–300	300–305	305–310	310–315	315–320
12			303,2			
11			304,9			
10			303,5			
9			304,1	308,8		
8			302,5	306,9		
7			301,1	307,3		
6		298,8	304,1	309,2		
5		295,7	302,7	309,0	313,9	
4		297,9	304,2	307,4	314,4	
3		299,0	303,3	309,8	313,4	
2	294,2	296,6	303,9	308,5	311,8	
1	292,8	298,3	302,0	306,6	312,9	318,7

Zmienne losowe x_i w postaci dyskretnej, których jest m, uszeregowano według rosnących wartości.

$$x_1, x_2, \dots, x_m \tag{1}$$

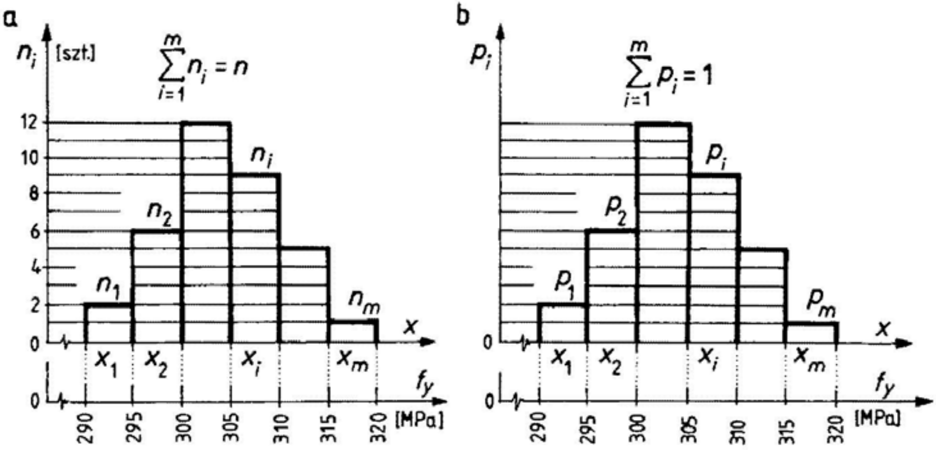
Liczbę pomiarów otrzymanych w badaniach zdarzeń o wartości x_i oznaczono przez

$$n_1, n_2, \dots, n_m \tag{2}$$

Sumę liczebności badanej próby n opisuje więc wzór

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{3}$$

Rozkład liczebności zbioru n_i według tabl. 1.1, przedstawiony na rys.1.1 nazywa się histogramem.



Rys. 1.1. Wyniki badań statystycznych granicy plastyczności stali: a — histogram szeregu rozdzielczego, b — rozkład prawdopodobieństw

Wniosek:
Dyskretne wartości, uzyskane eksperymentalnie, umożliwiają scharakteryzowanie badanej właściwości losowej w postaci parametru próbki (statystyki) jako jednoznacznej funkcji wyników badania.

Parametr próbki jako funkcja zmiennych losowych jest również zmienną losową.

Parametrami próbki są m.in.: wartość średnia w próbce, wariancja w próbce, odchylenie standardowe i inne momenty.

Moment w próbce rzędu *k* względem stałej c określa wzór

$$M_k(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^k \qquad (4)$$

gdzie:
n – liczebność próbki,
x_i – *i*-ty wynik badania próbki (*i*-ta obserwacja).

Wartość średnia w próbce jest momentem zerowym (dla *c* = 0) rzędu pierwszego w próbce i określa przeciętną wielkość badanej zmiennej losowej *x*.

Wartość średnią *x* zmiennej losowej oblicza się ze wzoru:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(n_i x_i\right) \tag{5}$$

Wartość średnią $\overline{x}$ spełnia tę samą rolę, jaką spełnia środek masy dla układu mas skupionych lub środek ciężkości przekroju.

Moment centralny w próbce (M_k) rzędu *k* jest obliczony względem stałej c równej wartości średniej $\overline{x}$ w próbce.

Wariancja w próbce s^2 jest momentem centralnym rzędu drugiego w próbce:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left[n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]$$

Odchylenie standardowe jest parametrem opisującym charakterystykę rozproszenia, który informuje o tym „jak daleko" od punktu odpowiadającego przyjętej charakterystyce położenia (np. wartości średniej $\overline{x}$) sięgają jeszcze punkty odpowiadające jednostkom próby.

Odchylenie standardowe wyznacza się je ze wzoru

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left[n_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right]} \qquad (6)$$

W realizacji rozwiązań technicznych zazwyczaj dąży się, aby rozrzut badanej cechy był jak najmniejszy, co wyraża się małym odchyleniem standardowym.

Duże odchylenie standardowe świadczy o niejednorodności badanej cechy.

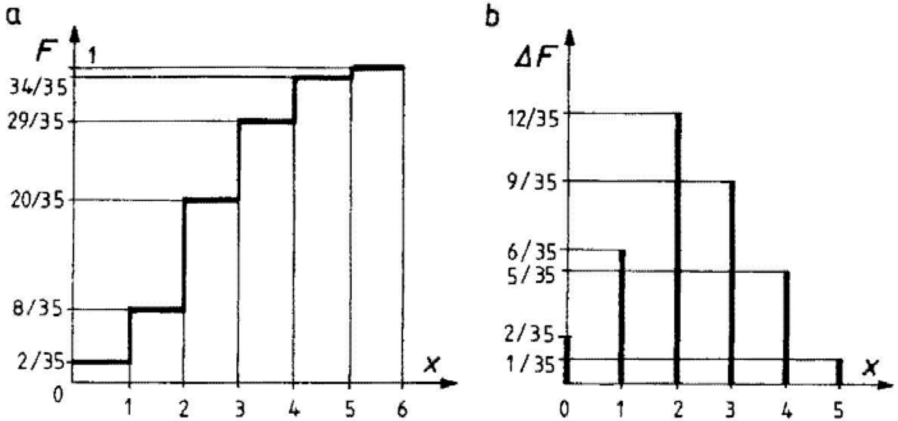
W celu zobiektywizowania miary rozrzutu obserwacji w próbce oblicza się **współczynnik zmienności** v_s badanej cechy:

$$v_s = \frac{s_x}{\overline{x}} \tag{7}$$

Dla zamieszczonych w tabl. 1.1 wyników pomiarów granicy plastyczności stali parametry statystyczne wynoszą:
$\overline{x}$ = 304,49 MPa, s_x = 5,63 MPa.

Dystrybuanta empiryczna *F(x)* jest funkcją, która przyporządkowuje każdej wartości (klasie) badanej właściwości sumę częstości względnych odpowiadających wszystkim wartościom właściwości nie większych od tej wartości (górnej granicy klasy).

$$F_n\left(x\right)=\begin{cases} 0 \quad dla \quad x < x_1 \\ \dfrac{i}{n} \quad dla\, x_i < x < x_{i+1} \\ 1 \quad dla \quad x_n < x \end{cases} \tag{8}$$

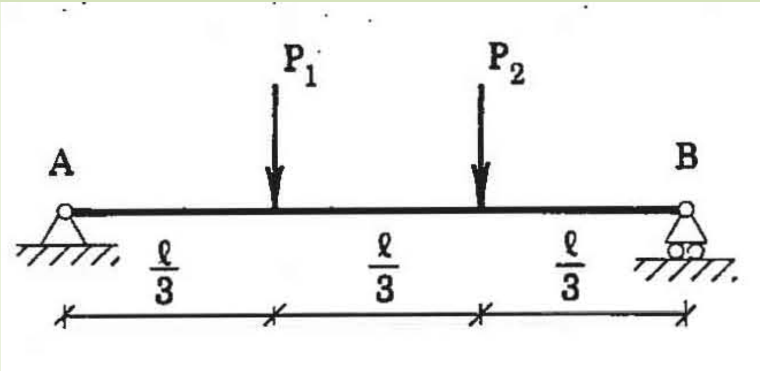


Rys. 1.2. Dystrybuanta empiryczna (a) oraz przyrosty dystrybuanty empirycznej (b)

Suma długości wszystkich odcinków reprezentujących skoki dystrybuanty (rys. 1.2b) równa się jedności.

Przykład

Rozważmy belkę



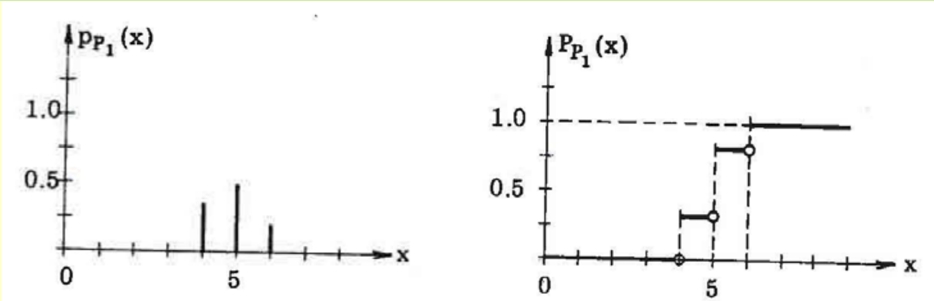
Wartości sił P_1 i P_2 przyjmują wartości 4,5,6 and 3, 4 [kN]

Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$\Omega = \{(4, 3), (4, 4), (5, 3), (5, 4), (6, 3), (6, 4)\}$

Ponadto przyjmujemy: $P\left(P_1 = 4\right) = 0.3$, $P\left(P_1 = 5\right) = 0.5$ oraz $P\left(P_1 = 6\right) = 0.2$.

Gęstość prawdopodobieństwa funkcji p_{P_1} i dystrybuanta P_{P_1} dla siły P_1 przedstawiono na rysunku



Zwróćmy uwagę, że punkty – kółeczka nie należą do dystrybuanty. Dodatkowo można określić modę równą 5.

Wartość oczekiwana (alternatywne oznaczenia)

Zmienna dyskretna: $E\left[X\right] = \sum_{x_i} x_i \, p_X\left(x_i\right)$,

średnia $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\quad \mu_X = \sum_{x_i} x_i \, p_X\left(x_i\right)$, $\quad p_X\left(x_i\right) = \dfrac{1}{n}$

Zmienna ciągła $E\left[X\right]=\sum_{x_i} x_i\, p_X\left(x_i\right)$

Wartość oczekiwana dla siły P_1.

$$E\left[X\right]=4\cdot 0.3+5\cdot 0.5+6\cdot 0.2=4.9$$

Wariancja

$$s_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2, \quad \sigma_X^2=\sum_{x_i}\left(x_i-\mu_X\right)^2 p_X\left(x_i\right), \quad p_X\left(x_i\right)=\frac{1}{n}$$

$$E\left[X^2\right]=16\cdot 0.3+25\cdot 0.5+36\cdot 0.2=24.5.$$

Mozemy wykazać, że $\sigma_X^2=E\left[X^2\right]-\mu_X^2$

$$\sigma_X^2=24.5-4.9^2=0,49$$

Odchylenie standardowe

$$\sigma_X=\sqrt{0.49}=0.7$$

Współczynnik zmienności $V_X=\dfrac{\sigma_X}{\mu_X}=\dfrac{0.7}{4.9}=0.14$

Na podstawie wykonanych badań statystycznych, np. granicy plastyczności stali, można wnioskować, jaka jest szansa, iż w niezbadanej części populacji wyrobów stalowych wystąpi stal o granicy plastyczności x_i.

Szansę takiego zdarzenia określa się jako prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo p_i zdarzenia ($0 \le p_i \le 1$), iż w kolejnych badaniach otrzyma się pomiar cechy o wartości x_i wynosi

$$p_i = \frac{n_i}{n} \tag{9}$$

Własności prawdopodobieństwa:

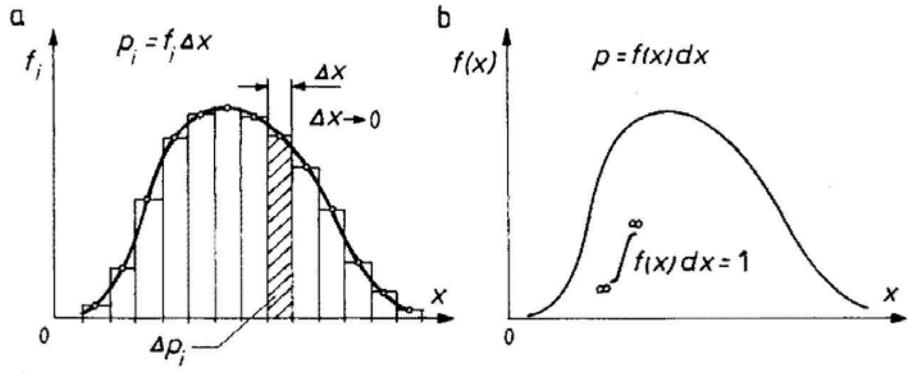
$$0 \le p_X(x) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_X(x) = 1$$

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x_i \le b} p_X(x_i) - \sum_{x_1 \le = a} p_X(x_i)$$

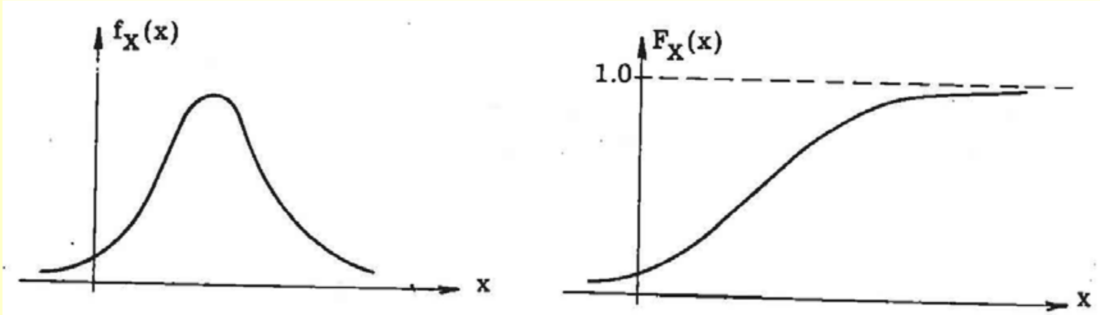
1.2 Ciagłe zmienne losowe

Gdy zmienna losowa *x* jest ciągła, wówczas histogram (rys. 1.3a) zamienia się w **funkcję gęstości prawdopodobieństwa** *f(x)* (rys. 1.3a),

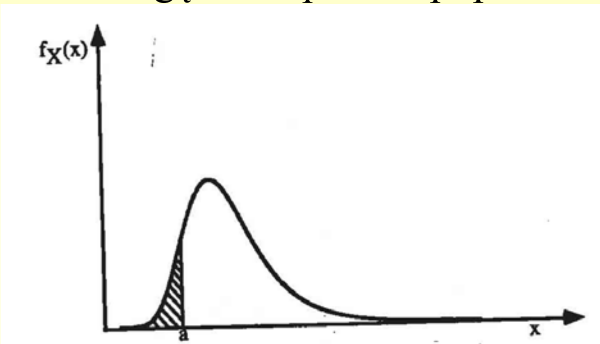


Rys. 1.3. Aproksymacja histogramu (a) oraz ciągła funkcja (b) rozkładu prawdopodobieństwa

Krzywa kumulacyjna (rys. 1.2a) zmienia się w funkcję ciągłą **dystrybuanty** *F(x)*



Rozkład gęstości prawdopopodobieństwa i dystrybuanta



Ilustracja zależności pomiędzy gęstością i dystrybuantą.

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest to funkcja określająca prawdopodobieństwo zdarzenia, polegające na tym, że zmienna losowa przyjmie określoną wartość x_i lub wartość należącą do przedziału $\left(x_1, x_2\right)$.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa *p(x)* zmiennej losowej (gęstość prawdopodobieństwa *f (x)*) dla zmiennej losowej ciągłej wyraża zależność

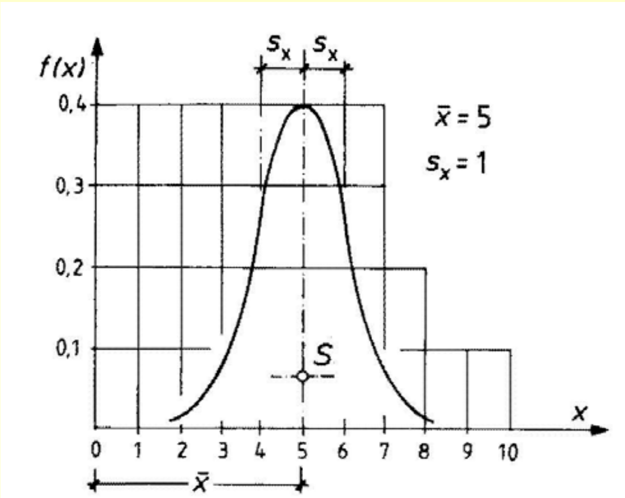
$$p\left(x\right)_i = f\left(x\right)dx = \lim_{dx \to 0} \frac{n_i}{n} \Delta x \tag{10}$$

Jest to prawdopodobieństwo występowania wielkości *x* rozważanego przedziału w granicach Δx.

Dystrybuanta jest to funkcja *F(x)* określająca prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, że zmienna losowa przyjmie wartość mniejszą od ustalonej wartości rzeczywistej x_i.

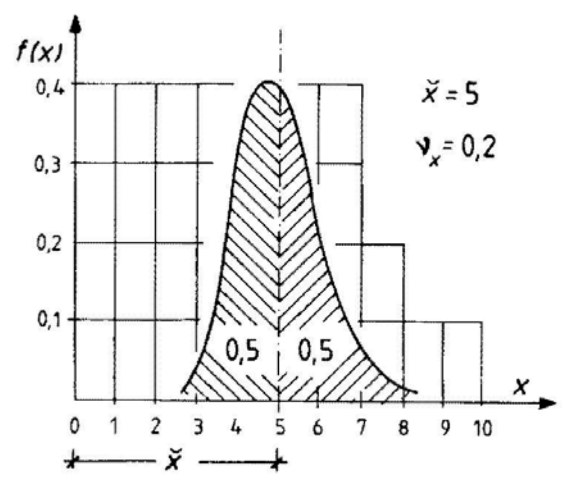
Jeśli funkcja gęstości *f(x)* jest ciągła w punkcie *x*, to jest ona w tym punkcie pochodną dystrybuanty *F(x)*.

Przykład: na rys. 1.4 pokazano gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (Gaussa) – rozkład symetryczny (do opisu wystarczy wartość oczekiwana i odchylenie standardowe).



Rys. 1.4. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego

Rozkład logarytmo-normalny - rozkład niesymetryczny, który charakteryzuje **mediana** $\breve{x}$ oraz **wskaźnik zmienności** v_x.



Rys. 1.5. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu logarytmo-normalnego

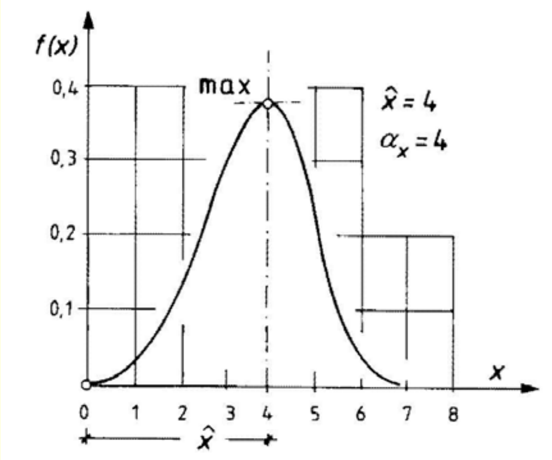
Medianą jest wartość dzieląca wykres *f (x)* na dwie równe co do obszaru powierzchnie i spełniająca równość $F(\breve{x}) = 0{,}5$ (F*(x)* - dystrybuanta).

Moda (wartość modalna, dominanta) zmiennej losowej ciągłej *x* to taka wartość $\breve{x}$ tej zmiennej, której odpowiada największa wartość funkcji gęstości *f (x)*.

Skośność liczymy ze wzoru:

$$E\left[\left(X-\mu_X\right)^3\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu_X\right)^3 f_X\left(x\right)dx$$

Rozkład prawdopodobieństwa Weibulla.



Rys. 1.6. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu ekstremalnego

Parametrami opisującymi ten rozkład jest wartość równa w przybliżeniu wartości modalnej, odpowiadającej maksimum wykresu funkcji gęstości *f(x)* oraz współczynnik α_x charakteryzujący zmienność (rozrzut) zmiennej losowej *x*.
W celu identyfikacji typu rozkładu badanej zmiennej losowej (tj. określenia kształtu funkcji dystrybuanty) korzysta się z **nieparametrycznych testów istotności**.

Polegają one na wstępnym założeniu typu rozkładu i weryfikacji przyjętej krzywej hipotetycznej dla założonego poziomu dokładności opisu badanego zjawiska.

Parametrami probabilistycznymi rozkładów zmiennych losowych są stałe wielkości charakteryzujące funkcję tego rozkładu.

W przypadku rozkładu normalnego zmiennej losowej, pojęciowo wartość oczekiwana m w rozkładzie odpowiada średniej $\overline{x}$,
a odchylenie średnie zmiennej losowej σ odpowiada odchyleniu standardowemu s_x

Parametry te dla ciągłej zmiennej losowej x o funkcji $f(x)$ oblicza się ze wzorów

$$m = \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x dx \tag{11}$$

$$\sigma = s_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \overline{x}) dx} \tag{12}$$

Należy jednak zauważyć, że funkcja rozkładu prawdopodobieństwa *f (x)* nie jest zdeterminowana, gdy dysponuje się tylko parametrami w postaci wartości centralnej i odchylenia charakterystycznego.

Zidentyfikowanie to jest możliwe, gdy dla badanej próbki z populacji można przyjąć rozkład normalny.

Rozkład normalny jest powszechnie stosowany w wielu analizach statystycznych.
Drugą grupę charakterystyk zmiennej losowej (oprócz momentów) stanowią **parametry pozycyjne**.

Wśród nich ważną rolę spełniają **kwantyle zmiennej losowej**.
Liczbę x_p nazywa się **kwantylem *p*-tego rzędu** ($0 < p < 1$) zmiennej losowej x, która spełnia nierówności

$$\Pr\left\{x \le x_p\right\} \ge p, \quad \Pr\left\{x \ge x_p\right\} \ge 1 - p \tag{13}$$

Kwantyl rzędu p jest to taka wartość zmiennej losowej, która nie jest przewyższona z prawdopodobieństwem p.
Mediana jest szczególnym przypadkiem parametru pozycyjnego, zwanego kwantylem rzędu $p = 0{,}5$.
Kwantyle rzędu $k/4$ ($k = 1, 2, 3$) nazywa się **kwartylami**.
Gdy dystrybuanta $F(x)$ jako całka rozkładu $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_p wówczas kwantyl x_p jest pierwiastkiem równania

$$F\left(x_p\right) = p \tag{14}$$